УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
В67

Авторы:
В.Б. Гисин, Финансовый университет при Правительстве РФ,
Е.С. Волкова, Финансовый университет при Правительстве РФ

Рецензенты:
В.А. Иванюк, Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, канд. физ.-мат. наук, доц.,
А.В. Чечкин, Финансовый университет при Правительстве РФ, д-р. физ.-мат. наук, проф.

Волкова, Елена Сергеевна.
В67 Нечеткие множества и мягкие вычисления в экономике и финансах : учебное пособие / Е.С. Волкова, В.Б. Гисин. — Москва : КНОРУС, 2021. — 156 с. — (Бакалавриат).

ISBN 978-5-406-03543-6

Посвящено изучению основ теории нечетких множеств и мягких вычислений и применению методов теории нечетких множеств в экономике и финансах. Рассматриваются нечеткие множества и операции над ними, нечеткие отношения, нечеткие числа, финансовые вычисления с нечеткими величинами, методы принятия оптимальных решений в условиях неопределенности. Теоретический материал сопровождается примерами, упражнениями и заданиями для самостоятельной работы.

Соответствует ФГОС ВО последнего поколения.

Для проведения занятий и организации самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Экономика».

Ключевые слова: теория нечетких множеств; нечеткая арифметика; нечеткие отношения; нечеткое линейное программирование; интервальные вычисления; простейшие финансовые вычисления.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Волкова Елена Сергеевна
Гисин Владимир Борисович

НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И МЯГКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

Изд. № 577646. Формат 60×90/16. Гарнитура «TNR».
Усл. печ. л. 10,0. Уч.-изд. л. 7,57.

ООО «Издательство «КноРус».
117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.
Тел.: +7 (495) 741-46-28.
E-mail: welcome@knorus.ru www.knorus.ru

Отпечатано в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.
Тел.: +7 (495) 221-89-80.

ISBN 978-5-406-03543-6

Оглавление


БАКАЛАВРИАТ
НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА
И МЯГКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ
В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
Е.С. ВОЛКОВА
В.Б. ГИСИН
BOOK.ru
КНОРУС

основываются многочисленные применения теории нечетких множеств. Для иллюстрации мы старались выбирать примеры, связанные с экономикой и финансами. Аппарат теории нечетких множеств достаточно прост, в сравнении с математическим аппаратом, используемым в других разделах прикладной математики. Несмотря на простоту, методы теории нечетких множеств и мягкие вычисления хорошо зарекомендовали себя при решении практических задач.

Книга содержит восемь глав. Главы разбиты на параграфы. Нумерация теорем, примеров и формул ведется внутри главы. Упражнения приводятся после каждого параграфа.

Среди упражнений немало заданий, связанных с экономическими моделями. Выполнение этих заданий, несмотря на их учебный характер, дает представление о реальных приложениях. Безусловно, как и при изучении любой математической дисциплины, приходится осваивать соответствующий математический аппарат. На достижение этой цели направлены содержащиеся в пособии упражнения технического характера. Свидетельством действительно глубоко овладения идеями и методами изучаемой теории может служить решение кейсов: тех, которые предложены в пособии и тех, которые возникают в ходе самостоятельной исследовательской работы.

Предполагается, что материал пособия будет изучаться последовательно. Первые две главы содержат базовые понятия. Их содержание необходимо для понимания остальных глав. Зависимости между остальными главами не столь сильны. После изучения первых двух глав можно перейти к изучению наиболее интересных вопросов, обращаясь при необходимости к предыдущему тексту.

В списке литературы приведены источники, ставшие в определенном смысле классическими, и современные книги по применению теории нечетких множеств в экономике и финансах. Как правило, во всех этих книгах имеется обширная библиография.

1. Основы теории нечетких множеств

1.1. Понятие нечеткого множества

Предположим, что группе экспертов предложено указать наиболее перспективные (скажем, с точки зрения инновационного потенциала) отрасли экономики из числа следующих: промышленность (П), сельское хозяйство (СХ), строительство (С), торговля (Т), транспорт и связь (ТС). Эксперт может указать одну или несколько отраслей. Результаты экспертизы сведены в таблицу 1, в которой вторая строчка (μ) – доля экспертов указавших соответствующую отрасль. Полученные значения можно считать мерой истинности утверждений вида «*x* – перспективная отрасль». Например, истинность утверждения «С – перспективная отрасль» равна 0,5, что можно интерпретировать, как неопределенность истинностной оценки.

Таблица 1.

Перспективная отрасль

отрасль	П	СХ	С	Т	ТС
μ	0,6	0,4	0,5	0,2	0,7

Будем использовать угловые скобки, чтобы обозначить значение истинности утверждения: $\langle \text{С – перспективная отрасль} \rangle = 0{,}5$.

Можно взглянуть на полученные результаты и несколько поиному, считая, что свойство быть перспективной выделяет нечеткое подмножество перспективных отраслей $O_{\text{перс}}$. Тогда естественно считать, что $\langle С \in O_{\text{перс}} \rangle = 0{,}5$ и аналогично в других случаях.

Предположим далее, что подобным же образом получены экспертные мнения относительно эффективности (в некотором смысле) перечисленных отраслей (таблица 2).

Таблица 2.

Эффективная отрасль

отрасль	П	СХ	С	Т	ТС
μ	0,6	0,7	0,5	0,9	0,7

Будем считать, что эта таблица выделяет подмножество эффективных отраслей $O_{\text{эфф}}$. Возникает вопрос, как на основе полученных результатов определить отрасль, которая одновременно перспективна и эффективна, то есть, что собой представляет пересечение множеств $О_{перс} \cap О_{эфф}$.

Одна из основных задач теории нечетких множеств состоит в том, чтобы разрабатывать процедуры, позволяющие получать ответы на подобные вопросы.

Упражнения

1. Постройте путем опроса экспертов таблицу, подобную таблице 1, для описания нечеткого множества «хорошая аттестационная оценка».
2. Опишите нечеткое множество «моя наиболее вероятная аттестационная оценка».

Задача

Опишите нечеткие множества «станции метро, расположенные на севере Москвы» и «станции метро, расположенные на юге Москвы». Оцените истинность утверждения «на севере Москвы станций метро больше, чем на юге».

1.2. Функция принадлежности

Пусть X – некоторое множество. *Нечеткое подмножество* A множества X задается функцией $\mu_A: X \to [0, 1]$, называемой *функцией принадлежности* множества A.

Множество X называют базовым. Значение $\mu_A(x)$ трактуется как оценка истинности утверждения $x \in A$. Обычное (четкое) подмножество множества X может быть задано своей характеристической функцией со значениями в двухэлементном множестве $\{0; 1\}$. Если функция μ_A принимает только значения 0 или 1, нечеткое подмножество A естественным образом отождествляется с обычным подмножеством множества X: $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) = 1$. Таким образом, понятие нечеткого подмножества является обобщением понятия подмножества, принятого в классической теории множеств.

Для упрощения обозначений мы будем иногда писать $A(x)$ вместо $\mu_A(x)$. Чтобы указать нечеткое подмножество A множества X, используют запись вида $\{\mu_A(x)/x | x \in X\}$ и различные ее версии. Например, $A = \{e^{-|x|}/x | x \in \boldsymbol{R}\}$.

Если множество X конечно, его нечеткое подмножество A может быть задано таблицей значений функции принадлежности или перечислением элементов множества X с указанием значений функции принадлежности. Например, одно и то же нечеткое подмножество A множества $X = \{x, y, z, t\}$ может быть представлено таблицей

Таблица 3.

X	x	y	z	t
μ_A	0,1	1	0,7	0,5

или перечислением элементов:

$$A = \{(x; 0{,}1), (y; 1), (z; 0{,}7), (t; 0{,}5)\}.$$

Используется также следующее обозначение:

$$A = 0{,}1/x + 1/y + 0{,}7/z + 0{,}5/t.$$

Носителем нечеткого подмножества A множества X называется четкое множество $\mathrm{supp}(A)$, состоящее из всех тех элементов множества X, для которых значение функции принадлежности μ_A отлично от нуля:

$$\mathrm{supp}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$

Нечеткое множество A называют пустым, если его носитель – пустое множество.

Ядром нечеткого подмножества A множества X называется четкое множество $\mathrm{cor}(A)$ всех тех элементов множества X, для которых значение функции принадлежности μ_A равно 1:

$$\mathrm{cor}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\}.$$

Нет смысла (и мы не будем) различать нечеткие подмножества различных четких множеств, если носители этих нечетких подмножеств совпадают, и на носителях совпадают функции принадлежности. Более точно, если A – нечеткое подмножество множества X, а B – нечеткое подмножество множества Y, будем считать, что $A = B$, если $\mathrm{supp}(A) = \mathrm{supp}(B)$ и $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для любого $x \in \mathrm{supp}(A)$.

Например, нечеткое подмножество A множества X, заданное таблицей 3, совпадает с нечетким подмножеством B множества Y, заданным таблицей 4.

Таблица 4.

Y	x	y	Z	t	w
μ_B	0,1	1	0,7	0,5	0

С учетом предыдущего замечания будем говорить просто о *нечетких множествах*, опуская указание на соответствующее базовое множество. Функцию принадлежности нечеткого множества A будем считать заданной на некотором четком множестве, содержащем $\mathrm{supp}(A)$.

Пусть A – нечеткое множество. Множеством *уровня* α, $\alpha \in (0,1]$, называется (четкое) множество A^{α}, определяемое равенством

$$A^{\alpha} = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Множество уровня α называют также *α-уровнем* или *α-срезом* нечеткого множества A. Множество уровня 0 обычно определяется особым образом, в зависимости от контекста. В любом случае – это множество, содержащее носитель множества A и некоторые элементы, для которых функция принадлежности равна нулю. Таким образом, всегда можно считать, что нечеткое множество A является нечетким подмножеством множества A^0, своего множества уровня 0.

Если в определении α-среза заменить нестрогое неравенство строгим, получается определение строго α-уровня (α-среза):

$$A^{\alpha+} = \{x | \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Множество уровня 1,

$$A^1 = \{x | \mu_A(x) = 1\},$$

совпадает с ядром $\mathrm{cor}(A)$ нечеткого множества A.

Нечеткое множество A называется *нормальным*, если

$$\sup\{\mu_A(x) | x \in \mathrm{supp}(A)\} = 1.$$

Нормальность нечеткого множества с конечным носителем равносильна тому, что его ядро не пусто.

В дальнейшем важную роль будут играть нечеткие подмножества множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и пространств $\boldsymbol{R}^n$. Если A –

Например, нечеткое подмножество A множества X, заданное таблицей 3, совпадает с нечетким подмножеством B множества Y, заданным таблицей 4.

Таблица 4.

Y	x	y	Z	t	w
μ_B	0,1	1	0,7	0,5	0

С учетом предыдущего замечания будем говорить просто о *нечетких множествах*, опуская указание на соответствующее базовое множество. Функцию принадлежности нечеткого множества A будем считать заданной на некотором четком множестве, содержащем $\mathrm{supp}(A)$.

Пусть A – нечеткое множество. Множеством *уровня* α, $\alpha \in (0,1]$, называется (четкое) множество A^{α}, определяемое равенством

$$A^{\alpha} = \{x|\mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Множество уровня α называют также *α-уровнем* или *α-срезом* нечеткого множества A. Множество уровня 0 обычно определяется особым образом, в зависимости от контекста. В любом случае – это множество, содержащее носитель множества A и некоторые элементы, для которых функция принадлежности равна нулю. Таким образом, всегда можно считать, что нечеткое множество A является нечетким подмножеством множества A^0, своего множества уровня 0.

Если в определении α-среза заменить нестрогое неравенство строгим, получается определение строго α-уровня (α-среза):

$$A^{\alpha+} = \{x|\mu_A(x) > \alpha\}.$$

Множество уровня 1,

$$A^1 = \{x|\mu_A(x) = 1\},$$

совпадает с ядром $\mathrm{cor}(A)$ нечеткого множества A.

Нечеткое множество A называется *нормальным*, если

$$\sup\{\mu_A(x)|x \in \mathrm{supp}(A)\} = 1.$$

Нормальность нечеткого множества с конечным носителем равносильна тому, что его ядро не пусто.

В дальнейшем важную роль будут играть нечеткие подмножества множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и пространств $\boldsymbol{R}^n$. Если A –

Задача

Найти условия, при которых нечеткое подмножество множества действительных чисел R с непрерывной функций принадлежности выпукло.

1.3. Стандартные операции с нечеткими множествами

Пусть A и B – нечеткие множества. Для удобства будем считать, что они являются нечеткими подмножествами некоторого множества X (можно считать, например, что $X = \mathrm{supp}(A) \cup \mathrm{supp}(B)$).

Множество A является *подмножеством* множества B, если $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ для всех $x \in X$.

Дополнение $\bar{A}$ нечеткого множества A определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Пересечение $A \cap B$ и *объединение* $A \cup B$ нечетких множеств A и B определяются следующими функциями принадлежности:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right);$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right).$$

Замечание 1. Так определенные операции иногда называют *стандартными*. Возможны и иные определения. Например, наряду со стандартными довольно часто используются пересечения и объединения, задаваемые формулами

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \tag{2}$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x). \tag{3}$$

Стандартные операции дополнения, пересечения и объединения нечетких множеств обладают многими свойствами соответствующих операций над обычными множествами.

Коммутативность:

$$A \cap B = B \cap A; \;\; A \cup B = B \cup A.$$

Ассоциативность:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Дистрибутивность:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Идемпотентность:

$$A \cap A = A; A \cup A = A.$$

Законы поглощения:

$$A \cap (A \cup B) = A; A \cup (A \cap B) = A.$$

Законы нуля и единицы (X – универсальное множество, множества с которыми выполняются операции являются его подмножествами):

$$A \cap X = A; \quad A \cup \emptyset = A;$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cup X = X.$$

Инволютивность дополнения:

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Законы де Моргана:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Замечание 2. Алгебры, для которых выполняются указанные выше тождества, называют алгебрами де Моргана. Таким образом, множество нечетких подмножеств заданного множества относительно стандартных операций объединения, пересечения и дополнения образует алгебру де Моргана.

Тождества

$$A \cap \bar{A} = \emptyset; A \cup \bar{A} = X \tag{4}$$

для стандартных операций над нечеткими множествами, вообще говоря, не выполняются.

Стандартные операции над нечеткими множествами являются обобщением операций над обычными множествами. Например, если A и B – обычные множества, то их пересечение как нечетких множеств совпадает с обычным пересечением.

Упражнения

1. а) Проверить выполнение законов дистрибутивности для стандартных операций пересечения и объединения нечетких множеств. б) Найти условия, при которых выполняются соотношения (4).

2. Проверить выполнение законов дистрибутивности для операций пересечения и объединения, определенных формулами (2) и (3).
3. Доказать, что

$$\text{а) } (A \cap B)^\alpha = A^\alpha \cap B^\alpha; \qquad \text{б) } (A \cup B)^\alpha = A^\alpha \cup B^\alpha$$

для любого $\alpha \in (0,1]$.
4. Привести пример, когда не выполняется соотношение $(\bar{A})^\alpha = \overline{A^\alpha}$.
5. Доказать, что $(\bar{A})^\alpha = \overline{A^{(1-\alpha)+}}$.
6. Будет ли выпуклым: (а) пересечение; (б) объединение двух выпуклых нечетких подмножеств действительной прямой?
7. При каких условиях дополнение выпуклого нечеткого подмножества действительной прямой является выпуклым?
8. Упорядочить по включению нечеткие подмножества множества $[0, +\infty)$, заданные следующими функциями принадлежности:

$$A(x) = e^{-x}, B(x) = e^{-2x}, \ C(x) = e^{-\frac{x}{2}}.$$

9. Пусть A, B, C – нечеткие подмножества, заданные на промежутке $[1{,}10]$ следующими функциями принадлежности:

$$A(x) = \frac{x}{x+2}, \ B(x) = e^{-x}, \ C(x) = \frac{1}{1+10(x-2)^2}.$$

Найти всевозможные пересечения и объединения этих множеств и их дополнений.
10. Вычислить α-сечения для множеств из предыдущего упражнения при $\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}8$.

1.4. Нечеткая логика и принцип обобщения

В классической логике истинность высказывания оценивается с помощью двух значений «истина» и «ложь». Этим значениям истинности принято приписывать числовые значения соответственно 1 и 0. Таким образом, истинность высказываний оценивается в бинарной шкале $I = \{0; 1\}$. В нечеткой логике допускаются промежуточные значения истинности, что в ряде случаев позволяет более адекватно оценивать истинность высказываний. Шкалы, применяемые в нечеткой логике, имеют более сложную структуру, чем бинарная шкала. Наиболее часто в качестве логической шкалы в нечеткой логике применяется интервал $I = [0; 1]$. В п. 1.1 мы уже рассматривали примеры, когда истинность утверждения удобно оценивать числовыми значениями в промежутке от 0 до 1. Пусть, как и раньше, $\langle V \rangle$ обозначает значение истинности утверждения V. Тогда $\langle V \rangle = 0$ означает, что утверждение V ложно, $\langle V \rangle = 1$ – что утверждение V истинно. Полезность использования промежуточных значений можно проиллюстрировать на примере парадокса «куча».

Пример. Пусть P_n – утверждение «n зерен не образуют кучи». Очевидно, $\langle P_0 \rangle = 1$. Утверждение «если P_n, то P_{n+1}» (обозначим его $P_n \to P_{n+1}$) следует считать скорее истинным, чем ложным. В классической логике это будет означать, что $\langle P_n \to P_{n+1} \rangle = 1$. Используя стандартные логические правила и законы, мы неизбежно придем к выводу $\langle P_n \rangle = 1$ для любого n, противоречащему здравому смыслу. В нечеткой логике можно считать, что $\langle P_n \to P_{n+1} \rangle = \gamma$ для некоторого $\gamma < 1$. Используя методы оценки составных утверждений, можно прийти к выводу, что $\langle P_n \rangle$ становится сколь угодно малым с ростом n. Рассмотрим правило заключения. В символической форме оно записывается следующим образом:

$$\frac{A, A \to B}{B}.$$

В нечеткой логике это правило можно интерпретировать, например, так:

$$\langle B \rangle = f(\langle A \rangle, \langle A \to B \rangle),$$

где $f(u, v)$ – подходящая функция. Полагая $f(u, v) = uv$, получаем:

$$\langle P_1 \rangle = \langle P_0 \rangle \cdot \langle P_0 \to P_1 \rangle = \gamma,$$

$$\langle P_2 \rangle = \langle P_1 \rangle \cdot \langle P_1 \to P_2 \rangle = \gamma^2,$$

……………………………

$$\langle P_n \rangle = \langle P_{n-1} \rangle \cdot \langle P_{n-1} \to P_n \rangle = \gamma^n.$$

Приведем определения *стандартных* логических операций на интервале $I = [0; 1]$. *Конъюнкция*, *дизъюнкция* и *отрицание* определяются формулами

$$a \wedge b = \min(a, b), \qquad a \vee b = \max(a, b), \qquad \bar{a} = 1 - a$$

для $a, b \in [0.1]$.

К определению импликации имеются различные подходы даже в случае стандартных операций. Например:

$$a \to_G b = \begin{cases} 1, \text{если } a \le b \\ b, \text{если } a > b \end{cases};$$

$$a \to_L b = \min(1, 1 - a + b).$$

Импликацию $\to_G$ называют импликацией по Гёделю, импликацию $\to_L$ – импликацией по Лукасевичу. Импликация $\to$ удовлетворяет стандартному правилу заключения (modus ponens), $b \ge \min(a, a \to b)$ для любых a и b. Несложно проверить, что импликация по Гёделю удовлетворяет правилу заключения, а импликация по Лукасевичу – нет.

Нечеткий n-местный предикат P задается отображением $\mu_P: X \times \ldots \times X \to [0,1]$. Величина $\mu_P(x_1, \ldots, x_n)$ является значением истинности предиката P на наборе значений переменных $(x_1, \ldots, x_n)$. Используя обозначение $P(x_1, \ldots, x_n)$ для значения истинности, имеем равенство

$$\langle P(x_1, \ldots, x_n) \rangle = \mu_P(x_1, \ldots, x_n).$$

В частности, нечеткое подмножество A множества X задает на X нечеткий предикат $x \in A$ такой, что $\langle x \in A \rangle = \mu_A(x)$. Нечеткое подмножество R декартова произведения $X \times Y$ задает нечеткий двуместный предикат xRy, для которого $\langle xRy \rangle = \mu_R(x, y)$.

Истинность составных предикатов вычисляется в соответствии со следующими формулами:

$$\langle (P \wedge Q)(x_1, \ldots, x_n) \rangle = \langle P(x_1, \ldots, x_n) \rangle \wedge \langle Q(x_1, \ldots, x_n) \rangle;$$

$$\langle (P \vee Q)(x_1, \ldots, x_n) \rangle = \langle P(x_1, \ldots, x_n) \rangle \vee \langle Q(x_1, \ldots, x_n) \rangle;$$

$$\langle \bar{P}(x_1, \ldots, x_n) \rangle = 1 - \langle P(x_1, \ldots, x_n) \rangle;$$

$$\langle \forall x_i P(x_1, \ldots, x_n) \rangle = \inf_{x_i} \langle P(x_1, \ldots, x_n) \rangle;$$

$$\langle \exists x_i P(x_1, \ldots, x_n) \rangle = \sup_{x_i} \langle P(x_1, \ldots, x_n) \rangle.$$

Эти определения согласуются с определениями стандартных операций над нечеткими множествами. Логическое следование $\Rightarrow$ будем интерпретировать следующим образом. Будем считать, что B логически следует из A и писать $A \Rightarrow B$, если $\langle A \rangle \le \langle B \rangle$ для всех допустимых значений переменных. Соответственно для равносильности: $A \Leftrightarrow B$, если $\langle A \rangle = \langle B \rangle$. Этот подход позволяет стандартным образом получать нечеткие аналоги четких понятий, используя их формализованные определения.

Рассмотрим несколько примеров.

$$a \to_G b = \begin{cases} 1, \text{если } a \leq b \\ b, \text{если } a > b \end{cases};$$

$$a \to_L b = \min(1, 1 - a + b).$$

Импликацию $\to_G$ называют импликацией по Гёделю, импликацию $\to_L$ – импликацией по Лукасевичу. Импликация $\to$ удовлетворяет стандартному правилу заключения (modus ponens), $b \geq \min(a, a \to b)$ для любых a и b. Несложно проверить, что импликация по Гёделю удовлетворяет правилу заключения, а импликация по Лукасевичу – нет.

Нечеткий n-местный предикат P задается отображением $\mu_P: X \times \dots \times X \to [0,1]$. Величина $\mu_P(x_1, \dots, x_n)$ является значением истинности предиката P на наборе значений переменных $(x_1, \dots, x_n)$. Используя обозначение $P(x_1, \dots, x_n)$ для значения истинности, имеем равенство

$$\langle P(x_1, \dots, x_n) \rangle = \mu_P(x_1, \dots, x_n).$$

В частности, нечеткое подмножество A множества X задает на X нечеткий предикат $x \in A$ такой, что $\langle x \in A \rangle = \mu_A(x)$. Нечеткое подмножество R декартова произведения $X \times Y$ задает нечеткий двуместный предикат xRy, для которого $\langle xRy \rangle = \mu_R(x, y)$.

Истинность составных предикатов вычисляется в соответствии со следующими формулами:

$$\langle (P \wedge Q)(x_1, \dots, x_n) \rangle = \langle P(x_1, \dots, x_n) \rangle \wedge \langle Q(x_1, \dots, x_n) \rangle;$$

$$\langle (P \vee Q)(x_1, \dots, x_n) \rangle = \langle P(x_1, \dots, x_n) \rangle \vee \langle Q(x_1, \dots, x_n) \rangle;$$

$$\langle \overline{P}(x_1, \dots, x_n) \rangle = 1 - \langle P(x_1, \dots, x_n) \rangle;$$

$$\langle \forall x_i P(x_1, \dots, x_n) \rangle = \inf_{x_i} \langle P(x_1, \dots, x_n) \rangle;$$

$$\langle \exists x_i P(x_1, \dots, x_n) \rangle = \sup_{x_i} \langle P(x_1, \dots, x_n) \rangle.$$

Эти определения согласуются с определениями стандартных операций над нечеткими множествами. Логическое следование $\Rightarrow$ будем интерпретировать следующим образом. Будем считать, что B логически следует из A и писать $A \Rightarrow B$, если $\langle A \rangle \leq \langle B \rangle$ для всех допустимых значений переменных. Соответственно для равносильности: $A \Leftrightarrow B$, если $\langle A \rangle = \langle B \rangle$. Этот подход позволяет стандартным образом получать нечеткие аналоги четких понятий, используя их формализованные определения.

Рассмотрим несколько примеров.

$$\mu_{A\times B}(x,y)=\min\left(\mu_A(x),\mu_B(y)\right).$$

Образ нечеткого множества $A\times B$ относительно отображения $*: X\times X\to X$ – это нечеткое подмножество $A*B$ множества X с функцией принадлежности $\mu_{A*B}(z)$.

Пример. Пусть A – нечеткое подмножество множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$, с функцией принадлежности $A(x)=e^{-|x|}$. Найдем сумму $S=A+A$. В соответствии с определением

$$S(z)=\sup\{\min(e^{-|x|},e^{-|y|})|x+y=z\}$$

$$=\sup_x\{\min(e^{-|x|},e^{-|z-x|})\}.$$

Очевидно, $S(0)=1$. Пусть для определенности $z>0$. Тогда $e^{-|x|}\le e^{-|z-x|}$ при $x\le\frac{z}{2}$, и $e^{-|x|}\ge e^{-|z-x|}$ при $x\ge\frac{z}{2}$. Максимальное значение величина $\min(e^{-|x|},e^{-|z-x|})$ достигает при $x=\frac{z}{2}$. Таким образом, $S(z)=e^{-z/2}$. Аналогично, при $z<0$ получаем $S(z)=e^{z/2}$. В общем случае $S(z)=e^{-|z/2|}$.

Приведем еще один пример применения принципа обобщения. Рассмотрим приближенное решение уравнения $f(x)=0$. Нас будут интересовать такие значения аргумента x, при которых значение $f(x)$ близко к нулю. Обозначим через Z множество значений, близких к нулю. Тогда множество допустимых решений X определяется формулой

$$x\in X\Leftrightarrow f(x)\in Z.$$

Оценка истинности каждой из частей этой равносильности дает равенство

$$\mu_X(x)=\mu_Z(f(x)). \tag{6}$$

Равенство (6) можно использовать в качестве определения нечеткого множества допустимых решений при нечетко заданном множестве Z.

Если функция $f(x)$ допускает обращение на носителе множества Z, можно непосредственно воспользоваться принципом обобщения. В самом деле, пусть $g(y)$ – функция, для которой $f\big(g(y)\big)=y$. Тогда приближенным решением уравнения $f(x)=0$ можно считать нечеткое множество $g(Z)$. В соответствии с принципом обобщения имеем

$$\mu_{g(Z)}(x)=\sup_x\{\mu_Z(y)|g(y)=x\}.$$

Но последнее равенство означает, что $\mu_{g(Z)}(x) = \mu_Z(f(x))$. Таким образом, нечеткое множество $g(Z)$ совпадает с нечетким множеством X, определяемым равенством (6).

Упражнения

1. Найти множество пар $(a, b) \in [0; 1]$, для которых

   $$\overline{\overline{a} \wedge b} = a \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}).$$

2. а) Доказать, что импликация по Гёделю максимальна среди импликаций, удовлетворяющих правилу заключения: если импликация $\to$ удовлетворяет правилу заключения, то $a \to b \le a \to_G b$ для всех a и b. б) Найти максимальное подмножество отрезка $[0; 1]$, на котором импликация по Гёделю и импликация по Лукасевичу совпадают.
3. а) Дать определение прообраза нечеткого подмножества относительно отображения. б) Пусть $f: X \to Y$ – отображение множества X в множество Y и $A \subset X$ – нечеткое подмножество. Определить график сужения отображения f на A.
4. Найти функцию принадлежности множества приближенных решений уравнения $f(x) = 0$ при заданном «нечетком нуле» Z и построить ее график:

   а) $f(x) = 2x + 3, Z(x) = \max(0{,}1 - |x|/d)$;

   б) $f(x) = x^2 - 5x + 6, Z(x) = \max(0{,}1 - |x|/d)$;

   в) $f(x) = x^2 - 5x + 6, Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

5. Доказать, что $f(A^{\alpha+}) = \left(f(A)\right)^{\alpha+}$.
6. Всегда ли верно равенство $f(A^{\alpha}) = \left(f(A)\right)^{\alpha}$?
7. Используя принцип обобщения, запишите определение множества $A + B$, где A и B – нечеткие подмножества множества действительных чисел.
8. Пусть A и B – нечеткие подмножества множества действительных чисел, имеющие следующие функции принадлежности:

   $$\mu_A(x) = \max(0{,}1 - |x - 2|), \quad \mu_B(x) = \max(0{,}1 - |x - 3|).$$

   Найти нечеткие подмножества:

   а) $f(A)$ при $f(x) = x^2$; б) $A + B$; в) $A \cdot B$.

9. Пусть A – нечеткое подмножество множества действительных чисел. Найти nA (сумма n слагаемых, равных A), если A имеет следующую функцию принадлежности:

а) $\mu_A(x) = \max(0{,}1 - |x|)$;

б) $\mu_A(x) = e^{-|x|}$.

10. Используя принцип обобщения, сформулируйте определение нечеткого подмножества в $\boldsymbol{R}^n$, замкнутого относительно сложения.

1.5. Нечеткие отношения

Нечеткое отношение между элементами множества X и элементами множества Y – определяется нечетким подмножеством $R \subset X \times Y$. Нечеткое отношение задается своей функцией принадлежности $\mu_R: X \times Y \to [0,1]$. Как обычно, вместо $\mu_R(x, y)$ мы будем иногда писать $R(x, y)$. Значение $R(x, y)$ можно понимать как интенсивность, с которой связаны элементы x и y отношением R.

Если X и Y конечны,

$$X = \{x_1, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, \dots, y_n\},$$

нечеткое отношение R может быть задано матрицей (r_{ij}), где $r_{ij} = R(x_i, y_j)$.

Множество всех нечетких отношений элементами множества X и элементами множества Y будем обозначать $Rel(X, Y)$. По определению это множество совпадает с множеством всех нечетких подмножеств множества $X \times Y$. Операции пересечения, объединения, дополнения и отношение включения в $Rel(X, Y)$ те же, что и в $\boldsymbol{F}(X \times Y)$.

При $X = Y$ отношения из $Rel(X, X)$ называют бинарными отношениями на X.

Инволюция (обратное отношение) отношения $R \in Rel(X, Y)$ – это отношение $R^{-1} \in Rel(Y, X)$, задаваемое формулой

$$R^{-1}(y, x) = R(x, y).$$

Дополнение отношения $R \in Rel(X, Y)$ – это отношение $\bar{R} \in Rel(Y, X)$ задаваемое формулой

$$\bar{R}(y, x) = 1 - R(x, y).$$

Композиция отношений $R \in Rel(X,Y)$ и $S \in Rel(Y,Z)$ – это отношение $RS \in Rel(X,Z)$, задаваемое формулой

$$RS(x,z) = \sup\{\min(R(x,y), S(y,z))\,|\, y \in Y\}.$$

Если множества X и Y конечны, а отношение $R \in Rel(X,Y)$ задано матрицей (r_{ij}), то матрица отношения R^{-1} получается из матрицы (r_{ij}) транспонированием. Если, кроме, того, множество Z также конечно и отношение $S \in Rel(Y,Z)$ задано матрицей (s_{jk}), композиция $Q = RS$ определяется матрицей (q_{ik}) такой что

$$q_{ik} = \sup\{\min(r_{ij}, s_{jk})\}.$$

Последняя формула подобна формуле для умножения матриц: операция умножения заменена операцией min, а суммирование – операцией sup.

Пусть A – нечеткое подмножество множества X, а $R \in Rel(X,Y)$ – нечеткое отношение. *Образом* A относительно R называется нечеткое подмножество B множества Y со следующей функцией принадлежности:

$$\mu_B(y) = \sup\{\min(A(x), R(x,y))\,|\, x \in X\}.$$

Для образа A относительно R будем использовать обозначение $R(A)$. Нечеткое множество $R(X)$ называют *проекцией* R на Y. Проекция R на X – это нечеткое множество $R^{-1}(Y)$. Нечеткое множество $R^{-1}(Y)$ называют также *областью определения* отношения R, а нечеткое множество $R(X)$ – *образом* отношения R.

Упражнения

1. Доказать, что операции над нечеткими отношениями обладают следующими свойствами:
   а) композиция ассоциативна;
   б) композиция монотонна;
   в) объединение дистрибутивно относительно композиции;
2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$ и отношения $R \in Rel(X,Y)$ и $S \in Rel(Y,Z)$ заданы следующими матрицами

$$R \sim \begin{pmatrix} 0{,}8 & 1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}9 \end{pmatrix}, S \sim \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Композиция отношений $R \in Rel(X,Y)$ и $S \in Rel(Y,Z)$ – это отношение $RS \in Rel(X,Z)$, задаваемое формулой

$$RS(x,z) = \sup\{\min(R(x,y), S(y,z)) \,|\, y \in Y\}.$$

Если множества X и Y конечны, а отношение $R \in Rel(X,Y)$ задано матрицей (r_{ij}), то матрица отношения R^{-1} получается из матрицы (r_{ij}) транспонированием. Если, кроме, того, множество Z также конечно и отношение $S \in Rel(Y,Z)$ задано матрицей (s_{jk}), композиция $Q = RS$ определяется матрицей (q_{ik}) такой что

$$q_{ik} = \sup\{\min(r_{ij}, s_{jk})\}.$$

Последняя формула подобна формуле для умножения матриц: операция умножения заменена операцией min, а суммирование – операцией sup.

Пусть A – нечеткое подмножество множества X, а $R \in Rel(X,Y)$ – нечеткое отношение. *Образом* A относительно R называется нечеткое подмножество B множества Y со следующей функцией принадлежности:

$$\mu_B(y) = \sup\{\min(A(x), R(x,y)) \,|\, x \in X\}.$$

Для образа A относительно R будем использовать обозначение $R(A)$. Нечеткое множество $R(X)$ называют *проекцией* R на Y. Проекция R на X – это нечеткое множество $R^{-1}(Y)$. Нечеткое множество $R^{-1}(Y)$ называют также *областью определения* отношения R, а нечеткое множество $R(X)$ – *образом* отношения R.

Упражнения

1. Доказать, что операции над нечеткими отношениями обладают следующими свойствами:
   а) композиция ассоциативна;
   б) композиция монотонна;
   в) объединение дистрибутивно относительно композиции;
2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$ и отношения $R \in Rel(X,Y)$ и $S \in Rel(Y,Z)$ заданы следующими матрицами

$$R \sim \begin{pmatrix} 0{,}8 & 1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}9 \end{pmatrix}, S \sim \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

2. Нечеткая арифметика

2.1. Нечеткие числа и нечеткие интервалы

Понятия нечеткого числа и нечеткого интервала формализуют такие интуитивные представления как «число, примерно равное заданному действительному числу», «большое число» и т.п. Как правило, между понятиями нечеткого числа и нечеткого интервала не делают различия, используя в обоих случаях термин «нечеткое число». Мы в основном будем следовать этой традиции, используя, впрочем, иногда и термин «нечеткий интервал».

Нечеткое подмножество A множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ принято считать *нечетким числом*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

*N*1) нечеткое множество A нормально, т.е. $\mu_A(x) = 1$ для некоторого $x \in \boldsymbol{R}$;

*N*2) нечеткое множество A выпукло, т.е.

$$\mu_A(z) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

для любых $x, y \in \boldsymbol{R}$ и $z \in [x, y]$;

N3) функция принадлежности $\mu_A(x)$ полунепрерывна сверху.

Напомним, что функция $f(x)$ называется полунепрерывной сверху в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Функция полунепрерывна сверху, если она полунепрерывна сверху во всех точках своей области определения.

Иногда в определение нечеткого числа включают дополнительные требования:

*N*4) носитель нечеткого числа – ограниченное подмножество действительной прямой;

*N*5) модальное значение нечеткого числа единственно (в этом случае говорят, что число *унимодально*).

Множество нечетких подмножеств действительной прямой удовлетворяющих условиям *N*1 – *N*4, обозначим через $\boldsymbol{R}_f$.

Действительное число a можно рассматривать как нечеткое число с функцией принадлежности $\mu_a(x)$, принимающей значение 1 при $x = a$ и значение 0 в противном случае. Такие нечеткие множества, для которых функция принадлежности принимает значение 1 в одной единственной точке и обращается в ноль во всех остальных, называют *синглетонами*. Таким образом, мы отождествляем действительное число с соответствующим синглетоном. При таком отождествлении можно считать, что $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{R}_f$. Заметим, что функция принадлежности синглетона разрывна.

Пусть A – нечеткое число. Напомним, что при $\alpha \in (0;1]$ α-сечение нечеткого множества A задается равенством

$$A^{\alpha} = \{x \in \boldsymbol{R} | \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Для $\alpha = 0$ определим A^0 как замыкание носителя нечеткого множества A, т.е.

$$A^0 = cl\{x \in \boldsymbol{R} | \mu_A(x) > 0\},$$

где cl – оператор замыкания.

Теорема 1. Пусть A – нечеткое число, удовлетворяющее условиям $N1 - N4$. Тогда для любого $\alpha \in [0;1]$ сечение A^{α} имеет следующий вид:

$$A^{\alpha} = [a_l(\alpha), a_r(\alpha)]. \tag{1}$$

При этом функции $a_l(\alpha)$ и $a_r(\alpha)$ обладают следующими свойствами:

1) $a_l(1) \leq a_r(1)$;

2) функция $a_l(\alpha)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0;1]$ и непрерывна справа в точке 0;

3) функция $a_r(\alpha)$ ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0;1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций на промежутке $[0;1]$, для которых выполняются условия 1 – 3, задает нечеткое число $A \in \boldsymbol{R}_f$, сечения которого имеют вид (1).

Пример 1. Рассмотрим нечеткое число A «примерно 3», имеющее следующую функцию принадлежности (см. рис. 1):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ x \notin [0;4] \\ \frac{x}{2}, & \text{если } \ x \in [0;1] \\ 1/2, & \text{если } \ x \in [1;2] \\ \frac{x-1}{2}, & \text{если } \ x \in [2;3] \\ 4-x, & \text{если } \ x \in [3;4] \end{cases}.$$

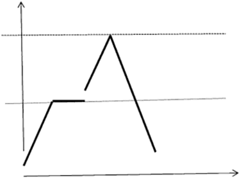

Рис. 1. График функции принадлежности числа «примерно 3» из примера 1.

Найдем сечения нечеткого числа A. Имеем:

$$A^{\alpha} = \begin{cases} [2\alpha; 4-\alpha], & \text{если} \quad \alpha \in [0; 1/2] \\ [1+2\alpha; 4-\alpha], & \text{если} \quad \alpha \in [1/2; 1] \end{cases}.$$

В точке $\alpha = 1/2$ функция $a_l(\alpha)$ имеет разрыв (скачок), при том, что функция принадлежности $\mu_A(x)$ непрерывна.

Функция принадлежности синглетона $\mu_a(x)$ разрывна. В тоже время любое его -сечение состоит из одной точки a. Таким образом, $a_l(\alpha) = a_r(\alpha) = a$ для всех α, так что функции $a_l(\alpha)$ и $a_r(\alpha)$ непрерывны.

Упражнения

1. а) Построить несколько нечетких чисел, описывающих число «примерно 5».

   б) Построить нечеткий интервал, соответствующий оценке «большое число», считая, что числа до 10 небольшие, а после 100 – большие.

   в) Построить нечеткое число, соответствующее описанию «немного больше 3, но меньше, чем 3,5».

2. а) Построить нечеткие числа, соответствующие медицинским понятиям «повышенная температура» и «высокая температура».
б) Построить нечеткие интервалы, соответствующие понятиям «высокий процент по депозитам» и «низкий процент по депозитам».
3. а) Уровневые множества нечеткого числа A имеют следующий вид

$$A^\alpha = [\sqrt{\alpha}; 2 - \sqrt{\alpha}].$$

Найти функцию принадлежности нечеткого числа A.
б) Доказать, что семейство множеств

$$A^\alpha = [e + e^\alpha; 4e - e^{\alpha^2}], \alpha \in [0; 1],$$

является семейством -срезов некоторого нечеткого числа. Найти функцию принадлежности этого числа.
4. Пусть A – нечеткое число.
а) Доказать, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A^{\alpha_n} = A^\alpha$, где $\alpha \in (0; 1]$ и (α_n) – последовательность чисел из промежутка $[0; \alpha)$, сходящаяся к α.
б) Доказать, что $cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^{\alpha_n}) = A^0$, где (α_n) – последовательность чисел из промежутка $[0; 1]$, сходящаяся к 0.

Задача

Доказать теорему 1.

2.2. Нечеткие *L*-*R*-числа

В теории нечетких множеств получили широкое распространение так называемые нечеткие *L-R-числа*.

Определение 1. Функция принадлежности нечеткого *L*-*R*-числа A имеет следующий вид:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin [a_l(0), a_r(0)] \\ L\left(\frac{x - a_l(0)}{a_l(1) - a_l(0)}\right), & \text{если} \quad a_l(0) \le x < a_l(1) \\ R\left(\frac{a_r(0) - x}{a_r(0) - a_r(1)}\right), & \text{если} \quad a_r(1) \le x < a_r(0) \\ 1, & \text{если} \quad a_l(1) \le x \le a_r(1) \end{cases}. \qquad (2)$$

где $a_l(0) \le a_l(1) \le a_r(1) \le a_r(0)$ – действительные а $L, R: [0,1] \to [0,1]$ – непрерывные возрастающие функции такие, что $L(0) = R(0) = 0$ и $L(1) = R(1) = 1$.

Функции L и R называют *граничными* функциями (соответственно левой и правой), величины $a_l(1) - a_l(0)$ и $a_r(0) - a_r(1)$ – *спрэдами* (левым и правым).

Для нечеткого L-R-числа A с функцией принадлежности (2) используется обозначение

$$A = \langle a_l(0), a_l(1), a_r(1), a_r(0) \rangle_{LR}. \tag{3}$$

Промежуток $[a_l(1), a_r(1)]$ является ядром нечеткого числа A; промежуток $[a_l(0), a_r(0)]$ содержит носитель числа A. Уровневые множества имеют следующий вид:

$$A^\alpha = [(1-\alpha)a_l(0) + \alpha a_l(1), (1-\alpha)a_r(0) + \alpha a_r(1)].$$

Иногда условия в определении нечетких L-R-чисел смягчают, например, для того, чтобы использовать нечеткие интервалы с неограниченным носителем. Приведем одно из распространенных обобщений.

Определение 2. Нечеткий *L-R-интервал* (нечеткие число) A задается функцией принадлежности, имеющей следующий вид:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_l - x}{\sigma_l}\right), & \text{если} \quad x < a_l \\ 1, & \text{если} \quad a_l \le x \le a_r. \\ R\left(\frac{x - a_r}{\sigma_r}\right), & \text{если} \quad a_r < x \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $a_l, a_r \in \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\sigma_l, \sigma_r \in (0, +\infty)$, а L, R – граничные функции. В качестве граничных функций используются функции $f: [0, +\infty] \to [0,1]$, обладающие следующими свойствами:

$f(x)$ – невозрастающая непрерывная справа функция;

$f(0) = 1$;

$f(x) < 1$ при $x > 0$;

$f(x) > 0$ при $x < 1$;

$f(1) = 0$ или $f(x) > 0$ при всех x и $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Для нечеткого L-R-интервала типа (4) будем использовать обозначение

$$A = \langle\langle a_l, \sigma_l, a_r, \sigma_r \rangle\rangle_{LR}.$$

Числа a_l и a_r называют соответственно *левым и правым модальным значением*, числа σ_l и σ_r – *левым и правым коэффициентами нечеткости*. *Ядром* нечеткого L-R-интервала служит промежуток $[a_l, a_r]$. При строго возрастающих граничных функциях множеством уровня $\alpha > 0$ является интервал

Функции L и R называют *граничными* функциями (соответственно левой и правой), величины $a_l(1) - a_l(0)$ и $a_r(0) - a_r(1)$ – *спрэдами* (левым и правым).

Для нечеткого L-R-числа A с функцией принадлежности (2) используется обозначение

$$A = \langle a_l(0), a_l(1), a_r(1), a_r(0) \rangle_{LR}. \tag{3}$$

Промежуток $[a_l(1), a_r(1)]$ является ядром нечеткого числа A; промежуток $[a_l(0), a_r(0)]$ содержит носитель числа A. Уровневые множества имеют следующий вид:

$$A^\alpha = [(1-\alpha)a_l(0) + \alpha a_l(1), (1-\alpha)a_r(0) + \alpha a_r(1)].$$

Иногда условия в определении нечетких L-R-чисел смягчают, например, для того, чтобы использовать нечеткие интервалы с неограниченным носителем. Приведем одно из распространенных обобщений.

Определение 2. Нечеткий *L-R-интервал* (нечеткие число) A задается функцией принадлежности, имеющей следующий вид:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_l - x}{\sigma_l}\right), & \text{если} \quad x < a_l \\ 1, & \text{если} \quad a_l \le x \le a_r. \\ R\left(\frac{x - a_r}{\sigma_r}\right), & \text{если} \quad a_r < x \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $a_l, a_r \in \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\sigma_l, \sigma_r \in (0, +\infty)$, а L, R – граничные функции. В качестве граничных функций используются функции $f: [0, +\infty] \to [0,1]$, обладающие следующими свойствами:

$f(x)$ – невозрастающая непрерывная справа функция;

$f(0) = 1$;

$f(x) < 1$ при $x > 0$;

$f(x) > 0$ при $x < 1$;

$f(1) = 0$ или $f(x) > 0$ при всех x и $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Для нечеткого L-R-интервала типа (4) будем использовать обозначение

$$A = \langle\langle a_l, \sigma_l, a_r, \sigma_r \rangle\rangle_{LR}.$$

Числа a_l и a_r называют соответственно *левым и правым модальным значением*, числа σ_l и σ_r – *левым и правым коэффициентами нечеткости*. *Ядром* нечеткого L-R-интервала служит промежуток $[a_l, a_r]$. При строго возрастающих граничных функциях множеством уровня $\alpha > 0$ является интервал

Для записи треугольных нечетких чисел мы будем использовать обозначение

$$A = \langle a, b, c \rangle. \tag{8}$$

Упражнения

1. а) Найти функцию принадлежности и уровневые множества треугольного нечеткого числа $A = \langle 4; 5; 6 \rangle$.
   б) Найти функцию принадлежности и уровневые множества трапецеидального нечеткого числа $A = \langle 4; 4{,}5; 5{,}5; 6 \rangle$.
2. а) Пусть A – нечеткий интервал с гауссовой функцией принадлежности $\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Найти уровневые множества. Представить A как L-R-интервал.
   б) Пусть A – нечеткий интервал с экспоненциальной функцией принадлежности вида $\mu_A(x) = e^{-\frac{|x-a|}{\rho}}$. Найти уровневые множества. Представить A как L-R-интервал.
3. Пусть $L(x) = R(x) = x^2$. Записать функцию принадлежности нечеткого числа A с ядром 5, левым спрэдом 1 и правым спрэдом 2. Найти уровневые множества.
4. Найти значения параметров a, b, c, d, при которых функция $f(x)$ вида $f(x) = a + b\cos(cx + d)$ является граничной функцией нечеткого L-R-числа с гладкой функцией принадлежности. Найти функцию принадлежности и уровневые множества.

2.3. Интервальные вычисления

Пусть $*$ – одна из четырех арифметических операций $+, -, \cdot, /$. Для замкнутых интервалов $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$ по определению полагаем

$$A * B = \{x * y \mid a_1 \le x \le a_2,\ b_1 \le y \le b_2\}$$

(в случае деления предполагается, что $0 \notin [b_1, b_2]$).

Несложно проверить следующие соотношения:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2];$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1];$$

$$A \cdot B = [\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2), \max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)];$$

$$A/B = [\min(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2), \max(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2)]$$

(при условии, что $0 \notin [b_1, b_2]$).

Укажем некоторые свойства арифметических операций с интервалами:

1) $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$ (коммутативность);

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность);

3) $A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C$.

Пример 1. Пусть $A = [1,2]$, $B = [3,4]$, $C = [-3,-1]$. Тогда

$B + C = [0,3]$, $A \cdot (B + C) = [0,6]$;

$A \cdot B = [3,8]$, $A \cdot C = [-6,-1]$, $A \cdot B + A \cdot C = [-3,7]$.

Как показывает предыдущий пример, в соотношении 3 включение, вообще говоря, нельзя заменить равенством. Это происходит из-за того, что интервалы B и C содержат числа разных знаков. В том случае, когда интервалы B и C расположены по одну сторону от нуля, дистрибутивность имеет место. Приведем точные формулировки.

Будем говорить, что интервал $A = [a_1, a_2]$ неотрицательный (положительный) и писать $A \geq 0$ (соотв. $A > 0$), если $a_1 \geq 0$ (соотв. $a_1 > 0$). Аналогично определяются неположительные и отрицательные интервалы.

3') Если интервалы B и C оба неотрицательные или неположительные, то $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

В случае интервальных вычислений тождественно равные алгебраические выражения могут привести к разным результатам. Дело в том, что аналитическое представление функции с помощью алгебраической формулы задает не только функцию, но и по сути дела алгоритм вычисления значения функции при заданном значении аргумента. Совпадение результатов вычислений по разным алгоритмам в случае числовых значений не гарантирует совпадения в случае интервальных вычислений.

Поясним сказанное примером.

Пример 2. Пусть

$$f(x) = 2x - x^2, \; g(x) = x(2 - x),$$

$$h(x) = 1 - (1-x)^2;\ k(x) = 1 - (1-x)\,(1-x).$$

Вычислим $f(X)$, $g(X)$, $h(X)$ и $k(x)$ для $X = [1,2]$. Получаем:

$$f([1,2]) = 2\cdot[1,2] - [1,2]^2 = [2,4] - [1,4] = -[-2,3];$$

$$g([1,2]) = [1,2]\cdot(2 - [1,2]) = [1,2]\cdot[0,1] = [0,2];$$

$$h([1,2]) = 1 - (1 - [1,2]^2) = 1 - (1 - [1,4]) = 1 - [-3,0] = [1,4];$$

$$k([1,2]) = 1 - (1 - [1,2])(1 - [1,2]) =$$

$$= 1 - [-1,0]\cdot[-1,0] = 1 - [0,1] = [0,1].$$

Пусть $A = [a_1, a_2]$ и $B = [b_1, b_2]$. Положим

$$\min(A,B) = [\min(a_1,b_1)\,, \min(a_2,b_2)],$$

$$\max(A,B) = [\max(a_1,b_1)\,, \max(a_2,b_2)].$$

Эти операции задают на множестве интервалов отношение частичного порядка:

$A \le B$ тогда и только тогда, когда $\min(A,B) = A$.

Нетрудно заметить, что $[a_1, a_2] \le [b_1, b_2]$ тогда и только тогда, когда $a_1 \le b_1$ и $a_2 \le b_2$.

Упражнения

1. Вычислить: а) $[-2,3] + [2,4]$; б) $[-1,2]\cdot[-1,2]$; в) $[-2,6]/[1,2]$.
2. Пусть $f(x) = 1 + x + x^2$ и $g(x) = (1+x)^2 - x$. Вычислить $f(X)$ и $g(X)$ для $X = [-1,1]$. Найти интервал X такой, что $f(X) = g(X)$.
3. а) Доказать, что операции сложения и умножения на множестве интервалов коммутативны и ассоциативны.

   б) Пусть A, B, C — замкнутые интервалы действительной прямой. Исследовать, при каких условиях выполняется соотношение

   $$(A - B)\cdot C = A\cdot C - B\cdot C.$$
4. Доказать, что $A \le B$ тогда и только тогда, когда $\max(A,B) = B$.
5. Доказать, что отношение $\le$ на множестве интервалов транзитивно, рефлексивно и антисимметрично.

2.4. Арифметические операции над нечеткими числами

Сложение, вычитание и умножение нечетких чисел определяется по принципу обобщения. Если A и B – нечеткие числа, их сумма $A+B$, разность $A-B$ и произведение $A \cdot B$ – это нечеткие числа с функциями принадлежности соответственно

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{x,y}\{\min\left(\mu_A(x)\mu_B(y)\right) | x+y=z\},$$

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{x,y}\{\min\left(\mu_A(x)\mu_B(y)\right) | x-y=z\}$$

и

$$\mu_{A\cdot B}(z) = \sup_{x,y}\{\min\left(\mu_A(x)\mu_B(y)\right) | x\cdot y=z\}.$$

Аналогичное определение можно привести и для *операции деления*:

$$\mu_{A/B}(z) = \sup_{x,y}\{\min\left(\mu_A(x)\mu_B(y)\right) | x/y=z\}.$$

Нужно только предполагать, что носитель числа B (делителя) не содержит нуля.

В дальнейшем, записывая операцию деления, мы предполагаем, что это условие выполнено.

Теорема 2. Если функции принадлежности нечетких чисел A и B непрерывны, то и функции принадлежности нечетких чисел $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$, A/B непрерывны.

Теорема 3. Пусть A и B – нечеткие числа с непрерывными функциями принадлежности. Тогда для любого $\alpha \in (0,1]$ справедливы следующие соотношения:

$$(A+B)^\alpha = A^\alpha + B^\alpha;$$
$$(A-B)^\alpha = A^\alpha - B^\alpha;$$
$$(A\cdot B)^\alpha = A^\alpha \cdot B^\alpha;$$
$$\left(\frac{A}{B}\right)^\alpha = A^\alpha / B^\alpha.$$

Замечание. Требование непрерывности в теореме 2 можно ослабить. Например, ее заключение справедливо, если A или B – действительные числа (синглетоны), имеющие разрывную функцию принадлежности.

Теорема 3 показывает, что арифметические операции над нечеткими числами, введенные в соответствии с принципом обобщения, в определенном смысле сводятся к интервальной арифметике.

Упражнения

1) Пусть A и B – нечеткие числа с функциями принадлежности соответственно

$$\mu_A(x) = \max(0{,}1 - |x - 1|),\ \mu_B(x) = \max(0{,}1 - |x + 1|).$$

Вычислить $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, A/B.

2) Пусть $L(x) = R(x) = e^{-x}$.
а) Вычислить $\langle\langle 0,1,0,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 0,1,0,1\rangle\rangle_{LR}$.
б) Вычислить $\langle\langle 2,1,2,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 3,1,3,1\rangle\rangle_{LR}$.
в) Вычислить$\langle\langle 1,1,1,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 2,2,2,2\rangle\rangle_{LR}$.
г) Верно ли в общем случае равенство

$$\langle\langle a, \alpha_l, a, \alpha_r\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle b, \beta_l, b, \beta_r\rangle\rangle_{LR} = \langle\langle a + b, \alpha_l + \beta_l, a + b, \alpha_r + \beta_r\rangle\rangle_{LR}?$$

3) Пусть $L(x) = R(x) = \frac{1}{1+x}$.
а) Вычислить $\langle\langle 0,1,0,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 0,1,0,1\rangle\rangle_{LR}$.
б) Вычислить $\langle\langle 2,1,2,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 3,1,3,1\rangle\rangle_{LR}$.
в) Вычислить $\langle\langle 1,1,1,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 2,2,2,2\rangle\rangle_{LR}$.
г) Верно ли в общем случае равенство

$$\langle\langle a, \alpha_l, a, \alpha_r\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle b, \beta_l, b, \beta_r\rangle\rangle_{LR} = \langle\langle a + b, \alpha_l + \beta_l, a + b, \alpha_r + \beta_r\rangle\rangle_{LR}?$$

2.5. Решетка нечетких чисел

Определим на множестве нечетких чисел операции min и max, используя принцип обобщения.

Если A и B – нечеткие числа, $\min(A, B)$ и $\max(A, B)$ – это нечеткие числа с функциями принадлежности соответственно

$$\mu_{\min(A,B)}(z) = \sup_{x,y}\{\min\left(\mu_A(x)\mu_B(y)\right) \mid \min(x, y) = z\},$$

$$\mu_{\max(A,B)}(z) \sup_{x,y}\{\min\left(\mu_A(x)\mu_B(y)\right) \mid \max(x, y) = z\}.$$

Операция min задает на множестве нечетких чисел отношение частичного порядка, которое мы будем обозначать через $(\leq)$:

$A(\leq)B$ тогда и только тогда, когда $\min(A, B) = A$.

Теорема 3 показывает, что арифметические операции над нечеткими числами, введенные в соответствии с принципом обобщения, в определенном смысле сводятся к интервальной арифметике.

Упражнения

1) Пусть A и B – нечеткие числа с функциями принадлежности соответственно

$$\mu_A(x) = \max(0,1 - |x - 1|),\ \mu_B(x) = \max(0,1 - |x + 1|).$$

Вычислить $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, A/B.

2) Пусть $L(x) = R(x) = e^{-x}$.
а) Вычислить $\langle\langle 0,1,0,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 0,1,0,1\rangle\rangle_{LR}$.
б) Вычислить $\langle\langle 2,1,2,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 3,1,3,1\rangle\rangle_{LR}$.
в) Вычислить $\langle\langle 1,1,1,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 2,2,2,2\rangle\rangle_{LR}$.
г) Верно ли в общем случае равенство

$$\langle\langle a,\alpha_l,a,\alpha_r\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle b,\beta_l,b,\beta_r\rangle\rangle_{LR} = \langle\langle a+b,\alpha_l+\beta_l,a+b,\alpha_r+\beta_r\rangle\rangle_{LR}?$$

3) Пусть $L(x) = R(x) = \frac{1}{1+x}$.
а) Вычислить $\langle\langle 0,1,0,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 0,1,0,1\rangle\rangle_{LR}$.
б) Вычислить $\langle\langle 2,1,2,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 3,1,3,1\rangle\rangle_{LR}$.
в) Вычислить $\langle\langle 1,1,1,1\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle 2,2,2,2\rangle\rangle_{LR}$.
г) Верно ли в общем случае равенство

$$\langle\langle a,\alpha_l,a,\alpha_r\rangle\rangle_{LR} + \langle\langle b,\beta_l,b,\beta_r\rangle\rangle_{LR} = \langle\langle a+b,\alpha_l+\beta_l,a+b,\alpha_r+\beta_r\rangle\rangle_{LR}?$$

2.5. Решетка нечетких чисел

Определим на множестве нечетких чисел операции min и max, используя принцип обобщения.

Если A и B – нечеткие числа, $\min(A,B)$ и $\max(A,B)$ – это нечеткие числа с функциями принадлежности соответственно

$$\mu_{\min(A,B)}(z) = \sup_{x,y}\{\min\left(\mu_A(x)\mu_B(y)\right) \mid \min(x,y) = z\},$$

$$\mu_{\max(A,B)}(z) \sup_{x,y}\{\min\left(\mu_A(x)\mu_B(y)\right) \mid \max(x,y) = z\}.$$

Операция min задает на множестве нечетких чисел отношение частичного порядка, которое мы будем обозначать через $(\leq)$:

$A(\leq)B$ тогда и только тогда, когда $\min(A,B) = A$.

Сумма и разность треугольных чисел $A = \langle a_1, a, a_2 \rangle$ и $B = \langle b_1, b, b_2 \rangle$ снова оказывается треугольным числом:

$$A + B = \langle a_1 + b_1, a + b, a_2 + b_2 \rangle;$$

$$A - B = \langle a_1 - b_1, a - b, a_2 - b_2 \rangle.$$

С произведением и частным дело обстоит несколько сложнее. Рассмотрим пример.

Пример. Пусть $A = \langle 1,2,3 \rangle$, $B = \langle 2,3,4 \rangle$ и $C = A \cdot B$.

Модальное значение нечеткого числа C равно 6; носитель совпадает с промежутком (2,12). Для $\alpha \in (0,1]$ имеем

$$A^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha], B^\alpha = [2 + \alpha, 4 - \alpha].$$

Значит,

$$C^\alpha = [(1 + \alpha)(2 + \alpha), (3 - \alpha)(4 - \alpha)].$$

Значение $\mu_C(x)$ при $6 < x < 12$ получается как решение уравнения

$$(3 - \alpha)(4 - \alpha) = x$$

относительно α:

$$\mu_C(x) = \frac{7 - \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

Аналогично,

$$\mu_C(x) = \frac{-3 - \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

при $2 < x < 6$.

Будем говорить, что нечеткое число A имеет *треугольную форму* (*triangular shaped fuzzy number*), если его функция принадлежности $\mu_A(x)$ обладает следующими свойствами:

функция $\mu_A(x)$ непрерывна;

носитель функции$\mu_A(x)$ ограничен и представляет собой промежуток (a_1, a_2);

модальное значение $a \in (a_1, a_2)$ единственно;

на промежутке (a_1, a) функция $\mu_A(x)$ возрастает, на промежутке (a, a_2) – убывает.

Для нечетких чисел треугольной формы мы будем использовать обозначение $A \approx \langle a_1, a, a_2 \rangle$.

В рассмотренном выше примере число $C = A \cdot B$ имеет треугольную форму, так что $C \approx \langle 2,6,12 \rangle$. Заметим, что максимальная разница между функцией принадлежности числа C и функцией принадлежности треугольного числа $\langle 2,6,12 \rangle$ на промежутке $(6,12)$ составляет примерно 0,04.

Нечеткое число $A = \langle a_1, a, a_2 \rangle$ будем называть положительным (отрицательным) и писать $A > 0$ (соотв. $A < 0$), если $a_1 > 0$ (соотв. $a_2 < 0$). Более общо, при сравнении нечетких треугольных чисел с действительными мы будем писать $A = \langle a_1, a, a_2 \rangle > c$, если $a_1 > c$ и аналогично в других случаях.

Завершим параграф примером, который показывает, что вычисление значений алгебраических выражений в соответствии с принципом обобщения и поинтервальное вычисление могут различаться.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = (1 - x) \cdot x$. В соответствии с принципом обобщения, если X – нечеткое число, то $Y = f(X)$ – это нечеткое число с функцией принадлежности

$$\mu_Y(y) = \sup\{\mu_X(x) | y = (1 - x) \cdot x\}.$$

Интервальные вычисления с α-срезами дают нечеткое число Z, такое что

$$Z^\alpha = (1 - X^\alpha) \cdot X^\alpha.$$

Пусть

$$X^\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)],$$

$$Y^\alpha = [y_1(\alpha), y_2(\alpha)],$$

$$Z^\alpha = [z_1(\alpha), z_2(\alpha)].$$

Тогда

$$y_1(\alpha) = \min\{(1 - x)x | x \in X^\alpha\},\ y_2(\alpha) = \max\{(1 - x)x | x \in X^\alpha\};$$

$$z_1(\alpha) = \big(1 - x_2(\alpha)\big)x_1(\alpha), \qquad z_2(\alpha) = \big(1 - x_1(\alpha)\big)x_2(\alpha).$$

Возьмем

$$X = \langle 0; 0{,}25; 0{,}5 \rangle.$$

Получаем

$$x_1(\alpha) = 0{,}25\alpha;\ x_2(\alpha) = 0{,}5 - 0{,}25\alpha;$$

$$y_1(\alpha) = (1 - 0{,}25\alpha) \cdot 0{,}25\alpha; \quad y_2(\alpha) = (0{,}5 + 0{,}25\alpha)(0{,}5 - 0{,}25\alpha);$$

$$z_1(\alpha) = (0{,}5 + 0{,}25\alpha) \cdot 0{,}25\alpha;$$

$$z_2(\alpha) = (1 - 0{,}25\alpha)(0{,}5 - 0{,}25\alpha).$$

В частности,

$$Y^{0,5} = [7/64{,}15/64], Z^{0,5} = [5/64{,}21/64].$$

Упражнения

1. Записать характеристическую функцию числа $A = \langle -4, -2, -1 \rangle$. Найти α-срезы числа A.
2. Пусть $A = \langle -4, -2, -1 \rangle$, $B = \langle 4{,}5{,}7 \rangle$. Вычислить $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$, A/B.
3. Пусть $f(x) = 1 + x + x^2$. Для произвольного треугольного нечеткого числа X сравнить нечеткое число $f(X)$, полученное по принципу обобщения, с числом, полученным путем интервальных вычислений с α-срезами. Проверить выводы на примерах а) $X = \langle -4, -2, -1 \rangle$, б) $X = \langle -1; -0{,}5; 1 \rangle$.

3. Уравнения с нечеткими коэффициентами

3.1. Линейные уравнения с интервальными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

$$AX + B = C, \tag{1}$$

где A и B – замкнутые промежутки:

$$A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2],\ C = [c_1, c_2].$$

Интервал $X = [x_1, x_2]$, удовлетворяющий уравнению (1) называют *классическим* решением этого уравнения.

Решая уравнение $ax + b = c$ с числовыми коэффициентами, мы пользуемся тем, что $b - b = 0$ и $a/a = 1$ (при $a \neq 0$). Для интервальных коэффициентов это уже, вообще говоря, не так. Поэтому интервал

$$X = (C - B)/A,$$

полученный в результате интервальных вычислений, может не удовлетворять уравнению (1).

Заменим уравнение (1) следующими двумя уравнениями:

$$U + B = C \tag{2}$$

и

$$AX = U. \tag{3}$$

Теорема 1. Уравнение (2) имеет классическое решение $U = [u_1, u_2]$ тогда и только тогда, когда $b_2 - b_1 \leq c_2 - c_1$. При этом $u_1 = c_1 - b_1$, $u_2 = c_2 - b_2$.

Для анализа уравнения (3) введем вспомогательную функцию. Для произвольного интервала $V = [v_1, v_2]$ положим:

$$\theta(V) = v_1/v_2, \text{ если } |v_1| \leq |v_2|, \text{ и } \theta(V) = v_2/v_1,$$

$$\text{если } |v_1| > |v_2|.$$

Теорема 2. Уравнение (3) разрешимо относительно X тогда и только тогда, когда $\theta(A) \geq \theta(U)$. Классическое решение (если оно существует) не единственно лишь в случае, когда $\theta(A) = \theta(U) \leq 0$.

3. Уравнения с нечеткими коэффициентами

3.1. Линейные уравнения с интервальными коэффициентами

Рассмотрим уравнение вида

$$AX + B = C, \tag{1}$$

где A и B – замкнутые промежутки:

$$A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2],\ C = [c_1, c_2].$$

Интервал $X = [x_1, x_2]$, удовлетворяющий уравнению (1) называют *классическим* решением этого уравнения.

Решая уравнение $ax + b = c$ с числовыми коэффициентами, мы пользуемся тем, что $b - b = 0$ и $a/a = 1$ (при $a \neq 0$). Для интервальных коэффициентов это уже, вообще говоря, не так. Поэтому интервал

$$X = (C - B)/A,$$

полученный в результате интервальных вычислений, может не удовлетворять уравнению (1).

Заменим уравнение (1) следующими двумя уравнениями:

$$U + B = C \tag{2}$$

и

$$AX = U. \tag{3}$$

Теорема 1. Уравнение (2) имеет классическое решение $U = [u_1, u_2]$ тогда и только тогда, когда $b_2 - b_1 \leq c_2 - c_1$. При этом $u_1 = c_1 - b_1$, $u_2 = c_2 - b_2$.

Для анализа уравнения (3) введем вспомогательную функцию. Для произвольного интервала $V = [v_1, v_2]$ положим:

$$\theta(V) = v_1/v_2, \text{ если } |v_1| \leq |v_2|, \text{ и } \theta(V) = v_2/v_1,$$

$$\text{если } |v_1| > |v_2|.$$

Теорема 2. Уравнение (3) разрешимо относительно X тогда и только тогда, когда $\theta(A) \geq \theta(U)$. Классическое решение (если оно существует) не единственно лишь в случае, когда $\theta(A) = \theta(U) \leq 0$.

Упражнения

1) Найти классическое и обобщенное решения уравнения $[2{,}3]X = [-4{,}6]$. Вычислить $[-4{,}6]/[2{,}3]$.
2) Найти классическое и обобщенное решения уравнения $[1{,}2]X + [3{,}4] = [1{,}8]$. Найти множество решений всех уравнений вида $ax + b = c$ при $a \in [1{,}2]$, $b \in [3{,}4]$, $c \in [1{,}8]$.
3) Найти классическое и обобщенное решения уравнения $[-1/3{,}1]X = [-1{,}2]$.

Задачи

1) Доказать теорему 1.
2) Доказать теорему 2.
3) Используя теоремы 1 и 2 сформулировать условия существования классического решения уравнения (1).

3.2. Линейные уравнения с нечеткими коэффициентами: классическое решение

Рассмотрим уравнения вида

$$AX + B = C, \tag{4}$$

где A, B, C – нечеткие (треугольные) числа:

$$A = \langle a_1, a, a_2 \rangle,\ B = \langle b_1, b, b_2 \rangle,\ C = \langle c_1, c, c_2 \rangle.$$

Классическое решение X будем искать как число треугольной формы:

$$X \approx \langle x_1, x, x_2 \rangle,$$

удовлетворяющее уравнению (4).

Замечание. Как и при интервальных вычислениях, $B - B \neq 0$, $(1/A) \cdot A \neq 1$. Со схожей в некотором смысле ситуацией мы сталкиваемся в теории вероятностей: если ξ – случайная величина, то, вообще говоря, $\xi - \xi \neq 0$ и $(1/\xi) \cdot \xi \neq 1$.

Перейдем к интервальным уравнениям для α-срезов.

Пусть

$$A^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)],\ B^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)],\ C^\alpha = [c_1(\alpha), c_2(\alpha)].$$

Для каждого α мы ищем решение $X^\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ интервального уравнения

$$A^\alpha X^\alpha + B^\alpha = C^\alpha.$$

Интервалы X^α являются α-срезами некоторого нечеткого числа X, если функция $x_1(\alpha)$ монотонно возрастает, а функция $x_2(\alpha)$ монотонно убывает. Полученное таким образом нечеткое число X и является классическим решением уравнения (4). Для классического решения мы будем использовать обозначение X_C.

Пример 1. Рассмотрим нечеткий вариант уравнения $9x - 2 = 5$. Пусть

$$A = \langle 8{,}9{,}10\rangle,\ B = \langle -3,-2,-1\rangle,\ C = \langle 3{,}5{,}7\rangle.$$

Переходя к α-срезам, получаем интервальное уравнение

$$[8+\alpha, 10-\alpha]\cdot[x_1(\alpha), x_2(\alpha)] + [-3+\alpha, -1-\alpha] = [3+2\alpha, 7-2\alpha].$$

Отсюда

$$\begin{cases}(8+\alpha)x_1(\alpha) - 3 + \alpha & = & 3 + 2\alpha\\ (10-\alpha)x_2(\alpha) - 1 - \alpha & = & 7 - 2\alpha\end{cases}.$$

После преобразований получаем:

$$x_1(\alpha) = \frac{6+\alpha}{8+\alpha},\ x_2(\alpha) = \frac{8-\alpha}{10-\alpha} \tag{5}$$

На промежутке $[0,1]$ функция $x_1(\alpha)$ возрастает, функция $x_2(\alpha)$ убывает и $x_1(1) = \frac{7}{9} = x_2(1)$. Таким образом, уравнения (5) задают нечеткое число треугольной формы $X \approx \langle\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}\rangle$.

Пример 2. Пусть

$$A = \langle 1{,}2{,}3\rangle,\ B = \langle -3,-2,-1\rangle,\ C = \langle 3{,}4{,}5\rangle.$$

Уравнение $AX + B = C$ является нечеткой версией уравнения $2x - 2 = 4$. Считая, что $X^\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$ для α-среза получаем следующее интервальное уравнение:

$$[1+\alpha, 3-\alpha]\cdot[x_1(\alpha), x_2(\alpha)] + [-3+\alpha, -1-\alpha] = [3+\alpha, 5-\alpha].$$

Находим

$$x_1(\alpha) = \frac{6}{1+\alpha},\ x_2(\alpha) = \frac{6}{3-\alpha} \tag{6}$$

Функция $x_1(\alpha)$ убывает, а функция $x_2(\alpha)$ возрастает, поэтому интервалы (6) не задают нечеткого числа. Таким образом, в этом примере линейное уравнение не имеет классического нечеткого решения.

3.3. Линейные уравнения с нечеткими коэффициентами: решение по принципу обобщения и интервальное решение

Последний пример из предыдущего параграфа показывает, что линейное уравнение с нечеткими коэффициентами может не иметь классического решения.

Снова рассмотрим уравнение вида

$$AX + B = C, \tag{7}$$

где A, B, C – нечеткие (треугольные) числа:

$$A = \langle a_1, a, a_2 \rangle,\ B = \langle b_1, b, b_2 \rangle,\ C = \langle c_1, c, c_2 \rangle.$$

Обобщенное решение уравнения (7) (т.е. решение, полученное в соответствии с принципом обобщения) – это нечеткое подмножество X в $\boldsymbol{R}$ со следующей функцией принадлежности:

$$\mu_X(x) = \sup\{\min(\mu_A(a), \mu_B(b), \mu_C(c))\ |ax + b = c\}.$$

Пусть $X^\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$. Тогда

$$x_1(\alpha) = \min\{(c-b)/a | a \in A^\alpha, b \in B^\alpha, c \in C^\alpha\},$$

$$x_2(\alpha) = \max\{(c-b)/a | a \in A^\alpha, b \in B^\alpha, c \in C^\alpha\}.$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение из примера 1:

$$A = \langle 8,9,10 \rangle,\ B = \langle -3,-2,-1 \rangle,\ C = \langle 3,5,7 \rangle$$

и

$$\langle 8,9,10 \rangle X + \langle -3,-2,-1 \rangle = \langle 3,5,7 \rangle.$$

Вычислим

$$x_1(\alpha) = \min(c-b)/a$$

при

$$a \in [8+\alpha, 10-\alpha],\ b \in [-3+\alpha, -1-\alpha],\ c \in [3+2\alpha, 7-2\alpha].$$

Получаем

$$x_1(\alpha) = \frac{4+3\alpha}{10-\alpha}.$$

Аналогично

$$x_2(\alpha) = \max(c-b)/a$$

при

$$a \in [8+\alpha, 10-\alpha],\ b \in [-3+\alpha, -1-\alpha],\ c \in [3+2\alpha, 7-2\alpha].$$

Получаем

$$x_2(\alpha) = \frac{10-3\alpha}{8+\alpha}.$$

Таким образом,

$$X \approx \langle \frac{2}{5}, \frac{7}{9}, \frac{5}{4} \rangle.$$

Теорема 3. Если классическое решение уравнения (7) существует, то $X_C \leq X_E$, где X_C – классическое решение, а X_E – обобщенное решение.

Обобщенное решение существует и в тех случаях, когда классическое решение отсутствует.

Еще один претендент на роль решения уравнения (7) – так называемое *интервальное* решение. Оно получается заменой числовых величин в формуле $x = (c-b)/a$ уровневыми интервалами:

$$X^\alpha = (C^\alpha - B^\alpha)/A^\alpha.$$

Теорема 4. Если X_E – обобщенное решение, а X_I – интервальное решение, то $X_E \leq X_I$.

Мы будем придерживаться следующего алгоритма поиска решения уравнений вида $AX + B = C$. Если существует классическое решение X_C, в качестве решения принимается именно оно (оно является решением в алгебраическом смысле). Если классическое решение отсутствует, в качестве решения принимается обобщенное решение X_E. В качестве «приближенного» решения может использоваться интервальное решение X_I.

Упражнения

1. Решить уравнение $AX + B = C$ при

$$A = \langle 1,2,3 \rangle,\ B = \langle -3,-2,-1 \rangle,\ C = \langle 3,4,5 \rangle.$$

(см. пример 2 из п. 3.2).

2. Решить уравнение $AX + B = C$:
   а) $A = \langle 3,5,6\rangle$, $B = \langle 1,2,3\rangle$, $C = \langle -4,-3,-2\rangle$;
   б) $A = \langle -3,-2,-1\rangle$, $B = \langle 1,2,3\rangle$, $C = \langle 5,6,8\rangle$.
3. Для каждого из предыдущих уравнений найти интервальное решение, сравнить его с классическим (если последнее существует) и с обобщенным решением.

Задача

Найти в общем виде обобщенное решение уравнения

$$\langle a_1, a, a_2\rangle X + \langle b_1, b, b_2\rangle = \langle c_1, c, c_2\rangle.$$

в случае, когда $a_1 > 0$ и $c_1 > b_2$.

3.4. Системы линейных уравнений с нечеткими коэффициентами

Пусть

$A = (A_{ij})$ – квадратная матрица порядка n, составленная из треугольных нечетких чисел $A_{ij} = \langle a_{ij1}, a_{ij}, a_{ij2}\rangle$, $i, j = 1, \dots, n$;

$B = (B_1, \dots, B_n)^t$ – столбец высоты n, составленный из треугольных нечетких чисел $B_i = \langle b_{i1}, b_i, b_{i2}\rangle$ $i = 1, \dots, n$;

$X = (X_1, \dots, X_n)^t$ – столбец высоты n, составленный из нечетких неизвестных.

Рассмотрим систему уравнений, представленную в матричной форме:

$$AX = B. \tag{8}$$

Положим

$$B^\alpha = (B_1^\alpha, \dots, B_n^\alpha)^t, A^\alpha = \left(A_{ij}^\alpha\right).$$

Классическое решение системы (8) получается как результат интервальных решений уровневых систем уравнений вида:

$$A^\alpha \begin{pmatrix} [x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)] \\ \dots \\ [x_{n1}(\alpha), x_{n2}(\alpha)] \end{pmatrix} = B^\alpha.$$

Заметим, что эти системы содержат по $2n$ неизвестных и $2n$ уравнений. Классическое решение может и не существовать (как мы

2. Решить уравнение $AX + B = C$:
   а) $A = \langle 3,5,6 \rangle$, $B = \langle 1,2,3 \rangle$, $C = \langle -4,-3,-2 \rangle$;
   б) $A = \langle -3,-2,-1 \rangle$, $B = \langle 1,2,3 \rangle$, $C = \langle 5,6,8 \rangle$.
3. Для каждого из предыдущих уравнений найти интервальное решение, сравнить его с классическим (если последнее существует) и с обобщенным решением.

Задача

Найти в общем виде обобщенное решение уравнения

$$\langle a_1, a, a_2 \rangle X + \langle b_1, b, b_2 \rangle = \langle c_1, c, c_2 \rangle.$$

в случае, когда $a_1 > 0$ и $c_1 > b_2$.

3.4. Системы линейных уравнений с нечеткими коэффициентами

Пусть

$A = (A_{ij})$ – квадратная матрица порядка n, составленная из треугольных нечетких чисел $A_{ij} = \langle a_{ij1}, a_{ij}, a_{ij2} \rangle$, $i, j = 1, \dots, n$;

$B = (B_1, \dots, B_n)^t$ – столбец высоты n, составленный из треугольных нечетких чисел $B_i = \langle b_{i1}, b_i, b_{i2} \rangle$ $i = 1, \dots, n$;

$X = (X_1, \dots, X_n)^t$ – столбец высоты n, составленный из нечетких неизвестных.

Рассмотрим систему уравнений, представленную в матричной форме:

$$AX = B. \tag{8}$$

Положим

$$B^\alpha = (B_1^\alpha, \dots, B_n^\alpha)^t, A^\alpha = (A_{ij}^\alpha).$$

Классическое решение системы (8) получается как результат интервальных решений уровневых систем уравнений вида:

$$A^\alpha \begin{pmatrix} [x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)] \\ \dots \\ [x_{n1}(\alpha), x_{n2}(\alpha)] \end{pmatrix} = B^\alpha.$$

Заметим, что эти системы содержат по $2n$ неизвестных и $2n$ уравнений. Классическое решение может и не существовать (как мы

Пусть $X_{Ej}^{\alpha} = [x_{j1}(\alpha), x_{j2}(\alpha)]$. Тогда

$$X_{Ej1}(\alpha) = \min\{\Delta_j/\Delta | u \in A^{\alpha}, v \in B^{\alpha}\};$$

$$X_{Ej2}(\alpha) = \max\{\Delta_j/\Delta | u \in A^{\alpha}, v \in B^{\alpha}\}.$$

Через X_I обозначим решение, полученное в результате интервальных вычислений.

Теорема 5. Справедливы следующие соотношения

$$X_{Jj} \leq X_{Ej} \leq X_{Ij}.$$

Если существует классическое решение, то

$$X_{Cj} \leq X_{Jj}.$$

Пример 4. Рассмотрим СЛУ

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

где

$$A_{11} = \langle 9,10,11 \rangle, A_{12} = \langle 19,20,21 \rangle,$$

$$A_{21} = \langle 29,30,31 \rangle, A_{22} = \langle 49,50,51 \rangle,$$

$$B_1 = \langle 39,40,41 \rangle, B_2 = \langle 109,110,111 \rangle.$$

Пусть

$$X_1^{\alpha} = [x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)], X_2^{\alpha} = [x_{21}(\alpha), x_{22}(\alpha)],$$

Для нахождения точного решения получаем семейство уравнений:

$$\begin{pmatrix} [9+\alpha, 11-\alpha] & [19+\alpha, 21-\alpha] \\ [29+\alpha, 31-\alpha] & [49+\alpha, 51-\alpha] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)] \\ [x_{21}(\alpha), x_{22}(\alpha)] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [39+\alpha, 41-\alpha] \\ [109+\alpha, 111-\alpha] \end{pmatrix}.$$

Находим:

$$x_{11}(\alpha) = \frac{16+4\alpha}{11-\alpha}, x_{12}(\alpha) = \frac{24-4\alpha}{9+\alpha},$$

$$x_{21}(\alpha) = \frac{15-5\alpha}{11-\alpha}, x_{22}(\alpha) = \frac{5+5\alpha}{9+\alpha}.$$

На промежутке $[0,1]$ функция $x_{11}(\alpha)$ возрастает, функция $x_{12}(\alpha)$ убывает. Уровневые интервалы $[x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)]$ задают нечеткое число X_1 с функцией принадлежности

$$X_1(x) = \begin{cases} \frac{11x-16}{x+4}, & \text{если} \quad x \in [\frac{16}{11}, 2] \\ \frac{24-9x}{x+4}, & \text{если} \quad x \in [2, \frac{16}{11}] \end{cases}.$$

Имеем $X_1 \approx \langle \frac{16}{11}, 2, \frac{24}{9} \rangle$. Аналогично, $X_2 \approx \langle \frac{5}{9}, 1, \frac{15}{11} \rangle$.

Нахождение совместного решения X_J в этом примере связано со значительными трудностями. Например, его α-срез при $\alpha = 0$ состоит из всех векторов вида $u^{-1}v$, при $u \in A^0$, $v \in B^0$, где

$$A^0 = [9,11] \times [19,21] \times [29,31] \times [49,51],$$

$$B^0 = [39,41] \times [109,111].$$

Если $u \in A^0$ фиксировано, множество векторов $u^{-1}v$, $v \in B^0$, (обозначим его $u^{-1}B^0$) образует четырехугольник с вершинами

$$u^{-1}\,(39,109)^t, u^{-1}\,(39,111)^t, u^{-1}\,(41,111)^t, u^{-1}\,(41,109)^t.$$

Например, при $u = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$, получаем четырехугольник с вершинами $(2{,}3; 0{,}8)$, $(2{,}7; 0{,}6)$, $(1{,}7; 1{,}2)$, $(1{,}3; 1{,}4)$. Чтобы получить X_J^0,нужно взять объединение все таких четырехугольников при $u \in A^0$.

Пример 5. Рассмотрим СЛУ

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 1 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

где

$$A_{11} = \langle 1,2,3 \rangle, A_{22} = \langle 2,4,5 \rangle,$$

$$B_1 = \langle -1,0,1 \rangle, B_2 = \langle 3,4,5 \rangle.$$

Пусть

$$X_1^\alpha = [x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)], X_2^\alpha = [x_{21}(\alpha), x_{22}(\alpha)],$$

Для нахождения классического решения получаем систему уравнений

$$[1+\alpha, 3-\alpha][x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)] = [-1+\alpha, 1-\alpha];$$

$$[x_{11}\,(\alpha), x_{12}(\alpha)] + [2+2\alpha, 5-\alpha][x_{21}(\alpha), x_{22}(\alpha)] = [3+\alpha, 5-\alpha].$$

Находим:

$$x_{11}(\alpha) = \frac{-1+\alpha}{1+\alpha}, x_{12}(\alpha) = \frac{1-\alpha}{3-\alpha},$$

$$x_{21}(\alpha) = \frac{4+3\alpha+\alpha^2}{2+4\alpha+2\alpha^2}, x_{22}(\alpha) = \frac{14-7\alpha+\alpha^2}{15-8\alpha+\alpha^2}.$$

На промежутке $[0,1]$ функция $x_{11}(\alpha)$ возрастает, функция $x_{12}(\alpha)$ убывает. Уровневые интервалы $[x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)]$ задают нечеткое число X_1 с функцией принадлежности

$$X_1(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x}, & \text{если} \quad x \in [-1,0] \\ \frac{1-3x}{1-x}, & \text{если} \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \end{cases}.$$

Имеем $X_1 \approx \langle -1; 0; \frac{1}{3} \rangle$. Функция $x_{21}(\alpha)$ на промежутке $[0,1]$ убывает, а $x_{22}(\alpha)$ возрастает, поэтому $x_{21}(\alpha)$ и $x_{22}(\alpha)$ не задают нечеткого числа. Таким образом, рассматриваемая система не имеет классического решения.

Для совместного решения X_J его α-срез – это множество всех векторов вида $u^{-1}v$, при $u \in A^0$, $v \in B^0$, где

$$u = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & s \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

$$t \in [1+\alpha, 3-\alpha], s \in [2+2\alpha, 5-\alpha],$$

$$p \in [-1+\alpha, 1-\alpha], q \in [3+\alpha, 5-\alpha]$$

Имеем:

$$u^{-1}v = \begin{pmatrix} \frac{p}{t} \\ \frac{1}{s}\left(q - \frac{p}{t}\right) \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$x_{J1}(\alpha) = \frac{p}{t} \in \left[\frac{-1+\alpha}{1+\alpha}; \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right], x_{J2}(\alpha) = \frac{1}{s}\left(q - \frac{p}{t}\right),$$

$$x_{J2}(\alpha)_{\min} = \frac{1}{5-\alpha}\left(3 + \alpha - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right), x_{J2}(\alpha)_{\max} = \frac{1}{2+2\alpha}\left(5 - \alpha - \frac{-1+\alpha}{1+\alpha}\right).$$

Множество X_J^α представляет собой четырехугольник с вершинами

$$\left(\frac{-1+\alpha}{1+\alpha}; \frac{1}{5-\alpha}\left(3 + \alpha - \frac{-1+\alpha}{1+\alpha}\right)\right),$$

Находим:

$$x_{11}(\alpha) = \frac{-1+\alpha}{1+\alpha},\ x_{12}(\alpha) = \frac{1-\alpha}{3-\alpha},$$

$$x_{21}(\alpha) = \frac{4+3\alpha+\alpha^2}{2+4\alpha+2\alpha^2},\ x_{22}(\alpha) = \frac{14-7\alpha+\alpha^2}{15-8\alpha+\alpha^2}.$$

На промежутке $[0,1]$ функция $x_{11}(\alpha)$ возрастает, функция $x_{12}(\alpha)$ убывает. Уровневые интервалы $[x_{11}(\alpha), x_{12}(\alpha)]$ задают нечеткое число X_1 с функцией принадлежности

$$X_1(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1-x}, & \text{если} \quad x \in [-1,0] \\ \frac{1-3x}{1-x}, & \text{если} \quad x \in [0,\frac{1}{3}] \end{cases}.$$

Имеем $X_1 \approx \langle -1; 0; \frac{1}{3} \rangle$. Функция $x_{21}(\alpha)$ на промежутке $[0,1]$ убывает, а $x_{22}(\alpha)$ возрастает, поэтому $x_{21}(\alpha)$ и $x_{22}(\alpha)$ не задают нечеткого числа. Таким образом, рассматриваемая система не имеет классического решения.

Для совместного решения X_J его α-срез – это множество всех векторов вида $u^{-1}v$, при $u \in A^0$, $v \in B^0$, где

$$u = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & s \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

$$t \in [1+\alpha, 3-\alpha],\ s \in [2+2\alpha, 5-\alpha],$$

$$p \in [-1+\alpha, 1-\alpha],\ q \in [3+\alpha, 5-\alpha]$$

Имеем:

$$u^{-1}v = \begin{pmatrix} \frac{p}{t} \\ \frac{1}{s}\left(q - \frac{p}{t}\right) \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$x_{J1}(\alpha) = \frac{p}{t} \in \left[\frac{-1+\alpha}{1+\alpha}; \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right],\ x_{J2}(\alpha) = \frac{1}{s}\left(q - \frac{p}{t}\right),$$

$$x_{J2}(\alpha)_{\min} = \frac{1}{5-\alpha}\left(3+\alpha - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right),\ x_{J2}(\alpha)_{\max} = \frac{1}{2+2\alpha}\left(5-\alpha - \frac{-1+\alpha}{1+\alpha}\right).$$

Множество X_J^α представляет собой четырехугольник с вершинами

$$\left(\frac{-1+\alpha}{1+\alpha}; \frac{1}{5-\alpha}\left(3+\alpha - \frac{-1+\alpha}{1+\alpha}\right)\right),$$

Будем предполагать, что матрица производственных коэффициентов A составлена из неотрицательных треугольных нечетких чисел, суммы чисел в столбцах меньше 1. При этих условиях план производства X существует при любом неотрицательном векторе потребления B.

Рассмотрим систему, содержащую две отрасли. Найти объемы производства при следующих данных:

	Отрасль 1	**Отрасль 2**	**Потребление**	**Производство**
О 1	$\langle 0{,}25; 0{,}3; 0{,}35\rangle$	$\langle 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5\rangle$	$\langle 60; 70; 80\rangle$	X_1
О 2	$\langle 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6\rangle$	$\langle 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4\rangle$	$\langle 50; 60; 70\rangle$	X_2

Исследовать, что произойдет в случае, если $A_{11} = \langle 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5\rangle$.

Будем предполагать, что матрица производственных коэффициентов A составлена из неотрицательных треугольных нечетких чисел, суммы чисел в столбцах меньше 1. При этих условиях план производства X существует при любом неотрицательном векторе потребления B.

Рассмотрим систему, содержащую две отрасли. Найти объемы производства при следующих данных:

	Отрасль 1	**Отрасль 2**	**Потребление**	**Производство**
О 1	$\langle 0{,}25; 0{,}3; 0{,}35\rangle$	$\langle 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5\rangle$	$\langle 60; 70; 80\rangle$	X_1
О 2	$\langle 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6\rangle$	$\langle 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4\rangle$	$\langle 50; 60; 70\rangle$	X_2

Исследовать, что произойдет в случае, если $A_{11} = \langle 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5\rangle$.

C учетом этого на конец второго года на счету будет сумма

$$A + AR - B + (A + AR - B)R.$$

Умножение дистрибутивно относительно сложения в случае, когда слагаемые положительны. Поэтому

$$A + AR - B + (A + AR - B)R =$$
$$= A - B + AR + (A - B)R + AR^2 =$$
$$= AR^2 + (2A - B)R + A - B.$$

Приходим к уравнению

$$AR^2 + (2A - B)R + A - B = C. \tag{1}$$

Пусть

$$A = \langle 0{,}8; 1; 1{,}2\rangle;$$
$$B = \langle 0{,}2; 0{,}25; 0{,}3\rangle;$$
$$C = \langle 0{,}6; 0{,}9; 1{,}2\rangle.$$

Запишем уравнение (1) для α-срезов. Имеем:

$$A^\alpha = [0{,}8 + 0{,}2\alpha; 1{,}2 - 0{,}2\alpha];$$
$$B^\alpha = [0{,}2 + 0{,}05\alpha; 0{,}3 - 0{,}05\alpha];$$
$$C^\alpha = [0{,}6 + 0{,}3\alpha; 1{,}2 - 0{,}3\alpha];$$
$$(A - B)^\alpha = [0{,}5 + 0{,}25\alpha; 1 - 0{,}25\alpha];$$
$$(2A - B)^\alpha = [1{,}3 + 0{,}45\alpha; 2{,}2 - 0{,}45\alpha].$$

С учетом этого для $R^\alpha = [r_1(\alpha), r_2(\alpha)]$ получаем уравнения:

$$(0{,}8 + 0{,}2\alpha)r_1(\alpha)^2 + (1{,}3 + 0{,}45\alpha)r_1(\alpha) + 0{,}5 + 0{,}25\alpha = 0{,}6 + 0{,}3\alpha;$$
$$(1{,}2 - 0{,}2\alpha)r_2(\alpha)^2 + (2{,}2 - 0{,}45\alpha)r_1(\alpha) + 1 - 0{,}25\alpha = 1{,}2 - 0{,}3\alpha.$$

Решая уравнения, находим $r_1(\alpha)$ и $r_2(\alpha)$, задающие классическое решение.

Задача 3. Деньги инвестированы таким образом, что через год доход составит примерно 100000 у.е. На эти деньги предполагается сформировать портфель из двух активов. Доходность первого составляет примерно 10% (А) второго – примерно 35% (В). Доходность портфеля должна составить примерно 15% (C). Сколько денег должно быть вложено в первый актив, и сколько во второй?

Решение. Обозначим через S сумму, которую предполагается потратить на формирование портфеля. Пусть A – доходность первого актива, B – доходность второго актива, а C – доходность портфеля. Обозначим через X и Y суммы, которые должны быть инвестированы в первый и второй активы соответственно. Тогда

$$\begin{cases} AX + BY &= CS \\ X + Y &= S \end{cases}.$$

Пусть

$$S = \langle 99900; 100000; 100100 \rangle;$$

$$A = \langle 0{,}05; 0{,}10; 0{,}15 \rangle;$$

$$B = \langle 0{,}30; 0{,}35; 0{,}40 \rangle;$$

$$C = \langle 0{,}14; 0{,}15; 0{,}16 \rangle.$$

Получаем уравнения для α-сечений:

$$(0{,}05 + 0{,}05\alpha)x_1(\alpha) + (0{,}30 + 0{,}05\alpha)y_1(\alpha) =$$

$$= (0{,}14 + 0{,}01\alpha)(99900 + 100\alpha);$$

$$(0{,}15 - 0{,}05\alpha)x_2(\alpha) + (0{,}40 - 0{,}05\alpha)y_2(\alpha) =$$

$$= (0{,}16 - 0{,}01\alpha)(100100 - 100\alpha);$$

$$x_1(\alpha) + y_1(\alpha) = 99900 + 100\alpha;$$

$$x_2(\alpha) + y_2(\alpha) = 100100 - 100\alpha.$$

Классического решения не существует.

Пусть $W = (X, Y)$ – совместное решение. Найдем $\operatorname{supp} W$. Имеем:

$$(x,\ y) \in \operatorname{supp} W \Leftrightarrow ax\ +\ by \in \operatorname{supp} CS \,\&\, x\ +\ y \in \operatorname{supp} S$$

для некоторых $a \in \operatorname{supp} A$, $\in \operatorname{supp} B$. Это равносильно системе неравенств:

$$0{,}05x + 0{,}30y \le 100100 \cdot 0{,}16;$$

$$0{,}15x + 0{,}40y \ge 99900 \cdot 0{,}14;$$

$$99900 \le x + y \le 100100.$$

Упражнения

1. Обосновать утверждения, содержащиеся в приведенном кратком решении задачи 1.
2. В задаче 2:

   а) найти классическое решение;

   б) найти функцию принадлежности R.
3. В задаче 3:

а) найти $\operatorname{supp} W$. На основе этого записать X и Y как приближенные треугольные нечеткие числа;

б) записать неравенства, задающие W^α;

в) найти $X^\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$, $Y^\alpha = [y_1(\alpha), y_2(\alpha)]$;

г) найти функции принадлежности для X и Y (предполагаем, что $X, Y \geq 0$).

4.2. Дисконтирование и наращение

Предположим, что денежная сумма A инвестирована на K лет с постоянной процентной ставкой R. В конце срока накопленная сумма окажется равной S. Если числа A, K, R, S четкие, справедливы соотношения:

$$\text{а) } S = A(1+R)^K, \text{ б) } A = \frac{S}{(1+R)^K}. \tag{2}$$

В случае, когда величины A, K, R, S нечеткие, связь между A и S оказывается уже не столь однозначной.

Начнем со случая, когда число периодов определено точно. Пусть $K = k$ – четкое число. Будем предполагать, что A и R – нечеткие числа, носители которых расположены правее нуля ($A, R > 0$). В конце первого периода получаем наращенную сумму $S = A + AR$. Поскольку умножение положительных нечетких чисел дистрибутивно относительно сложения, имеем $S = A(1 + R)$. На конец второго периода получаем:

$$S = A(1+R) + A(1+R)R = A(1+R)^2$$

Аналогичным образом

$$S = A(1+R)^k \tag{3}$$

для любого целого положительного числа периодов k.

Запишем равенство (3) для уровневых множеств.

Пусть

$$A^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)],\ S^\alpha = [s_1(\alpha), s_2(\alpha)],\ R^\alpha = [r_1(\alpha), r_2(\alpha)].$$

Тогда

$$s_1(\alpha) = a_1(\alpha)(1 + r_1(\alpha))^k;\ s_2(\alpha) = a_2(\alpha)(1 + r_2(\alpha))^k \quad (4)$$

Допустим теперь, что и число периодов K определено нечетко. Будем предполагать, что функция принадлежности $\mu_K(k)$ определена на множестве натуральных чисел и имеет конечный носитель. Тогда в соответствии с принципом обобщения

$$\mu_S(s) = \max\{\min\{\mu_A(a), \mu_R(r), \mu_K(k)\} | a(1 + r)^k = s\}. \quad (5)$$

Формула (5) позволяет вычислять наращенную сумму. Обратимся теперь к задаче дисконтирования. Задачу дисконтирования можно формулировать как задачу решения уравнения (2а) относительно A и как задачу вычисления A по формуле (2б). В случае четких вычислений результаты совпадают, в случае нечетких могут различаться. Поэтому в случае нечеткости важна еще и содержательная постановка задачи.

Рассмотрим сначала уравнение (3), считая, что $K = k$ – четкое число. Для α-срезов имеем уравнения (4). Используя их, получаем:

$$a_1(\alpha) = \frac{s_1(\alpha)}{(1+r_1(\alpha))^k};\ a_2(\alpha) = \frac{s_2(\alpha)}{(1+r_2(\alpha))^k}. \quad (6)$$

Функции $a_1(\alpha)$ и $a_2(\alpha)$ задают нечеткое число, если $a_1(\alpha)$ не убывает, $a_2(\alpha)$ не возрастает и при этом $a_1(\alpha) \le a_2(\alpha)$ при всех α. Перечисленные условия обеспечивают разрешимость уравнения (3) относительно A в смысле существования классического решения

Пример 1. Пусть $S = \langle 900; 1000; 1100 \rangle$, $R = \langle 0{,}04; 0{,}05; 0{,}06 \rangle$, $k = 3$. Решая уравнение (3), получаем

$$a_1(\alpha) = \frac{900+100\alpha}{(1{,}04+0{,}01\alpha)^3};\ a_2(\alpha) = \frac{1100-100\alpha}{(1{,}06-0{,}01\alpha)^3}. \quad (7)$$

Нетрудная (хотя и громоздкая) проверка показывает, что функции (7) задают нечеткое число A. Легко убедиться, что

$$A \approx \langle 800{,}10; 863{,}84; 923{,}58 \rangle.$$

Обратимся теперь к вычислению A по формуле $A = \frac{S}{(1+R)^K}$. В соответствии с принципом обобщения имеем

$$\mu_A(a) = \max\{\min\{\mu_S(s), \mu_R(r), \mu_K(k)\} | a = \frac{s}{(1+r)^k}\}. \quad (8)$$

Снова ограничимся случаем, когда $K = k$ – четкое число. Формула (8) приобретает тогда следующий вид

$$\mu_A(a) = \max\{\min\{\mu_S(s), \mu_R(r)\} | a = \frac{s}{(1+r)^k}\}. \tag{9}$$

Для α-срезов получаем:

$$a_1(\alpha) = \min\left\{\frac{s}{(1+r)^k} \mid s \in S^\alpha, r \in R^\wedge\alpha\right\};$$

$$a_2(\alpha) = \max\left\{\frac{s}{(1+r)^k} \mid s \in S^\alpha, r \in R^\alpha\right\}.$$

Следовательно,

$$a_1(\alpha) = \frac{s_1(\alpha)}{\left(1+r_2(\alpha)\right)^k}; a_2(\alpha) = \frac{s_2(\alpha)}{\left(1+r_1(\alpha)\right)^k}. \tag{10}$$

Несложно доказать, что формулы (9) и (10) задают одно и то же нечеткое число. Это число является решением уравнения (3), полученным по принципу обобщения, или, с использованием термина, введенного в разделе 3, обобщенным решением уравнения (3).

Пример 2. Воспользуемся данными из примера 1. По формулам (10) получаем

$$A \approx \langle 755,66; 863,84; 977,90\rangle.$$

Заметим, что обобщенное решение существует и в тех случаях, когда классическое решение отсутствует, т.е. формулы (6) не задают нечеткого числа.

Упражнения

1. Вычислить наращенную сумму S (найти уровневые множества и функцию принадлежности), если начальная сумма A определена как нечеткое число $A = \langle 900{,}1000{,}1100\rangle$, процентная ставка R – как нечеткий интервал $R = \langle 0{,}08; 0{,}09; 0{,}10; 0{,}11\rangle$, а число периодов k равно 3.
2. Положим $S(k) = A(1 + R)^k$.
   а) Доказать, что

$$\mu_S(s) = \max\{\min\{\mu_{S(n)}(s), \mu_K(k)\} | k \in \boldsymbol{N}\}, \tag{11}$$

где $\mu_S(s)$ определено формулой (5), а $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел.

Снова ограничимся случаем, когда $K = k$ – четкое число. Формула (8) приобретает тогда следующий вид

$$\mu_A(a) = \max\{\min\{\mu_S(s), \mu_R(r)\} | a = \frac{s}{(1+r)^k}\}. \quad (9)$$

Для α-срезов получаем:

$$a_1(\alpha) = \min\left\{\frac{s}{(1+r)^k} \mid s \in S^\alpha, r \in R^\wedge\alpha\right\};$$

$$a_2(\alpha) = \max\left\{\frac{s}{(1+r)^k} \mid s \in S^\alpha, r \in R^\alpha\right\}.$$

Следовательно,

$$a_1(\alpha) = \frac{s_1(\alpha)}{(1+r_2(\alpha))^k};\ a_2(\alpha) = \frac{s_2(\alpha)}{(1+r_1(\alpha))^k}. \quad (10)$$

Несложно доказать, что формулы (9) и (10) задают одно и то же нечеткое число. Это число является решением уравнения (3), полученным по принципу обобщения, или, с использованием термина, введенного в разделе 3, обобщенным решением уравнения (3).

Пример 2. Воспользуемся данными из примера 1. По формулам (10) получаем

$$A \approx \langle 755,66; 863,84; 977,90\rangle.$$

Заметим, что обобщенное решение существует и в тех случаях, когда классическое решение отсутствует, т.е. формулы (6) не задают нечеткого числа.

Упражнения

1. Вычислить наращенную сумму S (найти уровневые множества и функцию принадлежности), если начальная сумма A определена как нечеткое число $A = \langle 900{,}1000{,}1100\rangle$, процентная ставка R – как нечеткий интервал $R = \langle 0{,}08; 0{,}09; 0{,}10; 0{,}11\rangle$, а число периодов k равно 3.
2. Положим $S(k) = A(1+R)^k$.
   а) Доказать, что

$$\mu_S(s) = \max\{\min\{\mu_{S(n)}(s), \mu_K(k)\} | k \in \boldsymbol{N}\}, \quad (11)$$

где $\mu_S(s)$ определено формулой (5), а $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел.

В теории нечетких множеств не предполагается, что неопределенная величина подчиняется объективным закономерностям (как в теории вероятностей), но в то же время на интервале ее значений задано некоторое распределение возможностей, отражающее представления экспертов о большей или меньшей реалистичности в принципе возможных значений. Подходы, основанные на методах теории нечетких множеств и связанных с ними так называемых «мягких вычислениях», позволяют трансформировать оценку возможности исходных данных в оценку возможности результатов. Эти оценки не имеют такой точной интерпретации, как вероятностные, тем не менее, они дают полезную информацию для принятия обоснованных решений.

В настоящем разделе рассматриваются денежные потоки, в которых неопределенность связана с платежами. Процентные ставки и временные периоды считаются определенными четко.

Приведем необходимые определения.

Последовательность (конечная или бесконечная)

$$(t_0, C_0), (t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n), \ldots, \tag{12}$$

где (t_k, C_k), $k = 1,2, \ldots,$ – пара, состоящая из момента времени t и значения денежной суммы C (возможно, нечеткой) называется *дискретным денежным потоком*. Предполагается, что $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$. В случае бесконечного потока мы предполагаем дополнительно, что t_k неограниченно возрастает с ростом k.

Замечание. Если $t_0 = 0$, $t_1 = 1, \ldots,$ денежный поток представляют последовательностью платежей $C_0, C_1, \ldots$.

Для обозначения денежных потоков традиционно используется символ *CF* (от английского cash flow).

Пусть

$$CF = \{(t_0, C_0), (t_1, C_1), (t_2, C_2), \ldots, (t_n, C_n), \ldots\} - \tag{13}$$

поток поступлений на некоторый накопительный счет. Начисление процентов на накопленную сумму происходит по схеме сложных процентов при действующей эффективной ставке i. Определим сумму, накопленную к моменту времени $t \in [t_n, t_{n+1})$ (если (t_n, C_n) – последнее поступление, можно считать, что $t_{n+1} = \infty$). Накопленная сумма составит

$$FV_t(CF, i) = C_0(1+i)^{t-t_0} + C_1(1+i)^{t-t_1} + \cdots + C_k(1+i)^{t-t_k}. \tag{14}$$

Величину (14) называют *будущим* значением потока (13) для момента t. Если ясно, о каком потоке идет речь, и какова процентная ставка, пишут просто FV_t. В случае, когда поток (13) конечен, и $t = t_n$ – момент последнего платежа, используются обозначения $FV(CF, i)$ и FV. Так, для конечного потока (13) можно написать

$$FV = C_0(1+i)^{t_n-t_0} + C_1(1+i)^{t_n-t_1} + \cdots + C_n. \qquad (15)$$

Сумма всех платежей денежного потока, приведенных (дисконтированных) к некоторому моменту времени t, называется *текущим*, или *приведенным значением* потока (в момент времени t), и обозначается $PV_t(CF, i)$, или просто PV_t. Таким образом,

$$PV_t = \frac{C_0}{(1+i)^{t_0-t}} + \frac{C_1}{(1+i)^{t_1-t}} + \cdots \qquad (16)$$

В случае бесконечного потока текущее значение считается определенным лишь в том случае, когда ряд в правой части (16) сходится.

Если $t_0 = t = 0$, текущее значение потока в начальный момент времени обозначается просто PV:

$$PV = C_0 + \frac{C_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{t_2}} + \cdots .$$

Введение понятия непрерывного денежного потока с нечеткими платежами требует в общем случае привлечения довольно сложного и громоздкого математического аппарата. Мы ограничимся рассмотрением непрерывных денежных потоков, обладающих плотностью.

Плотность непрерывного денежного потока $Y(t)$ представляет собой предельное приращение нетто суммы $X(t)$ в момент времени t. Неформально можно сказать, что величины $X(t)$ и $Y(t)$ связаны дифференциальным уравнением

$$dX(t) = Y(t)dt.$$

Более точно существо дела передает интегральное уравнение

$$X(t) = \int_0^t Y(\tau)d\tau. \qquad (17)$$

Чтобы избежать технических осложнений, мы будем предполагать, что для каждого t значение величины $Y(t)$ представляет собой треугольное нечеткое число $\langle y_1(t), y(t), y_2(t)\rangle$, причем функции $y_1(t)$, $y(t)$, $y_2(t)$ непрерывны. Тогда уравнение (17) сводится к системе из трех уравнений:

$$x_1(t) = \int_0^t y_1(\tau)d\tau,\ x(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau,\ x_2(t) = \int_0^t y_2(\tau)d\tau, \qquad (18)$$

где нетто суммы $X(t)$ представлены треугольными нечеткими числами $\langle x_1(t), x(t), x_2(t)\rangle$.

Пусть δ – сила роста при непрерывном начислении процентов. Тогда к моменту времени t накопленная сумма составляет величину

$$S(t) = \int_0^t Y(\tau) e^{\delta(t-\tau)} d\tau \,.$$

Соответственно, текущая стоимость потока платежей с плотностью $Y(t)$ за промежуток времени от 0 до T составляет величину

$$P = e^{-\delta T} \int_0^T Y(\tau) e^{\delta(T-\tau)} d\tau = \int_0^T Y(\tau) e^{-\delta \tau} d\tau \qquad (19)$$

Заметим, что, если процентная ставка является четким числом, а все платежи треугольными нечеткими числами, то будущая стоимость (14) и приведенная стоимость (16), (19) являются треугольными нечеткими числами. Если процентная ставка оказывается нечеткой, описание нечетких чисел FV и PV существенно усложняется. Они оказываются L-R-числами с нелинейными граничными функциями. Впрочем, записать нечеткие числа FV и PV с помощью α-срезов сравнительно несложно.

Пример 3. Пусть

$$C_0 = \langle -300; -200; -100 \rangle,\ C_1 = \langle -100; 100; 150; 200 \rangle$$

$$C_2 = \langle 300; 350; 400; 500 \rangle,\ C_3 = \langle 600; 700; 800; 900 \rangle.$$

Найдем наращенную стоимость FV потока $CF = \{C_0, C_1, C_2 C_3\}$ относительно процентной ставки $R = \langle 0{,}09; 0{,}10; 0{,}11 \rangle$.

Пусть $FV^\alpha = [v_1(\alpha); v_2(\alpha)]$. Тогда

$$v_2(\alpha) = (-100 - 100\alpha)(0{,}09 + 0{,}01\alpha)^3 +$$
$$+(200 - 50\alpha)(0{,}11 - 0{,}01\alpha)^2 +$$
$$+(500 - 100\alpha)(0{,}11 - 0{,}01\alpha) +$$
$$+(900 - 100\alpha).$$

Далее,

$$v_1(\alpha) = (-300 + 100\alpha)(0{,}11 - 0{,}01\alpha)^3 +$$
$$+(-100 + 200\alpha)(0{,}11 - 0{,}01\alpha)^2 +$$
$$+(300 + 500\alpha)(0{,}09 + 0{,}01\alpha) +$$
$$+(600 + 100\alpha).$$

при $\alpha \leq 0{,}5$ и

$$v_1(\alpha) = (-300 + 100\alpha)(0{,}11 - 0{,}01\alpha)^3 +$$
$$+(-100 + 200\alpha)(0{,}09 + 0{,}01\alpha)^2 +$$
$$+(300 + 500\alpha)(0{,}09 + 0{,}01\alpha) +$$
$$+(600 + 100\alpha).$$

при $\alpha \geq 0{,}5$. Например, $FV^{0{,}8} = [748.94; 864.34]$.

Упражнения

1. Вычислить наращенную и приведенную стоимость денежного потока $CF = \{C_0, C_1, C_2\}$ относительно процентной ставки $i = 10\%$, если
$$C_0 = \langle -1100; -1000; -900 \rangle,$$
$$C_1 = \langle 700; 800; 900 \rangle,\ C_2 = \langle 600; 700; 800 \rangle.$$
2. Найти текущую стоимость 10-летней ренты с годовым платежом $A = \langle 10000; 12000; 15000; 20000 \rangle$ относительно процентной ставки $i = 12\%$.
3. Плотность денежного потока имеет вид $Y(t) = \langle 9 + t; 10 + t; 11 + t \rangle$, $t \in [0; 3]$. Найти приведенную стоимость потока, если процентная ставка составляет 10%.
4. Вычислить приведенную стоимость денежного потока из примера 3.

4.4. Кейс: оценка потока платежей

В этом разделе мы разберем пример оценки стоимости потока платежей. Будет рассмотрен поток платежей, связанный с деятельностью компании по производству мороженого.

Максимальная дневная прибыль компании приходится на конец июня – начало июля и составляет около 12 у.е. в день. В декабре – январе дневная прибыль падает до нуля. Полученная прибыль в течение года зачисляется на банковский счет. По окончании года накопленные средства инвестируются. При принятии инвестиционных решений руководитель компании исходит из того, что приемлемая норма доходности должна составлять примерно 10%. Требуется определить сумму, накопленную за пять лет, если банки начисляют на вклад примерно 4% годовых.

Для моделирования дневной прибыли компании будем использовать следующую функцию, значения которой – треугольные нечеткие числа:

$$Y(t) = D \cdot \sin(\pi t),\ 0 \le t \le 1, \tag{20}$$

В формуле (20) время t измеряется в годах (для заданного дня t равно номеру дня в году, деленному на 365); $D = 365 \cdot \langle 10, 12, 13 \rangle$. Функция $Y(t)$ задает плотность потока прибыли компании, полученной от производственной деятельности.

Пусть $R = \langle 0{,}03;\ 0{,}04;\ 0{,}06 \rangle$ – банковский процент (эффективная ставка при непрерывном начислении процентов), а $I = \langle 0{,}09;\ 0{,}1;\ 0{,}12 \rangle$ – приемлемая норма доходности для инвестиций.

Накопленная сумма за год составит величину:

$$S = \int_0^1 D(1+R)^{1-t} \sin(\pi t) dt.$$

Запишем α- срезы данных треугольных чисел:

$$D^\alpha = [d_1(\alpha); d_2(\alpha)] = 365 \cdot [10 + 2\alpha; 13 - \alpha];$$

$$R^\alpha = [r_1(\alpha); r_2(\alpha)] = [0{,}03 + 0{,}01\alpha; 0{,}06 - 0{,}02\alpha];$$

$$I^\alpha = [i_1(\alpha); i_2(\alpha)] = [0{,}09 + 0{,}01\alpha; 0{,}12 - 0{,}02\alpha].$$

Будем искать накопленную сумму за год в виде

$$S^\alpha = [s_1(\alpha); s_2(\alpha)],$$

где

$$s_1(\alpha) = \int_0^1 d_1(\alpha)\big(1 + r_1(\alpha)\big)^{1-t} \sin(\pi t) dt,$$

$$s_2(\alpha) = \int_0^1 d_2(\alpha)\big(1 + r_2(\alpha)\big)^{1-t} \sin(\pi t) dt.$$

Дважды применяя формулу интегрирования по частям, можно показать, что

$$\int_0^1 (1+r)^{1-t} \sin(\pi t) dt = \frac{\pi(2+r)}{\ln^2(1+r) + \pi^2}.$$

Тогда находим:

$$s_1(\alpha) = \frac{\pi d_1(\alpha)(2 + r_1(\alpha))}{\ln^2(1 + r_1(\alpha)) + \pi^2};$$

$$s_2(\alpha) = \frac{\pi d_2(\alpha)(2 + r_2(\alpha))}{\ln^2(1 + r_2(\alpha)) + \pi^2}.$$

Таким образом,

$$S^\alpha = \left[\frac{365\pi(10+2\alpha)(2{,}03+0{,}01\alpha)}{\ln^2(1{,}03+0{,}01\alpha)+\pi^2}; \frac{365\pi(13-\alpha)(2{,}06-0{,}02\alpha)}{\ln^2(1{,}06-0{,}02\alpha)+\pi^2}\right].$$

В частности,

$$\operatorname{Supp} S = [2358{,}4; 3110{,}4], S^1 = 2843{,}8.$$

За пять лет имеем постоянный денежный поток с годовым платежом S. Накопленная сумма за пять лет составляет

$$FV = S(1+I)^4 + S(1+I)^3 + S(1+I)^2 + S(1+I) + S =$$
$$= S((1+I)^4 + (1+I)^3 + (1+I)^2 + (1+I) + 1)).$$

Будем искать будущее значение финансового потока в виде интервала

$$FV^\alpha = [v_1(\alpha); v_2(\alpha)].$$

Тогда

$$v_1(\alpha) = s_1(\alpha)\cdot\frac{(1+i_1(\alpha))^5-1}{i_1(\alpha)};\ v_2(\alpha) = s_2(\alpha)\cdot\frac{(1+i_2(\alpha))^5-1}{i_2(\alpha)}.$$

Более подробно:

$$v_1(\alpha) = \frac{365\pi(10+2\alpha)(2{,}03+0{,}01\alpha)}{\ln^2(1{,}03+0{,}01\alpha)+\pi^2}\cdot\frac{(1{,}09+0{,}01\alpha)^5-1}{0{,}09+0{,}01\alpha};$$

$$v_1(\alpha) = \frac{365\pi(13-\alpha)(2{,}06-0{,}02\alpha)}{\ln^2(1{,}06-0{,}02\alpha)+\pi^2}\cdot\frac{(1{,}12-0{,}02\alpha)^5-1}{0{,}12-0{,}02\alpha}.$$

Можно убедиться, что функция $v_1(\alpha)$ возрастает на промежутке $[0; 1]$, а функция $v_2(\alpha)$ убывает на промежутке $[0; 1]$. При этом

$$Supp\, FV = [14101; 19710], FV^1 = 17362,$$

так что можно записать

$$FV \approx \langle 14101; 17362; 19710\rangle.$$

Упражнения

1. Провести подробные расчеты, связанные с разобранной задачей.
2. Найти уровень α, при котором стоимость потока платежей превысит 16500 тыс. у.е.
3. Рассчитать приведенную стоимость потока платежей.

4.5. Числовые характеристики инвестиционных проектов с нечеткими платежами

Мы будем считать, что инвестиционный проект продолжительности n временных периодов задается потоком платежей

$$CF = (a_0, a_1, \ldots, a_n), \tag{21}$$

каждая компонента которого a_i при $i \geq 1$ представляет собой баланс инвестиционных затрат и чистого дохода за период i, актуализированный на конец этого периода, а $|a_0|$ – объем начальных инвестиций. Говорят, что проект, заданный потоком платежей (21), *типичный*, если все платежи, за исключением начального (инвестиционного), неотрицательны.

Более формально, *типичный инвестиционный проект* задается потоком платежей вида (21), в котором $a_0 < 0$, $a_i \geq 0$ при всех $i \geq 1$ и $a_n > 0$. Мы будем дополнительно предполагать, что типичный проект не убыточен:

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n > 0.$$

Величина

$$NPV(r) = a_0 + \frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(1+r)^n}$$

называется *чистым дисконтированным доходом* проекта (21) относительно ставки приведения r (сокращенно ЧДД или NPV).

Показатель чистого дисконтированного дохода используется как критерий приемлемости проекта: если $NPV(r) < 0$, проект неэффективен и должен быть отвергнут. Показатель чистого дисконтированного дохода может быть использован и при сравнении проектов: проект с бóльшим NPV считается более эффективным.

В случае типичного проекта непрерывная функция $NPV(r)$, убывая, меняет знак с плюса на минус на промежутке (0; 1). Значение r, для которого $NPV(r) = 0$, называют *внутренней нормой доходности* (сокращенно – ВНД или IRR). В случае типичных проектов внутренняя норма доходности является критерием эффективности проектов: проект с более высокой внутренней нормой более эффективен.

При оценке проектов в условиях неопределенности значения a_i из (21) могут определяться неоднозначно. В этом случае речь идет о количественной оценке степени возможности тех или иных сценариев. Многие проекты в определенном смысле уникальны и применение вероятностных методов при их оценке может оказаться необоснованным. В подобных ситуациях значения a_i целесообразно трактовать как нечеткие. Например, предположим, что группа экспертов делает прогноз относительно значения некоторой величины A. Каждый эксперт указывает интервал возможных значений. В этом случае каждому действительному числу x можно приписать вес $\mu_A(x)$, равный доле экспертов, включивших x в свой прогнозный интервал. Таким образом, возможное значение величины A описывается некоторой функцией $\mu_A(x)$.

Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ – последовательность нечетких величин, соответствующих платежам, отнесенным к моментам времени $t = 0, 1, 2 \ldots n$. Формула

$$\mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = \min\{\mu_{A_0}(x_0), \mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

для $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1 \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ задает функцию принадлежности $n+1$-мерной нечеткой величины $\boldsymbol{A}$. Если выполняются аксиомы рационального поведения, оценка эффективности проектов, рассматриваемая как отображение из $\boldsymbol{R}^{n+1}$ в $\boldsymbol{R}$, имеет вид

$$v^r(\boldsymbol{x}) = x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{x_n}{(1+r)^n} \qquad (22),$$

где r трактуется как ставка дисконтирования. В соответствии с принципом обобщения образ $\boldsymbol{A}$ относительно отображения $v^r(\boldsymbol{x})$ из (22) – это нечеткое подмножество $NPV^r(\boldsymbol{A})$ в $\boldsymbol{R}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{NPV^r(\boldsymbol{A})}(w) = \sup_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1}} \{\mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) | v^r(\boldsymbol{x}) = w\}.$$

Если ставка дисконтирования также является нечеткой, то может быть использована более общая формула

$$\mu_{NPV(\boldsymbol{A})}(w) = \sup_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1}} \{\min\{\mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}), \mu_R(r)\} | v^r(\boldsymbol{x}) = w\}. \qquad (23)$$

Из формулы (23) следует, что

$$NPV^r(\boldsymbol{A}) = A_0 + \frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(1+r)^n}. \qquad (24)$$

Рассмотрим случай, когда все нечеткие величины A_i, $i = 0,1, \ldots, n$, являются треугольными нечеткими числами:

$$A_i = \langle a_{i1}, a_i, a_{i2} \rangle,\ i = 0,1, \ldots, n.$$

Положим

$$\boldsymbol{a}_1 = (a_{i1})_{i=0,\dots,n},\ \boldsymbol{a} = (a_i)_{i=0,\dots,n},\ \boldsymbol{a}_2 = (a_{i2})_{i=0,\dots,n}.$$

В соответствии с (23) и (24) $NPV^r(\boldsymbol{A})$ является треугольным нечетким числом, причем

$$NPV^r(\boldsymbol{A}) = (v^r(\boldsymbol{a}_1), v^r(\boldsymbol{a}), v^r(\boldsymbol{a}_2)). \tag{25}$$

На множестве $D \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$, определяемом неравенствами $x_0 < 0$ и $x_i > 0$ при $i = 1,2,\dots,n$, уравнение

$$v^r(\boldsymbol{a}) = 0$$

задает r как неявную функцию:

$$r = H(\boldsymbol{x}).$$

Предположим, что носитель нечеткой величины $\boldsymbol{A}$ содержится в области D, т.е. $a_{02} < 0$ и $a_{i1} > 0$ при $i = 1,\dots,n$. В соответствии с принципом обобщения образом $\boldsymbol{A}$ относительно отображения H служит нечеткая величина $IRR = H(\boldsymbol{A})$ с функцией принадлежности, заданной уравнением

$$\mu_{IRR}(r) = \sup_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n+1}} \left\{\min\left\{\mu_{A_0}(x_0), \mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\right\} \middle| v^r(\boldsymbol{x}) = 0\right\}. \tag{26}$$

Формулу (26) можно принять в качестве определения нечеткого значения внутренней нормы доходности IRR. Значение r принадлежит α-срезу нечеткого множества IRR, если $v^r(\boldsymbol{x}) = 0$ для некоторого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ такого, что $\mu_{A_i}(x_i) \geq \alpha$ для всех $i = 0,1,\dots,n$.

Положим

$$w_1^r(\alpha) = v^r(\boldsymbol{a}_1 + \alpha(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_1)),$$

$$w_2^r(\alpha) = v^r\left(\boldsymbol{a}_2 - \alpha(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a})\right).$$

В силу монотонности функции $v^r(\boldsymbol{x})$ по $\boldsymbol{x}$ значение r принадлежит α-срезу нечеткой величины IRR, если $w_1^r(\alpha) \leq 0$ и $w_2^r(\alpha) \geq 0$. Максимальное значение α, для которого $r \in IRR^\alpha$, соответствует значению функции принадлежности $\mu_{IRR}(r)$ и получается следующим образом:

$\mu_{IRR}(r) = 0$, если оба значения $v^r(\boldsymbol{a}_1)$ и $v^r(\boldsymbol{a}_2)$ положительны или отрицательны;

$$\mu_{IRR}(r) = \frac{-v^r(\boldsymbol{a}_1)}{v^r(\boldsymbol{a}) - v^r(\boldsymbol{a}_1)},\ \text{если } v^r(\boldsymbol{a}_1) \leq 0 \text{ и } v^r(\boldsymbol{a}) \geq 0;$$

$$\mu_{IRR}(r) = \frac{v^r(\boldsymbol{a}_2)}{v^r(\boldsymbol{a}_2) - v^r(\boldsymbol{a})}, \text{ если } v^r(\boldsymbol{a}) \le 0 \text{ и } v^r(\boldsymbol{a}_2) \ge 0.$$

Это приводит нас к заключению, что

$$\mu_{IRR}(r) = \mu_{NPV^r}(0). \quad (27)$$

Формула (27) имеет прозрачный смысл: число r может быть значением внутренней нормы доходности в той мере, в какой 0 может быть значением чистой приведенной стоимости относительно ставки приведения r.

Покажем теперь, что нечеткое множество IRR является нечетким числом в случае, когда $\boldsymbol{A}$ – типичный инвестиционный проект.

Теорема. Если $\boldsymbol{A}$ – типичный инвестиционный проект, нечеткое множество IRR, определенное формулой (27), является нечетким числом.

Доказательство. Проект $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ по предположению является типичным и, значит, для него корректно определена внутренняя норма доходности. Обозначим ее через r_0. Тогда $v_0^r(\boldsymbol{a}) = 0$ и, следовательно, $\mu_{IRR}(r_0) = 1$ в соответствии с (26) и (27). Далее, проекты $\boldsymbol{a}_1 = (a_{01}, a_{11}, \dots, a_{n1})$ и $\boldsymbol{a}_2 = (a_{02}, a_{12}, \dots, a_{n2})$ также являются типичными. Пусть r_1 и r_2 – их внутренние нормы доходности соответственно. Тогда $\mu_{IRR}(r) = 0$ при $r \le r_1$ или $r \ge r_2$. Осталось показать, что функция $\mu_{IRR}(r)$ возрастает на промежутке $[r_1, r_0]$ и убывает на промежутке $[r_0, r_2]$.

Рассмотрим случай $r \in (r_0, r_2)$. Введем для удобства следующие обозначения. Положим $x = (1+r)^{-1}$ и пусть $x_0 = (1+r_0)^{-1}$. Мы будем рассматривать величины $y = v^r(\boldsymbol{a})$ и $d = v^r(\boldsymbol{a}_2) - v^r(\boldsymbol{a})$ как функции x. Требуется показать, что величина

$$m(x) = \frac{y(x) + d(x)}{d(x)}$$

возрастает при $x < x_0$.

Заметим, что y монотонно возрастает с ростом x и $y(x_0) = 0$, так что $y(x) < 0$ при $x < x_0$. Знак производной $m'(x)$ совпадает со знаком величины

$$h = y'(x)d(x) - y(x)d'(x).$$

Пусть $d_i = a_{i2} - a_i$, $i = 0,1, \dots, n$. Тогда

$$h = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} \cdot \sum_{i=0}^{n} d_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{n} i d_i x^{i-1}. \quad (28)$$

$$\mu_{IRR}(r) = \frac{v^r(\boldsymbol{a}_2)}{v^r(\boldsymbol{a}_2) - v^r(\boldsymbol{a})}, \text{ если } v^r(\boldsymbol{a}) \leq 0 \text{ и } v^r(\boldsymbol{a}_2) \geq 0.$$

Это приводит нас к заключению, что

$$\mu_{IRR}(r) = \mu_{NPV^r}(0). \qquad (27)$$

Формула (27) имеет прозрачный смысл: число r может быть значением внутренней нормы доходности в той мере, в какой 0 может быть значением чистой приведенной стоимости относительно ставки приведения r.

Покажем теперь, что нечеткое множество IRR является нечетким числом в случае, когда $\boldsymbol{A}$ – типичный инвестиционный проект.

Теорема. Если $\boldsymbol{A}$ – типичный инвестиционный проект, нечеткое множество IRR, определенное формулой (27), является нечетким числом.

Доказательство. Проект $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ по предположению является типичным и, значит, для него корректно определена внутренняя норма доходности. Обозначим ее через r_0. Тогда $v_0^r(\boldsymbol{a}) = 0$ и, следовательно, $\mu_{IRR}(r_0) = 1$ в соответствии с (26) и (27). Далее, проекты $\boldsymbol{a}_1 = (a_{01}, a_{11}, \dots, a_{n1})$ и $\boldsymbol{a}_2 = (a_{02}, a_{12}, \dots, a_{n2})$ также являются типичными. Пусть r_1 и r_2 – их внутренние нормы доходности соответственно. Тогда $\mu_{IRR}(r) = 0$ при $r \leq r_1$ или $r \geq r_2$. Осталось показать, что функция $\mu_{IRR}(r)$ возрастает на промежутке $[r_1, r_0]$ и убывает на промежутке $[r_0, r_2]$.

Рассмотрим случай $r \in (r_0, r_2)$. Введем для удобства следующие обозначения. Положим $x = (1 + r)^{-1}$ и пусть $x_0 = (1 + r_0)^{-1}$. Мы будем рассматривать величины $y = v^r(\boldsymbol{a})$ и $d = v^r(\boldsymbol{a}_2) - v^r(\boldsymbol{a})$ как функции x. Требуется показать, что величина

$$m(x) = \frac{y(x) + d(x)}{d(x)}$$

возрастает при $x < x_0$.

Заметим, что y монотонно возрастает с ростом x и $y(x_0) = 0$, так что $y(x) < 0$ при $x < x_0$. Знак производной $m'(x)$ совпадает со знаком величины

$$h = y'(x)d(x) - y(x)d'(x).$$

Пусть $d_i = a_{i2} - a_i$, $i = 0,1, \dots, n$. Тогда

$$h = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} \cdot \sum_{i=0}^{n} d_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{n} i d_i x^{i-1}. \qquad (28)$$

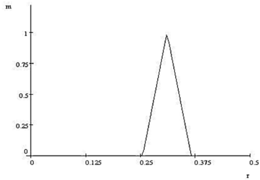

Рис. 1. Функция принадлежности IRR (типичный проект)

Переход к четкой оценке (дефаззификация) может быть проведен, например, с использованием критерия Гурвица. Для этого нужно выбрать приемлемый «уровень доверия» α и подходящее значение параметра оптимизма-пессимизма λ. Тогда четкое значение внутренней нормы доходности irr вычисляется по формуле

$$irr = \lambda \cdot irr_1(\alpha) + (1-\lambda) \cdot irr_2(\alpha),$$

где

$$IRR^{\alpha} = [irr_1(\alpha), irr_2(\alpha)] -$$

α-срез нечеткого множества IRR.

Можно рандомизировать уровни, приписав α-уровням «субъективные вероятности» и вычисляя математическое ожидание:

$$irr = M_{\alpha}[\lambda \cdot irr_1(\alpha) + (1-\lambda) \cdot irr_2(\alpha)]. \qquad (32)$$

Заметим, что определение нечеткой нормы внутренней доходности по формуле (32) может быть использовано и в тех случаях, когда «классическое» значение внутренней нормы доходности не определяется корректным образом.

Пример 2. Пусть

$$A_0 = \langle -1010, -1000, -990 \rangle;$$

$$A_1 = \langle 4490, 4500, 4510 \rangle;$$

$A_2 = \langle -6550, -6540, -6520 \rangle;$

$A_3 = \langle 3060, 3080, 3100 \rangle.$

График функции принадлежности нечеткого множества IRR представлен на рис.2. Видно, что на уровне $\alpha = 0{,}5$ возможные значения образуют интервал, расположенный в положительной зоне. Значит, на этом уровне может быть применен критерий Гурвица.

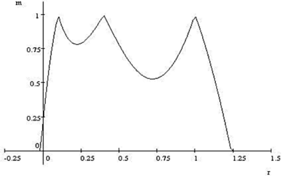

Рис. 2. Функция принадлежности *IRR* (нетипичный проект)

Таким образом, в «нетипичном» случае появляется возможность использовать внутреннюю норму доходности, ограничившись определенным уровнем доверия.

Упражнения

1. Оценить, используя NPV, какой из следующих проектов является более предпочтительным.

Проект 1. Начальные инвестиции примерно 1000 у.е. Последующие ожидаемые поступления по годам: 500, 400, 300, 200, 100.

Проект 2. Начальные инвестиции примерно 1000 у.е. Последующие ожидаемые поступления по годам: 100, 200, 300, 400, 500, 600.

Процентная ставка – примерно 10%.

а) Провести расчеты для следующих данных

Год	Проект 1	Проект 2
0	$\langle -1010; -1000; -990\rangle$	$\langle -1100; -1000; -900\rangle$
1	$\langle 450;\ 500;\ 550\rangle$	$\langle 50;\ 100;\ 150\rangle$
2	$\langle 350;\ 400;\ 450\rangle$	$\langle 150;\ 200;\ 250\rangle$
3	$\langle 250;\ 300;\ 350\rangle$	$\langle 250;\ 300;\ 350\rangle$
4	$\langle 150;\ 200;\ 250\rangle$	$\langle 350;\ 400;\ 450\rangle$
5	$\langle 50;\ 100;\ 150\rangle$	$\langle 450;\ 500;\ 550\rangle$
6		$\langle 550;\ 600;\ 650\rangle$

б) Провести сравнение проектов при условии, что проект 2 продлится, скорее всего, шесть лет (оценка 0,8), но возможно, закончится и после пятого года (оценка 0,3).

в) Провести расчеты, считая, что, начиная со второго года, значения платежей считаются нечеткими интервалами. Носители остаются теми же, что и раньше. Ядро (интервал модальных значений) имеет ширину 0 для первого года, 20 – для второго, 40 – для третьего и 60 для последующих лет.

Указание. Представить процентную ставку треугольным нечетким числом $R = \langle 0{,}09; 0{,}10; 0{,}11\rangle$. Показать, что для денежных потоков 1 и 2 их ЧДД является нечетким числом треугольной формы:

$$NPV_1 \approx \langle -99{,}27; 209{,}21; 528{,}2\rangle;$$

$$NPV_2 \approx \langle 41{,}25; 403{,}94; 728{,}13\rangle.$$

Найти значения α, для которых $NPV_1^{\alpha} \le NPV_2^{\alpha}$. Показать, что, если пренебречь маловероятными сценариями, второй проект предпочтительнее первого про критерию ЧДД.

2. а) Вычислить внутреннюю норму доходности потока 1 из упражнения 1 за первые два года.

б) Вычислить внутреннюю норму доходности потоков 1 и 2 из упражнения 1.

5. Нечеткие отношения

5.1. Нечеткие n-арные отношения

Нечеткое (n-арное) *отношение* между элементами множеств X_1, X_2, …, X_n – это нечеткое подмножество декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Нечеткое -арное отношение R задается своей функцией принадлежности $\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Нечеткие -арные отношения при $n > 2$ используются, как правило, при построении баз данных.

Пример 1. Предположим, что группа из пяти экспертов А, Б, В, Г, Д делает прогноз относительно трех возможных сценариев развития событий. В основу базы данных положены два отношения. Первое связывает эксперта с его профессиональной областью. Второе дает оценку вероятности экспертами тех или иных сценариев. Для каждого эксперта указывается его профессиональная область. Оценка дается в терминах: весьма вероятно (1), вероятно (2), возможно (3), маловероятно (4), практически невозможно (5). Исходная информация приведена в следующих таблицах

Отношение $\boldsymbol{E}$: Эксперт ($\boldsymbol{n = 2}$)

Имя	**А**	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
Область	политолог	экономист	экономист	экономист	политолог

Отношение A: Оценка ($n = 3$)

Сценарий	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Z	Z
Эксперт	А	Б	Д	Б	В	Г	Д	А	В
Оценка	2	4	1	2	1	2	5	4	5

(эксперты не были обязаны высказать свое мнение относительно всех сценариев).

Кроме того, имеется таблица совместимости оценок, представляющая собой нечеткое бинарное отношение (сходство оценок):

Отношение R: совместимость оценок

	1	2	3	4	5
1	1	0,8	0,5	0	0
2	0,8	1	0,8	0,2	0
3	0,5	0,8	1	0,6	0,3
4	0	0,2	0,6	1	0,8
5	0	0	0,3	0,8	1

Таблица, задающее отношение A, на самом деле задает его ядро –тройки элементов, для которых значение функции принадлежности равно единице. Пусть $\chi_A(x,e,v)$ – характеристическая функция этого четкого отношения, т.е. $\chi_A(x,e,v) = 1$, если тройка (сценарий x, эксперт e, оценка v) представлена в таблице, и $\chi_A(x,e,v) = 0$ в противном случае.

Используя отношение R, мы получаем нечеткое тернарное отношение A:

$$\mu_A(x,e,v) \ = \ \sup_{v'} \{ \min(\chi_A(x,e,v'), \ \mu_R(v,v')) \}$$

Добавление специализации привело бы к возникновению кватернарного отношения.

Нечеткие -арные отношения возникают и в оптимизационных задачах, но здесь более важными оказываются их свойства как нечетких подмножеств.

Пример 2. Для автоперевозок формируется парк грузовых автомобилей. Доступны четыре типа грузовиков. Для грузовиков каждого типа известен средний дневной объем перевозок (производительность):

Тип	**1**	**2**	**3**	**4**
Производительность	0,8	1,4	2,1	2,4

Ежедневно должен быть обеспечен минимальный объем перевозок 170. Общее число рабочих машино-часов с учетом двусменной работы по 16 часов в сутки должно быть не меньше заданной величины

1300. Для моделирования прогнозных оценок используются нечеткие неравенства

$$0{,}8x_1 + 1{,}4x_2 + 2{,}1x_3 + 2{,}4x_4 \geq_f 170, \quad (1)$$

$$16x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 16x_4 \geq_f 1300 \quad (2)$$

с уровнями толерантности соответственно 10 и 100. Последнее означает, что неравенства могут «немного нарушаться», но тогда оценка их выполнения снижается:

$$\langle x \geq_f 170 \rangle = \max(0, \min(1{,}0{,}1(x - 160))),$$

$$\langle x \geq_f 1300 \rangle = \max(0, \min(1{,}0{,}01(x - 1200))).$$

Неравенства (1) и (2) задают нечеткие подмножества S и T в $\boldsymbol{R}^4$. Пересечение $S \cap T$ определяет нечеткое множество допустимых решений. Можно рассматривать эти множества как кватернарные отношения, связывающие число автомобилей по типам.

Применительно к нечетким -арным отношениям часто используются операции проекции и цилиндрического расширения.

Для определенности рассмотрим нечеткое тернарное отношение $R \subset X_1 \times X_2 \times X_3$. Его проекция на произведение $X_1 \times X_2$ – это нечеткое подмножество$R_{12} \subset X_1 \times X_2$ с функцией принадлежности

$$R_{12}(x_1, x_2) = \sup\{R(x_1, x_2, x_3) | x_3 \in X_3\}.$$

(здесь мы пишем для краткости $R(x_1, x_2, x_3)$ вместо $\mu_R(x_1, x_2, x_3)$ и аналогично в других случаях). Подобным же образом определяются проекции R на другие произведения.

В общем случае, если $R \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, проекция R_J определена относительно любого произведение вида $\prod_{j \in J} X_j$, где $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

Операция цилиндрического расширения является в некотором смысле операцией, обратной к операции проекции. Пусть $R_{12} \subset X_1 \times X_2$ – некоторое нечеткое отношение. Его цилиндрическое расширение на произведение $X_1 \times X_2 \times X_3$ – это максимальное нечеткое подмножество в $X_1 \times X_2 \times X_3$, проекция которого на $X_1 \times X_2$ совпадает с R_{12}. Цилиндрическое расширение обозначим через $\mathrm{cyl}(R_{12})$. Очевидно,

$$\mathrm{cyl}(R_{12})(x_1, x_2, x_3) = R_{12}(x_1, x_2).$$

Пусть $R \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ – нечеткое тернарное отношение. Как следует из определения,

$$R \subset \mathrm{cyl}(R_{12}) \cap \mathrm{cyl}(R_{13}) \cap \mathrm{cyl}(R_{23}) \cap \mathrm{cyl}(R_1) \cap \mathrm{cyl}(R_2) \cap \mathrm{cyl}(R_3). \quad (3)$$

Включение в (3) может быть собственным. Отсутствие равенства в (3) говорит о том, что отношение R не сводится к отношениям меньших размерностей.

Упражнения

1. Найти нечеткое отношение A из примера 1. Найти уровневое множество $A^{0,5}$.
2. Построить проекцию отношения A из упражнения 1 на каждый из множителей и на произведение первых двух множителей.
3. Проверить выполнение формулы (3) для отношения A из упражнения 1.
4. Для нечеткого множества $S \cap T$ из примера 2 найти уровневое множество $(S \cap T)^{0,5}$.

5.2. Свойства нечетких бинарных отношений

Напомним, что нечеткие отношения R вида $R \subset X \times X$ мы называем бинарными. В дальнейшем мы будем под отношением понимать бинарное отношение, специально оговаривая другие случаи.

Нечеткое бинарное отношение R на множестве X называется:

- *рефлексивным*, если $\mu_R(x, x) = 1$ для всех $x \in X$;
- *антирефлексивным*, если $\mu_R(x, x) = 0$ для всех $x \in X$;
- *симметричным*, если $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ для всех $x, y \in X$;
- *асимметричным*, если $\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = 0$;
- *антисимметричным*, если $\mu_R(x, y) > 0$ влечет $\mu_R(y, x) = 0$ для любых $x, y \in X$, $x \neq y$;
- *транзитивным*, если $\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) \leq \mu_R(x, z)$ для любых $x, y, z \in X$;
- *отрицательно транзитивным*, если
$$\mu_R(x, y) \leq \max(\mu_R(x, z), \mu_R(z, y))$$
для любых $x, y, z \in X$;
- *полутранзитивным*, если
$$\min(\mu_R(x, w), \mu_R(w, y)) \leq \max(\mu_R(x, z), \mu_R(z, y))$$
для любых $x, y, z, w \in X$;
- *отношением полупорядка (отношением Ферререрса)*, если
$$\min(\mu_R(x, y), \mu_R(z, w)) \leq \max(\mu_R(x, w), \mu_R(z, y))$$
для любых $x, y, z, w \in X$;

- *полным*, если $\max\left(\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\right) = 1$ для любых $x, y \in X$.

Приведенные определения обобщают свойства четких бинарных отношений. Возможны и другие варианты обобщений.

Свойства нечеткого отношения R можно сформулировать, используя операции над отношениями:

- *R рефлексивно тогда и только тогда, когда $\Delta_X \subset R$;*
- *R антирефлексивно тогда и только тогда, когда $\Delta_X \cap R = \emptyset$;*
- *R симметрично тогда и только тогда, когда $R = R^{-1}$;*
- *R асимметрично тогда и только тогда, когда $R \cap R^{-1} = \emptyset$;*
- *R транзитивно тогда и только тогда, когда $R^2 \subset R$.*

Используя комбинации перечисленных свойств, можно получить важные классы нечетких бинарных отношений. Нечеткое бинарное отношение R на множестве X называется:

отношением эквивалентности, если R рефлексивно, симметрично и транзитивно;

отношением сходства, если R рефлексивно и симметрично;

отношением предпорядка, если R рефлексивно и транзитивно;

отношением порядка, если R рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Транзитивным замыканием нечеткого отношения R называют минимальное транзитивное отношение $\hat{R}$ такое, что $R \subset R^{\infty}$.

Упражнения

1. Доказать, что нечеткое отношение R на множестве X рефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно, отрицательно транзитивно, полутранзитивно, является отношением полупорядка, полно тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает каждый его α-срез R^{α}, рассматриваемый как четкое бинарное отношение на множестве X.
2. а) Пусть f – отображение множества X в множество действительных чисел и h – некоторое положительное число. Определим четкое отношение R на множестве X следующим образом: $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда $f(x) > f(y) + h$. Доказать, что отношение R полутранзитивно.

   б) На множестве открытых промежутков действительной прямой определим отношение $<$ следующим образом: $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$, если $b_1 < a_2$. Доказать, что отношение $<$ является отношение полупорядка.

3. Пусть R – четкое отношение. Доказать следующие утверждения:

а) отношение R отрицательно транзитивно тогда и только тогда его дополнение $\bar{R}$ транзитивно;

б) отношение R полутранзитивно тогда и только тогда его дополнение $\bar{R}$ полутранзитивно;

в) отношение R является отношением полупорядка тогда и только тогда его дополнение $\bar{R}$ является отношением полупорядка.

4. Пусть R – нечеткое отношение на множестве X. Доказать следующие утверждения:

а) если отношение R полно и транзитивно, то R отрицательно транзитивно, полутранзитивно и является отношением полупорядка;

б) если отношение R антисимметрично и отрицательно транзитивно, то R транзитивно, полутранзитивно и является отношением полупорядка;

в) если отношение R антирефлексивно и полутранзитивно (или является отношением полупорядка), то R транзитивно;

г) если отношение R рефлексивно и полутранзитивно (или является отношением полупорядка), то R отрицательно транзитивно.

5. а) Пусть множество X конечно и содержит $n \geq 2$ элементов, а R – нечеткое отношение на множестве X. Доказать, что транзитивное замыкание отношения R имеет следующий вид:

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^{n-1};$$

если R рефлексивно, то $\hat{R} = R^{n-1}$;

б) Доказать, что для любого нечеткого отношения R его транзитивное замыкание получается следующим образом:

$$\hat{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k.$$

6. Доказать, что транзитивное замыкание отношения сходства является отношением эквивалентности.

7. Указать, какими свойствами (из перечисленных выше) обладают следующие отношения:

а) отношение R «значительно меньше» на множестве $X = [1,100]$, имеющее функцию принадлежности $\mu_R(x,y) = \max\left(0, 1 - \frac{x}{y}\right)$;

б) отношение R «примерно равно» на множестве действительных чисел $X = [1,100]$, имеющее функцию принадлежности $\mu_R(x,y) = \max(0, 1 - |x - y|)$;

в) отношение R «значительно больше» на множестве действительных чисел, имеющее функцию принадлежности

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{100}{(x-y)^2}\right)^{-1}, x > y; \\ 0, x \le y. \end{cases}$$

5.3. Отношения эквивалентности

Напомним, что нечеткое отношение R на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно симметрично и транзитивно.

Пусть R – нечеткое отношение эквивалентности на множестве X. Любой α-срез R^α нечеткого отношения R является четким отношением эквивалентности на множестве X (см. упр.1 в предыдущем разделе). Каждое отношение эквивалентности R^α задает разбиение множества X на классы эквивалентности. Если $\alpha < \beta$, разбиение, соответствующее R^β, является более мелким, чем разбиение, соответствующее R^α. Это замечание позволяет описать строение нечетких отношений эквивалентности на конечном множестве: нечеткому отношению эквивалентности соответствует конечная последовательность измельчающихся разбиений. Эту последовательность разбиений называют *деревом разбиений* нечеткого отношения эквивалентности R.

Пример 3. Рассмотрим нечеткое отношение эквивалентности R, заданное на множестве $X = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ следующей таблицей:

	a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	***i***	***j***
a	1	1	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0
b	1	1	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0
c	1	1	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0
d	0,5	0,5	0,5	0,7	0,7	0	0	0	0	0
e	0,5	0,5	0,5	0,7	0,7	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0,2	0,2	0,2
g	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0,2	0,2	0,2
h	0	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
i	0	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,7	0,7
j	0	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,7	0,7

в) отношение R «значительно больше» на множестве действительных чисел, имеющее функцию принадлежности

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{100}{(x-y)^2}\right)^{-1}, x > y; \\ 0, x \le y. \end{cases}$$

5.3. Отношения эквивалентности

Напомним, что нечеткое отношение R на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно симметрично и транзитивно.

Пусть R – нечеткое отношение эквивалентности на множестве X. Любой α-срез R^α нечеткого отношения R является четким отношением эквивалентности на множестве X (см. упр.1 в предыдущем разделе). Каждое отношение эквивалентности R^α задает разбиение множества X на классы эквивалентности. Если $\alpha < \beta$, разбиение, соответствующее R^β, является более мелким, чем разбиение, соответствующее R^α. Это замечание позволяет описать строение нечетких отношений эквивалентности на конечном множестве: нечеткому отношению эквивалентности соответствует конечная последовательность измельчающихся разбиений. Эту последовательность разбиений называют *деревом разбиений* нечеткого отношения эквивалентности R.

Пример 3. Рассмотрим нечеткое отношение эквивалентности R, заданное на множестве $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ следующей таблицей:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a	1	1	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0
b	1	1	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0
c	1	1	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0
d	0,5	0,5	0,5	0,7	0,7	0	0	0	0	0
e	0,5	0,5	0,5	0,7	0,7	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0,2	0,2	0,2
g	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0,2	0,2	0,2
h	0	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
i	0	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,7	0,7
j	0	0	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,7	0,7

В ряде задач выбора и принятия решений имеет смысл рассматривать *нечеткие отношения предпочтения*. Для пары альтернатив $x, y \in X$ указывается интенсивность $\mu_R(x, y)$, с которой альтернатива x предпочитается альтернативе y (в случае нестрогого предпочтения говорят о том, в какой мере справедливо утверждение «*x не хуже, чем y*»). Например, если решение принимается группой экспертов, $\mu_R(x, y)$ может быть долей экспертов, которые считают, что x не хуже, чем y.

Свойства рефлексивности и транзитивности нечетких отношений обычно определяются так, как это было сделано в п. 5.2. Для свойства *линейности* используют несколько вариантов обобщения на случай нечетких отношений.

Нечеткое отношение R на множестве X называется *сильно линейным*, если $\max\big(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\big) = 1$ при любых $x, y \in X$.

Нечеткое отношение R на множестве X называется *слабо линейным*, если $\max\big(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\big) > 0$ при любых $x, y \in X$.

Пусть R – нечеткое отношение предпочтения на множестве X. Определим ассоциированные отношения *строго предпочтения* (P), *эквивалентности* (E) и *безразличия* (I) следующим образом:

$$P(x, y) = \max(0, R(x, y) - R(y, x));$$

$$E(x, y) = \min(R(x, y), R(y, x));$$

$$I(x, y) = \max(1 - \max(R(x, y), R(y, x)), \min(R(x, y), R(y, x))).$$

Теорема 1. Если отношение R рефлексивно и транзитивно, то

а) отношение E является нечетким отношением эквивалентности;

б) отношение P транзитивно, антирефлексивно и антисимметрично.

Рассмотрим *задачу выбора* на множестве альтернатив с заданным на нем нечетким отношением предпочтения. В случае четкого отношения предпочтения *рациональным* считается выбор *недоминируемых* альтернатив. В случае нечеткого отношения предпочтения R величину $P(y, x)$ естественно считать мерой того, насколько альтернатива x *доминируется* альтернативой y. *Мерой недоминируемости* является число $1 - P(y, x)$. В соответствии с принципом обобщения мерой принадлежности альтернативы x множеству недоминируемых альтернатив C является число

$$\mu_C(x) = \inf\{1 - P(y, x) \mid y \in X\}.$$

Теорема 2. Справедливо следующее равенство

$$\mu_C(x) = 1 - \sup\{R(y,x) - R(x,y) \mid y \in X\}.$$

Упражнения

1. Отношение предпочтения $R = (r_{ij})$ задано на множестве X в матричной форме:

   а) $(r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$;

   б) $(r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}7 & 1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

   1) Проверить, что нечеткое отношение R рефлексивно, транзитивно и слабо линейно.

   2) Построить ассоциированные отношения эквивалентности E и строгого предпочтения P.

   3) Построить функцию принадлежности нечеткого множества недоминируемых альтернатив C.

2. Построить путем голосования экспертов отношение предпочтения R на множестве, состоящем из нескольких европейских столиц: $R(x, y)$ – доля экспертов, считающих, что «x не хуже, чем y». По отношению R построить отношение строгого предпочтения P и нечеткое множество недоминируемых альтернатив C.

5.5. Седловые точки и недоминируемые альтернативы

Максимально недоминируемыми называются те альтернативы x, для которых величина $\mu_C(x)$ достигает своего максимального значения. Назовем *четко недоминируемыми* те альтернативы, для которых $\mu_C(x) = 1$. По определению множество четко недоминируемых альтернатив совпадает с уровневым множеством C^1.

Теорема 3. Если множество альтернатив конечно, а нечеткое отношение предпочтения рефлексивно и транзитивно, имеется, по крайней мере, одна четко недоминируемая альтернатива.

Выявляемые на практике отношения предпочтения далеко не всегда оказываются транзитивными. Процедура построения множества недоминируемых альтернатив может быть применена к произвольному отношению R, трактуемому как отношение предпочтения.

Пусть $f(x, y)$ – функция двух переменных, заданная на некотором множестве X. Точка (x^0, y^0) называется *седловой*, если в этой точке функция $f(x, y)$ достигает минимума по x и максимума по y:

$$f(x^0, y^0) \leq f(x, y^0), f(x^0, y^0) \geq f(x^0, y)$$

для любых $x, y \in X$.

Функция f(x,y) называется *кососимметрической*, если $f(y, x) = -f(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

Теорема 4 . Если (x^0, y^0) – седловая точка кососимметрической функции $f(x, y)$, то (x^0, x^0) и (y^0, y^0) – также седловые точки и при этом

$$f(x^0, x^0) = f((x^0, y^0) = f(y^0, y^0) = 0.$$

Пусть теперь R – нечеткое отношение предпочтения (необязательно транзитивное) на некотором множестве X. Тогда в соответствии с определением множества недоминируемых альтернатив C имеем:

$$C(x) = 1 - \sup\{R(y, x) - R(x, y) \mid y \in X\}.$$

Положим $f(x, y) = R(y, x) - R(x, y)$. Очевидно, функция $f(x, y)$ кососимметрическая.

Предположим, что x^0 – четко недоминируемая альтернатива, т.е. $C(x^0) = 1$. Тогда $f(x^0, y) \leq 0$ для любого $y \in X$. При этом $f(x^0, x^0) = 0$. Поэтому

$$f(x^0, x^0) \leq -f(x^0, x) = f(x, x^0), \qquad f(x^0, x^0) \geq f(x^0, y)$$

для любых $x, y \in X$.

Эти неравенства означают, что точка (x^0, x^0) является седловой точкой функции $f(x, y)$.

Обратно, если точка (x^0, x^0) является седловой точкой функции $f(x, y)$, то $C(x^0) = 1$. Более того, $C(x^0) = 1$ и $C(y^0) = 1$ тогда и только тогда, когда точка (x^0, y^0) является седловой точкой функции $f(x, y)$.

Для доказательства существования четко недоминируемых альтернатив и их поиска можно воспользоваться методами, направленными на поиск седловых точек. Приведем здесь в качестве примера формулировку одной теоремы о седловых точках.

Теорема 5. Пусть X – выпуклое компактное подмножество $\boldsymbol{R}^n$ и функция $\mu_R(x, y)$ обладает следующими свойствами:

$\mu_R(x, y)$ непрерывна на $X \times X$;

$\mu_R(x, y)$ квазивыпукла по x при любом $y \in X$;

$\mu_R(x, y)$ квазивогнута по y при любом $x \in X$.

Тогда в $X \times X$ имеется, по крайней мере, одна седловая точка.

Напомним, что функция $h(x)$ называется *квазивыпуклой*, если множество $\{x \mid h(x) \leq \alpha\}$ выпукло для любого α. Функция $h(x)$ называется *квазивогнутой*, если множество $\{x \mid h(x) \geq \alpha\}$ выпукло для любого α.

Эта теорема означает, что при выполнении ее условий в множестве X с нечетким отношением предпочтения R имеется по крайней мере одна четко недоминируемая альтернатива.

Упражнения

1. Доказать, что $R(x_1, x_2) = R(x_2, x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in C^1$.
2. Доказать, что $I(x_1, x_2) \geq 0$ для любых $x_1, x_2 \in C^1$.
3. Доказать, что если R сильно линейно, то $R(x, y) = 1$ для любой четко недоминируемой альтернативы $x \in C^1$ и произвольной альтернативы $y \in X$.
4. Доказать, что если R сильно линейно и транзитивно, и $C(y) < 1$, то $P(x, y) > 0$ для любой альтернативы $x \in C^1$.
5. Доказать, что если R сильно линейно и транзитивно, $x \in C^1$ и $E(y, x) = 1$, то $y \in C^1$.

5.6. Бинарные отношения в нечетком выводе

Пусть X и Y – множества, которые мы в контексте данного параграфа назовем соответственно множеством посылок и множеством заключений. Предположим, что задано нечеткое отношение $R \subset X \times Y$, которое интерпретируется следующим образом: число $R(x, y)$ является оценкой истинности утверждения «из x следует y». Один из типичных примеров: X – множество заболеваний, Y – множество симптомов,

$R(x, y)$ – вероятность того, что при заболевании x проявляется симптом y.

Пусть A – нечеткое множество посылок. Выясним, какое множество заключений B ему соответствует. Пусть $x \in X$ и $y \in Y$. Если $A(x) \geq \alpha$ и $R(x, y) \geq \alpha$, естественно считать, что в этом случае $B(y) \geq \alpha$. Это означает, что

$$B(y) \geq \min(A(x), R(x, y)).$$

Тогда

$$B(y) \geq \sup(\min(A(x), R(x, y))).$$

Если истинность заключения оценивается только на основании посылок и отношения следования, то нет оснований считать, что предыдущее неравенство строгое. Поэтому

$$B(y) = \sup(\min(A(x), R(x, y))) \tag{4}$$

Равенство (4) означает, что $B = R(A)$. Последнее равенство можно также записать в виде

$$B = AR, \tag{5}$$

что согласуется с определением композиции соответствий.

Важная задача в теории нечеткого вывода – нахождение по уравнению (5) одной из компонент, если известны две другие.

Если известны A и R, то B вычисляется в соответствии с (4).

Предположим теперь, что известны B и R. Уравнение (5) может не иметь точного решения относительно A, решение может быть и не единственным. Один из наиболее распространенных способов определить A состоит в следующем: в качестве решения уравнения (5) берется максимальное нечеткое множество A, для которого $AR \subset B$. Это нечеткое множество принимается в качестве приближенного решения уравнения (5). Если уравнение (5) допускает точное решение, то так найденное приближенное решение оказывается точным

Пример «заболевания-симптомы» иллюстрирует обоснованность такого подхода. В самом деле, зная симптомы (B) нам нужно определить возможные заболевания (A). Если A не максимально, это означает, что некоторые заболевания мы исключили из рассмотрения, не имея на то достаточных оснований.

Покажем, как может быть вычислено приближенное решение уравнения (5). Обозначим через B/R максимальное нечеткое множество A, для которого $AR \subset B$.

Условие $AR \subset B$ означает, что

$$B(y) \geq \min(A(x), R(x,y)) \tag{6}$$

для любого x. Таким образом, $A(x) \leq B(y)$, если $R(x,y) > B(y)$, и $A(x)$ может принимать любое значение, если $R(x,y \leq B(y)$. Следовательно,

$$(B/R)(x) = R(x,y) \to_G B(y). \tag{7}$$

В формуле (7) через $\to_G$ обозначена бинарная операция на отрезке $[0,1]$ (импликация по Геделю), которая определяется следующим образом:

$$\alpha \to_G \beta = \begin{cases} 1, \alpha \leq \beta, \\ \beta, \alpha > \beta. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь задачу построения отношения R, если известны A и B. Здесь речь идет по существу об экспертном построении правил вывода. Обычно построение R выполняется в ситуации, когда имеется набор пар (A_i, B_i), $i \in I$,соответствующих друг другу. Основываясь на тех же аргументах, что и выше, будем искать наибольшее отношение R, для которого выполняются условия $A_i R \subset B_i$ при всех $i \in I$.

Для заданных U и V обозначим через $U \backslash V$ максимальное отношение R, для которого $UR \subset V$. Тогда

$$R = \bigcap_{i \in I} (A_i \backslash B_i). \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что

$$(U \backslash V)(x,y) = U(x) \to_G V(y).$$

С учетом этого

$$R(x,y) = \inf_i \{A_i(x) \to_G B_i(y)\}.$$

Упражнения

1. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Найти A, если $AR = B$, где $A \subset X, B \subset Y$ и

$$B = (y_1/0{,}9; y_2/0{,}1; y_3/0{,}2),\ R = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, где
x_1 – сдерживание зарплаты;

x_2 – инвестиции в оборудование;
x_3 – автоматизация;
x_4 – усиление рекламы;
x_5 – инвестиции в НИР;
y_1 – увеличение продаж;
y_2 – рост производства;
y_3 – рост прибыли;
y_4 – увеличение темпов роста.

По оценкам экспертов за предыдущие два года факторы производства A_i привели к следующим результатам B_i, $i = 1{,}2$ (мы используем векторную форму записи для нечетких подмножеств конечных множеств):

$$A_1 = (1; 0{,}8; 0{,}4; 0; 0),\ B_1 = (0; 0{,}4; 0{,}8; 1);$$

$$A_2 = (0; 0{,}1; 0{,}6; 0{,}8; 1),\ B_2 = (1; 0{,}6; 0{,}1; 0).$$

Определить, к какому результату приведут действия, оцененные экспертами как автоматизация «с вероятностью 1», инвестиции в оборудование и усиление рекламы «с вероятностью 0,6»:

$$A = (0; 0{,}6; 1; 0{,}6; 0).$$

Какие действия нужно предпринять, чтобы «с вероятностью 1» добиться роста производства и «с вероятностью 0,6» роста прибыли?

6. Строение нечетких множеств

6.1. Определение функции принадлежности

В строгом смысле проблема построения нечетких множеств относится скорее к инженерии знаний, чем собственно к теории нечетких множеств. В этом параграфе приводится краткий обзор методов построения нечетких множеств на основе экспертных суждений. Методы построения делятся на *прямые* и *косвенные* и зависят от того участвует ли в построении один или несколько экспертов. При применении прямых методов эксперты отвечают на вопросы, непосредственно относящиеся к значениям функции принадлежности. При применении косвенных методов эксперты отвечают на более понятные для них вопросы, связанные напрямую с предметной областью, и лишь косвенно – с функцией принадлежности.

1) *Прямые методы с одним экспертом*

Предполагается, что эксперт напрямую укажет, как для каждого элемента x базового множества X вычислять значение функции принадлежности конструируемого нечеткого множества A.

Например, предположим, что при распознавании образов нужно определить нечеткое множество прямых линий A. В качестве функции принадлежности эксперт может указать функцию

$$\mu_A(x) = \max\left(0{,}1 - \frac{e(x)}{d}\right),$$

где $e(x)$ – средняя квадратичная ошибка отклонения для заданного конкретного образа x, а d – максимально допустимая ошибка.

При построении прогноза значений экономических показателей часто принимаются во внимание оптимистический сценарий, пессимистический сценарий и наиболее вероятный сценарий. Предположим, что при наиболее вероятном сценарии значения показателя A лежат в промежутке от a до b; при пессимистическом сценарии значение показателя не окажется ниже, чем c; при оптимистическом не превзойдет d. Тогда показатель A может быть представлен как нечеткое трапециевидное число $\langle c; a; b; d\rangle$.

2) *Прямые методы с группой экспертов*

Предположим, что n экспертов оценивают истинность утверждения $x \in A$, где x выбирается из некоторого базового множества X, а A – подмножество множества X с нечетко определенными границами.

Пусть $a_i(x) \in \{0; 1\}$ – оценка экспертом i истинности утверждения $x \in A$, а w_i – весовая оценка компетентности эксперта i. Тогда

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i(x) \tag{1}$$

(предполагается, что все w_i неотрицательны и $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$).

Применяются и другие методы агрегирования мнений, отличные от (1).

Обратим внимание на одну сложность, связанную с рассмотренным методом.

Пусть $(b_i(x))$ – набор экспертных оценок для нечеткого множества B с тем же базовым множеством X. Тогда

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i(1 - a_i(x));$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i(x) b_i(x);$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i (a_i(x) + b_i(x) - a_i(x) b_i(x)).$$

При этом нельзя утверждать, например, что $\mu_{A \cap B}(x)$ функционально зависит от $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$, т.е. что

$$\mu_{A \cap B}(x) = f(\mu_A(x), \mu_B(x)), \tag{2}$$

где $f(a, b)$ – функция, моделирующая операцию конъюнкции на отрезке $[0; 1]$. То же верно и для других операций с нечеткими множествами.

Обойти эту трудность можно следующим образом. Выделить на множестве X семейство базисных атомарных нечетких подмножеств, а множества, получающиеся из них с помощью теоретико-множественных операций, строить по функциональным схемам типа (2).

3) *Непрямые методы с одним экспертом*

Мы рассмотрим метод, в котором эксперт вместо прямого указания значения функции принадлежности может выполнить попарное сравнение элементов базисного множества (конечного).

Пусть A – нечеткое подмножество базисного множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Эксперту предлагается для каждой пары элементов x_i, x_j указать p_{ij} – относительную меру принадлежности x_i по сравнению с x_j.

В идеальном случае

$$p_{ij} = \mu_A(x_i)/\mu_A(x_j), \tag{3}$$

и матрица $P = (p_{ij})$ оказывается *обратно симметричной* в том смысле, что

$$p_{ik} = p_{ij} \cdot p_{jk} \tag{4}$$

для $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Далее, если имеет место (3), то

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \mu_A(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_A(x_i) = n\mu_A(x_i)$$

при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом,

$$PA = nA \tag{5}$$

(мы отождествляем нечеткое множество A с его характеристическим вектором $(\mu_A(x_i))$).

Из уравнения (5) следует, что A является собственным вектором обратно симметричной матрицы P, отвечающим собственному значению n. Если множество A нормально, условие нормировки $\max_i a_i = 1$ определяет собственный вектор однозначно.

В общем случае матрица P может не быть обратно симметричной. Вектор $A = (\mu_A(x_i))$ можно считать приближенно равным собственному вектору, отвечающему максимальному по модулю собственному значению $l_{\max}$ матрицы P. Величина $\frac{l_{\max} - n}{n}$ может служить мерой неточности.

Впрочем, обратно симметричная матрица P возникает при следующей упрощенной процедуре сравнения. Выберем некоторый элемент множества X в качестве образца для сравнений. Пусть это будет x_1. Предложим эксперту сравнить все элементы множества X с выбранным элементом. Это даст числа p_{1j}, $j = 2, \dots, n$. Положим теперь $p_{11} = 1$ и $p_{ij} = p_{1j}/p_{1i}$, $i, j = 2, \dots, n$.

В этом случае найти функцию принадлежности множества A достаточно несложно. Максимальное по модулю собственное значение матрицы P равно n. Координаты отвечающего ему собственного вектора $a = (a_i)$ с условием нормировки $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ определяются формулами

$$a_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}, j = 1,2, \dots, n.$$

Пусть $\hat{a} = \max_i a_i$ Тогда $\mu_A(a_i) = a_i/\hat{a}$.

Пример 1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Экспертное сравнение относительной меры соответствия нечеткому понятию A элементов и матрица $P = (p_{ij})$ оказывается *обратно симметричной* в том смысле, что

$$p_{ik} = p_{ij} \cdot p_{jk} \tag{4}$$

для $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Далее, если имеет место (3), то

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\mu_A(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_A(x_i) = n\mu_A(x_i)$$

при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом,

$$PA = nA \tag{5}$$

(мы отождествляем нечеткое множество A с его характеристическим вектором $(\mu_A(x_i))$).

Из уравнения (5) следует, что A является собственным вектором обратно симметричной матрицы P, отвечающим собственному значению n. Если множество A нормально, условие нормировки $\max_i a_i = 1$ определяет собственный вектор однозначно.

В общем случае матрица P может не быть обратно симметричной. Вектор $A = (\mu_A(x_i))$ можно считать приближенно равным собственному вектору, отвечающему максимальному по модулю собственному значению $l_{\max}$ матрицы P. Величина $\frac{l_{\max}-n}{n}$ может служить мерой неточности.

Впрочем, обратно симметричная матрица P возникает при следующей упрощенной процедуре сравнения. Выберем некоторый элемент множества X в качестве образца для сравнений. Пусть это будет x_1. Предложим эксперту сравнить все элементы множества X с выбранным элементом. Это даст числа p_{1j}, $j = 2, \dots, n$. Положим теперь $p_{11} = 1$ и $p_{ij} = p_{1j}/p_{1i}$, $i, j = 2, \dots, n$.

В этом случае найти функцию принадлежности множества A достаточно несложно. Максимальное по модулю собственное значение матрицы P равно n. Координаты отвечающего ему собственного вектора $a = (a_i)$ с условием нормировки $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ определяются формулами

$$a_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}, j = 1,2, \dots, n.$$

Пусть $\hat{a} = \max_i a_i$ Тогда $\mu_A(a_i) = a_i/\hat{a}$.

Пример 1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Экспертное сравнение относительной меры соответствия нечеткому понятию A элементов

$I_A = (0,1,0,0,0)$; $I_B = (1,1,1,0,0)$; $I_C = (1,1,1,1,1)$;
$I_D = (1,0,1,0,1)$; $I_E = (1,0,1,0,0)$;

б) для рискованных проектов:

$R_A = (0,0,0,1,0)$; $R_B = (1,1,1,1,0)$; $R_C = (1,1,1,1,0)$;
$R_D = (1,1,0,1,0)$; $R_E = (1,0,0,0,0)$.

Указание. Функция принадлежности множества более или менее интересных проектов I' связана с функцией принадлежности множества интересных проектов I соотношением

$$\mu_{I'}(x) = \sqrt{\mu_I(x)}. \tag{6}$$

Функция принадлежности очень рискованных проектов R' связана с функцией принадлежности множества рискованных проектов R соотношением

$$\mu_{R'}(x) = \left(\mu_R(x)\right)^2. \tag{7}$$

Характеристики «*очень*», «*более или менее*» и т.п. называют в теории нечетких множеств *лингвистическими модификаторами*. Формулы (6) и (7) дают распространенную версию интерпретации соответствующих модификаторов.

3) Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Экспертное сравнение относительной меры принадлежности нечеткому множеству A элементов множества X относительно элемента x_3 привело к следующему результату: $\left(\frac{1}{5}; 2; 1; 3; \frac{1}{4}\right)$. Построить функцию принадлежности $\mu_A(x)$.

4) Пусть базисное множество состоит из следующих элементов: Россия, Казахстан, Чехия, Болгария, Румыния, Германия, Италия, Греция, США, Бразилия, Мексика, Китай, Индия, Япония, Таиланд, Египет, Турция, Иран. Построить нечеткое множество стран-лидеров.

6.2. Измерение неопределенности

Первая мера неопределенности связана с так называемой *информационной емкостью* множества. Эта мера в определенном смысле измеряет неопределенность: возникающую в следующей ситуации: про интересующий нас объект известно лишь то, что он является одним из элементов множества A.

Начнем с измерения неопределенности, связанной с четкими множествами. Предположим, что относительно интересующего нас элемента известно лишь то, что он содержится в конечном множестве A. Обозначим через $U(A)$ соответствующую меру неопределенности (информационную емкость множества A). Функция $U(A)$, определенная на непустых конечных множествах и удовлетворяющая естественному набору требований, в общем случае имеет вид

$$U(A) = c\log_b|A|$$

и называется *функцией Хартли.*

При $c = 1$, $b = 2$ получается хорошо известное измерение неопределенности в битах:

$$U(A) = \log_2|A|.$$

Функция Хартли может быть распространена на непустые нечеткие подмножества конечных множеств:

$$U(A) = \frac{1}{h(A)}\int_0^{h(A)}\log_2|A^\alpha|\,d\alpha, \tag{8}$$

где $h(A)$ – высота множества A (максимальное значение функции принадлежности $\mu_A(x)$).

Пример 2. Найдем неопределенность, связанную с нечетким множеством A, заданным следующей таблицей

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\mu_A(x)$	1	0,9	0,8	0,5	0,9	0,2	1	0,1	0,5

В соответствии с (8) имеем:

$$U(A) = \int_0^1 \log_2|A^\alpha|\,d\alpha = \int_0^{0,1} \log_2 9\,d\alpha + \int_{0,1}^{0,2} \log_2 8\,d\alpha + \int_{0,2}^{0,5} \log_2 7\,d\alpha +$$

$$+ \int_{0,5}^{0,8}\log_2 5\,d\alpha + \int_{0,8}^{0,9}\log_2 4\,d\alpha + \int_{0,9}^{1}\log_2 2\,d\alpha =$$

$$= 0,1\log_2 9 + 0,1\log_2 8 + 0,3\log_2 7 + 0,1\log_2 4\; 0,1\log_2 2 = 2,46.$$

Для четких измеримых подмножеств действительной прямой функция Хартли применяется в следующем виде:

$$U(A) = \log_2\big(1 + m(A)\big), \tag{9}$$

где $m(A)$ – мера Лебега множества A. Соответственно для нечетких подмножеств формула (8) приобретает следующий вид:

$$U(A) = \frac{1}{h(A)}\int_0^{h(A)}\log_2\big(1 + m(A^\alpha)\big)\,d\alpha, \tag{10}$$

(предполагается, что все уровневые множества A^α измеримы и функция $m(A^\alpha)$ интегрируема по α).

Пример 3. Найти неопределенность, связанную с нечетким множеством A, имеющим следующую функцию принадлежности

$$\mu_A(x) = \max\left(0; 1 - \frac{|x|}{d}\right).$$

В соответствии с (10) имеем

$$U(A) = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \ln(1 + 2d(1-\alpha))\,d\alpha. \qquad (11)$$

Получаем:

$$U(A) = \frac{1}{2d\ln 2}((1 + 2d)\ln(1 + 2d) - 2d).$$

Рассмотрим вторую меру неопределенности, которая измеряет *нечеткость*. Пусть X – базовое множество. Для каждого подмножества A множества X, четкого или нечеткого, пусть $F(A)$ – мера его нечеткости (неотрицательное действительное число). Функция $F(A)$ должна удовлетворять нескольким естественным требованиям, соответствующим интуитивному пониманию нечеткости. Сформулируем эти требования.

F1. $F(A) = 0$, тогда и только тогда, когда A – четкое подмножество.

F2. $F(A)$ достигает своего максимума на множестве, функция принадлежности которого тождественно равна 0,5 (наиболее нечеткое множество: каждый элемент базового множество с одинаковой вероятностью как принадлежит, так и не принадлежит этому множеству).

F3. $F(A) \le F(B)$, если множество A заведомо более четкое, чем множество B. Последнее означает, что $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$, если $\mu_B(x) \le 0{,}5$, и $\mu_A(x) \ge \mu_B(x)$, если $\mu_B(x) \ge 0{,}5$.

F4. Часто дополнительно требуют, чтобы мера нечеткости множества совпадала с мерой нечеткости его дополнения:

$$F(A) = F(\overline{A})$$

Рассмотрим два подхода к измерению нечеткости: *энтропийный* и *метрический*.

Энтропийный подход

Пусть X – конечное множество. Мера нечеткости нечеткого множества A определяется формулой

$$F(A) = \sum_{x\in X} S\big(\mu_A(x)\big),$$

где, $S(x) = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x)$ – S-функция Шеннона.

Метрический подход

В основе метрического подхода лежит *метрика*, заданная в пространстве нечетких множеств. Наиболее употребительными являются расстояние Хэмминга и евклидово расстояние.

Пусть X – конечное множество, а A и B – его нечеткие подмножества. *Расстояние Хэмминга* задается формулой

$$d_1(A,B) = \sum_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, \tag{12}$$

а евклидово расстояние – формулой

$$d_2(A,B) = \left(\sum_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^2\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Формулы (12), (13) являются частными случаями более общей формулы

$$d_p(A,B) = \left(\sum_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^p\right)^{1/p}. \tag{14}$$

Пусть теперь X – ограниченное измеримое множество в $\boldsymbol{R}$, а A и B – его нечеткие подмножества с измеримыми функциями принадлежности. В этом случае аналогом формулы (14) служит формула

$$d_p(A,B) = \left(\int_X |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^p \, dx\right)^{1/p}. \tag{15}$$

Показатель нечеткости множества A может быть определен с помощью расстояния от A до его дополнения $\overline{A}$, до ближайшего четкого множества, до максимально нечеткого множества, и иными способами в зависимости от задачи.

Далее мы для простоты ограничимся случаем $p = 1$.

Для каждого элемента $x \in X$ мера нечеткости его принадлежности множеству A определяется формулой

$$1 - \left|\mu_A(x) - \mu_{\overline{A}}(x)\right| = 1 - |2\mu_A(x) - 1|.$$

Соответственно для конечного базового множества X получаем

$$F(A) = \sum_{x \in X} (1 - |2\mu_A(x) - 1|) = |X| - d_1(A, \overline{A}).$$

Сравнивать нечеткость множеств с разными носителями, помогает *индекс нечеткости*

$$f(A) = 1 - \frac{d_1(A, \bar{A})}{|X|}. \tag{16}$$

В случае, когда X – подмножество действительной прямой аналогом формулы (16) служит формула

$$f(A) = 1 - \frac{d_1(A, \bar{A})}{m(X)}, \tag{17}$$

где $m(X)$ – мера Лебега множества X.

Рассмотрим еще один подход к определению индекса нечеткости. Пусть $\hat{A}$ – ближайшее к A четкое подмножество с тем же носителем, что и A. Индекс нечеткости множества $\hat{A}$ равен нулю и нечеткость множества A тем больше, чем больше расстояние от A до $\hat{A}$. Положим

$$f(A) = \frac{2}{\|S\|} d_1(A, \hat{A}). \tag{18}$$

В формуле (18) S – носитель множества A, а $\|S\|$ обозначает число элементов множества S в случае, когда X конечно, или $m(S)$ в случае, когда X – подмножество $\boldsymbol{R}$. Коэффициент $\frac{2}{\|S\|}$ в формуле (18) выбран таким образом, что индекс нечеткости максимально нечетких множеств равен единице.

Обозначим через $A_{0,5}$ нечеткое подмножество множества с тем же носителем, что и A, функция принадлежности которого тождественно равна 0,5. Тогда A является тем более нечетким, чем ближе оно расположено к $A_{0,5}$. Положим

$$f(A) = 1 - \frac{2}{\|S\|} d_1(A, A_{0,5}). \tag{19}$$

Упражнения

1. Вычислить интеграл (11). Найти предел $U(A)$ при $d \to 0$ и при $d \to \infty$.
2. Вычислить индексы нечеткости (16), (18), (19) для нечетких множеств из примеров 2 и 3.

6.3. Меры доверия и правдоподобия

Пусть X – некоторое множество. *Нечеткой мерой* на множестве X называют отображение G, которое каждому подмножеству A множества X ставит в соответствие число $G(A) \in [0; 1]$. При этом должны выполняться следующие условия:

G1) $G(\emptyset) = 0$, $G(X) = 1$ (граничные условия);

G2) если $A \subset B$, то $G(A) \leq G(B)$ (мнотонность);

G3) если $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ – возрастающая последовательность подмножеств из X и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ – их объединение, то $G(A) = \lim_{i\to\infty} G(A_i)$ (непрерывность снизу);

G4) если $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ – убывающая последовательность подмножеств из X и $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ – их пересечение, то $G(A) = \lim_{i\to\infty} G(A_i)$ (непрерывность сверху).

Вообще говоря, нечеткая мера может быть определена не для всех подмножеств множества X, а для некоторого их семейства. Если потребуется, мы будем специально оговаривать, на каком семействе множеств задается мера, если это семейство содержит не все подмножества множества X.

Для подкрепления интуиции относительно смысла нечетких мер, можно иметь в виду следующую модель. Среди элементов множества X мы ищем некоторый элемент a. Некоторое свидетельство говорит о том, что $a \in A$. Свидетельство не абсолютно достоверное, и $G(A)$ – это оценка его достоверности. Несложно увидеть, что при этом должны выполняться условия 1–4.

Ниже мы рассмотрим некоторые специальные виды нечетких мер. Чтобы не усложнять изложения, мы предполагаем далее, что множество X конечно.

Нечеткая мера *Bel* называется *мерой доверия*, если она *супераддитивна*, т.е. для любого набора множеств $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$ выполняется следующее неравенство:

$$Bel(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} Bel(A_i) - \sum_{j<k} Bel(A_j \cap A_k) + \cdots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n).$$

В частности,

$$Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B).$$

Воспользовавшись супераддитивностью применительно к $A_1 = A$, $A_2 = \overline{A}$, получаем

$$Bel(A) + Bel(\overline{A}) \leq 1.$$

С мерой доверия *Bel* связана *мера правдоподобия Pl*, задаваемая уравнением

$$Pl(A) = 1 - Bel(\overline{A}). \qquad (20)$$

Очевидно, $Pl(\emptyset) = 0$ и $Pl(X) = 1$. Нечеткая мера правдоподобия *субаддитивна*, т.е. для любого набора множеств $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$ выполняется следующее неравенство:

$$Pl(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \le \sum_{i=1}^{n} Pl(A_i) - \sum_{j<k} Pl(A_j \cup A_k) + \cdots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n).$$

По аналогии с мерой доверия получаем:

$$Pl(A \cap B) \le Pl(A) + Pl(B) - Pl(A \cup B);$$

$$Pl(A) + Pl(\overline{A}) \ge 1.$$

Меры доверия и правдоподобия, связанные соотношением (20), называют *сопряженными*.

Меры доверия и правдоподобия могут быть получены с помощью так называемых *базисных вероятностей* или m-значений. Базисная вероятность $m(A) \in [0,1]$ приписывается каждому подмножеству A множества X. При этом должно выполняться следующее условие:

$$\sum_{A \subset X} m(A) = 1.$$

Заметим, что, вообще говоря, не требуется, чтобы функция множеств $m(A)$ была монотонной или $m(X) = 1$.

С использованием базисных вероятностей меры доверия и правдоподобия могут быть записаны следующим образом

$$Bel(A) = \sum_{V \subset A} m(V); \qquad (21)$$

$$Pl(A) = \sum_{V \cap A \ne \emptyset} m(V) \qquad (22)$$

Справедливы и обращения формул (21) и (22). Например, зная меру доверия *Bel*, можно найти соответствующие базисные вероятности:

$$m(A) = \sum_{V \subset A} (-1)^{|A \setminus V|} Bel(V) \qquad (23)$$

Таким образом, каждая из трех функций Bel, Pl, m однозначно определяет две других.

Природу появления базисных вероятностей можно пояснить следующим образом. Предположим, что X – это множество возможных ответов на некоторый вопрос. Далее, пусть имеется некоторое множество S (например, исходов опыта), на котором задано распределение вероятностей P, и отношение $G \subset S \times X$, называемое отношением совместимости. Появление исхода $s \in S$ является указанием на то, что ответ следует искать среди элементов множества $G_s \subset X$, связанных отношением совместимости с исходом s. Множеству $A \subset X$ приписывается суммарная вероятность того, что ответом на поставленный вопрос служит один из его элементов:

$$m(A) = \sum_{G_s = A} P(s) \tag{24}$$

Множества $A \subset X$, для которых $m(A) > 0$, называют *фокальными*.

Пример 4. Предположим, что имеется пять событий s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, вероятность наступления которых представлены следующей таблицей:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

В результате наступления тех или иных событий развитие ситуации может пойти по некоторым из четырех сценариев a_1, a_2, a_3, a_4. Соответствие между событиями и сценариями представлено в следующей таблице:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	1	1	1		
a_2	1		1	1	
a_3				1	
a_4				1	
λ					1

Цифра 1 в соответствующей клетке таблицы указывает на наличие связи между событием и сценарием. Символом λ обозначен возможный сценарий, отличный от перечисленных сценариев a_1, a_2, a_3, a_4.

Найдем фокальные множества и их базисные вероятности в пространстве $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \lambda\}$.

Имеются четыре фокальных множества:

$$A = \{a_1, a_2\},\ B = \{a_1\},\ C = \{a_2, a_3, a_4\},\ D = \{\lambda\}.$$

Базисные вероятности:

$$m(A) = 0{,}5;\ m(B) = 0{,}3;\ m(C) = 0{,}1;\ m(D) = 0{,}1.$$

Вычислим меры доверия и правдоподобия для некоторых подмножеств множества X:

$$Bel(\{a_1, a_2, a_3, a_4\}) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}9;$$

$$Pl(\{a_1, a_2, a_3, a_4\}) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}9;$$

$$Bel(\{a_1, a_2, a_3\}) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8;$$

$$Pl(\{a_1, a_2, a_3\}) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}9;$$

$$Bel(\{a_1\}) = 0{,}3;$$

$$Pl(\{a_1\}) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8;$$

$$Bel(\{a_3, a_4\}) = 0;$$

$$Pl(\{a_3, a_4\}) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5.$$

Полное незнание означает, что X – единственное фокальное множество, т.е. $m(X) = 1$ и $m(A) = 0$ для любого собственного подмножества A. В терминах меры доверия получаем также $Bel(X) = 1$ и $Bel(A) = 0$ для любого собственного подмножества A. Для меры правдоподобия полное незнание выглядит по-другому: $Pl(\emptyset) = 0$, $Pl(A) = 1$ для любого непустого множества $A \subset X$.

Предположим, свидетельства получены из двух независимых источников. В терминах базисных вероятностей это означает, что на множестве X заданы две системы базисных вероятностей m_1 и m_2. *Комбинированная базисная вероятность* m вычисляется по формуле

$$m(A) = \frac{\sum_{V_1 \cap V_2 = A} m_1(V_1) \cdot m_2(V_2)}{1 - \sum_{V_1 \cap V_2 = \emptyset} m_1(V_1) \cdot m_2(V_2)} \tag{25}$$

Комбинирование базисных вероятностей по формуле (25) называют *правилом Демпстера*. Это правило было введено в так называемой теории свидетельств. Приведем один из ключевых для этой теории примеров.

Пример 5. Совершено преступление. Имеется трое подозреваемых: Алена (А), Борис (Б) и Владимир (В) и два свидетеля. Первый из свидетелей показывает, что преступление совершил мужчина. Но поскольку было темно, он уверен в этом на 80%. Второй свидетель говорит, что он, кажется, видел Бориса в ресторане во время совершения преступления. Он уверен в том, что это так на 60%. В качестве базисного возьмем множество, составленное из подозреваемых, $X = \{А, Б, В\}$. Свидетельские показания задают на этом множестве два набора базисных вероятностей:

$$m_1(\{Б, В\}) = 0{,}8; m_1(\{А, Б, В\}) = 0{,}2;$$

$$m_2(\{А, В\}) = 0{,}6; m_2(\{А, Б, В\}) = 0{,}4$$

(указаны только ненулевые значения базисных вероятностей). Воспользуемся правилом Демпстера для получения комбинированной вероятности m. Сначала заметим, что $m_1(V_1) \cdot m_2(V_2) = 0$ для любых $V_1, V_2 \subset \{А, Б, В\}$. Далее:

$$m(\{А\}) = m(\{Б\}) = m(\{А, Б\}) = 0;$$

$$m(\{В\}) = m_1(\{Б, В\}) \cdot m_2(\{А, В\}) = 0{,}48;$$

$$m(\{А, В\}) = m_1(\{А, Б, В\}) \cdot m_2(\{А, В\}) = 0{,}12;$$

$$m(\{Б, В\}) = m_1(\{Б, В\}) \cdot m_2(\{А, Б, В\}) = 0{,}32;$$

$$m(\{А, Б, В\}) = m_1(\{А, Б, В\}) \cdot m_2(\{А, Б, В\}) = 0{,}08.$$

Вычислим теперь значения мер доверия и правдоподобия для некоторых подмножеств $V \subset \{А, Б, В\}$:

$$Bel(\{А\}) = m(\{А\}) = 0; Pl(\{А\}) = m(\{А, В\}) + m(\{А, Б, В\}) = 0{,}2;$$

$$Bel(\{Б\}) = 0; Pl(\{Б\}) = m(\{Б, В\}) + m(\{А, Б, В\}) = 0{,}4;$$

$$Bel(\{В\}) = 0{,}48;$$

$$Pl(\{В\}) = m(\{В\}) + m(\{Б, В\}) + m(\{А, В\}) + m(\{А, Б, В\}) = 1.$$

Укажем на связь между мерами доверия и правдоподобия и вероятностными мерами. Если фокальные множества попарно не пересекаются, то $Bel(A) = Pl(A)$ для любого $A \subset X$. В частности, если все фокальные множества одноточечные, то

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x \in X} m(x).$$

В этом случае мера доверия и мера правдоподобия оказываются вероятностными мерами. Пусть $f(x)$ – некоторая числовая функция на множестве X. Используя интеграл Лебега-Стильтьеса, можно станрит, что он, кажется, видел Бориса в ресторане во время совершения преступления. Он уверен в том, что это так на 60%. В качестве базисного возьмем множество, составленное из подозреваемых, $X = \{А, Б, В\}$. Свидетельские показания задают на этом множестве два набора базисных вероятностей:

$$m_1(\{Б, В\}) = 0{,}8; m_1(\{А, Б, В\}) = 0{,}2;$$

$$m_2(\{А, В\}) = 0{,}6; m_2(\{А, Б, В\}) = 0{,}4$$

(указаны только ненулевые значения базисных вероятностей). Воспользуемся правилом Демпстера для получения комбинированной вероятности m. Сначала заметим, что $m_1(V_1) \cdot m_2(V_2) = 0$ для любых $V_1, V_2 \subset \{А, Б, В\}$. Далее:

$$m(\{А\}) = m(\{Б\}) = m(\{А, Б\}) = 0;$$

$$m(\{В\}) = m_1(\{Б, В\}) \cdot m_2(\{А, В\}) = 0{,}48;$$

$$m(\{А, В\}) = m_1(\{А, Б, В\}) \cdot m_2(\{А, В\}) = 0{,}12;$$

$$m(\{Б, В\}) = m_1(\{Б, В\}) \cdot m_2(\{А, Б, В\}) = 0{,}32;$$

$$m(\{А, Б, В\}) = m_1(\{А, Б, В\}) \cdot m_2(\{А, Б, В\}) = 0{,}08.$$

Вычислим теперь значения мер доверия и правдоподобия для некоторых подмножеств $V \subset \{А, Б, В\}$:

$$Bel(\{А\}) = m(\{А\}) = 0; Pl(\{А\}) = m(\{А, В\}) + m(\{А, Б, В\}) = 0{,}2;$$

$$Bel(\{Б\}) = 0; Pl(\{Б\}) = m(\{Б, В\}) + m(\{А, Б, В\}) = 0{,}4;$$

$$Bel(\{В\}) = 0{,}48;$$

$$Pl(\{В\}) = m(\{В\}) + m(\{Б, В\}) + m(\{А, В\}) + m(\{А, Б, В\}) = 1.$$

Укажем на связь между мерами доверия и правдоподобия и вероятностными мерами. Если фокальные множества попарно не пересекаются, то $Bel(A) = Pl(A)$ для любого $A \subset X$. В частности, если все фокальные множества одноточечные, то

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x \in X} m(x).$$

В этом случае мера доверия и мера правдоподобия оказываются вероятностными мерами. Пусть $f(x)$ – некоторая числовая функция на множестве X. Используя интеграл Лебега-Стильтьеса, можно станпричем границы достигаются при подходящих значениях вероятности p.

Эти результаты допускают распространение и на случай бесконечных множеств.

Упражнения

1. Доказать, что формула (25) задает базисную вероятность.
2. С помощью двух индикаторов прогнозируется динамика курса доллара. Рассматриваются три альтернативы: укрепление рубля (a); сохранение существующего курса (b); ослабление рубля (c). Базисные вероятности, приписываемые индикаторами различным событиям, приведены в таблице.

	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
m_1	0,05	0,1	0	0,2	0,25	0,05	0,35
m_2	0,2	0,05	0,05	0,2	0,2	0	0,3

а) Найти меры доверия и правдоподобия для базисных вероятностей m_1 и m_2.

б) Найти комбинированную базисную вероятность m.

в) Найти меры доверия и правдоподобия для комбинированной базисной вероятности m.

3. Доказать формулу (23).
4. Пусть $X = \{a, b, c\}$, и заданы базисные вероятности:

$$m(a) = 0{,}4; m(b) = 0{,}2; m(\{a, \mathrm{c}\}) = 0{,}1;$$

$$m(\{b, \mathrm{c}\}) = 0{,}2; m(\{a, b, \mathrm{c}\}) = 0{,}1.$$

Найти верхнее $E^*(f)$ и нижнее $E_*(f)$ значения математического ожидания для функции f, такой что $f(a) = 1$, $f(b) = 5$, $f(c) = 10$. Проверить выполнение неравенств (29).

6.4. Меры возможности

Ситуация, когда фокальные множества образуют последовательность вложенных множеств, играет в теории нечетких множеств особую роль.

Теорема 1. Пусть базисные вероятности на множестве X заданы таким образом, что фокальные множества $V_1, \dots, V_k$ образуют возрастающую последовательность $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k$. Тогда

$$Bel(A \cap B) = \min(Bel(A), Bel(B)) \tag{30}$$

$$Pl(A \cup B) = \max(Pl(A), Pl(B)) \tag{31}$$

для любых $A, B \subset X$.

Доказательство. Положим $V_0 = \emptyset$. Пусть

$$s = \max_{0 \le i \le k}\{i | V_i \subset A\}, t = \max_{0 \le i \le k}\{i | V_i \subset B\}.$$

Предположим для определенности, что $s \le t$. Тогда $V_i \subset A \cap B$ в том и только том случае, если $i \le s$. С учетом этого получаем:

$$Bel(A) = \sum_{i=1}^{s} m(V_i), Bel(B) = \sum_{i=1}^{t} m(V_i), Bel(A \cap B) = \sum_{i=1}^{s} m(V_i),$$

что и доказывает формулу (30). Соотношение (31) доказывается аналогично.

Справедливо и обращение доказанной теоремы: если мера доверия удовлетворяет соотношению (30): фокальные множества образуют последовательность вложенных множеств.

Нечеткая мера *Pos* на множестве X (не обязательно конечном) называется *мерой возможности*, если для нее выполняется соотношение (31), т.е.

$$Pos(\cup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} Pos(A_i) \tag{32}$$

для любого семейства множеств $(A_i)_{i \in I}$.

Сопряженная *мера необходимости Nec* определяется формулой

$$Nec(A) = 1 - Pos(\overline{A}).$$

Для меры необходимости справедливо условие, двойственное условию (32):

$$Nec(\cap_{i \in I} A_i) = \inf_{i \in I} Nec(A_i) \tag{33}$$

Укажем некоторые общие свойства ассоциированной пары мер возможности и необходимости:

$$Nec(A) + Nec(\overline{A}) \le 1;$$

$$Pos(A) + Pos(\overline{A}) \ge 1;$$

$$Pos(A) + Nec(\overline{A}) = 1$$

$$\max\left(Pos(A), Pos(\overline{A})\right) = 1;$$

$$\min\left(Nec(A), Nec(\overline{A})\right) = 0;$$

если $Pos(A) < 1$, то $Nec(A) = 0$;

если $Nec(A) > 0$, то $Pos(A) = 1$.

Пусть Pos – некоторая мера возможности на множестве X. Функцию $r: X \to [0;1]$, заданную равенством $r(x) = Pos(\{x\})$, называют функцией распределения возможности, ассоциированной с Pos. В дальнейшем, когда это не ведет к недоразумениям, мы будем писать $Pos(x)$ вместо $Pos(\{x\})$.

Мера возможности однозначно восстанавливается по своей функции распределения:

$$Pos(A) = \sup_{x \in A} r(x).$$

Рассмотрим, как связаны базисные вероятности и распределение возможности в случае конечного множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Будем предполагать, что элементы множества X перенумерованы таким образом, чтобы последовательность вложенных фокальных множеств являлась подпоследовательностью множеств

$$A_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\},\ i = 1,2,\dots,n.$$

Положим $m(A_i) = m_i$. Тогда

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i = 1.$$

Пусть $r_i = Pos(x_i)$. В соответствии с определением $r_i = Pl(\{x_i\})$, поэтому

$$r_i = \textstyle\sum_{x_i \in A} m(A) = \sum_{j=i}^{n} m_j,\ i = 1,2,\dots,n. \qquad (34)$$

Из соотношений (34) следует, что

$$m_i = r_i - r_{i+1}, \qquad (35)$$

для всех $i = 1, \dots, n$, если дополнительно положить $r_{n+1} = 0$.

Если упорядочить элементы множества X по убыванию значений возможности, формулы (34) и (35) устанавливают взаимно однозначное соответствие между распределениями базисных вероятностей и распределениями возможности.

Рассмотрим нечеткое подмножество V множества X. Уравнение

$$r(x) = \mu_V(x) \tag{36}$$

задает распределение возможности на множестве X, связанное с нечетким множеством V. Соответствующая мера возможности задается формулой

$$Pos_V(A) = \sup_{x \in A} \mu_V(x). \tag{37}$$

Формулы (36) и (37) показывают, что меры возможности и нечеткие множества – это два способа говорить об одних и тех же математических моделях. Например, уровневые множества нечеткого множества оказываются фокальными множествами соответствующего распределения возможности.

Пример 7. Группа экспертов оценивает прогнозное значение некоторого показателя. Доля экспертов, указавших тот или иной промежуток, приведена в следующей таблице:

Промежуток	**Доля экспертов**
99–101	0,1
98–102	0,1
97–103	0,5
96–104	0,1
95–105	0,2

Рассматривая приведенные значения как базовые вероятности, получаем следующее распределение возможности на множестве целых чисел от 95 до 105:

x	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**	**101**	**102**	**103**	**104**	**105**
$Pos(x)$	0,2	0,3	0,8	0,9	1	1	1	0,9	0,8	0,3	0,2

Можно считать, что полученная таблица задает некоторое нечеткое множество V. Его уровневые множества:

$$V^1 = \{99,100,101\};$$

$$V^{0,9} = \{98,99,100,101,102\};$$

Рассмотрим нечеткое подмножество V множества X. Уравнение

$$r(x) = \mu_V(x) \tag{36}$$

задает распределение возможности на множестве X, связанное с нечетким множеством V. Соответствующая мера возможности задается формулой

$$Pos_V(A) = \sup_{x \in A} \mu_V(x). \tag{37}$$

Формулы (36) и (37) показывают, что меры возможности и нечеткие множества – это два способа говорить об одних и тех же математических моделях. Например, уровневые множества нечеткого множества оказываются фокальными множествами соответствующего распределения возможности.

Пример 7. Группа экспертов оценивает прогнозное значение некоторого показателя. Доля экспертов, указавших тот или иной промежуток, приведена в следующей таблице:

Промежуток	**Доля экспертов**
99–101	0,1
98–102	0,1
97–103	0,5
96–104	0,1
95–105	0,2

Рассматривая приведенные значения как базовые вероятности, получаем следующее распределение возможности на множестве целых чисел от 95 до 105:

x	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**	**101**	**102**	**103**	**104**	**105**
$Pos(x)$	0,2	0,3	0,8	0,9	1	1	1	0,9	0,8	0,3	0,2

Можно считать, что полученная таблица задает некоторое нечеткое множество V. Его уровневые множества:

$$V^1 = \{99,100,101\};$$

$$V^{0,9} = \{98,99,100,101,102\};$$

Упражнения

1. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$ и V – нечеткое множество, заданное таблицей

x	1	2	3	4
$\mu_V(x)$	0,1	0,5	1	0,4

Вычислить меры возможности и необходимости для всех подмножеств множества X.

2. Вычислить меру необходимости для подмножеств множества возможных значений из примера 7. Найти минимальный набор значений A, для которого $Nec(A) \geq 0{,}7$.
3. Пусть $A = \langle 1; 2; 3 \rangle$ – треугольное число. Решить (относительно x) неравенства
а) $Pos(A > x) \geq 0{,}8$; б) $Nec(A > x) \geq 0{,}8$.
4. Пусть, как в примере 8, $F(t) = \langle a_t; c_t; b_t \rangle$, где

$$a_t = -\frac{1}{5|t|};\ b_t = \frac{1}{t^2+6};\ c_t = \frac{a_t+b_t}{2}.$$

Найти нечеткое множество возможных решений уравнения $F(t) = 0$.

7. Операции над нечеткими множествами

7.1. Введение

Напомним, что если A и B – нечеткие подмножества множества X, основные стандартные операции с использованием функций принадлежности определяются следующим образом:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x);$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x));$$
$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

По существу операции над нечеткими множествами задаются соответствующими операциями на отрезке $[0; 1]$. Использование операций, отличных от $1 - z$, $\min(z_1, z_2)$, $\max(z_1, z_2)$, позволяет определенным образом учесть *зависимость* (*взаимодействие*) нечетких событий и величин. Поясним это, используя так называемые случайные множества.

Пусть A – нечеткое подмножество множества X. Очевидно, что

$$\mu_A(x) = \int_0^1 \mu_{A^\alpha}(x)\, d\alpha,$$

где $\mu_{A^\alpha}(x)$ – индикаторная функция множества уровневого множества A^α.

Пусть теперь ξ – случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ и равномерно распределенная на отрезке $[0; 1]$. Это позволяет рассматривать множество $\xi -$уровня A^ξ как случайное множество. Отображение $S_A: \Omega \to 2^X$, таким образом, задается формулой $S_A(\omega) = A^{\xi(\omega)}$. Тогда

$$P(x \in S_A) = P\{\omega | x \in S_A(\omega)\} = P\{\omega | x \in A^{\xi(\omega)}\} =$$
$$= P\{\omega | \mu_A(x) \geq \xi(\omega)\} = \mu_A(x).$$

Опуская несущественные для настоящего изложения технические детали, можно ввести общее понятие случайного множества, понимая под *случайным множеством* (измеримое) отображение $S: \Omega \to 2^X$. Формула

$$\pi_S(x) = P(x \in S)$$

задает нечеткое подмножество множества X. Очевидно,

$$\pi_{S_A}(x) = \mu_A(x).$$

Будем говорить, что случайное множество S_A получено *рандомизацией* уровней нечеткого множества A с помощью случайной величины ξ.

Операции над случайными множествами определяются поточечно. В частности,

$$(S_1 \cap S_2)(\omega) = S_1(\omega) \cap S_2(\omega).$$

Пусть A и B – нечеткие подмножества множества X, а случайные множества S_A и S_B получены рандомизацией уровней этих нечетких множеств с помощью случайных величин соответственно ξ и η. Естественно считать, что функция принадлежности пересечения $A \cap B$ задается формулой

$$\mu_{A\cap B}(x) = P(x \in S_A \cap S_B).$$

Имеем:

$$P(x \in S_A \cap S_B) = P\{\omega | x \in A^{\xi(\omega)} \cap B^{\eta(\omega)}\} =$$
$$= P\{\omega | \mu_A(x) \geq \xi(\omega), \mu_B(x) \geq \eta(\omega)\}.$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$P\{\omega | \mu_A(x) \geq \xi(\omega), \mu_B(x) \geq \eta(\omega)\} =$$
$$= P\{\omega | \mu_A(x) \geq \xi(\omega)\} \cdot P\{\omega | \mu_B(x) \geq \eta(\omega)\} =$$
$$= \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Если $\xi = \eta$, то

$$P\{\omega | \mu_A(x) \geq \xi(\omega), \mu_B(x) \geq \eta(\omega)\} =$$
$$= P\{\omega | \mu_A(x) \geq \xi(\omega), \mu_B(x) \geq \xi(\omega)\} =$$
$$= P\{\omega | \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \geq \xi(\omega)\} =$$
$$= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Таким образом, при независимой рандомизации имеем

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \tag{1}$$

при рандомизации с помощью одной и той же случайной величины –

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)). \tag{2}$$

Совместное распределение случайных величин ξ и η может быть задано формулой $F_{\xi,\eta}(a,b) = C(F_\xi(a), F_\eta(b))$

$$F_{\xi,\eta}(a,b) = C(F_\xi(a), F_\eta(b)), \tag{3}$$

где $C: [0;1] \times [0;1] \to [0;1]$ – отображение специального вида (*копула*), а $F_\xi(a)$ и $F_\eta(b)$ – соответствующие маржинальные распределения. Для операции пересечения формула (3) приводит к следующему соотношению:

$$\mu_{A\cap B}(x) = C\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big). \tag{4}$$

Формула (1) получается при $C(u,v) = uv$, формула (2) – при $C(u,v) = \min(u,v)$.

Модели теории нечетких множеств получаются в результате «огрубления» вероятностных моделей. А именно, считается, что совместные распределения случайных величин описываются формулой (3) с одной и той же копулой C для всех случайных величин. Копулы, используемые в теории нечетких множеств, обладают некоторыми дополнительными свойствами (они задают ассоциативные операции на отрезке $[0;1]$). Такие копулы называют треугольными нормами, или, короче, т-нормами. Использование т-норм позволяет в определенной мере учитывать «зависимость» нечетких величин.

Задача 1

Вывести формулы пересечения нечетких множеств, если рандомизация уровневых множеств проводится с использованием случайной величины, распределенной на отрезке $[h;1]$ и имеющей плотность распределения $p(x) = \frac{2(x-h)}{(1-h)^2}$, $0 < h < 1$. Расчет провести для копул $C(u,v) = uv$, и $C(u,v) = \min(u,v)$.

7.2. Треугольные нормы и пересечение нечетких множеств

Треугольной нормой (или, короче, *т-нормой*) называется бинарная операция на интервале [0;1], которая ассоциативна, коммутативна, не убывает по обоим аргументам и для которой 1 является единичным элементом. Более подробно, функция двух переменных $T: [0;1]^2 \to [0;1]$ является т-нормой, если для любых $x, y, z \in [0;1]$ выполняются следующие условия:

T1) $T(x,1) = x$;

T2) $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$;

T3) $T(x,y) = T(y,x)$;

T4) $T(x,y) \le T(x',y')$, если $x \le x'$ и $y \le y'$.

Пример 1. Ниже приведены примеры нескольких наиболее часто используемых т-норм:

$$T(x,y) = \min(x,y); \tag{5}$$

$$T(x,y) = x \cdot y; \tag{6}$$

$$T(x,y) = \max(0, x + y - 1) \tag{7}$$

$$T(x,y) = \begin{cases} x, y = 1, \\ y, x = 1, \\ 0, x, y < 1. \end{cases} \tag{8}$$

Т-норму (8) часто обозначают $T_{\min}$.

Используя ассоциативность, т-норму T можно распространить на произвольное конечное число операндов:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T(T(x_1, x_2), x_3), T(x_1, x_2, x_3, x_4) = T(T(x_1, x_2, x_3), x_4)$$

и т.д.

Треугольные нормы используются для определения операции пересечения нечетких множеств с учетом их «взаимодействия». Пусть T – треугольная т-норма. Пересечение нечетких подмножеств A и B множества X определяется формулой

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)). \tag{9}$$

Пересечение, определяемое формулой (9), мы будем иногда называть *Т-пересечением*.

Пересечения с использованием т-норм (5)-(8) используются наиболее часто и получили специальные названия. Т-пересечение с т-нормой (5), как уже говорилось, называется *стандартным*, -пересечение с т-нормой (6) – *алгебраическим*, T-пересечение с т-нормой (7) – *граничным*, T-пересечение с т-нормой (8) – *минимальным*.

Пусть T – треугольная т-норма. Нетрудно проверить, что

$$T(x,0) = 0;$$

$$T(x,x) \le x;$$

$$T_{\min}(x,y) \le T(x,y) \le \min(x,y)$$

для любых $x, y \in [0;1]$.

Теорема 1. Если $T(x,x) = x$ для всех $x \in [0;1]$, то $T(x,y) = \min(x,y)$ для всех $x, y \in [0;1]$.

Доказательство. Пусть $x, y \in [0;1]$ и $x \le y$. Тогда

$$x = T(x,x) \le T(x,y) \le T(x,1) = x,$$

и, значит, $T(x,y) = x$.

Непрерывная треугольная норма T называется *архимедовой*, если $T(x,x) < x$ для всех $x \in (0;1)$.

Среди т-норм (5)-(8) непрерывными архимедовыми являются т-нормы (6) и (7).

Рассмотрим отображение $f: [0;1] \to [0;+\infty]$ такое, что $f(x) = -\ln x$ при $x \in (0;1]$ и $f(0 = +\infty$. Отображение f является антимонотонным изоморфизмом полугруппы [0;1] с умножением на полугруппу $[0;+\infty]$ со сложением. Очевидно,

$$x \cdot y = f^{-1}(f(x) + f(y)). \tag{10}$$

Формула (10) дает в определенном смысле универсальный способ порождения архимедовых т-норм.

Пусть $f: [0;1] \to [0;+\infty]$ – произвольная непрерывная монотонно убывающая функция, такая, что $f(1) = 0$. Положим

$$f^{(-1)}(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), y \in [0, f(0)]; \\ \quad 0, y \in [f(0), +\infty]. \end{cases}$$

$$f^{(-1)}(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), y \in [0, f(0)]; \\ \quad 0, y \in [f(0), +\infty]. \end{cases} \tag{11}$$

(функцию $f^{(-1)}(y)$ называют *псевдообратной*). Формула

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) \tag{12}$$

определяет непрерывную архимедову т-норму.

Функция $f(x)$ из (12) называется *аддитивным генератором* т-нормы T. Про т-норму T говорят, что она порождается *аддитивным генератором* $f(x)$.

Формула (10) показывает, что функция $-\ln x$ является аддитивным генератором произведения (т-нормы (6)). Функция $f(x) = 1 - x$ служит аддитивным генератором т-нормы $T(x,y) = \max(0, x + y - 1)$.

Теорема 2. Всякая непрерывная архимедова т-норма T порождается некоторым аддитивным генератором по формуле (12).

В нечеткой логике т-нормы используются для оценки истинности конъюнкции. Например, если A и B – высказывания, то $\langle A \wedge B \rangle = T(\langle A \rangle, \langle B \rangle)$, где T – подходящая т-норма.

Т-норма T является операцией умножения в полугруппе $[0;1]$. С учетом этого для обозначения т-норм используется мультипликативная запись. Часто вместо $T(x,y)$ пишут $x * y$.

Упражнения

1. По заданному семейству убывающих аддитивных генераторов построить семейство т-норм:

   (а) $f_p(x) = 1 - x^p, p \neq 0$;

   (б) $f_w(x) = (1-x)^w, w > 0$;

   (в) $f_s(x) = -\ln\frac{s^x - 1}{s-1}, s > 0, s \neq 1$;

   (г) $f_r(x) = -\ln\frac{x}{r+(1-r)x}, r > 0$;

   (д) $f_r(x) = \frac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda(1-x)), r > 0$;

2. Для т-норм, построенных по генераторам (а)-(е) из упражнения 1, найти предельные значения при стремлении соответствующего параметра к 0, ± 1, $\pm\infty$.
3. Используя т-нормы (1)-(4) построить пересечения нечетких подмножеств A и B:

   (а) $A, B \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_A	0,1	0,7	0,8	1	1	0,9	0,6	0,4	0,2	0,1
μ_B	0	0,1	0,3	0,8	1	0,9	0,6	0,1	0	0

   (б) $A, B \subset \boldsymbol{R}$,

$$\mu_A = min\left(1, max\left(0, \frac{x}{2}\right)\right), \mu_B = min\left(1, max\left(0{,}2 - \frac{x}{2}\right)\right).$$

7.3. Объединение и дополнение нечетких множеств

Для определения операции объединение нечетких множеств используются треугольные конормы (т-конормы). *Т-конормой* называется бинарная операция U на отрезке [0,1], удовлетворяющая следующим условиям:

U1) $U(x, 0) = x$;

U2) $U(U(x, y), z) = U(x, U(y, z))$;

U3) $U(x, y) = U(y, x)$;

U4) $U(x, y) \leq U(x', y')$, если $x \leq x'$ и $y \leq y'$.

Несложно проверить справедливость следующего предложения, в котором устанавливается взаимно однозначное соответствие между т-нормами и т-конормами.

Теорема 3. а) Если $T(x, y)$ – т-норма, то

$U(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$ – т-конорма.

б) Если $U(x, y)$ – т-конорма, то

$T(x, y) = 1 - U(1 - x, 1 - y)$ – т-норма.

Т-нормам (5)-(8) соответствуют следующие т-конормы:

$$U(x, y) = \max(x, y); \tag{13}$$

$$U(x, y) = x + y - x \cdot y; \tag{14}$$

$$U(x, y) = \min(1, x + y); \tag{15}$$

$$U(x, y) = \begin{cases} x, y = 0, \\ y, x = 0, \\ 1, x, y > 0. \end{cases} \tag{16}$$

Т-конорму (16) иногда обозначают $U_{\max}$.

Пусть U – треугольная конорма. Объединение нечетких подмножеств A и B множества X определяется формулой

$$\mu_{A \cup B}(x) = U(\mu_A(x), \mu_B(x)). \tag{17}$$

Объединение, определяемое формулой (17), мы будем иногда называть *U*-объединением.

Пусть U – т-конорма. По аналогии с т-нормами нетрудно проверить, справедливость следующих утверждений:

$$U(x,1) = 1;$$

$$U(x,x) \geq x;$$

$$\max(x,y) \leq U(x,y) \leq U_{\max}(x,y)$$

для любых $x, y \in [0;1]$.

Так же, как и т-нормы, т-конормы можно распространить на произвольное конечное число операндов:

$$U(x_1,x_2,x_3) = U(U(x_1,x_2),x_3), U(x_1,x_2,x_3,x_4) = U(U(x_1,x_2,x_3),x_4)$$

и т.д. Для $a \in [0,1]$ положим

$$[n]a = U(\underbrace{a,\dots,a}_{n \text{ раз}}).$$

Аксиомой Архимеда называют следующее свойство аддитивных величин: если $a, b > 0$, найдется такое натуральное число n, что $na > b$. Пусть U – т-конорма.

Следующая теорема может служить мотивировкой термина «*архимедовы т-нормы*».

Теорема 4. Пусть $*$ – архимедова т-норма, и U – соответствующая ей т-конорма, определенная равенством

$$U(x,y) = 1 - (1-x) * (1-y).$$

Тогда для любых $a, b \in (0,1)$ найдется такое натуральное число n, что $[n]a > b$.

В нечеткой логике т-конормы используются для оценки истинности дизъюнкции. Например, если A и B – высказывания, то

$$\langle A \vee B \rangle = U(\langle A \rangle, \langle B \rangle),$$

где U – подходящая т-конорма.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – конечное множество и P – некоторый нечеткий предикат на множестве X. Положим $a_i = \langle P(x_i) \rangle$, $i = 1,2,\dots,n$. Тогда при стандартной интерпретации квантора существования имеем

$$\langle \exists x P(x) \rangle = \langle P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n) \rangle = U(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (18)$$

Теорема 4 показывает, что при больших n формулой (18) нужно пользоваться с осторожностью.

Пусть U – т-конорма. По аналогии с т-нормами нетрудно проверить, справедливость следующих утверждений:

$$U(x,1) = 1;$$

$$U(x,x) \geq x;$$

$$\max(x,y) \leq U(x,y) \leq U_{\max}(x,y)$$

для любых $x, y \in [0;1]$.

Так же, как и т-нормы, т-конормы можно распространить на произвольное конечное число операндов:

$$U(x_1,x_2,x_3) = U(U(x_1,x_2),x_3), U(x_1,x_2,x_3,x_4) = U(U(x_1,x_2,x_3),x_4)$$

и т.д. Для $a \in [0,1]$ положим

$$[n]a = U(\underbrace{a,\dots,a}_{n \text{ раз}}).$$

Аксиомой Архимеда называют следующее свойство аддитивных величин: если $a, b > 0$, найдется такое натуральное число n, что $na > b$. Пусть U – т-конорма.

Следующая теорема может служить мотивировкой термина «*архимедовы т-нормы*».

Теорема 4. Пусть $*$ – архимедова т-норма, и U – соответствующая ей т-конорма, определенная равенством

$$U(x,y) = 1 - (1-x) * (1-y).$$

Тогда для любых $a, b \in (0,1)$ найдется такое натуральное число n, что $[n]a > b$.

В нечеткой логике т-конормы используются для оценки истинности дизъюнкции. Например, если A и B – высказывания, то

$$\langle A \vee B \rangle = U(\langle A \rangle, \langle B \rangle),$$

где U – подходящая т-конорма.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – конечное множество и P – некоторый нечеткий предикат на множестве X. Положим $a_i = \langle P(x_i) \rangle$, $i = 1,2,\dots,n$. Тогда при стандартной интерпретации квантора существования имеем

$$\langle \exists x P(x) \rangle = \langle P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n) \rangle = U(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (18)$$

Теорема 4 показывает, что при больших n формулой (18) нужно пользоваться с осторожностью.

В самом деле, пусть $x * y = xy$. Тогда соответствующая т-конорма задается формулой $U(x, y) = x + y - xy$. Нетрудно проверить, что

$$[n]x = 1 - (1 - x)n.$$

Таким образом, если $x \in (0,1)$, то $[n]x \to 1$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь нечеткое подмножество A конечного множества X такое, что $\mu_A(x) = a \in (0,1)$ при всех $x \in X$. Тогда, если X содержит достаточно много элементов, оценка истинности высказывания $\langle \exists x\, x \in A \rangle$ оказывается сколь угодно близкой к 1, даже при малом a. Интуитивно, высокая оценка истинности утверждения $\langle \exists x\, x \in A \rangle$ связана с наличием элемента $x \in X$, о котором с достаточной степенью уверенности можно утверждать, что он является элементом множества A. Это представление не вполне согласуется с полученным результатом. С учетом этого для оценки истинности утверждений, содержащих квантор существования, используется, как правило, точная верхняя грань:

$$\langle \exists x P(x) \rangle = \sup_x \langle P(x) \rangle.$$

Для определения операции *дополнения нечетких множеств* используются убывающие функции $c\colon [0,1] \to [0,1]$ такие, что $c(0) = 1$ и $c(1) = 0$. Такие функции называют *нечетким отрицанием*.

Говорят, что нечеткое отрицание *инволютивно*, если $c\big(c(x)\big) = x$ для всех $x \in [0,1]$. Точка a называется *точкой равновесия*, если $c(a) = a$.

Теорема 5. Нечеткое отрицание имеет не более одной точки равновесия. Непрерывное нечеткое отрицание имеет единственную точку равновесия.

Теорема 6. Пусть c – непрерывное и инволютивное нечеткое отрицание. Тогда $c(x)$ представимо в следующем виде:

$$c(x) = g^{-1}(g(1) - g(x)),$$

где $g(x)$ – непрерывная монотонная функция, заданная на отрезке [0,1], и такая, что $g(0) = 0$.

Функцию g из предыдущей теоремы называют возрастающим генератором отрицания c.

Т-норма T, т-конорма U и нечеткое отрицание c образуют *тройку де Моргана*, если

Доказать, что T_ρ, U_ρ, c_ρ образуют тройку де Моргана, удовлетворяющую закону исключенного третьего и закону противоречия, но не удовлетворяют законам дистрибутивности.

7.4. Т-нормы и принцип обобщения

В этом параграфе мы применим т-нормы для обобщения стандартной композиции нечетких соответствий и стандартных арифметических операций над нечеткими величинами.

Пусть $R \subset X \times Y$ и $S \subset Y \times Z$ – нечеткие бинарные отношения. Напомним, что стандартная композиция отношений R и S определяется формулой

$$(\mu_{RS}(x,z) = \sup\{\min(\mu_R(x,y), \mu_S(y,z) \,|\, y \in Y\}. \qquad (19)$$

Эта формула получается по принципу обобщения из определения композиции отношений с помощью равносильности

$$(x,z) \in RS \Leftrightarrow \exists\, y \in Y\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S. \qquad (20)$$

Если интерпретировать конъюнкцию с помощью т-нормы $*$, формула (19) принимает следующий вид

$$\mu_{R(*)S}(x,z) = \sup\{\mu_R(x,y) * \mu_S(y,z) \,\big|\, y \in Y\}. \qquad (21)$$

В формуле (21) мы использовали для композиции обозначение $R(*)S$, чтобы указать, на использование т-нормы, вообще говоря, отличной от стандартной. Такого же соглашения мы будем придерживаться и в дальнейшем, сохраняя для стандартной композиции обозначение RS.

Пусть A и B – нечеткие подмножества множеств X и Y соответственно. Стандартное определение декартова произведения $A \times B$ предполагает, что $\mu_{A\times B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$. Замена min на т-норму $*$ приводит к определению

$$\mu_{A\times B}(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y). \qquad (22)$$

За декартовым произведением, определенным предыдущей формулой, мы сохраним обозначение $A \times B$, указывая явным образом соответствующую т-норму, если речь идет о нестандартной операции.

Пусть A и B – нечеткие подмножества числовой прямой $\boldsymbol{R}$. Сумма множеств A и B определяется как нечеткое подмножество $A + B \subset \boldsymbol{R}$, являющееся образом нечеткого подмножества $A \times B \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ относительно отображения суммирования $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. В соответствии с принципом обобщения имеем:

$$\mu_{A+B}(z) = \sup\{\mu_{A\times B}(x,y) | x + y = z\}. \tag{23}$$

Таким образом, в соответствии с (4) получаем

$$\mu_{A+B}(z) = \sup\{\mu_A(x) * \mu_B(y) | x + y = z\}. \tag{24}$$

Упражнения

1. Найти композицию соответствий $R(*)S$, если R и S – нечеткие соответствия, заданные матрицами:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

а $*$ – одна из следующих т-норм: а) $x * y = \min(x,y)$; б) $x * y = xy$; в) $x * y = \max(0, x + y - 1)$; г) $x * y = T_{\min}(x,y)$.

2. Пусть R – нечеткое отношение на множество целых чисел, заданное своей функцией принадлежности

$$\mu_R(x,y) = \max\left(0, 1 - \frac{|x-y|}{2}\right).$$

а) Найти стандартную композицию R^2.

б) Найти композицию $R(\cdot)R$ относительно т-нормы $T(x,y) = xy$.

в) Найти композицию $R(T_{\min})R$.

Указать т-нормы, относительно которых отношение R является отношением эквивалентности.

3. Пусть нечеткое соответствие R задано матрицей вида $R = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что $R(*)R = R$, какова бы ни была т-норма $*$.

4. Пусть A – нечеткое подмножество числовой прямой, с функцией принадлежности $\mu_A(x) = \max(0{,}1 - |x|)$.

а) Найти функцию принадлежности множества $A + A$, используя т-нормы из упражнения 1.

б) Найти функцию принадлежности множества $A + \cdots + A$, (n слагаемых).

7.5. Суммирование взаимодействующих нечетких величин

Как было показано в предыдущем разделе, суммирование нечетких чисел в соответствии с принципом обобщения определяется формулой (24). Рассмотрим, к каким результатам приводит применение формулы (24) в случае суммирования треугольных нечетких чисел относительно т-норм стандартной т-нормы $T = \min$, т-нормы произведения $T = \cdot$ и минимальной т-нормы $T = T_{\min}$.

Для определенности пусть $A = \langle 0;1;2\rangle$ и $B = \langle 1;2;3\rangle$. Несложно заметить, что какую бы т-норму мы не выбрали, сумма $A + B$ будет нечетким числом треугольной формы:

$$A + B \approx \langle 1;3;5\rangle.$$

Для *стандартной т-нормы* $T = \min$ равенство оказывается точным:

$$A + B = \langle 1;3;5\rangle.$$

Формула (20) для *т-нормы произведения* приобретает следующий вид:

$$\mu_{A+B}(z) = \sup\{\mu_A(x) \cdot \mu_B(y) | x + y = z\}.$$

Предположим, что $1 \le z \le 3$. Тогда $\mu_{A+B}(z)$ получается в результате решения следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) \to \max, \\ x + y = z, \\ 0 \le x \le 1, \\ 1 \le y \le 2. \end{cases}$$

Так как $\mu_A(x) = x$ при $0 \le x \le 1$, а $\mu_B(y) = y - 1$ при $1 \le y \le 2$, получаем: следующую задачу:

$$\begin{cases} x \cdot (y - 1) \to \max, \\ x + y = z, \\ 0 \le x \le 1, \\ 1 \le y \le 2. \end{cases}$$

Ее решение, как легко видеть получается при $x = y - 1 = \frac{z-1}{2}$, так что

$$\mu_{A+B}(z) = \left(\frac{z-1}{2}\right)^2.$$

Для $3 \le z \le 5$ аналогичным образом находим

$$\mu_{A+B}(z) = \left(\frac{5-z}{2}\right)^2.$$

Уровневые множества при использовании т-нормы произведения оказываются уже, чем при использовании стандартной т-нормы. Например,

$$(A+B)^{0,81} = [2{,}8; 3{,}2]$$

для т-нормы произведения и

$$(A+B)^{0,81} = [2{,}62; 3{,}38]$$

для стандартной т-нормы.

Относительно т-нормы $T_{\min}$ при тех же A и B сумма $A+B$ оказывается четким числом 3.

В случае, когда речь идет о вычислении характеристик потока нечетко определенных платежей, выбор подходящей т-нормы позволяет учесть «взаимодействие» платежей. Если поток состоит из невзаимодействующих платежей, суммирование нужно выполнять относительно т-нормы, близкой к стандартной. В этом случае на каждом уровне операции сводятся к интервальным. Пессимистические оценки оказываются «самыми» пессимистическими, а оптимистические – «самыми» оптимистическими. При взаимодействующих платежах, промежутки между пессимистическими» и оптимистическими оценками сжимаются к центральным значениям.

Рассмотрим на примере *параметрического семейства т-норм Франка*, как за счет выбора параметра можно учесть характер взаимодействия нечетких величин. Т-нормы этого семейства порождаются аддитивными генераторами вида

$$g_s(\alpha) = -\ln\left(\frac{s^\alpha - 1}{s-1}\right), s > 0, s \ne 1 \tag{25}$$

и имеют следующий вид:

$$T_s(\alpha, \beta) = \log_s\left[1 + \frac{(s^\alpha - 1)(s^\beta - 1)}{s-1}\right]. \tag{26}$$

При s, стремящемся к 0, 1 или $+\infty$, т-норма $T_s(\alpha, \beta)$ стремится соответственно к $\min(\alpha, \beta)$, $\alpha \cdot \beta$ или $\max(0, \alpha + \beta - 1)$. Если для прогнозируемого потока нечетких платежей характерна персистентность, значение s следует выбирать в промежутке от 1 до $+\infty$. Если поток платежей антиперсистентный – значение параметра нужно выбирать в промежутке от 0 до 1.

Учет взаимодействия платежей при вычислении внутренней нормы доходности получается модификацией формулы (26) из 4.5:

$$\mu_{IRR}(r) = \sup_{x\in R^{n+1}}\{T(\mu_{A_0}(x_0), \mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n))\,|\,v^r(\boldsymbol{x}) = 0\}. \quad (27)$$

Пусть g – аддитивный генератор т-нормы T. Тогда

$$\mu_{IRR(A)}(r) =$$

$$= \sup_{x\in R^{n+1}} \left\{g^{(-)}\left(g\left(\mu_{A_0}(x_0)\right) + \dots + g\left(\mu_{A_n}(x_n)\right)\right)\middle|\, v^r(\boldsymbol{x}) = 0\right\}. \quad (28)$$

Учитывая монотонность аддитивного генератора, предыдущую формулу можно переписать следующим образом:

$$\mu_{IRR(A)}(r) = \inf_{x\in R^{n+1}} \left\{\textstyle\sum_{i=0}^{n} g\left(\mu_{A_i}(x_i)\right) |\, v^r(\boldsymbol{x}) = 0\right\}. \quad (29)$$

Таким образом, вычисление нечеткой внутренней нормы доходности сводится к нахождению условного экстремума.

Предположим, что нечеткие платежи представлены треугольными нечеткими числами, а аддитивный генератор g является выпуклой функцией (как в случае генераторов Франка). Пусть для определенности

$$A_i = \langle a_{i1}, a_i, a_{i2}\rangle,\ i = 0,1,\dots,n.$$

Положим

$$\boldsymbol{a}_1 = (a_{i1})_{i=0,\dots,n},\ \boldsymbol{a} = (a_i)_{i=0,\dots,n},\ \boldsymbol{a}_2 = (a_{i2})_{i=0,\dots,n}.$$

Применяя т-норму T, точное равенство для $NPV^r(\boldsymbol{A})$ нужно заменить приближенным:

$$NPV^r(\boldsymbol{A}) \approx (v^r(\boldsymbol{a}_1), v^r(\boldsymbol{a}), v^r(\boldsymbol{a}_2)). \quad (30)$$

Если $v^r(\boldsymbol{a}_1) \le 0$ и $v^r(\boldsymbol{a}) \ge 0$, нетрудно показать, что минимальное значение в (25) достигается при таком $\boldsymbol{x}$, для которого $x_i \in [a_{i1}; a_i]$, $i = 0,1,\dots,n$. Положим

$$\alpha_i = \mu_{A_i}(x_i),\ d_i = a_i - a_{i1} \text{ и } k_i = \frac{d_i}{(1+r)^i}$$

Тогда $x_i = a_{i1} + \alpha_i d_i$, и условие $v^r(\boldsymbol{x}) = 0$ принимает следующий вид:

$$v^r(\boldsymbol{a}_1) + \sum_{i=0}^{n} k_i \alpha_i = 0. \qquad (31)$$

Вычисление $\mu_{IRR(A)}(r)$ сводится к следующей задаче выпуклого программирования:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} g(\alpha_i) \to \min, \\ \sum_{i=0}^{n} k_i \alpha_i = -v^r(\boldsymbol{a}_1), \\ 0 \le \alpha_i \le 1, i = 0,\ 1,\ \dots,\ n. \end{cases} \qquad (32)$$

В общем случае эта оптимизационная задача может быть решена с использованием численных методов.

Пример 3. Найдем функцию принадлежности внутренней нормы доходности $\mu(r)$ денежного потока с нечеткими платежами

$$A_0 = \langle -1010; -1000; -990 \rangle,$$

$$A_1 = \langle 670; 700; 730 \rangle,$$

$$A_2 = \langle 750; 800; 850 \rangle$$

относительно т-нормы $T(\alpha, \beta) = \alpha\beta$.

Если $v^r(\boldsymbol{a}_1)$ и $v^r(\boldsymbol{a}_2)$ одного знака, то $\mu(r) = 0$. Вычислим значение функции принадлежности для тех значений r, для которых

$$v^r(\boldsymbol{a}_1) \le 0,\ v^r(\boldsymbol{a}) \ge 0. \qquad (33)$$

В этом случае оптимизационная задача (32) для заданного значения r приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} -\ln\alpha_0 - \ln\alpha_1 - \ln\alpha_2 \to \min, \\ k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = V(r), \\ 0 \le \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \le 1, \end{cases}$$

где

$$k_0 = 10; k_1 = \frac{30}{1+r}; k_2 = \frac{50}{(1+r)^2}; V(r) = -1010 + \frac{670}{1+r} + \frac{750}{(1+r)^2}.$$

Применяя теорему Куна-Таккера, приходим к системе уравнений:

$$-\frac{1}{\alpha_i} - \lambda_i + \lambda k_i = 0; \lambda_i(1 - \alpha_i) = 0; \lambda \ge 0; \sum_{i=0}^{n} k_i \alpha_i = V(r).$$

Условия (33) выполняются при значениях r, лежащих в промежутке от $r_1 = 25{,}50\%$ до $r_2 = 31{,}05\%$. В этом промежутке $k_0 < k_1 < k_2$.

Промежуток $[r_1; r_2]$ разбивается точками $r_3 = 28{,}11\%$ и $r_4 = 30{,}48\%$ на три промежутка. На этих промежутках $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и $\mu(r)$ определяются следующим образом:

$$\text{если } r_1 \le r \le r_3, \text{ то } \alpha_i = \frac{|V|}{3k_i},\ i = 0{,}1{,}2, \text{ и } \mu(r) = \frac{|V|^3}{27k_0k_1k_2};$$

$$\text{если } r_3 \le r \le r_4, \text{ то } \alpha_0 = 1,\ \alpha_i = \frac{|V|-k_0}{2k_i},\ i = 1{,}2, \text{ и } \mu(r) = \frac{(|V|-k_0)^2}{2k_1k_2};$$

$$\text{если } r_4 \le r \le r_2, \text{ то } \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \frac{|V|-k_0-k_1}{k_2} \text{ и } \mu(r) = \frac{|V|-k_0-k_1}{k_2}.$$

Аналогичным образом $\mu(r)$ вычисляется для тех значений r, для которых $v^r(\boldsymbol{a}) \le 0$, $v^r(\boldsymbol{a}_2) \ge 0$. График функции принадлежности $\mu(r)$ приведен на рис. 1.

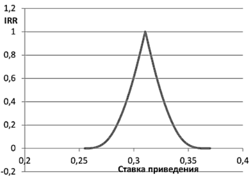

Рис. 1. Функция принадлежности IRR относительно т-нормы $T(\alpha,\beta) = \alpha\beta$

Рассмотрим случай, когда нечеткие платежи представлены треугольными нечеткими числами, причем определены на своих временных горизонтах с одной и той же относительной погрешностью, которая меняется вместе со ставкой приведения.

Более точно, пусть

$$A_i = (a_i - d_i\,; a_i; a_i + d_i\,),\ i = 0{,}1, \dots, n,$$

при этом $d_i = d(1+r)^i$. Тогда в предыдущих обозначениях $k_i = d$ для всех $i = 0,1,\dots,n$. Решение оптимизационной задачи (32) при условии (33) получается, когда

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{|v^r(a_1)|}{(n+1)d}.$$

При этом

$$\mu_{IRR(A)}(r) = g^{(-)}\left((n+1)g\left(\frac{|v^r(a_1)|}{(n+1)d}\right)\right). \quad (34)$$

Аналогично, если $v^r(\boldsymbol{a}) \le 0$, $v^r(\boldsymbol{a}_2) \ge 0$, то

$$\mu_{IRR(A)}(r) = g^{(-)}\left((n+1)g\left(\frac{v^r(a_2)}{(n+1)d}\right)\right). \quad (35)$$

Формулы (34) и (35) справедливы, в частности, для генераторов семейства Франка $g_s(\alpha)$.

Упражнения

1. Вычислить $A+B$ относительно т-норм $T(u,v) = \min(u,v)$, $T(u,v) = uv$ и $T(u,v) = \max(0, u+v-1)$ если а) $A = \langle(1,2,3)\rangle$, $B = \langle 2,3,4\rangle$; б) $A = \langle(1,2,3)\rangle$, $B = \langle 2,4,6\rangle$.
2. Пусть $A = \langle a-\delta, a, a+\delta\rangle$, $B = \langle b-\delta, b, b+\delta\rangle$.
   а) Доказать, что
   $$(A+B)(z) = \left(1 - \frac{|a+b-z|}{2\delta}\right)^2, z \in [a+b-2\delta, a+b+2\delta]$$
   относительно т-нормы произведения $T(u,v) = uv$.
   б) Доказать, что
   $$(A+B)(z) = \frac{\left(1-\frac{|a+b-z|}{2\delta}\right)^2}{1+(\gamma-1)\left(\frac{|a+b-z|}{2\delta}\right)^2}, z \in [a+b-2\delta, a+b+2\delta]$$
   относительно т-нормы Хамахера
   $$T_\gamma(u,v) = \frac{uv}{\gamma+(1-\gamma)(u+v-uv)}.$$
3. Вывести общую форму сложения треугольных чисел относительно т-нормы произведения $T(u,v) = uv$.
4. Пусть T – т-норма, порожденная аддитивным генератором g, $A_1 = (a_1, b_1, \alpha, \beta)_{LR}$, $A_2 = (a_2, b_2, \alpha, \beta)_{LR}$. Предположим, что L, R

дважды дифференцируемы и вогнуты, а g дважды дифференцируема и строго выпукла. Доказать, что тогда

$$(A_1 + A_2)(x) =$$

$$= \begin{cases} g^{-1}\left(2g\left(L\left(\frac{a_1+a_2-x}{2\alpha}\right)\right)\right), & x \in [a_1 + a_2 - 2\alpha, a_1 + a_2]; \\ 1, & x \in [a_1 + a_2, b_1 + b_2]; \\ g^{-1}\left(2g\left(R\left(\frac{x-b_1-b_2}{2\beta}\right)\right)\right), & x \in [b_1 + b_2, b_1 + b_2 + 2\beta]. \end{cases}$$

5. Пусть

$$A_0 = \langle -1010; -1000; -990 \rangle,$$

$$A_1 = \langle 700 - 10 \cdot (1 + r); 700; 700 + 10 \cdot (1 + r) \rangle,$$

$$A_2 = \langle 800 - 10 \cdot (1 + r)^2; 800; 800 + 10 \cdot (1 + r)^2 \rangle -$$

денежный поток нечетких платежей, в котором неопределенность растет вместе со ставкой дисконтирования. Вычислить внутреннюю норму доходности этого потока платежей а) относительно т-норм семейства Франка; б) относительно т-норм семейства Хамахера.

8. Оптимальные решения в условиях неопределенности

8.1. Метод Беллмана-Заде

Начнем с примера.

Пример 1 («Поиски работы»). Из заданного множества предложений работы $A = \{a, b, c, d\}$ требуется выбрать работу с высокой зарплатой так, чтобы она была интересной и находилась недалеко от дома.

Дополнительная информация

Предлагаемая зарплата в тыс. руб.:

a	*b*	*c*	*d*
40	45	50	60

Время (в мин.), необходимое на то, чтобы добраться до работы:

a	*b*	*c*	*d*
54	15	24	5

Понятие высокой зарплаты является нечетким. Будем считать, что оно представлено как нечеткое подмножество множества возможных зарплат. Зарплаты от 64 тыс. и выше заведомо считаются высокими, зарплаты ниже 37 тыс. высокими не считаются. Будем считать, что нечеткое множество высоких зарплат задано как промежуток W числовой прямой со следующей функцией принадлежности:

$$\mu_W(x) = \begin{cases} 0, x \leq 37, \\ \frac{x-37}{27}, 37 \leq x \leq 64, \\ 1, x \geq 64. \end{cases}$$

Теперь формализуем понятие «близко от дома».

Те места, до которых добираться менее 10 мин., заведомо считаются близкими к дому, те, до которых добираться более часа – точно не близкими. Понятие «недалеко от дома» мы интерпретируем как нечеткий промежуток N числовой прямой с функцией принадлежности

$$\mu_N(x) = \begin{cases} 1, x \leq 10, \\ \frac{60-x}{50}, 10 \leq x \leq 60, \\ 0, x \geq 60. \end{cases}$$

8. Оптимальные решения в условиях неопределенности

8.1. Метод Беллмана-Заде

Начнем с примера.

Пример 1 («Поиски работы»). Из заданного множества предложений работы $A = \{a, b, c, d\}$ требуется выбрать работу с высокой зарплатой так, чтобы она была интересной и находилась недалеко от дома.

Дополнительная информация

Предлагаемая зарплата в тыс. руб.:

a	*b*	*c*	*d*
40	45	50	60

Время (в мин.), необходимое на то, чтобы добраться до работы:

a	*b*	*c*	*d*
54	15	24	5

Понятие высокой зарплаты является нечетким. Будем считать, что оно представлено как нечеткое подмножество множества возможных зарплат. Зарплаты от 64 тыс. и выше заведомо считаются высокими, зарплаты ниже 37 тыс. высокими не считаются. Будем считать, что нечеткое множество высоких зарплат задано как промежуток W числовой прямой со следующей функцией принадлежности:

$$\mu_W(x) = \begin{cases} 0, x \leq 37, \\ \frac{x-37}{27}, 37 \leq x \leq 64, \\ 1, x \geq 64. \end{cases}$$

Теперь формализуем понятие «близко от дома».

Те места, до которых добираться менее 10 мин., заведомо считаются близкими к дому, те, до которых добираться более часа – точно не близкими. Понятие «недалеко от дома» мы интерпретируем как нечеткий промежуток N числовой прямой с функцией принадлежности

$$\mu_N(x) = \begin{cases} 1, x \leq 10, \\ \frac{60-x}{50}, 10 \leq x \leq 60, \\ 0, x \geq 60. \end{cases}$$

кое подмножество G_i', а G_i определяется формулой $G_i(a) = G_i'(g_i(a))$. Аналогично для ограничений.

Множество нечетких решений D определяется формулой

$$D = \left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} C_j\right),$$

Для функций принадлежности имеем:

$$\mu_D(a) = \min\{\inf_i \mu_{G_i}(a), \inf_j \mu_{C_j}(a)\}.$$

Упражнения

1. Рассматриваются пять туристических туров, из которых нужно выбрать наиболее подходящий. Объективные характеристики туров цена и продолжительность. Субъективная характеристика интересность задана в форме нечеткого подмножества.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Цена	1000	3000	10000	5000	7000
Продолжительность	15	10	28	10	15
Интерес	0,4	0,3	1,0	0,6	0,5

Задать нечеткие величины «приемлемая цена» и «подходящая длительность». Сформировать нечеткое множество интересных туров подходящей длительности и приемлемой цены и выбрать наиболее подходящий тур.

2. Множество альтернатив содержит четыре элемента a, b, c, d. Их соответствие нечетким целям G_1, G_2, G_3 представлено в виде нечетких подмножеств множества альтернатив:

	a	b	c	d
G_1	0,7	0,8	0,3	0,2
G_2	0,4	0,6	0,5	0,8
G_3	0,6	0,9	0,8	0,7

а) Выделить наиболее подходящую альтернативу. б) Выделить наиболее подходящую альтернативу, если задана относительная важность целей $G_1 : G_2 : G_3 = 1 : 3 : 5$.

3. а) Разработать кейс «Выбор подержанного автомобиля»: Требуется выбрать относительно недорогой автомобиль с не очень большим пробегом престижной марки.

б) Разработать кейс «Снять квартиру»: требуется снять достаточно большую квартиру в хорошем состоянии, расположенную недалеко от места работы.

8.2. Коллективное принятие решений

Пусть

$$A = \{a, b, c, \dots, x, y, z\} -$$

конечное множество альтернатив, содержащее, по крайней мере, три различные альтернативы, а

$$N = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} -$$

конечное множество экспертов, оценивающих альтернативы. Свою оценку эксперт e_i представляет в форме отношения предпочтения R_i. *Правило коллективного выбора* – это отображение f, которое набору индивидуальных предпочтений $(R_1, \dots, R_n)$ ставит в соответствие отношение *коллективного предпочтения* $R = f(R_1, \dots, R_n)$. В случае, когда отношения предпочтения четкие, построить правило коллективного выбора при естественных требованиях оказывается невозможным. Этот факт составляет основное содержание знаменитой *теоремы Эрроу о невозможности*.

Приведем точные формулировки. Предполагается, что отношения предпочтения рефлексивны, транзитивны и полны. Для каждого отношения предпочтения R определим отношения *безразличия* I и *строгого предпочтения* P условиями:

$(a, b) \in I$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in R$ и $(b, a) \in R$;

$(a, b) \in P$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in R$ и $(b, a) \notin R$.

Используя операции над бинарными отношениями, эти определения можно записать следующим образом:

$$I = R \cap R^{-1}; P = R \cap \overline{R^{-1}}.$$

Будем говорить, что альтернатива a лучше, чем альтернатива b, если $(a, b) \in P$.

Укажем некоторые свойства функций коллективного выбора.

(U) *Универсальность*. Функция коллективного выбора f должна быть определена для любого набора индивидуальных предпочтений $(R_1, \dots, R_n)$.

(P) *Оптимальность по Парето*. Если все эксперты считают, что альтернатива a лучше, чем альтернатива b, то a лучше, чем b относительно коллективного предпочтения

(I) *Независимость от посторонних альтернатив*. Коллективное решение о предпочтении при сравнении альтернатив a и b, зависит от индивидуальных предпочтений, связывающих только эти альтернативы.

Эксперт e_i называется *диктатором* при выполнении следующего условия: если диктатор считает, что альтернатива a лучше, чем альтернатива b, то a лучше, чем b относительно коллективного предпочтения. Функция коллективного выбора f называется *диктаторской*, если имеется эксперт-диктатор.

Теорема Эрроу утверждает, что функция коллективного выбора, удовлетворяющая условиям (U), (P), (I), является диктаторской и имеет вид $f(R_1, \dots, R_n) = R_i$, где e_i – диктатор.

Если допустить, что коллективное предпочтение может быть нечетким, ситуация радикально меняется.

Приведем необходимые определения.

Возьмем в качестве логической шкалы отрезок $[0,1]$, снабженный т-нормой $\alpha \wedge \beta = \max\{0, \alpha + \beta - 1\}$, играющей роль конъюнкции, отрицанием $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ и связанными с ними операциями дизъюнкции $\alpha \vee \beta = \min\{\alpha + \beta, 1\}$ и импликации $\alpha \to \beta = \min\{1 - \alpha + \beta, 1\}$.

Пусть R – нечеткое отношение на множестве альтернатив. Будем говорить, что отношение R

рефлексивно, если $\mu_R(a, a) = 1$ для любой альтернативы a;

транзитивно, если $\left(\mu_R(a, b) \wedge \mu_R(b, c)\right) \to \mu_R(a, c) = 1$ для любых альтернатив a, b, c;

полно, если $\mu_R(a, b) \vee \mu_R(b, a) = 1$ для любых альтернатив a, b, $a \neq b$;

Нечеткие отношения безразличия и строгого предпочтения, ассоциированные с нечетким отношением предпочтения R, определим следующим образом:

$$\mu_I(a, b) = \mu_R(a, b) \wedge \mu_R(b, a); \ \mu_P(a, b) = \mu_R(a, b) \wedge \overline{\mu_R(b, a)} \ .$$

Свойства (U), (P), (I) следующим образом распространяются на случай нечеткого отношения R .

(U) *Универсальность*. Функция коллективного выбора f должна быть определена для любого набора индивидуальных предпочтений $(R_1, \dots, R_n)$.

(P) *Оптимальность по Парето*. Если все эксперты считают, что альтернатива a лучше, чем альтернатива b, то a лучше, чем b относительно коллективного предпочтения

(I) *Независимость от посторонних альтернатив*. Коллективное решение о предпочтении при сравнении альтернатив a и b, зависит от индивидуальных предпочтений, связывающих только эти альтернативы.

Эксперт e_i называется *диктатором* при выполнении следующего условия: если диктатор считает, что альтернатива a лучше, чем альтернатива b, то a лучше, чем b относительно коллективного предпочтения. Функция коллективного выбора f называется *диктаторской*, если имеется эксперт-диктатор.

Теорема Эрроу утверждает, что функция коллективного выбора, удовлетворяющая условиям (U), (P), (I), является диктаторской и имеет вид $f(R_1, \dots, R_n) = R_i$, где e_i – диктатор.

Если допустить, что коллективное предпочтение может быть нечетким, ситуация радикально меняется.

Приведем необходимые определения.

Возьмем в качестве логической шкалы отрезок $[0,1]$, снабженный т-нормой $\alpha \wedge \beta = \max\{0, \alpha + \beta - 1\}$, играющей роль конъюнкции, отрицанием $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ и связанными с ними операциями дизъюнкции $\alpha \vee \beta = \min\{\alpha + \beta, 1\}$ и импликации $\alpha \to \beta = \min\{1 - \alpha + \beta, 1\}$.

Пусть R – нечеткое отношение на множестве альтернатив. Будем говорить, что отношение R

рефлексивно, если $\mu_R(a, a) = 1$ для любой альтернативы a;

транзитивно, если $\left(\mu_R(a, b) \wedge \mu_R(b, c)\right) \to \mu_R(a, c) = 1$ для любых альтернатив a, b, c;

полно, если $\mu_R(a, b) \vee \mu_R(b, a) = 1$ для любых альтернатив a, b, $a \neq b$;

Нечеткие отношения безразличия и строгого предпочтения, ассоциированные с нечетким отношением предпочтения R, определим следующим образом:

$$\mu_I(a, b) = \mu_R(a, b) \wedge \mu_R(b, a); \ \mu_P(a, b) = \mu_R(a, b) \wedge \overline{\mu_R(b, a)} \ .$$

Свойства (U), (P), (I) следующим образом распространяются на случай нечеткого отношения R .

(U) *Универсальность*. Функция коллективного выбора f должна быть определена для любого набора индивидуальных предпочтений $(R_1, \dots, R_n)$.

Матрица отношения коллективного предпочтения R, построенного по правилу большинства:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 & 0{,}75 & 0{,}625 \\ 0{,}25 & 1 & 0{,}75 & 0{,}375 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 1 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь вычисляем отношение строгого предпочтения

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$$

Имеется единственное полное упорядочение (w, z, x, y), совместимое с уровневым множеством

$$P^{0{,}25} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Доказать теорему 1.
2. Проверить, является ли отношение предпочтения R из примера 2, транзитивным и полным.
3. Пять судей следующим образом распределили места между четырьмя фигуристами a, b, c, d:

1	2	3	4	5
a	*a*	*b*	*a*	*d*
b	*c*	*a*	*d*	*a*
c	*d*	*c*	*b*	*b*
d	*b*	*d*	*c*	*c*

Определить победителя.

4. Попросить группу экспертов (однокурсников) упорядочить изучаемые дисциплины по критерию «нравится». Получить коллективное отношение предпочтения.

8.3. Нечеткая линейная регрессия

Линейная регрессия используется для моделирования линейной зависимости между независимыми (объясняющими) переменными x_1, x_2, …, x_n и зависимой (объясняемой) переменной y вида

$$y = \boldsymbol{ax} = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, x_0 = 1. \qquad (1)$$

Значения переменных x_1, x_2, …, x_n и y получаются в результате наблюдений, коэффициенты a_0, a_1, …, a_n вычисляют таким образом, чтобы минимизировать отклонения наблюдаемых значений зависимой переменной от тех, которые получаются по формуле (1). В случае, когда отклонения обусловлены случайными ошибками при определении значений переменных, минимизация проводится методом наименьших квадратов. Найденные коэффициенты a_0, a_1, …, a_n отражают влияние соответствующих независимых переменных на зависимую переменную.

Возможна и другая ситуация, когда зависимость (1) носит приближенный характер, причем неточность обусловлена не случайными ошибками наблюдений, а природой явления. В этом случае более адекватным решаемой задаче может оказаться поиск нечетких коэффициентов A_0, A_1, …, A_n, наиболее точно соответствующих имеющимся данным.

В случае нечеткости уравнение (1) приобретает следующий вид:

$$Y = \boldsymbol{Ax} = A_0x_0 + A_1x_1 + \cdots + A_nx_n, x_0 = 1, \qquad (2)$$

где коэффициенты могут быть нечеткими числами.

В общем случае задача нечеткой линейной регрессии может быть поставлена следующим образом. Имея m результатов наблюдений $(y_j, \boldsymbol{x}_j)$, $j = 1,2, \dots, m$, требуется оптимальным образом определить коэффициенты $A_0, A_1, \dots, A_n$ так, чтобы расхождения между значениями y_j и $\boldsymbol{Ax}_j$ были приемлемо малыми. Последнее условие нуждается в уточнении и зависит от решаемой задачи.

Будем искать нечеткие коэффициенты $A_0, A_1, \dots, A_n$ так, чтобы для каждой нечеткой величины

$$Y_j = \boldsymbol{Ax}_j = A_0 + A_1x_{1j} + A_2x_{2j} + \cdots + A_nx_{nj}, j = 1,2, \dots, m, \qquad (3)$$

выполнялись соотношения

$$\mu_{Y_j}(y_j) \geq h, \qquad (4)$$

где h – некоторое заданное наперед пороговое значение, при условии, что возникающая нечеткость в определенном смысле минимальна.

Если речь идет о поиске коэффициентов в виде симметричных треугольных нечетких чисел, задача нечеткой линейной регрессии сводится к задаче линейного программирования.

Будем искать коэффициенты A_j в виде

$$A_i = \langle a_i - d_i, a_i, a_i + d_i \rangle.$$

Тогда Y_j имеет следующий вид:

$$Y_j = \langle z_j - r_j, z_j, z_j + r_j \rangle,$$

где

$$z_j = a_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij}\, , r_j = d_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i |x_{ij}|.$$

Определим суммарную нечеткость в определении выходных значений формулой

$$r = \textstyle\sum_{j=1}^{m} r_j = m d_0 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_i |x_{ij}|.$$

Задача нечеткой линейной регрессии сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$r = \textstyle\sum_{j=1}^{m} r_j = m d_0 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_i |x_{ij}| \to \min;$$

$$y_j \geq \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} - (1 - h) \sum_{i=1}^{n} d_i |x_{ij}|\, , j = 1,2, \dots, m;$$

$$y_j \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ij} + (1 - h) \sum_{i=1}^{n} d_i |x_{ij}|\, , j = 1,2, \dots, m;$$

$$d_i \geq 0,\ i = 1,2, \dots, n.$$

Пример 3. Рассмотрим случай с $n = 1$, $m = 3$. Пусть наблюдения представлены следующей таблицей

x	2	4	6
y	14	11	17

Линейную регрессию будем искать в виде $Y = A + Bx$, где

$$A = \langle a - p, a, a + p \rangle,\ B = \langle b - q, b, b + q \rangle.$$

Дополнительно будем предполагать, что коэффициенты линейной регрессии неотрицательны и $h = 0$. Получаем следующую задачу линейного программирования:

$$3p + 12q \to \min;$$

$$a + 2b - (p + 2q) \le 14 \le a + 2b + (p + 2q);$$

$$a + 4b - (p + 4q) \le 11 \le a + 4b + (p + 4q);$$

$$a + 6b - (p + 6q) \le 17 \le a + 6b + (p + 6q);$$

$$a, b, p, q \ge 0.$$

Ее решение получается при

$$a = 10{,}25;\ p = 2{,}25;\ b = 0{,}75;\ q = 0.$$

Таким образом,

$$Y = \langle 8; 10{,}25; 12{,}5 \rangle + 0{,}75x. \tag{5}$$

Это означает, в частности, что значения выходной переменной находятся в полосе

$$8 + 0{,}75x \le y \le 12{,}5 + 0{,}75x.$$

Для сравнения: метод наименьших квадратов дает зависимость

$$y = 10 + x. \tag{6}$$

со средней квадратичной ошибкой 2,16.

Понимая всю условность этого примера, будем считать, например, что найденные соотношения описывают стоимость трехкомнатной квартиры в зависимости от этажа. Ясно, что возникающая неопределенность связана с недостаточностью информации. На стоимость квартиры влияет помимо этажности еще много других неучтенных факторов (в результате чего в нашей «базе данных» квартира, расположенная на 4-ом этаже оказалась дешевле квартиры, расположенной на 2-ом этаже). Нет оснований предполагать, что неучтенные факторы имеют вероятностный характер. С учетом этого интервальная оценка стоимости представляется более адекватной.

Для нахождения нечеткой линейной регрессии можно использовать комбинированный метод: сначала найти методом наименьших квадратов центры a_i нечетких коэффициентов A_i, а затем минимизировать нечеткость, решая соответствующую задачу линейного программирования.

Продемонстрируем этот метод на разобранном примере. Методом наименьших квадратов получаем $a = 10$, $b = 1$. Теперь задача линейного программирования для определения p и q принимает следующий вид:

$$3p + 12q \to \min;$$

$$12 - (p + 2q) \le 14 \le 12 + (p + 2q);$$

$$14 - (p + 4q) \le 11 \le 14 + (p + 4q);$$

$$16 - (p + 6q) \le 17 \le 16 + 6b + (p + 6q)\ ;$$

$$p, q \ge 0.$$

Решение получается при $p = 1$, $q = 0{,}5$. Таким образом,

$$Y = \langle 9; 10; 11\rangle + \langle 0{,}5; 1; 1{,}5\rangle x. \qquad (7)$$

Применяя формулы (5), (6), (7) при $x = 3$, получаем соответственно следующие оценки:

$$Y_{(5)} = \langle 10{,}25; 12{,}5; 14{,}75\rangle;$$

$$y_{(6)} = 13 \pm 2{,}16;$$

$$Y_{(7)} = \langle 10{,}5; 13; 15{,}5\rangle.$$

Целесообразность применения того или иного метода зависит от специфики решаемой задаче и должна быть содержательно обоснована.

Упражнения

1. Пусть наблюдения представлены следующей таблицей

x	2,8	1,4	1,6	1,6	2,0	2,4	1,8	1,9	2,2
y	31	16	16	19	15	15	20	20	23

Методом нечеткой линейной регрессии найти зависимость вида $Y = Ax + B$, где A и B – симметричные треугольные нечеткие числа. Вычисления провести, используя формулу (4) при а) $h = 0$; б) $h = 0{,}5$; в) $h = 0{,}7$.

2. Методом нечеткой регрессии найти зависимость курса доллара от цен на нефть. Использовать дневные данные за две недели, предшествующие расчету.

8.4. Многокритериальное принятие решений

Постановка задачи

Имеется: множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$; множество критериев $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$; матрица $R = (r_{ij})$, такая что $r_{ij} \in [0; 1]$ – мера, в которой альтернатива a_i удовлетворяет критерию c_j.

Требуется выбрать «лучшую» альтернативу. Лучшая альтернатива определяется по интегральному критерию, оценка по которому строится как взвешенная оценка по критериям $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Рассматриваются два варианта выбора весовых коэффициентов: 1) коэффициенты строятся методом линейной регрессии по имеющимся данным; 2) относительная важность критериев определяется экспертным путем.

Построение весовых коэффициентов методом линейной регрессии

Имеются дополнительно следующие данные:

матрица $(s_{ij}|y_i)$, $i = 1 \div N$, $j = 1 \div n$, где коэффициенты $s_{ij} \in [0; 1]$ имеют тот же смысл, что и r_{ij}, для контрольного набора, содержащего N альтернатив, а y_i – оценка соответствия альтернативы целям выбора. Весовые коэффициенты ищем как симметричные треугольные нечеткие числа вида $W_j = \langle w_j - v_j; w_j; w_j + v_j \rangle$. Получаем весовые коэффициенты, решая следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} v_j s_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} (w_j - v_j) s_{ij} \le y_i \le \sum_{j=1}^{n} (w_j + v_j) s_{ij}, i = 1 \div N,$$

$$v_j \ge 0, j = 1 \div n.$$

Так найденные весовые коэффициенты дают в определенном смысле наименее размытую оценку, согласованную с имеющимися оценками.

Примечание. Хотелось бы получить весовые коэффициенты так, чтобы мера принадлежности y_i к $Y_i = \sum_{j=1}^{n} W_j s_{ij}$ была бы максимальной, но задача становится слишком сложной. Возможно, здесь поможет применение генетических алгоритмов. Интересно сравнить полученные результаты с тем, что может быть получено с помощью МНК.

Нечеткая оценка Y_i альтернативы a_i по интегральному критерию c получается как взвешенная оценка по критериям $c_1, c_2, \dots, c_n$:

8.4. Многокритериальное принятие решений

Постановка задачи

Имеется: множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$; множество критериев $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$; матрица $R = (r_{ij})$, такая что $r_{ij} \in [0;1]$ – мера, в которой альтернатива a_i удовлетворяет критерию c_j.

Требуется выбрать «лучшую» альтернативу. Лучшая альтернатива определяется по интегральному критерию, оценка по которому строится как взвешенная оценка по критериям $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Рассматриваются два варианта выбора весовых коэффициентов: 1) коэффициенты строятся методом линейной регрессии по имеющимся данным; 2) относительная важность критериев определяется экспертным путем.

Построение весовых коэффициентов методом линейной регрессии

Имеются дополнительно следующие данные:

матрица $(s_{ij}|y_i)$, $i = 1 \div N$, $j = 1 \div n$, где коэффициенты $s_{ij} \in [0;1]$ имеют тот же смысл, что и r_{ij}, для контрольного набора, содержащего N альтернатив, а y_i – оценка соответствия альтернативы целям выбора. Весовые коэффициенты ищем как симметричные треугольные нечеткие числа вида $W_j = \langle w_j - v_j; w_j; w_j + v_j \rangle$. Получаем весовые коэффициенты, решая следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} v_j s_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} (w_j - v_j) s_{ij} \le y_i \le \sum_{j=1}^{n} (w_j + v_j) s_{ij}, i = 1 \div N,$$

$$v_j \ge 0, j = 1 \div n.$$

Так найденные весовые коэффициенты дают в определенном смысле наименее размытую оценку, согласованную с имеющимися оценками.

Примечание. Хотелось бы получить весовые коэффициенты так, чтобы мера принадлежности y_i к $Y_i = \sum_{j=1}^{n} W_j s_{ij}$ была бы максимальной, но задача становится слишком сложной. Возможно, здесь поможет применение генетических алгоритмов. Интересно сравнить полученные результаты с тем, что может быть получено с помощью МНК.

Нечеткая оценка Y_i альтернативы a_i по интегральному критерию c получается как взвешенная оценка по критериям $c_1, c_2, \dots, c_n$:

$$p(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x \le h, \\ \frac{2(x-h)}{(x-h)^2}, h \le x \le 1. \end{cases}$$

Параметр λ – параметр «пессимизма-оптимизма» – имеет тот же смысл, что и в критерии Гурвица.

Еще один широко распространенный метод дефаззификации – *метод центра тяжестей*. В соответствии с методом центра тяжести дефаззификация производится по формуле

$$\overline{X} = \frac{\int_a^b x \cdot \mu_X(x)\, dx}{\int_a^b \mu_X(x)\, dx},$$

где $[a, b]$ – носитель нечеткого числа X.

Упражнения

1. Пусть A – нечеткая трапециевидная нечеткая величина такая, что $A^0 = [0; 4]$, $A^1 = [1; 2]$, $B = \langle 2; 4; 5 \rangle$, $C = \langle 3; 5; 7 \rangle$.

а) Упорядочить заданные нечеткие величины, используя дефаззификацию по Смоляку (с равномерно распределенными величинами ξ_1 и ξ_2 и порогом $h = 0{,}1$).

б) Упорядочить заданные нечеткие величины, используя дефаззификацию по методу центра тяжестей.

2. Пусть A – нечеткая трапециевидная нечеткая величина такая, что $A^0 = [0;4]$, $A^1 = [1;3]$, $B = tfn(2;4;6)$, $C = tfn(3;5;7)$. Упорядочить заданные нечеткие величины, используя дефаззификацию по Смоляку (используя равномерные распределения), метод Керре (с применением функции MAX и расстояния Хэмминга) и метод Чена (с применением характеристик μ_T).

Задача. Разработать кейс, связанный с оценкой квартир. Для оценки квартиры использовать показатели из следующего списка: общая площадь, цена квартиры, количество комнат, этаж, расстояние до центра, расстояние до метро. Оценка y – доходность от реализации соответствующего объекта риэлтерской компанией.

8.5. Нечеткое линейное программирование

Общая задача нечеткого линейного программирования

Рассматривается нечеткая версия следующей четкой задачи линейного программирования (ЛП):

$$z = \boldsymbol{cx} \to \max;$$

$$A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge 0.$$

Задача нечеткого линейного программирования (НЛП) возникает, когда нечеткими оказываются ограничения, коэффициенты целевой функции, коэффициенты «технологической» матрицы. В специальных задачах НЛП нечеткость локализована, в общей – нечеткими могут оказаться все параметры. Решение может быть четким вектором или нечетким вектором.

В общем виде задача НЛП может быть сформулирована следующим образом:

найти максимум (минимум) величины

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

при выполнении условий

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \le B_j\, , i = 1 \div m;$$

$$X_j \ge 0, j = 1 \div n.$$

где A_{ij}, B_i, C_j – нечеткие числа, а X_j – нечеткие переменные.

Чтобы решить задачу НЛП следует уточнить:

как понимаются неравенства между нечеткими величинами в ограничениях;

что понимать под максимальным (минимальным) значением нечеткой величины Z;

что понимать под решением задачи НЛП.

Общая постановка нуждается в уточнениях, которые довольно существенно влияют на то, какая задача при этом возникает.

В ряде случаев при решении задачи НЛП возникает задача нелинейной оптимизации. Мы рассмотрим те, ситуации, когда решение задачи НЛП приводит к задаче линейного программирования.

Мы будем рассматривать задачи НЛП с четкой целевой функцией, т.е. четкими будут считаться коэффициенты c_j и переменные x_j. Соответственно мы будем искать оптимальное значение четкой величины $z = \boldsymbol{cx}$, где

$$\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n), \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Задача НЛП с нечеткими ограничениями и нечеткой целью. Множество допустимых решений

Рассмотрим задачу НЛП, в которой коэффициенты матрицы A являются четкими. В этом случае ограничения приобретают следующий вид:

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \le B_i, i = 1 \div m; \tag{9}$$

$$x_j \ge 0, j = 1 \div n,$$

где

$$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}).$$

В задачах линейного программирования естественно считать, что нечеткие величины B в правых частях неравенств задаются функциями принадлежности следующего вида:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1, y \le b, \\ 1 - \frac{y-b}{p}, b \le y \le b + p, \\ 0, b + p \le y. \end{cases} \tag{10}$$

Используя обозначения, принятые для треугольных чисел, можно записать

$$B = \langle b - p, b, +\infty \rangle. \tag{11}$$

Множеством решений неравенства $y \le B$ по определению является нечеткое подмножество множество действительных чисел с функцией принадлежности (10). Величина $p > 0$ называется уровнем толерантности. Задавшись уровнем толерантности p, можно ввести отношение нечеткого неравенства на множестве действительных чисел, полагая

$$\langle u \le_f v \rangle = \begin{cases} 1, u \le v, \\ 1 - \frac{y-b}{p}, v \le u \le v + p, \\ 0, v + p \le u. \end{cases}$$

Таким образом, нечеткое неравенство $y \le_f b$ может выполняться и в том случае, когда y немного (не выходя за границу толерантности) больше b, правда с оценкой выполнения ниже единицы. «Четкие» ограничения в задаче линейного программирования могут быть немного нарушены, уровень толерантности задает допустимые границы нарушений.

Вернемся к системе неравенств (9). Пусть

$$B_i = \langle b_i - p_i, b_i, +\infty \rangle, \; i = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Естественно считать, что $b_i - p_i \geq 0$. Обозначим через D_i множество решений неравенства (9) в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Это нечеткое множество в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ с функцией принадлежности

$$\mu_i(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \leq_f b_i \rangle \tag{13}$$

(при оценке неравенства (12) используется уровень толерантности p_i).

Множество

$$(D_1 \cap \ldots \cap D_m) \cap \boldsymbol{R}_+^n \tag{14}$$

представляет собой нечеткое множество допустимых решений задачи НЛП с ограничениями (9).

Рассмотрим теперь подходы к определению *оптимального решения*.

Симметричный подход

Определим цель оптимизации как достижение заданного достаточно большого (необязательно максимального) значения целевой функции. При такой постановке задача выглядит следующим образом: найти векторы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\boldsymbol{cx} \geq Z; \; \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \leq B_i, \; i = 1 \div m; \; x_j \geq 0, \; j = 1 \div n.$$

Решение неравенства $\boldsymbol{cx} \geq Z$ получается по аналогии с решением неравенства (12). Более точно, пусть

$$B_0 = \langle b_0 - p_0, b_0, +\infty \rangle. \tag{15}$$

Тогда неравенство $\boldsymbol{cx} \geq Z$ мы понимаем как неравенство $-\boldsymbol{cx} \leq B_0$, где $-b_0$ – достаточно большое значение. Положим $\boldsymbol{a}_0 = -\boldsymbol{c}$ и обозначим через $\mu_0(\boldsymbol{x})$ функцию принадлежности, соответствующую неравенству $\boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{x} \leq B_0$. В результате в качестве множества решений получаем нечеткое множество D в $\boldsymbol{R}^n$, заданное системой неравенств

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \leq B_i, \; i = 0 \div m; \; x_j \geq 0, \; j = 1 \div n. \tag{16}$$

Имеем

$$D = (D_0 \cap \ldots \cap D_m) \cap \boldsymbol{R}_+^n \tag{17}$$

Решениями исходной задачи НЛП на уровне α являются векторы $\boldsymbol{x} \in D^\alpha$.

Оптимальные решения исходной задачи НЛП получаются как решения следующей оптимизационной задачи:

$$B_i = \langle b_i - p_i, b_i, +\infty \rangle,\ i = 1, \dots, m. \tag{12}$$

Естественно считать, что $b_i - p_i \geq 0$. Обозначим через D_i множество решений неравенства (9) в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Это нечеткое множество в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ с функцией принадлежности

$$\mu_i(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \leq_f b_i \rangle \tag{13}$$

(при оценке неравенства (12) используется уровень толерантности p_i).

Множество

$$(D_1 \cap \dots \cap D_m) \cap \boldsymbol{R}_+^n \tag{14}$$

представляет собой нечеткое множество допустимых решений задачи НЛП с ограничениями (9).

Рассмотрим теперь подходы к определению *оптимального решения*.

Симметричный подход

Определим цель оптимизации как достижение заданного достаточно большого (необязательно максимального) значения целевой функции. При такой постановке задача выглядит следующим образом: найти векторы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\boldsymbol{cx} \geq Z;\ \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} \leq B_i,\ i = 1 \div m;\ x_j \geq 0,\ j = 1 \div n.$$

Решение неравенства $\boldsymbol{cx} \geq Z$ получается по аналогии с решением неравенства (12). Более точно, пусть

$$B_0 = \langle b_0 - p_0, b_0, +\infty \rangle. \tag{15}$$

Тогда неравенство $\boldsymbol{cx} \geq Z$ мы понимаем как неравенство $-\boldsymbol{cx} \leq B_0$, где $-b_0$ – достаточно большое значение. Положим $\boldsymbol{a}_0 = -\boldsymbol{c}$ и обозначим через $\mu_0(\boldsymbol{x})$ функцию принадлежности, соответствующую неравенству $\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x} \leq B_0$. В результате в качестве множества решений получаем нечеткое множество D в $\boldsymbol{R}^n$, заданное системой неравенств

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x} \leq B_i,\ i = 0 \div m;\ x_j \geq 0,\ j = 1 \div n. \tag{16}$$

Имеем

$$D = (D_0 \cap \dots \cap D_m) \cap \boldsymbol{R}_+^n \tag{17}$$

Решениями исходной задачи НЛП на уровне α являются векторы $\boldsymbol{x} \in D^\alpha$.

Оптимальные решения исходной задачи НЛП получаются как решения следующей оптимизационной задачи:

$$41400x_1 + 44300x_2 + 48100x_3 + 49100x_4 \le 3700000;$$

$$0{,}84x_1 + 1{,}44x_2 + 2{,}16x_3 + 2{,}4x_4 \ge_f 170;$$

$$16x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 16x_4 \ge_f 1300;$$

$$x_1 \ge_f 6;\ x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Интервалы толерантности:

$$p_0 = 500000;\ p_1 = 10;\ p_2 = 100;\ p_4 = 6.$$

Поделив все строки на соответствующие значения p, приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\alpha \to \max;$$

$$0{,}083x_1 + 0{,}089x_2 + 0{,}096x_3 + 0{,}098x_4 + \alpha \le 8{,}4;$$

$$0{,}084x_1 + 0{,}144x_2 + 0{,}216x_3 + 0{,}24x_4 - \alpha \ge 17;$$

$$0{,}16x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}16x_3 + 0{,}16x_4 - \alpha \ge 13;$$

$$0{,}167x_1 - \alpha \ge 1;$$

$$\alpha, x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Решение получается при
$x_1 = 17{,}414;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 66{,}54.$

Затраты на покупку составят 3988250. Степень выполнения ограничений составит $\alpha_{\max} = 0{,}42$. Расходы возросли на 3,2%. Но при этом появился определенный «запас прочности»: общий объем перевозок составит 174,33 вместо 170, количество рабочих часов – 1343 вместо 1300, существенно возрастет число малых автомобилей.

Несимметричный подход

Сформулируем задачу оптимизации с заданным уровнем уверенности α (используются обозначения, введенные в предыдущем пункте):

найти максимальное значение величины $z = \boldsymbol{cx}$

при выполнении условий

$$\mu_i(\boldsymbol{x}) \ge \alpha,\ i = 1 \div m;\ x_j \ge 0,\ j = 1 \div n.$$

Обозначим соответствующее значение целевой функции через $z_{\max}(\alpha)$. Очевидно,

$$z_{\max}(1) \le z_{\max}(\alpha) \le z_{\max}(0)$$

при любом α. Если $z_{\max}(1) = z_{\max}(0)$, решение задачи НЛП получается как решение задачи линейного программирования на уровне α при любом α, например при $\alpha = 1$.

Рассмотрим случай, когда $z_{\max}(1) < z_{\max}(0)$.

Для того, чтобы получить решение исходной задачи НЛП, нужно выбрать подходящий по тем или иным соображениям уровень и соответствующее оптимальное решение.

Пример 5. Требуется найти максимальное значение величины

$$z = 2x + y$$

при

$$x \leq_f 3;\ x + y \leq_f 4;\ 0{,}2x + y \leq_f 3;\ x, y \geq 0$$

и интервалах толерантности $p_1 = 6$, $p_2 = 4$, $p_1 = 3$.

На уровне α получаем:

$$z = 2x + y \rightarrow \max;$$

$$x \leq 9 - 6\alpha;\ x + y \leq 8 - 4\alpha;\ 0{,}2x + y \leq 5 - 2\alpha.$$

Если $\alpha \geq 0{,}5$, величина z достигает максимального значения в точке $(9 - 6\alpha; 2\alpha - 1)$, и $z_{\max}(\alpha) = 17 - 10\alpha$. При $\alpha \leq 0{,}5$ максимальное значение достигается в точке $(8 - 4\alpha; 0)$, и $z_{\max}(\alpha) = 16 - 8\alpha$.

Рассмотрим один из возможных подходов к выбору оптимального решения.

Определим нечеткое множество H оптимальных значений целевой функции. Для этого в качестве функции принадлежности множества H выберем неубывающую непрерывную функцию μ_H так, что

$$\mu_H(z) = 0, \text{ при } z \leq z(1) \text{ и } \mu_H(z) = 1, \text{ при } z \geq z(0).$$

Тогда оптимальное значение величины z получается как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \mu_H(z) = \alpha, \\ z(\alpha) = z. \end{cases}$$

Выбор функции $\mu_H(z)$ отражает отношение к возможности нарушения условий. Выпуклость функции $\mu_H(z)$ на промежутке $[z(1), z(0)]$ отражает толерантность к нарушению ограничений, вогнутость соответствует строгому отношению.

Пример 5 (продолжение).

Определим нечеткое множество H оптимальных значений целевой функции как множество решений нечеткого неравенства $z \geq_f z(0)$ с интервалом толерантности $z(0) = z(1)$, т.е. выбираем функцию $\mu_H(z)$ так, чтобы она была линейной на промежутке $[z(1), z(0)]$. На этом промежутке имеем

$$\mu_H(z) = \frac{z - z(1)}{z(0) - z(1)}.$$

В результате получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} 16 - 8\alpha = z, \\ \frac{z-7}{9} = \alpha \end{cases} \text{при } \alpha \leq 0{,}5;$$

$$\begin{cases} 17 - 10\alpha = z, \\ \frac{z-7}{9} = \alpha \end{cases} \text{при } \alpha \geq 0{,}5.$$

Для первой системы имеем $\alpha = 0{,}529$ – это значение не подходит. Для второй системы $\alpha = 526$, $z_{\max}(\alpha) = 11{,}74$.

Упражнения

1. Множество допустимых значений двумерного вектора x задается системой нечетких неравенств:

$$x_1 + 4x_2 \leq_f 32;$$

$$5x_1 + x_2 \leq_f 35;$$

$$x_1 + x_2 \leq_f 11;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Интервалы толерантности в нечетких неравенствах составляют соответственно 4, 5, 1.

а) Решить задачу линейного программирования при нечетко определенной цели: $z = 2x_1 + 3x_2 \geq_f 30$ с интервалом толерантности 2 (симметричная задача).

б) Решить задачу линейного программирования при нечетких ограничениях и четкой целевой функции: $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ при выполнении нечетких ограничений (несимметричная задача).

2. Решить следующую задачу НЛП:

$$z = 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 \to \max;$$

$x_1 + x_2 \leq_f 300;$

$2x_1 + x_2 \leq_f 400;$

$x_1, x_2 \geq 0.$

(интервал толерантности в первом и втором неравенствах составляет 100).

8.6. Задачи линейного программирования с нечетко определенными коэффициентами

Рассмотрим задачу НЛП следующего вида:
найти максимум (минимум) нечеткой величины

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \quad (18)$$

при выполнении условий

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq B_i, i = 1 \div m; \quad (19)$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \div n,$$

где A_{ij}, B_i C_j – нечеткие величины и $\boldsymbol{x} = (x_j) \in \boldsymbol{R}^n$.

Мы применим подходы, основанные на теории возможностей.

Нам потребуются некоторые индексы сравнения нечетких чисел, применяемые в этой теории.

Сравнение нечетких величин

Для сравнения нечетких величин были введены индексы, основанные на мерах возможности и необходимости. Мы рассмотрим эти индексы применительно к треугольным нечетким числам. Пусть $A = \langle a_1; a; a_2 \rangle$, $B = \langle b_1; b; b_2 \rangle$. Положим $A^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ и $B^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$. Возможность отношения $A \leq B$ оценивается числом $Pos(A \leq B) \in [0; 1]$ так, что $Pos(A \leq B) \geq \alpha$ тогда и только тогда, когда $a_1(\alpha) \leq b_2(\alpha)$. Необходимость – числом $Nec(A \leq B) \in [0; 1]$, удовлетворяющим условию $Nec(A \leq B) \geq \alpha$ тогда и только тогда, когда $a_2(1-\alpha) \leq b_1(1-\alpha)$.

В частности, $Pos(A \leq b) = 1$, если $a \leq b$, и $Pos(A \leq b) = \mu_A(b)$, если $b \leq a$. Полагая

$$Pos(A = b) = \min\{Pos(A \leq b), Pos(A \geq b)\},$$

$x_1 + x_2 \leq_f 300;$

$2x_1 + x_2 \leq_f 400;$

$x_1, x_2 \geq 0.$

(интервал толерантности в первом и втором неравенствах составляет 100).

8.6. Задачи линейного программирования с нечетко определенными коэффициентами

Рассмотрим задачу НЛП следующего вида:
найти максимум (минимум) нечеткой величины

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \tag{18}$$

при выполнении условий

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq B_i, i = 1 \div m; \tag{19}$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \div n,$$

где A_{ij}, B_i C_j – нечеткие величины и $\boldsymbol{x} = (x_j) \in \boldsymbol{R}^n$.

Мы применим подходы, основанные на теории возможностей.

Нам потребуются некоторые индексы сравнения нечетких чисел, применяемые в этой теории.

Сравнение нечетких величин

Для сравнения нечетких величин были введены индексы, основанные на мерах возможности и необходимости. Мы рассмотрим эти индексы применительно к треугольным нечетким числам. Пусть $A = \langle a_1; a; a_2 \rangle$, $B = \langle b_1; b; b_2 \rangle$. Положим $A^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ и $B^\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$. Возможность отношения $A \leq B$ оценивается числом $Pos(A \leq B) \in [0; 1]$ так, что $Pos(A \leq B) \geq \alpha$ тогда и только тогда, когда $a_1(\alpha) \leq b_2(\alpha)$. Необходимость – числом $Nec(A \leq B) \in [0; 1]$, удовлетворяющим условию $Nec(A \leq B) \geq \alpha$ тогда и только тогда, когда $a_2(1-\alpha) \leq b_1(1-\alpha)$.

В частности, $Pos(A \leq b) = 1$, если $a \leq b$, и $Pos(A \leq b) = \mu_A(b)$, если $b \leq a$. Полагая

$$Pos(A = b) = \min\{Pos(A \leq b), Pos(A \geq b)\},$$

кий эффект реализации плана $\boldsymbol{x}^*$ в этом случае получается в результате дефаззификации нечеткой величины Z.

Пример 6.

Рассмотрим задачу нечеткого линейного программирования с двумя переменными:

найти максимум (минимум) величины

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 \tag{26}$$

при выполнении условий

$$\textstyle\sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_j \le B_i, i = 1,2,3; \tag{27}$$

$$x_{1,2} \ge 0,$$

где A_{ij}, B_i, C_j – треугольные нечеткие величины вида $\langle 0{,}9a; a; 1{,}1a\rangle$ (относительная погрешность 10%), со следующими модальными значениями:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3{,}5 & 4 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; (b_i) = \begin{pmatrix} 62 \\ 66 \\ 39 \end{pmatrix}; (c_j) = (4 \quad 5).$$

Приведем теперь задачу нечеткого линейного программирования (26) – (27) к виду (23) – (25) с $h = h_1 = h_2 = h_3 = 0{,}8$:

$$z = 3{,}68 \cdot x_1 + 4{,}60 \cdot x_2 \to \max;$$

$$3{,}78 \cdot x_1 + 4{,}32 \cdot x_2 \le 57{,}04;$$

$$5{,}40 \cdot x_1 + 2{,}16 \cdot x_2 \le 60{,}72;$$

$$1{,}08 \cdot x_1 + 3{,}24 \cdot x_2 \le 35{,}88;$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решение этой задачи получается при $x_1 = 3{,}93$ и $x_2 = 9{,}76$. Находим также $z = 59{,}38$ и $Z = \langle 58{,}09; 64{,}54; 71{,}00\rangle$. Если провести дефаззификацию по Смоляку с нейтральным параметром оптимизма-пессимизма $\lambda = 0{,}5$ и одинаково распределенными случайными величинами ξ_1 иξ_2, получим $\overline{Z} = 64{,}54$.

Для сравнения приведем решение оптимизационной задачи в предположении, что все коэффициенты определены точно. Получаем следующую задачу линейного программирования:

$$z = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \to \max;$$

$3{,}5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 62;$

$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 66;$

$x1 + 3 \cdot x_2 \leq 39;$

$x_{1,2} \geq 0.$

Оптимальное значение $z = 75{,}77$ получается при $x_1 = 4{,}62$ и $x_2 = 11{,}46$. Таким образом, снятие неопределенности дает выигрыш равный $75{,}77 - 64{,}54 = 11{,}23$. Потеря эффективности происходит из-за того, что приходится в качестве оптимального принимать решение, менее эффективное, но зато более надежное в условиях неопределенности.

Задача (B)

Оптимизационная задача нечеткого линейного программирования сводится к следующей задаче дробно-линейного программирования:

$$h \to \max; \tag{28}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - z}{\sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{1j}) x_j} \geq h; \tag{29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2ij}(1 - h_i) x_j \leq b_{1i}(1 - h_i), i = 1 \div m; \tag{30}$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \div n. \tag{31}$$

Эту задачу можно свести к задаче линейного программирования с $n + 1$ переменной. Сделаем следующую замену переменных:

$$t = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} (c_j - c_{1j}) x_j}; \tag{32}$$

$$z_j = x_j t, j = 1 \div n. \tag{33}$$

Теперь задачу (28) – (31) можно переформулировать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - zt \to \max; \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2ij}(1 - h_i) z x_j \leq b_{1i}(1 - h_i) t, i = 1 \div m; \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(c_j - c_{1j}\right) z_j = 1; \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j z_j - zt \geq 0; \tag{37}$$

$$zt - \sum_{j=1}^{n} c_{1j} z_j - zt \geq 0; \quad (38)$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \div \text{n}. \quad (39)$$

Неравенства (37) и (38) добавлены для того, чтобы гарантировать попадание значения z на левую половину промежутка возможных значений.

Пример 7.

Рассмотрим ту же задачу нечеткого линейного программирования, что и в примере (**А**). Единственное различие в формулировке: вместо уровня необходимости $h = 0{,}8$ зададим приемлемый уровень значений целевой функции $z = 59$. Получаем следующую задачу линейного программирования:

$$h = 4 \cdot z_1 + 5 \cdot z_2 - 59 \cdot t \to \max;$$

$$3{,}78 \cdot z_1 + 4{,}32 \cdot z_2 - 57{,}04 \cdot t \leq 0;$$

$$5{,}40 \cdot z_1 + 2{,}16 \cdot z_2 - 60{,}72 \cdot t \leq 0;$$

$$1{,}08 \cdot z_1 + 3{,}24 \cdot z_2 - 35{,}88 \cdot t \leq 0;$$

$$t, z_{1,2} \geq 0.$$

Решение этой задачи получается при $t = 0{,}15$; $z_1 = 0{,}61$; $z_2 = 1{,}51$. При этом $h = 0{,}86$. Далее находим: $x_1 = 3{,}93$; $x_2 = 9{,}76$. Оптимальное значение достигается в той же точке, что и в примере (**А**). Соответственно $Z = \langle 58{,}09; 64{,}54; 71{,}00 \rangle$ и $\overline{\overline{Z}} = 64{,}54$.

Если теперь провести уточнение коэффициентов, то величина y должна быть изменена, иначе она может просто не попасть в промежуток возможных значений.

Упражнения

1. Решить задачу из примера 6 при $h = 0{,}9$.
2. Решить задачу из примера 7, приняв $z = 69$.

Заключение

В пособии изложены основы теории нечетких множеств и приведены примеры применения методов теории нечетких множеств и мягких вычислений для решения задач экономики и финансов. В настоящее время имеется обширная литература по этой тематике. Мы старались построить изложение таким образом, чтобы читатель, изучивший пособие, мог читать современную научную литературу (монографии и периодику) по теории нечетких множеств. Для того, кто решит применять на практике изученные методы это совершенно необходимо. Изложение практически значимых приложений, как правило, довольно громоздко и поместить его в учебное пособие не представляется возможным. В то же время перенос использованных другими исследователями методов в свою предметную область – эффективный способ овладения новой областью прикладной математики.

В силу естественных ограничений мы не затронули в пособии некоторые разделы и темы, которые могут оказаться полезными для решения практических задач. Например, применение теории нечетких множеств в управлении – обширный раздел, которому посвящены объемные монографии. Можно назвать и другие разделы, которые не вошли в пособие. Мы надеемся, что пособие помогло в достаточной степени сформировать методологию применения теории нечетких множеств, и необходимый материал может быть изучен по другим книгам. Важный аспект – использование компьютеров. Применение теории нечетких множеств обычно связано с довольно громоздкими вычислениями. Имеется достаточное развитое программное обеспечение для выполнения таких вычислений. В список литературы включены соответствующие источники.

Литература

1. Аверкин А.Н., и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д.А.Поспелова – М.: Наука. 1986. 312 с.
2. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург. 2005. 736 с.
3. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2013. 416 с.
4. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. 798 с.
5. Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (теория ожидаемого эффекта). – М.: Наука, 2002(2012). 158 с.
6. Ярушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. – М.: Финансы и статистика. 2004. 320 с.
7. Buckley J.J., Eslami E., Feuring T. F. Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering. – Heidelberg-New York: Physica-Verlag. 2002. 272 p.
8. Chen S.-H., Wang P.P. (Eds.) Computational Intelligence in Economics and Finance. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer. 2002. 480 p.
9. Dymowa L. Soft Computing in Economics and Finance. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. 2011. 296 P.
10. Kahraman C. (Ed.). Fuzzy Engineering Economics with Applications. – Berlin-Heidelberg-N.-Y.: Springer Verlag. 2008. 390 p.
11. Wang X., Ruan D. and E. Kerre E.E. Mathematics of Fuzziness – Basic Issues. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. 219 p.