ПИТЕР

СТАНДАРТ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ

Л. К. Конышева Д. М. Назаров

Основы теории нечетких множеств

ДЛЯ БАКАЛАВРОВ И СПЕЦИАЛИСТОВ

РЕКОМЕНДОВАНО УМО ПО ОБРАЗОВАНИЮ В ОБЛАСТИ ПРИКЛАДНОЙ ИНФОРМАТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

СТАНДАРТ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ

Л. К. Конышева, Д. М. Назаров

Основы теории нечетких множеств

ДЛЯ БАКАЛАВРОВ И СПЕЦИАЛИСТОВ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области прикладной информатики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 080801 «Прикладная информатика (по областям)» и другим экономическим специальностям

ПИТЕР®

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск
2011

ББК 22.126я7
УДК 519.766.2(075)
К65

Конышева Л. К., Назаров Д. М.

К65 Основы теории нечетких множеств: Учебное пособие. — СПб.: Питер, 2011. — 192 с.: ил.

ISBN 978-5-459-00735-0

Данное учебное пособие является введением в теорию нечетких множеств, которая представляет собой современный аппарат формализации различных видов неопределенностей, возникающих при моделировании широчайшего класса реальных объектов любой природы. Теория нечетких множеств является стратегическим инструментом управления сложными системами. На практике постоянно приходится принимать решения в условиях неполной информации, и математический аппарат теории нечетких множеств позволяет моделировать рассуждения человека, а технологии и алгоритмы, разработанные в рамках этой теории, являются универсальными по применимости, и, следовательно, сфера применения этой теории необычайно широка и касается решения как технических, так и гуманитарных задач. Методы формализации, разработанные в рамках этой теории, позволяют применять теорию нечетких множеств даже в традиционно «гуманитарных» областях, таких как, например, экономика.

Рекомендовано УМО по образованию в области прикладной информатики в качестве учебного пособия для студентов вузов обучающихся по специальности 080801 «Прикладная информатика» и другим экономическим специальностям.

ББК 22.126я7
УДК 519.766.2(075)

ISBN 978-5-459-00735-0

Содержание

Введение

Предлагаемое учебное пособие является введением в теорию нечетких множеств — самого «модного» раздела современной математики. Почему же теория множеств, сравнительно молодой раздел математики, достаточно быстро находит применение практически во все сферах деятельности? Объяснение этому факту относительно простое. Дело в том, что теория нечетких множеств есть современный аппарат формализации различных видов неопределенностей, возникающих при моделировании широчайшего класса реальных объектов любой природы. Заметим, что первый этап формализации практически любого процесса (объекта) — это описание, использующее слова естественного языка. В рамках же теории нечетких множеств разработаны методы формализации именно такого рода содержательных понятий, что позволяет применять теорию нечетких множеств в традиционно «гуманитарных» областях, таких как, например, экономика. В качестве примера приведем ряд экономических понятий: «высокий уровень инфляции», «устойчивое положение на рынке», «средний уровень доходов» и т. д., которые можно формализовать применительно к конкретному экономическому процессу или явлению с использованием аппарата теории нечетких множеств.

Таким образом, математический аппарат теории нечетких множеств позволяет моделировать рассуждения человека, а следовательно, сфера применения этой теории необычайно широка и касается решения как технических, так и гуманитарных задач. Необходимость на практике постоянно принимать решения в условиях неполной и нечеткой информации показывает, что теория нечетких множеств является стратегическим инструментом управления сложными системами. Технологии и алгоритмы, разработанные в рамках этой теории, являются универсальными по применимости.

Впервые термин «нечеткие множества» (Fuzzy Sets) предложил американский ученый Л. Заде в 1965 г. Именно его идеи дали толчок для развития «нечеткой математики», включающей в себя наряду с аппаратом нечетких множеств и другие приемы работы с неопределенностью.

Основная идея Л. Заде состоит в расширении классического канторовского понятия множества. Если функция принадлежности «обычного множества» может принимать только два значения — 0 или 1, то в случае нечеткого (fussy) множества ее значения заполняют весь отрезок [0, 1]. В терминах теории нечетких множеств Л. Заде определил понятие лингвистической переменной, а также разработал аппарат для описания неопределенностей и нечеткостей процессов интеллектуальной деятельности человека.

В настоящее время заметно увеличилось количество диссертационных работ, монографий и статей, в которых рассматриваются различные аспекты теории нечетких множеств. Однако учебной литературы по теории нечетких множеств и ее приложениям явно недостаточно. Настоящее учебное пособие призвано восполнять этот недостаток.

Работа с пособием подразумевает тщательное изучение теоретического материала, аккуратный разбор всех примеров и выполнение задач для самостоятельной работы, имеющихся в конце каждой главы. Практическая направленность учебного пособия обеспечена примерами алгоритмов решения экономических задач с использованием аппарата теории нечетких множеств.

Предложена реализация алгоритмов в электронной таблице Excel.

1. Нечеткие множества и операции над ними

1.1. Примеры обычных и нечетких множеств

Множество — это неопределяемое понятие математики. Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик, чьи работы лежат в основе современной теории множеств, говорил: «...множество — это многое, мыслимое как единое».

Каждый раздел математики использует свои множества. Начиная решать какую-либо задачу, прежде всего определяют множество тех объектов, которые будут в ней рассмотрены. Например, в задачах математического анализа изучают всевозможные числа, их последовательности, функции и т. п.

Множество, включающее в себя все объекты, рассматриваемые в задаче, называют *универсальным множеством* (для данной задачи). Универсальное множество принято обозначать буквой U. Универсальное множество является максимальным множеством в том смысле, что все объекты являются его элементами, т. е. утверждение $x \notin U$ в рамках задачи всегда истинно. Минимальным множеством является *пустое множество* $\varnothing$, которое не содержит ни одного элемента.

Все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами множества U. Напомним, что множество A называют *подмножеством множества* B, если все элементы A являются также элементами B. Задание множества A — это правило, позволяющее относительно любого элемента x универсального множества U *однозначно* установить, принадлежит x множеству A или не принадлежит. Другими словами, это правило, позволяющее определить, какое из двух высказываний, $x \notin A$ или $x \notin A$, является истинным, а какое ложным.

Одним из способов задания множеств является задание с помощью характеристической функции.

Определение 1.1. ***Характеристической функцией множества*** A называют функцию $\mu_A(x)$, заданную на универсальном множестве U и принимающую значение единица на тех элементах множества U, которые принадлежат A, и значение нуль на тех элементах, которые не принадлежат A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A; \\ 1, & \text{если } x \in A \quad (x \in U). \end{cases} \tag{1.1}$$

В качестве примера рассмотрим универсальное множество $U=\{1, 2, 3, ..., 10\}$ и два его подмножества: A — множество чисел, меньших 7, и B — множество чисел, немного меньших 7. Характеристическая функция множества A имеет вид

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 7; \\ 0, & \text{если } x \geq 7. \end{cases}$$

Записать характеристическую функцию множества B, используя лишь 0 и 1, невозможно. Например, включать ли в B числа 1 и 2? «Намного» или «ненанемного» число 3 меньше 7? Ответы на эти и подобные им вопросы могут быть получены в зависимости от условий задачи, в которой используются множества U и B, а также от субъективного взгляда того, кто решает эту задачу.

Множество A в данном примере является обычным множеством[1], множество B — нечетким множеством. При составлении характеристической функции $\mu_B(x)$ решающий задачу (эксперт) может высказать свое мнение относительно того, в какой степени каждое из чисел множества U принадлежит множеству B. В качестве степени принадлежности можно выбрать любое число с отрезка [0, 1]. При этом $\mu_B(x) = 1$ означает полную уверенность эксперта в том, что $x_1 \in B$; $\mu_B(x_2) = 0$ — столь же полную уверенность, что $x_2 \notin B$; $\mu_B(x_3) = 0{,}5$ говорит о том, что эксперт затрудняется в ответе на вопрос, принадлежит ли x_3 множеству B или не принадлежит. Если $\mu_B(x) > 0{,}5$, то эксперт склонен отнести x к множеству B, если же $\mu_B(x) < 0{,}5$, то не склонен.

[1] В литературе прилагательное «обычный» в сочетании со словом «множество» пишут в кавычках. Однако, чтобы не загромождать текст, в дальнейшем кавычки будем опускать.

Установленные экспертом значения степени принадлежности нечеткому множеству B каждого из элементов универсального множества U представляют собой функцию, определенную на множестве U и принимающую значения на отрезке [0,1]. Такую функцию называют ***функцией принадлежности*** нечеткому множеству B. Функция принадлежности отражает субъективный взгляд специалиста на задачу, вносит индивидуальность в ее решение.

Характеристическую функцию $\mu_A(x)$ обычного множества A можно рассматривать как функцию принадлежности этому множеству, но, в отличие от нечеткого множества, $\mu_A(x)$ принимает лишь одно из двух значений: 0 или 1.

Так, если $U=\{1, 2, ..., 10\}$, A — множество чисел, меньших 7, B — множество чисел, немного меньших 7, то $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ можно представить в виде следующей таблицы:

$x(x \notin U)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mu_B(x)$	0	0	0,5	0,6	0,8	0,9	0	0	0	0

В литературе (например, [2]) используется более компактная запись конечных или счетных нечетких множеств. Так, вместо приведенного выше табличного представления подмножеств A и B, эти подмножества можно записать следующим образом:

$$A = 1/1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6;$$

$$B = 0{,}5/3+0{,}6/4+0{,}8/5+0{,}9/6.$$

В приведенных равенствах указаны значения функции принадлежности для соответствующих элементов множества U, знак «+» означает объединение одноэлементных подмножеств U, для которых значения функции принадлежности больше нуля. Такое объединение называют ***несущим множеством***, или ***носителем*** соответствующего нечеткого множества. Так, несущее множество для B состоит из чисел: {3, 4, 5, 6}.

Общая форма записи нечеткого подмножества для случаев, когда U конечно или счетно, имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i) / u_i \qquad (u_i \in U). \qquad (1.2)$$

Элемент множества U, на котором значение функции принадлежности равно 0,5, называют ***точкой перехода***. Точкой перехода для множества B в рассмотренном выше примере является x=3. Точка перехода — это точка, о которой мнение эксперта можно выразить словами «неизвестно», «не определено» и т. п.

Если функция принадлежности нечеткого множества достигает 1, то множество называют ***нормальным***, если не достигает — ***субнормальным***. Поскольку в разобранном примере ни одно из значений $\mu_B(x)$ не достигло своего возможного максимального значения — 1, то B — нечеткое субнормальное множество.

Субнормальное множество можно нормировать, разделив все значения функции принадлежности на ее наибольшее значение. Множество B после нормирования примет следующий вид:

$$B_{\text{норм}} = \frac{5}{9}/3 + \frac{2}{3}/4 + \frac{8}{9}/5 + 1/6\,.$$

В некоторых случаях удобно графическое представление нечетких множеств в виде диаграмм Заде (рис. 1.1).

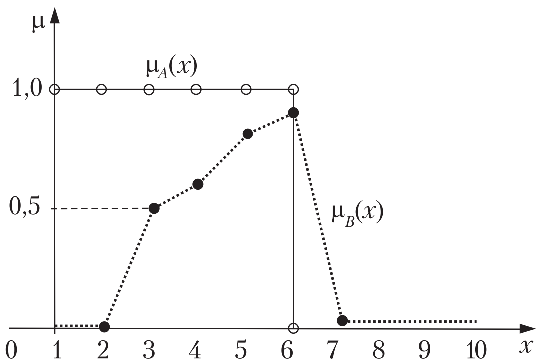


Рис 1.1. Графическое изображение функций принадлежности обычного множества A и нечеткого множества B (диаграмма Заде)

Рассмотрим другой пример. Пусть $U = \{x, x \in R : 1 \le x \le 3\}$ — рост взрослого человека в метрах; A — высокий рост, B — средний рост, C — маленький рост. Множества A, B и C являются *нечеткими*. В данном примере несущими множествами для них являются промежутки числовой оси. На рис. 1.2 представлены графики возможных функций принадлежности каждого из этих множеств.

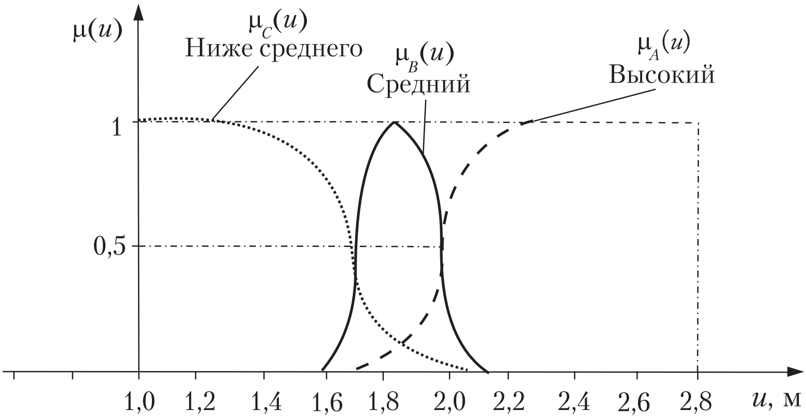


Рис. 1.2. Возможные графики функций принадлежности нечетким множествам

Несущие множества для A, B и C: $U_A = (1{,}7;\ 2{,}8)$, $U_B = (1{,}6;\ 2{,}1)$, $U_C = (1{,}0;\ 2{,}05)$. Функция $\mu_B(x)$ имеет единственный максимум. Такую функцию называют ***унимодальной***. Все три множества, A, B и C, являются нормальными, так как достигают наибольшего возможного значения — 1. По аналогии с конечными нечеткими множествами, запишем A, B и C в следующей форме:

$$A = \int_{U_A} \mu_A(u)/u\,,\ B = \int_{U_B} \mu_B(u)/u\,,\ C = \int_{U_C} \mu_C(u)/u\,.$$

В общем случае нечеткое множество A с непрерывным носителем U будем обозначать символом

$$A = \int_{U} \mu_A(u)/u\,. \tag{1.3}$$

Использование символа $A = \int_U \mu_A(u)/u$ не означает интегрирования, но предполагает, как и в случае использования символа $\sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i$ (см. формулу (1.2)), объединение по всем элементам несущего множества U. Знак интеграла показывает, что несущее множество, в отличие от формулы (1.2) , является частью числовой оси. Поскольку объединение множеств называют также логической суммой (см., например, [13]), оба эти символа, $\int_{U_A} \mu_A(u)/u$ и $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i)/u_i \quad (u_i \in U)$, будем читать *«сумма по множеству* U *»*.

Приведем примеры записи нечетких множеств с помощью различных символов.

1. $U = [33, 42]$ — диапазон температуры тела человека.

   A — нормальная температура; B — повышенная температура; C — высокая температура; D — очень высокая температура.

   Функции принадлежности множеств A, B, C и D заданы графиками (рис. 1.3).

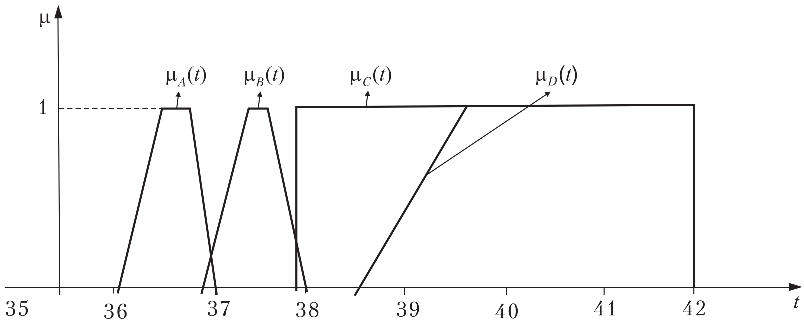


Рис. 1.3. Функции принадлежности нечетких множеств A, B, C и D

Каждый из графиков, изображенных на рис. 1.3, соответствует определенной формуле:

$$\mu_A(t) = \begin{cases} 10/3\,t - 120, & 36 \le t < 36{,}3; \\ 1, & 36{,}3 \le t < 36{,}8; \\ 185 - 5t, & 36{,}8 \le t < 37; \end{cases} \quad \mu_B(t) = \begin{cases} 2{,}5t - 92, & 36{,}8 \le t < 37{,}2; \\ 1, & 37{,}2 \le t < 37{,}6; \\ 95 - 2{,}5t, & 37{,}6 \le t < 38; \end{cases}$$

$$\mu_C(t) = \begin{cases} 5t - 189, & 37{,}8 \le t < 38; \\ 1, & 38 \le t < 42; \end{cases}; \qquad \mu_D(t) = \begin{cases} t - 38{,}5 & 38{,}5 \le t < 39{,}5; \\ 1, & 39{,}5 \le t < 42. \end{cases}$$

Запишем множества A, B, C и D в форме сумм по их несущим множествам

$U_A = [36, 37)$, $U_B = [36,8; 38)$, $U_C = [37,8; 42)$, $U_D = [38,5; 42]$:

$$A = \int\limits_{36 \le t < 37} \mu_A(t)/t = \int\limits_{36 \le t < 36{,}3} \left(\frac{10}{3}t - 120\right)/t + \int\limits_{36{,}3 \le t < 36{,}8} 1/t + \int\limits_{36{,}8 \le t < 36{,}8} (185 - 5t)/t;$$

$$B = \int\limits_{36{,}8 \le t < 38} \mu_B(t)/t = \int\limits_{36{,}8 \le t < 37{,}2} (2{,}5t - 92)/t + \int\limits_{37{,}2 \le t < 37{,}6} 1/t + \int\limits_{36{,}8 \le t < 36{,}8} (95 - 2{,}5t)/t;$$

$$C = \int\limits_{37,8 \le t < 42} \mu_C(t)/t = \int\limits_{37,8 \le t < 38} (5t - 189)/t + \int\limits_{38 \le t < 42} 1/t;$$

$$D = \int\limits_{38,5 \le t < 42} \mu_D(t)/t = \int\limits_{38,5 \le t < 39,2} (t - 38,5)/t + \int\limits_{39,5 \le t < 42} 1/t.$$

2. Игра в кости заключается в подбрасывании двух игральных костей — кубиков, на каждой грани которых выставлены очки от 1 до 6. Игрок делает следующие ставки: на выпадение числа очков от 2 до 4 он ставит 5 руб., от 5 до 7 — 10 руб., от 8 до 10 — 20 руб., от 11 до 12 — 10 руб. Пусть ставки, сделанные игроком, — это значения функции принадлежности нечеткому множеству A — ожидаемое число очков, выпадающих при подбрасывании двух игральных костей. Носителем нечеткого множества A является множество $U = \{2, 3..., 12\}$. Нормируем множество A, разделив все ставки на максимальную ставку — 20 руб. Запишем множество A в трех различных формах:

   1) табличной:

u_i — число выпавших очков	2,3,4	5,6,7	8,9,10	11,12
$\mu_A(u_i)$	0,025	0,5	1	0,5

   2) в виде поэлементной суммы по множеству U:

$$A = 0{,}025/2 + 0{,}025/3 + 0{,}025/4 + 0{,}5/5 + 0{,}5/6 + 0{,}5/7 + 0{,}5/11 + \\ + 0{,}5/12 + 1/8 + 1/9 + 1/10;$$

   3) как сумму по множеству U:

$$A = \sum_{i=2}^{12} \mu_A(u_i)/u_i = \sum_{i=2}^{4} 0{,}025/u_i + \sum_{i=5}^{7} 0{,}5/u_i + \sum_{i=5}^{10} 1/u_i + \sum_{i=11,12} 0{,}5/u_i\,.$$

В заключение дадим определения введенных понятий.

Определение 1.2. ***Нечетким множеством*** A называют пару $(U, \mu_A(u))$, где U — универсальное множество, $\mu_A(u)$ — функция, определенная на множестве U и принимающая значения на отрезке [0,1]. Функцию $\mu_A(u)$ называют ***функцией принадлежности*** нечеткого множества A.

Нечеткое множество A записывают в виде (1.2), если U дискретно, и в виде (1.3), если U непрерывно.

Определение 1.3. ***Несущим множеством***, или ***носителем***, нечеткого множества A называют подмножество множества U, состоящее из элементов, на которых $\mu_A(u) > 0$.

В выражениях (1.2) и (1.3), как правило, указываются лишь элементы несущего множества.

Определение 1.4. ***Точкой перехода*** нечеткого множества A называют элемент множества U, на котором $\mu_A(u) = 0{,}5$.

Точек перехода может быть несколько. Если эксперт, определяющий значения $\mu_A(u)$, затрудняется в выборе, то на этом элементе u несущего множества достигается максимальная нечеткость множества A и $\mu_A(u) = 0{,}5$.

Определение 1.5. Нечеткое множество A называют ***нормальным***, если существует $u_0 (u_0 \in U)$ такое, что $\mu_A(u_0) = 1$, и ***субнормальным*** в противном случае.

Субнормальное нечеткое множество A можно нормировать, разделив все значения $\mu_A(u)$ на $\sup\limits_U \mu_A(u)$. (Напомним, что $\sup\limits_U \mu_A(u)$ — наименьшее из чисел s, для которых выполняется неравенство $s \geq$ $\geq \mu_A(u)$ для всех $u_0 (u_0 \in U)$).

Определение 1.6. Функцию принадлежности $\mu_A(u)$ нечеткого множества A называют ***унимодальной***, если $\sup\limits_U \mu_A(u)$ достигается лишь в одной точке множества U.

Определение 1.7. ***Диаграмма Заде*** — представление нечеткого множества в виде графика его функции принадлежности в координатах $(U, \mu_A(u))$ на плоскости этого декартова произведения.

Определение 1.8. ***Сингельтон*** — пара $(x, \mu_A(u))$, где на первом месте стоит элемент $x \in U$, а на втором — его степень принадлежности. Сингельтон называется четким, если $\mu_A(x) = 1$.

1.2. Множества α-уровня

Определение 1.9. ***Множеством*** α***-уровня*** нечеткого множества (U, μ_A) называют обычное множество, состоящее из всех тех элементов универсального множества U, для которых выполняется неравенство $\mu_A > \alpha$.

Множества α-уровня, как будет ясно в дальнейшем, широко используются при оперировании с нечеткими множествами. Это одно из важных понятий теории нечетких множеств.

Рассмотрим следующий пример, обратив особое внимание на используемую символику.

Пусть $A = 0{,}1/1 + 0{,}3/2 + 0{,}4/5 + 0{,}7/6 + 0{,}8/9 + 1/10$ и $\alpha \in \{0{,}1;$ $0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9\}$. Составим множества α-уровня для всех возможных значений α:

$$A^{0,1} = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\};$$

$$A^{0,3} = \{2, 5, 6, 9, 10\};$$

$$A^{0,5} = \{6, 9, 10\};$$

$$A^{0,7} = \{6, 9, 10\};$$

$$A^{0,9} = \{10\}.$$

Множество $0{,}1{\cdot}A^{0,1} = \tilde{A}^{0,1}$ — это нечеткое множество

$$\tilde{A}^{0,1} = 0{,}1 \cdot A^{0,1} = 0{,}1/1 + 0{,}1/2 + 0{,}1/5 + 0{,}1/6 + 0{,}1/9 + 0{,}1/10$$

с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}^{0.1}} \equiv 0{,}1$.

Аналогично

$$\tilde{A}^{0,3} = 0{,}3 \cdot A^{0,3} = 0{,}3/2 + 0{,}3/5 + 0{,}3/6 + 0{,}3/9 + 0{,}3/10,\ \mu_{\tilde{A}^{0,3}} \equiv 0{,}3;$$

$$\tilde{A}^{0,5} = 0{,}5 \cdot A^{0,5} = 0{,}5/6 + 0{,}5/9 + 0{,}5/10,\ \mu_{\tilde{A}^{0,5}} \equiv 0{,}5;$$

$$\tilde{A}^{0,7} = 0{,}7 \cdot A^{0,7} = 0{,}7/6 + 0{,}7/9 + 0{,}7/10,\ \mu_{\tilde{A}^{0,7}} \equiv 0{,}7;$$

$$\tilde{A}^{0,9} = 0{,}9 \cdot A^{0,9} = 0{,}9/10,\ \mu_{\tilde{A}^{0.9}} \equiv 0{,}9.$$

Составим нечеткое множество $\tilde{A}$, выполнив последовательно два действия:

1. Объединим множества $\tilde{A}^{0,1}$, $\tilde{A}^{0,3}$, $\tilde{A}^{0,5}$, $\tilde{A}^{0,7}$, $\tilde{A}^{0,9}$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}^{0,1} + \tilde{A}^{0,3} + \tilde{A}^{0,5} + \tilde{A}^{0,7} + \tilde{A}^{0,9} = 0{,}1 \cdot A^{0,1} + 0{,}3 \cdot A^{0,3} + 0{,}5 \cdot A^{0,5} + \\
&+ 0{,}7 \cdot A^{0,7} + 0{,}9 \cdot A^{0,9} = 0{,}1/1 + 0{,}1/2 + 0{,}1/5 + 0{,}1/6 + 0{,}1/9 + \\
&+ 0{,}1/10 + 0{,}3/2 + 0{,}3/5 + 0{,}3/6 + 0{,}3/9 + 0{,}3/10 + 0{,}5/6 + \\
&+ 0{,}5/9 + 0{,}5/10 + 0{,}7/6 + 0{,}7/9 + 0{,}7/10 + 0{,}9/10 = 0{,}1/1 + \\
&+ (0{,}1 \vee 0{,}3)/2 + (0{,}1 \vee 0{,}3)/5 + (0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}5 \vee 0{,}7)/6 + \\
&+ (0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}5 \vee 0{,}7)/9 + (0{,}1 \vee 0{,}3 \vee 0{,}5 \vee 0{,}7 \vee 0{,}9)/10.
\end{aligned}$$

ПРИМЕЧАНИЕ

Здесь и в дальнейшем символом *логической суммы* $\vee$ будем обозначать операцию нахождения супремума.

2. Из значений функции принадлежности, соединенных знаками логических сумм, выберем наибольшее (супремум) и будем считать

его значением функции принадлежности нечеткого множества $\tilde{A}$ на соответствующем элементе несущего множества:

$$\tilde{A} = 0{,}1/1 + 0{,}3/2 + 0{,}3/5 + 0{,}7/6 + 0{,}7/9 + 0{,}9/10\,.$$

В данном случае $\tilde{A} \neq A$, так как $\mu_A(5) = 0{,}4 \neq \mu_{\tilde{A}}(5) = 0{,}3$; $\mu_A(9) = 0{,}8 \neq \mu_{\tilde{A}}(9) = 0{,}7$. Однако если бы множество значений α включало все значения функции принадлежности множества A, то множества A и $\tilde{A}$ совпали бы.

Подтвердим это следующим примером.

Пусть универсальным множеством является множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3,...\}$. Нечеткое множество A — числа, примерно равные 5, причем

$$A = 0{,}3/2 + 0{,}7/3 + 1/4 + 1/5 + 0{,}9/6 + 0{,}5/7 + 0{,}2/8 + 0{,}1/9.$$

Отсюда следует, что несущим множеством является множество $U_A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, множеством значений функции принадлежности — $\mu_A(x) \in M = \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}9;\ 1\}$.

Составим все множества α-уровня, где $\alpha \in Д = \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1\}$:

$A^{0,1}=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;	$A^{0,2}=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;	$A^{0,3}=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;	$A^{0,4}=\{3, 4, 5, 6, 7\}$;	$A^{0,5}=\{3, 4, 5, 6, 7\}$;
$A^{0,6}=\{3, 4, 5, 6\}$;	$A^{0,7}=\{3, 4, 5, 6\}$;	$A^{0,8}=\{4, 5, 6\}$;	$A^{0,9}=\{4, 5, 6\}$;	$A^{1}=\{4, 5\}$.

Обратим внимание на то, что $M \subseteq Д$.

Выпишем все множества α-уровня и соответствующие им нечеткие множества и затем объединим нечеткие множества:

$$+\begin{cases}
\tilde{A}^{0,1} = 0{,}1\cdot A^{0,1} = 0{,}1/2 + 0{,}1/3 + 0{,}1/4 + 0{,}1/5 + 0{,}1/6 + 0{,}1/7 + 0{,}1/8 + 0{,}1/9\\
\tilde{A}^{0,2} = 0{,}2\cdot A^{0,2} = 0{,}2/2 + 0{,}2/3 + 0{,}2/4 + 0{,}2/5 + 0{,}2/6 + 0{,}2/7 + 0{,}2/8\\
\tilde{A}^{0,3} = 0{,}3\cdot A^{0,3} = 0{,}3/2 + 0{,}3/3 + 0{,}3/4 + 0{,}3/5 + 0{,}3/6 + 0{,}3/7\\
\tilde{A}^{0,4} = 0{,}4\cdot A^{0,4} = 0{,}4/3 + 0{,}4/4 + 0{,}4/5 + 0{,}4/6 + 0{,}4/7\\
\tilde{A}^{0,5} = 0{,}5\cdot A^{0,5} = 0{,}5/3 + 0{,}5/4 + 0{,}5/5 + 0{,}5/6 + 0{,}5/7\\
\tilde{A}^{0,6} = 0{,}6\cdot A^{0,6} = 0{,}6/3 + 0{,}6/4 + 0{,}6/5 + 0{,}6/6\\
\tilde{A}^{0,7} = 0{,}7\cdot A^{0,7} = 0{,}7/3 + 0{,}7/4 + 0{,}7/5 + 0{,}7/6\\
\tilde{A}^{0,8} = 0{,}8\cdot A^{0,8} = 0{,}8/4 + 0{,}8/5 + 0{,}8/6
\end{cases}$$

$$\tilde{A} = \sum_{\alpha=0,1}^{\alpha=1} \tilde{A}^{\alpha} = \sum_{\alpha=0,1}^{\alpha=1} \alpha\cdot A^{\alpha} = (0{,}1 \vee 0{,}2 \vee \mathbf{0{,}3})/2 + (0{,}1 \vee 0{,}2 \vee 0{,}3 \vee 0{,}4 \vee 0{,}5 \vee 0{,}6 \vee$$

$$\vee \mathbf{0{,}7})/3 + (0{,}1 \vee 0{,}2 \vee ... \vee \mathbf{1})/4 + (0{,}1 \vee 0{,}2 \vee ... \vee \mathbf{1})/5 + (0{,}1 \vee 0{,}2 \vee ... \vee \mathbf{0{,}9})/6 +$$

$$+ (0{,}1 \vee 0{,}2 \vee 0{,}3 \vee 0{,}4 \vee \mathbf{0{,}5})/7 + (0{,}1 \vee \mathbf{0{,}2})/8 + \mathbf{0{,}1}/9.$$

Найдем логические суммы, выбрав в качестве их значений наибольшие слагаемые, выделенные полужирным шрифтом:

$$\tilde{A} = 0{,}3/2+0{,}7/3+1/4+1/5+0{,}9/6+0{,}5/7+0{,}2/8+0{,}1/9 = A\,.$$

Окончательно имеем

$$A = \tilde{A} = \sum_{\alpha=0,1}^{\alpha=1} \tilde{A}^{\alpha} = \sum_{\alpha=0.1}^{\alpha=1} \alpha \cdot A^{\alpha}\,.$$

Очевидно, что аналогичный результат был бы получен и в том случае, если бы множества M и $Д$ были равны: $M = Д$, т. е. α пробегала бы лишь те значения, которые принимает μ_A.

В общем случае, если носитель U_A нечеткого множества A является дискретным и $\mu_A(x) \in M (x \in U_A)$, $\alpha \subseteq Д$ и $M \subseteq Д$, справедливо равенство

$$A = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \tilde{A}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \alpha \cdot A^{\alpha}\,, \tag{1.4}$$

где произведение $\alpha{\cdot}A^{\alpha}$ обозначает присваивание элементам обычного множества A^{α} степени принадлежности α, иными словами, обращение его в нечеткое множество $\tilde{A}^{\alpha}$.

Представление нечеткого множества в виде равенства (1.4) называют ***разложением нечеткого множества по множествам уровня***.

Если носитель нечеткого множества непрерывен, то разложение его по множествам уровня записывают с помощью интеграла:

$$A = \int_0^1 \tilde{A}^{\alpha} = \int_0^1 \alpha \cdot A^{\alpha}\,. \tag{1.5}$$

Как и ранее, оба символа, $\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \tilde{A}^{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \alpha \cdot A^{\alpha}$, $\int_0^1 \tilde{A}^{\alpha} = \int_0^1 \alpha \cdot A^{\alpha}$, будем читать так: сумма множеств α-уровня, понимая под этим объединение или логическую сумму множеств.

В заключение рассмотрим еще один, более сложный пример разложения нечеткого множества по множествам α-уровня.

Пусть имеем нечеткое множество A, носителем которого является отрезок числовой оси $x \in [1{,}3]$, а функция принадлежности имеет вид $\mu_A(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi x))$ (рис. 1.4).

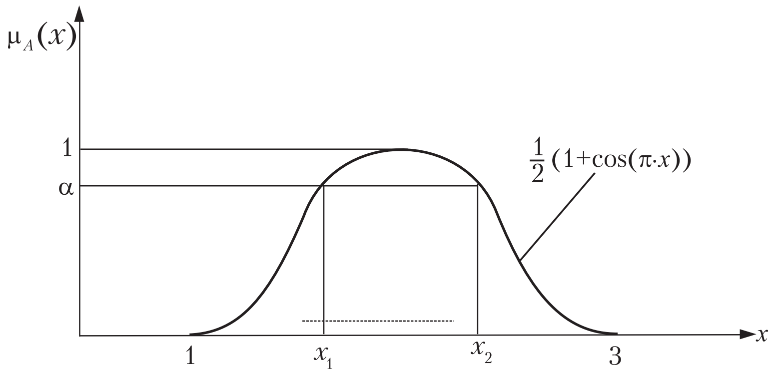


Рис. 1.4. Множество α–уровня $A^\alpha = [x_1, x_2]$ для нечеткого множества A с функцией принадлежности $\mu_A(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi x))$

Множеством α-уровня является отрезок $[x_1, x_2]$, концы которого определяются из уравнения $\mu_A(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi x)) = \alpha$, $x \in [1,3]$. Решением такого уравнения будут два числа:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha - 1) \text{ и } x_2 = 2 + \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha - 1).$$

Следовательно, $\tilde{A}^\alpha = \alpha\left[\left(2 - \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)\right), \left(2 + \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)\right)\right]$.

Разложение множества A по множествам уровня имеет вид

$$A = \int_0^1 \alpha\left[\left(2 - \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)\right), \left(2 - \frac{1}{\pi}\arccos(2\alpha-1)\right)\right].$$

Разбив отрезок [0,1] на подходящее число частей, получают ***приближенное разложение нечеткого множества***.

Разобьем отрезок [0,1] на десять частей, получим дискретный набор значений $\alpha \in \{0; 0,1; 0,2; \dots 1\} = \left\{\frac{n}{10}\right\}$, $(n = 0,1,\dots,10)$. Тогда приближенное разложение множества A по множествам уровня примет следующий вид:

$$A \approx \sum_{n=0}^{10} \frac{n}{10}\left[\left(2 - \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{n-5}{5}\right)\right), \left(2 + \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{n-5}{5}\right)\right)\right].$$

1.3. Методы построения функций принадлежности

Наиболее уязвимым для критики вопросом теории нечетких множеств является вопрос о методах построения главной характеристики нечеткого множества — функции принадлежности. «Основной трудностью, мешающей интенсивному применению теории нечетких множеств при решении практических задач, является то, что функция принадлежности должна быть задана вне самой теории и, следовательно, ее адекватность не может быть проверена непосредственно средствами теории. В каждом известном методе построения функции принадлежности формулируются свои требования и обоснования к выбору именно такого построения» [14, с. 259].

Вот почему в настоящее время, наряду с теорией нечетких множеств, разрабатываются и применяются другие методы работы с неполной, неточной, нечеткой информацией (см., например, [16]). В большинстве алгоритмов так называемых мягких вычислений кроме методов теории нечетких множеств используются робастные, вероятностные, интервальные методы и т. п.

Основной класс методов построения функций принадлежности — методы экспертных оценок. При использовании этих методов следует учитывать, что имеется два типа свойств: свойства, которые можно непосредственно измерить, и свойства, которые являются качественными и требуют попарного сравнения объектов с целью определения их относительного места в ряду объектов, обладающих данным свойством. Важным является также и характер измерений (первичный или производный) и тип шкалы, в которой получают информацию от эксперта и которая определяет допустимый вид операций, применяемых к экспертной информации.

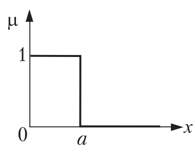
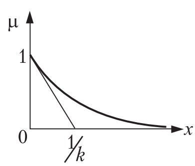
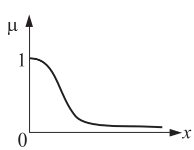
В литературе выделяют два основных метода построения функций принадлежности — прямой и косвенный.

Прямой метод. При определении нечеткого множества эксперт или эксперты просто задают значения функции принадлежности для каждого значения универсума. При этом не требуется слишком точного задания функции принадлежности, достаточно фиксации ее вида и характерных значений.

Косвенный метод. Если у формализуемого объекта имеются измеримые свойства, то используют косвенные методы построения. К таким методам, например, относят метод попарных сравнений на конечных дискретных множествах. Для этого сначала строят некоторую матрицу $A=\left[a_{ij}\right]$ в предположении, что ее элементы главной диагонали равны единице, а симметричные относительно главной диагонали — взаимно обратны. Заметим, что $a_{ij}=\mu_A(x_i)/\mu_A(x_j)$. Поэтому определение функции принадлежности сводится к нахождению некоторого вектора μ из системы линейных уравнений $A\mu=\lambda\mu$, где λ — максимальное из возможных собственных значений матрицы A.

Построение функции принадлежности скорее является не математической, а психологической проблемой, связанной с индивидуальным восприятием свойств объектов. Методы построения функций принадлежности, основанные на математической психологии, подробно рассмотрены в работе [14].

Таблица 1.1. Функции принадлежности нечетких множеств «величина x мала»

Универсальное множество	**График функции принадлежности**	**Формула функции принадлежности**
$U=R^+\cup\{0\}$		$\mu=\begin{cases}1, & \text{если} \quad 0\le x\le a;\\ 0, & \text{если} \quad x>a\end{cases}$
$U=R^+\cup\{0\}$		$\mu(x)=\mathrm{e}^{-kx},\ A$
$U=R^+\cup\{0\}$		$\mu(x)=\mathrm{e}^{-kx^2},\ k>0$

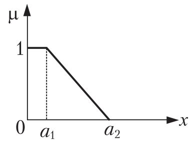
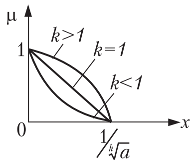
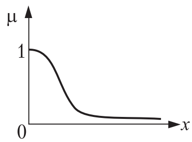
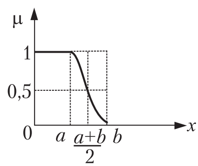
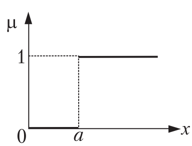
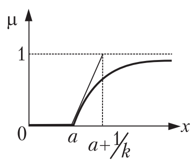
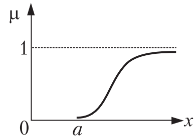
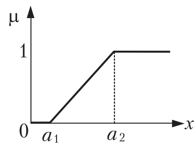
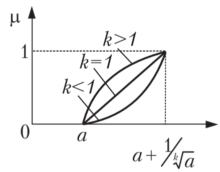
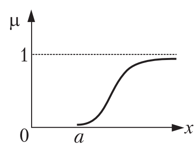
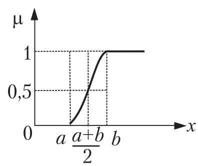
Универсальное множество	**График функции принадлежности**	**Формула функции принадлежности**
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x < a_1; \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, & \text{если} \quad a_1 \le x \le a_2; \\ 0, & \text{если} \quad a_2 < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1 - ax^k, & \text{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}; \\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} < x \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \dfrac{1}{1 + kx^2}, \; k > 0$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < a; \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{b-a} \cdot \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)\right), & a \le x \le b; \\ 0, & b < x \end{cases}$

Таблица 1.2. Функции принадлежности нечетких множеств «величина *x* большая»

Универсальное множество	**График функции принадлежности**	**Формула функции принадлежности**
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x \le a; \\ 1, & \text{если} \quad x > a \end{cases}$
$U = R^+ \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x < a; \\ 1 - e^{-k(x-a)}, & \text{если} \quad a \le x; \end{cases}$ $k > 0$

Универсальное множество	**График функции принадлежности**	**Формула функции принадлежности**
$U = R^{+} \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le a < x; \\ 1 - e^{-k(x-a)^2}, & \text{если} \quad a \le x; \end{cases}$ $k > 0$
$U = R^{+} \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x < a_1; \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & \text{если} \quad a_1 \le x \le a_2; \\ 1, & \text{если} \quad a_2 < x \end{cases}$
$U = R^{+} \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a; \\ a(x-a)^k, & a \le x \le a + \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}; \\ 1, & \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}} < x \end{cases}$
$U = R^{+} \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a; \\ \dfrac{k(x-a)^2}{1 + k(x-a)^2}, & a \le x; \end{cases}$ $k > 0$
$U = R^{+} \cup \{0\}$		$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{b-a} \cdot \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)\right), & a \le x \le b; \\ 1, & b < x \end{cases}$

При построении моделей, включающих теорию нечетких множеств, необходимо уделять особое внимание указанной проблеме. Но в дальнейшем мы будем считать, что выбор той или иной функции принадлежности обоснован и функция задана либо таблично, либо в виде графика, либо формулой.

В табл. 1.1 и 1.2 приведены наиболее часто используемые функции принадлежности для нечетких множеств «величина x мала», «величина x большая» [7]. Для нечетких множеств «величина $|x|$ мала» и «величина $|x|$ велика» в формулах функций принадлежности x заменяется на $|x|$, областью определения является вся числовая ось, а график симметричен относительно оси ординат.

1.4. Меры нечеткости множества

Пусть U — универсальное множество. Очевидно, что «самое четкое» его подмножество — это обычное множество, функция принадлежности (характеристическая функция) которого принимает значение 0 или 1. «Самое нечеткое» подмножество — это множество, состоящее из точек перехода, в которых функция принадлежности принимает значение 0,5: $\mu\ (u) \equiv 0{,}5$.

Пусть A — какое-либо нечеткое подмножество множества U. Если $\mu_A(u_0)$ близко к значению 1 или 0, то вклад элемента u_0 в нечеткость множества A мал. Если же $\mu_A(u_0)$ близко к значению 0,5 или, что то же самое, значительно отличается как от 1, так и от 0, то его вклад в нечеткость A будет значителен. Таким образом, вклад в нечеткость каждого элемента множества определяется близостью значения функции принадлежности на этом элементе к числам 1 и 0 или отдаленностью от них. Естественно определить меру нечеткости всего множества как сумму вкладов каждого его элемента.

Исходя из этих соображений мерой нечеткости множества A является функция, которая множеству A ставит в соответствие определенное действительное число $d(A)$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) $d(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A — обычное множество;
2) $d(A)$ принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда $\mu\ (u) \equiv 0{,}5$;
3) если при любом $u (u \in U)$ функции принадлежности множеств A и B связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \mu_A(u) \leq \mu_B(u), & \text{если} \quad \mu_B(u) < 0{,}5; \\ \mu_A(u) \geq \mu_B(u), & \text{если} \quad \mu_B(u) > 0{,}5; \\ \mu_A(u) - \quad \text{любое}, & \text{если} \quad \mu_B(u) = 0{,}5, \end{cases}$$

то

$$d(A) \leq d(B);$$

4) если $\mu_B(u_0) = 1 - \mu_A(u_0)$, то $d(A) = d(B)$. (Симметричность относительно точки перехода, в которой функции принадлежности принимают значение 0,5.)

Требования 1–4 называют аксиомами меры нечеткости. Чаще всего в качестве меры нечеткости выбирают расстояние от нечеткого множества A до ближайшего к нему обычного множества A_0.

Дадим определение понятия «обычное множество, ближайшее к нечеткому».

Определение 1.9. ***Обычным множеством, ближайшим к нечеткому множеству*** A ***с функцией принадлежности*** $\mu_A(u)(u \in U)$, называют подмножество A_0 множества U, характеристическая функция которого имеет вид

$$\mu_{A_0} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mu_A > 0{,}5; \\ 0, & \text{если} \quad \mu_A < 0{,}5; \\ 1 \quad \text{или} \quad 0, & \text{если} \quad \mu_A = 0{,}5. \end{cases} \tag{1.6}$$

Геометрический смысл понятия «обычное множество A_0, ближайшее к нечеткому множеству A» иллюстрирует рис. 1.5.

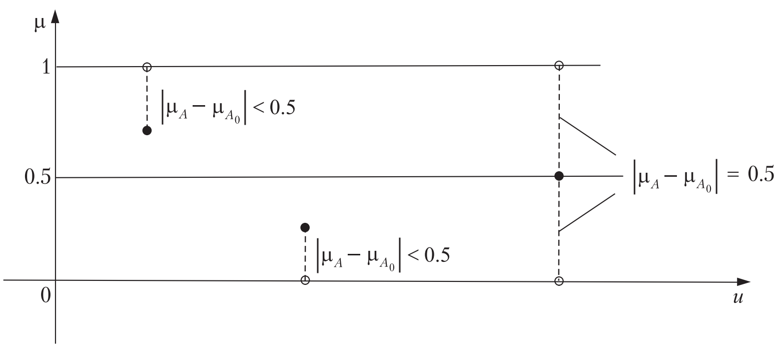


Рис. 1.5. Значения $|\mu_A - \mu_{A_0}|$ при различном расположении точек графиков функций: • — функция μ_A; ∘ — функция μ_{A_0}

Как видно на рисунке, справедливы неравенства

$$|\mu_A - \mu_{A_0}| < 0{,}5, \quad \text{если} \quad \mu_A > 0{,}5 \quad \text{или} \quad \mu_A < 0{,}5;$$

$$|\mu_A - \mu_{A_0}| = 0{,}5, \ \text{если} \ \mu_A = 0{,}5,$$

независимо от того $\mu_{A_0} = 1$ или $\mu_{A_0} = 0$.

Если A — обычное множество, то оно является ближайшим к самому себе. Это следует непосредственно из определения 1.9.

Необходимо договориться о том, каким образом определять расстояние между множествами (четкими и нечеткими). Функции принадлежности всех множеств на универсальном множестве U образуют функциональное множество M. Другими словами, M — это множество всех функций, определенных на U и принимающих значения на отрезке [0, 1]. Определить расстояние между элементами множества M означает *наложить метрику* на это множество. Метрика на каком-либо множестве X — это функция $\rho(x, y)$, сопоставляющая каждой паре элементов $x, y \in X$ действительное число и обладающая следующими свойствами (аксиомы метрики):

1) аксиома тождества

$$\rho(x,y) \geq 0,$$

причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) аксиома симметрии

$$\rho(x, y) = \rho(y, x);$$

3) аксиома треугольника

$$\rho(x, y) \geq \rho(x, z) + \rho(z, y)\ .$$

Значение $\rho(x, y)$ называют расстоянием между элементами x и у ($x, y \in X$). Напомним, что при изучении векторной алгебры рассматривались множества точек плоскости или пространства и для определения расстояний между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ использовалась так называемая евклидова метрика:

$$\left|AB\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Строго говоря, правило вычисления расстояний между элементами множества может быть задано любой формулой, лишь бы полученный результат удовлетворял аксиомам метрики. В функциональных пространствах наиболее часто используют два способа вычисления расстояний (табл. 1.3).

Мера нечеткости множества, определенная как расстояние от этого множества до ближайшего к нему обычного множества

$$d(A) = \rho(\mu_A, \mu_{A0})(u_i \in U),$$

удовлетворяет аксиомам метрики независимо от того, какая их них (линейная или евклидова) при этом использована.

Таблица 1.3. Некоторые виды метрик функциональных пространств[1]

Вид метрики	Вид множества	
	U **— дискретное множество, *n* число его элементов**	***U*** **= [a, b] — непрерывное множество**
Линейное расстояние (расстояние Хемминга)	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sum_{i=1}^{n} \lvert \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \rvert$	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \int_a^b \lvert \mu_A(x) - \mu_B(x) \rvert dx$
Евклидово расстояние	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$	$\rho(\mu_A, \mu_B) = \sqrt{\int_a^b (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx}$

Рассмотрим пример. Пусть даны нечеткие множества

$$A = 0{,}3/1 + 0{,}5/2 + 0{,}2/3 + 0{,}7/4 + 0{,}6/5;$$

$$B = 0{,}7/1 + 0{,}5/2 + 0{,}8/3 + 0{,}3/4 + 0{,}4/5;$$

$$C = 0{,}5/1 + 0{,}5/2 + 0{,}5/3.$$

Обратим внимание на то, что множества A и B удовлетворяют условию четвертой аксиомы меры нечеткости, т. е. их функции принадлежности симметричны относительно точки перехода 0,5:

$$\mu_A(u) = 1 - \mu_B(u),\ (u \in \{1, 2, 3, 4, 5\}).$$

Согласно второй аксиоме меры нечеткости, самым нечетким множеством должно быть множество C, так как все значения μ_C равны 0,5. Найдем меры нечеткости множеств A, B и C, использовав разные метрики. Для этого выполним последовательно следующие действия:

1) найдем обычные множества, ближайшие к A, B и C:

$$A_0 = 0/1 + 0/2 + 0/3 + 1/4 + 1/5;$$

$$B_0 = 1/1 + 0/2 + 1/2 + 0/4 + 0/5;$$

$$C_0 = 0/1 + 0/2 + 0/3;$$

[1] В табл. 1.3 знаки суммы и интеграла означают именно сложение и интегрирование, но не объединение точечных множеств, как в подразделах 1.1 и 1.2.

2) вычислим меру нечеткости по линейной метрике:

$$d^L(A) = |0{,}3-0| + |0{,}5-0| + |0{,}2-0| + |0{,}7-1| + |0{,}6-1| = 1{,}7\ ,$$
$$d^L(B) = |0{,}7-1| + |0{,}5-0| + |0{,}8-1| + |0{,}3-0| + |0{,}4-0| = 1{,}7\ ,$$
$$d^L(C) = |0{,}5-0| + |0{,}5-0| + |0{,}5-0| = 1{,}5\ ;$$

3) вычислим меру нечеткости по метрике Евклида:

$$d^E(A) = \sqrt{(0{,}3-0)^2 + (0{,}5-0)^2 + (0{,}2-0)^2 + (0{,}7-1)^2 + (0{,}6-1)^2} \approx 1{,}109\ ,$$
$$d^E(B) = \sqrt{(0{,}7-1)^2 + (0{,}5-0)^2 + (0{,}8-1)^2 + (0{,}3-0)^2 + (0{,}4-0)^2} \approx 1{,}109\ ,$$
$$d^E(C) = \sqrt{(0{,}5-0)^2 + (0{,}5-0)^2 + (0{,}5-0)^2} \approx 0{,}866\ .$$

Очевидно, что независимо от выбора метрики $d(A) = d(B)$, т. е. принятая мера удовлетворяет четвертой аксиоме меры нечеткости. Но мера нечеткости множества C оказалась при обеих метриках ниже, чем множеств A и B, что на первый взгляд противоречит второй аксиоме. Однако противоречие это только кажущееся, так как носитель множества C не равен носителю множеств A и B: $U_C = \{1, 2, 3\}$, $U_A = U_B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Выйти из этого положения можно двумя способами: во-первых, можно дополнить носитель множества C элементами 4 и 5, на которых функция μ_C должна иметь «вполне четкие» значения — 0. Это объяснит, почему множества A и B являются более нечеткими, чем C; во-вторых, модифицировать выбранную меру нечеткости так, чтобы с ее помощью можно было сравнивать нечеткость множеств на различных носителях.

ПРИМЕЧАНИЕ

A_0 — обычное множество, ближайшее к нечеткому множеству A, $\mu_{A_0}(x)$ — характеристическая функция множества A_0, вычисляемая по формуле (1.6).

Чтобы с помощью $\rho(\mu_A,\mu_{A0})$ можно было сравнивать нечеткие множества, имеющие различные носители, надо нормировать $\rho(\mu_A,\mu_{A0})$, потребовав, чтобы для любого множества мера нечеткости не превышала какой-то определенный порог, например 1. Нормированное расстояние $\rho(\mu_A,\mu_{A0})$ между нечетким множеством A и ближайшим к нему обычным множеством называют ***индексом нечеткости*** и обозначают I_A. Запишем основные формулы вычисления индекса нечеткости (табл. 1.4).

Таблица 1.4. Основные формулы вычисления индексов нечеткости множеств

Вид метрики	**Вид множества**	
	U **— дискретное множество, *n* число его элементов**	***U* = [*a*, *b*] — непрерывное множество**
Линейное расстояние (расстояние Хемминга)	$I_A^L = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|\mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i)\right\|$	$I_A^L = \frac{2}{b-a}\int_a^b \left\|\mu_A(x) - \mu_{A_0}(x)\right\| dx$
Евклидово расстояние	$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i))^2}$	$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\int_a^b (\mu_A(x) - \mu_{A_0}(x))^2 dx}$

Применим формулы, приведенные в табл. 1.4, для вычисления индексов нечеткости множеств A, B и C, рассмотренных выше. Учитывая формулы из табл. 1.3 и выполненные ранее вычисления расстояний между этими множествами, получаем:

$$I_A^L = I_B^L = \frac{2}{5}\cdot 1{,}7 = 0{,}68, \qquad I_C^L = \frac{2}{3}\cdot 1{,}5 = 1,$$

$$I_A^E = I_B^E \approx \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 1{,}109 \approx 0{,}992, \qquad I_C^E \approx \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}866 \approx 1.$$

Как и следовало ожидать, самое нечеткое множество — множество C — имеет самые большие индексы нечеткости.

Таким образом, чтобы ответить на вопрос «Какое из двух множеств „более нечетко”?», надо вычислить и сравнить индексы нечеткости этих множеств. «Более нечетким» является то множество, которое имеет больший индекс нечеткости.

Например, даны множества

$$A = 0{,}3/1 + 0{,}5/2 + 0{,}7/3 + 0{,}9/4 + 1/5 \text{ и}$$

$$B = 0{,}3/7 + 0{,}5/8 + 0{,}8/9 + 0{,}8/10.$$

Требуется оценить, какое из них «более нечетко». Вычислим индексы нечеткости I^L и I^E множеств A и B. Для этого выполним ряд действий:

1) запишем обычные множества, ближайшие к A и B:

$$A_0 = 0/1 + 0/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5,$$

$$B_0 = 0/7 + 0/8 + 1/9 + 1/4 + 1/10;$$

2) вычислим индексы нечеткости, используя расстояние Хемминга:

$$I_A^L = \frac{2}{5}(|0{,}3-0|+|0{,}5-0|+|0{,}7-1|+|0{,}9-1|+|1-1|) = \frac{2{,}4}{5} = 0{,}48,$$

$$I_B^L = \frac{2}{4}(|0{,}3-0|+|0{,}5-0|+|0{,}8-1|+|0{,}8-1|) = \frac{2{,}4}{4} = 0{,}6;$$

3) вычислим индексы нечеткости, используя расстояние Евклида:

$$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{(0{,}3-0)^2+(0{,}5-0)^2+(0{,}7-1)^2+(0{,}9-1)^2+(1-1)^2} = 0{,}593,$$

$$I_B^E = \frac{2}{\sqrt{4}}\sqrt{(0{,}3-0)^2+(0{,}5-0)^2+(0{,}8-1)^2+(0{,}8-1)^2} = 0{,}648.$$

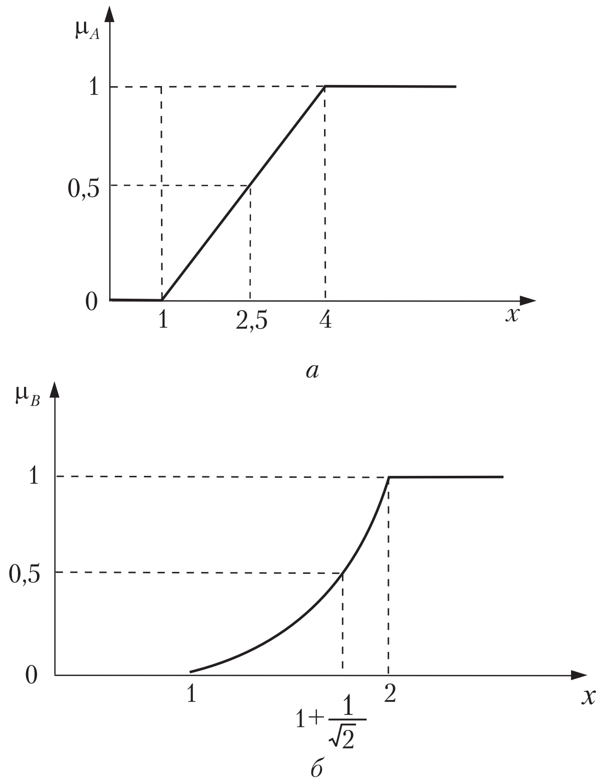


Рис. 1.6. Графики функций принадлежности нечетких множеств: *а* — функция принадлежности множества A; *б* — функция принадлежности множества B

Множество B «более нечетко», чем множество A, так как его индексы нечеткости при любой метрике больше соответствующих индексов множества A. Рассмотрим вопрос о сравнении нечеткости множеств в случае, когда их носителями являются непрерывные множества. Пусть множества A и B, заданные на $U = R^{+} \cup \{0\}$, являются множествами больших величин (см. табл. 1.2). Их функции принадлежности заданы графиками, изображенными на рис. 1.6.

Сравним нечеткость множеств A и B. Для этого вычислим их индексы нечеткости, использовав линейную метрику.

I. Вычислим индекс нечеткости множества A, выполнив приведенную ниже последовательность действий:

1) запишем функцию принадлежности множества A

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x < 1, \\ \dfrac{x-1}{4-1}, & \text{если} \quad 1 \le x \le 4, \\ 1, & \text{если} \quad 4 < x; \end{cases}$$

2) запишем характеристическую функцию обычного множества A_0, ближайшего к A. Как видно из графика, функция μ_A является неубывающей функцией с точкой перехода $x = 2{,}5$. Следовательно, μ_A имеет вид

$$\mu_{A_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x < 2{,}5, \\ 1, & \text{если} \quad 2{,}5 \le x; \end{cases}$$

3) вычислим индекс нечеткости множества A, воспользовавшись формулой из табл. 1.4:

$$I_A^L = \frac{2}{b-a}\int_a^b \left|\mu_A(x) - \mu_{A_0}(x)\right| dx;$$

$$I_A^L = \frac{2}{4-1}\left(\int_1^{2,5}\left|\frac{x-1}{3} - 0\right| dx + \int_{2,5}^{4}\left|\frac{x-1}{3} - 1\right| dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\int_1^{2,5} xdx + \int_1^{2,5} dx\right) + \frac{1}{3}\left(\int_{2,5}^{4} xdx - 4\int_{2,5}^{4} dx\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\int_1^4 xdx + x\Big|_1^{2,5} - 4\,x\Big|_{2,5}^{4}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4 + 1{,}5 - 6\right) = \frac{2}{9}(8 - 0{,}5 - 4{,}5) = \frac{2}{3} =$$

$$= 0{,}6667.$$

II. Вычислим индекс нечеткости множества B, выполнив аналогичную последовательность действий:

$$1)\ \mu_B(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 0\le x<1,\\ (x-1)^2, & \text{если}\quad 1\le x\le 2,\\ 1, & \text{если}\quad 2<x;\end{cases}$$

$$2)\ \mu_{B_0}(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 0\le x<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ 1, & \text{если}\quad 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le x;\end{cases}$$

$$3)\ I_B^L=\frac{2}{2-1}\left(\int\limits_1^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\left|(x-1)^2-0\right|dx+\int\limits_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2}\left|(x-1)^2-1\right|dx\right)=$$

$$=2\left(\int\limits_1^2(x-1)^2\,dx-\int\limits_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2}dx\right)=2\left(\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_1^2-x\Big|_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}-2+1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}+3\right)=0{,}0808\,.$$

Очевидно, что нечеткость множества A значительно превышает нечеткость множества B.

Рассмотрим более подробно третью аксиому меры нечеткости. Пусть B — нечеткое множество, заданное на универсальном множестве U. Пусть также множество A удовлетворяет условию аксиомы 3:

$$\begin{cases}\mu_A(u)\le\mu_B(u), & \text{если}\quad \mu_B(u)<0{,}5;\\ \mu_A(u)\ge\mu_B(u), & \text{если}\quad \mu_B(u)>0{,}5;\\ \mu_A(u)\ -\ \text{любое}, & \text{если}\quad \mu_B(u)=0{,}5.\end{cases}$$

Множество A, для которого справедлива указанная система неравенств, называют ***заострением множества*** B. На рис. 1.7 показан пример графиков функции принадлежности фиксированного множества B и его заострения A.

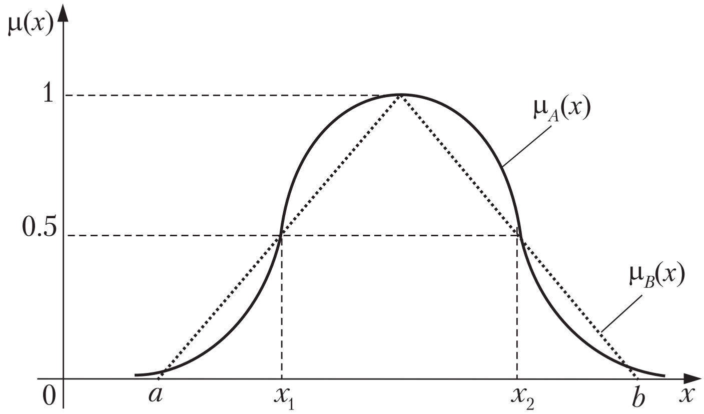


Рис. 1.7. Функции принадлежности множества B и его заострение A

Согласно третьей аксиоме, если множество A является заострением множества B, то $d(\mu_A) \leq (\mu_B)$ и, следовательно, $I_A \leq I_B$.

Пусть

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i) / u_i ,$$

причем $\mu A\ (u_i) \leq 0{,}5$, $i = 1{,}2, ..., n$. Тогда

$$A^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu^2{}_A(u_i) / u_i$$

является заострением множества A, поскольку для любого $u_i (u_i \in U)$ справедливо неравенство $\mu_A^2(u_i) \leq \mu_A(u_i) \leq 0{,}5$. Следовательно, $I_{A^2} \leq I_A$ и множество A «более нечеткое», чем A^2. Если $\mu_A\ (u_i) \leq 0{,}5$, $i = 1{,}2, ..., n$ и $A^{0,5} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_A(u_i)} / u_i$, то $0{,}5 \leq \mu_A(u_i) \leq \sqrt{\mu_A(u_i)}$, множество A является заострением множества $A^{0,5}$. Следовательно, $I_A \leq I_{A^{0,5}}$ и множество A менее нечеткое, чем $A^{0,5}$.

Очевидно, что если $0 \leq \mu_A(u_i) \leq 1$, то неравенства $\mu^2{}_A(u_i) \leq \mu_A(u_i)$ и $\mu_A(u_i) \leq \sqrt{\mu_A(u_i)}$ продолжают выполняться, но множества A^2 и $A^{0,5}$ могут быть как более нечеткими, чем A, так и менее нечеткими. Действительно, линейные индексы нечеткости этих множеств имеют вид

$$I_A^L = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i)\right| = \frac{2}{n}\left(\sum_{\substack{j \\ \mu_A(x_j)\le 0,5}} \mu_A(x_j) + \sum_{\substack{k \\ \mu_A(x_k)>0,5}} (1-\mu_A(x_k))\right);$$

$$I_{A^2}^L = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu^2{}_A(x_i) - \mu_{A^2{}_0}(x_i)\right| = \frac{2}{n}\left(\sum_{\substack{j \\ \mu_A^2(x_j)\le 0,5 \\ \mu_A\le\sqrt{0,5}}} \mu^2{}_A(x_j) + \sum_{\substack{k \\ \mu_A^2>0,5 \\ \mu_A>\sqrt{0,5}}} (1-\mu^2{}_A(x_k))\right);$$

$$I_{A^{0,5}}^L = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\mu_A(x_i)} - \mu_{A_0^{0,5}}(x_i)\right| = \frac{2}{n}\left(\sum_{\substack{j \\ \sqrt{\mu_A(x_j)}\le 0,5 \\ \mu_A\le 0,5^2}} \sqrt{\mu_A(x_j)} + \sum_{\substack{k \\ \sqrt{\mu_A}>0,5 \\ \mu_A>0,5^2}} (1-\sqrt{\mu_A(x_k)})\right).$$

После некоторых преобразований приведенных выше формул получаем два условия:

1) если выполнено неравенство

$$\sum_{\mu_j\le 0,5}\mu_j(1-\mu_j) + \sum_{0,5<\mu_j\le\frac{1}{\sqrt{2}}}(0,5-\mu_j^2) \ge$$
$$\ge \sum_{\mu_j>\frac{1}{\sqrt{2}}}\mu_j(1-\mu_j) + \sum_{0,5<\mu_j\le\frac{1}{\sqrt{2}}}(\mu_j-0,5),$$

то $I_A^L \ge I_{A^2}^L$ и A «более нечетко», чем $A^{0,5}$;

2) если выполнено неравенство

$$\sum_{\mu_j\le 0,25}\sqrt{\mu_j}\cdot(1-\sqrt{\mu_j}) + \sum_{0,25<\mu_j\le 0,5}(\sqrt{\mu_j}-0,5) \ge$$
$$\ge \sum_{\mu_j>0,5}\sqrt{\mu_j}(1-\sqrt{\mu_j}) + \sum_{0,25<\mu_j\le 0,5}(0,5-\mu_j),$$

то $I_A^L \ge I_{A^{0,5}}^L$ и A «более нечетко», чем $A^{0,5}$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Для сокращения записей использовано обозначение $\mu_A(x_j) \equiv \mu_j$. Суммирование ведется по всем элементам универсального множества U, для которых выполняются неравенства, записанные под знаком Σ.

Переход от множества A к множеству A^2 называют ***операцией концентрирования множества*** A, а переход от A к $A^{0,5}$ — ***операцией растяжения множества*** A. Применяются следующие обозначения:

$$\mathrm{CON}(A) = A^2, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{DIL}(A) = A^{0,5}. \tag{1.8}$$

Обе эти операции используются в работе с лингвистическими переменными и в нечеткой логике.

1.5. Отношение включения нечетких множеств

Напомним, что если A и B — обычные множества, то A есть ***подмножество*** B тогда и только тогда, когда каждый элемент множества A является элементом B. Диаграмма Эйлера–Венна является графическим способом иллюстрации отношений между множествами и операций над ними (рис. 1.8). Множество A является подмножеством множества B: $A \subseteq B$.

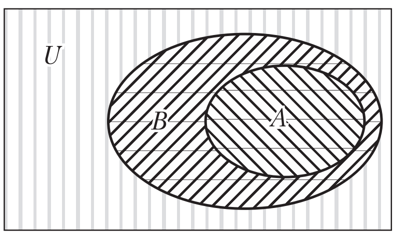


Рис. 1.8. Диаграмма Эйлера–Венна: универсальное множество

Отношение множества и подмножества называют ***отношением включения.*** Запись $A \subseteq B$ читается так: «A включено в B» или «B включает A».

Обратим внимание на то, что любое множество A является подмножеством самого себя: $A \subseteq A$, поскольку все элементы A являются элементами A. Если выполняются включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B равны: $A = B$.

Характеристическая функция подмножества при любых значениях аргумента не превосходит характеристическую функцию множества.

Характеристические функции равных множеств равны при любом значении x. Верны также и обратные утверждения:

1. Если для любого $x \in U$ справедливо $\mu A(x) \leq \mu B(x)$, то $A \subseteq B$.
2. Если для любого $x \in U$ справедливо $\mu A(x) \leq \mu B(x)$, то $A = B$.

Понятия включения и равенства множеств естественным образом обобщаются на случай нечетких множеств. Пусть задано дискретное ($U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$) или непрерывное ($U = [a, b]$) универсальное множество.

Определение 1.10. Нечеткое множество $A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i) / u_i$ $\left(A = \int_U \mu_A(u) / u\right)$ называют ***подмножеством множества*** $B = \sum_{i=1}^{n} \mu_B(u_i) / u_i$ $\left(B = \int_U \mu_B(u) / u\right)$, если для любого элемента u универсального множества U выполняется неравенство

$$\mu_A(u) \leq \mu_B(u). \tag{1.9}$$

Как и в случае с обычными подмножествами, если для любого элемента u универсального множества U выполняется равенство $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$, то $A = B$. При чтении записи $A \subseteq B$ используются термины «A включено в B» или «B включает A».

Если $(\forall u, u \in U)\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ и $(\exists u, u \in U)\mu_A(u) \neq \mu_B(u)$, то включение называют строгим: $A \subset B$, а подмножество A — правильной частью B.

Для геометрической иллюстрации отношений между нечеткими множествами вместо диаграмм Эйлера–Венна используют графики функций принадлежности (рис. 1.9 и 1.10).

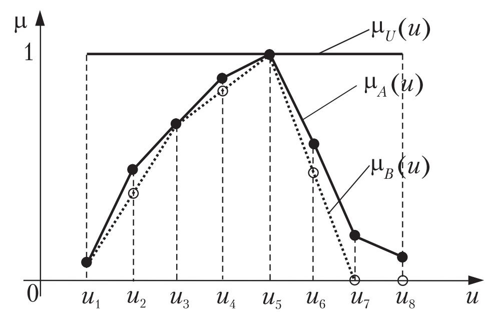


Рис. 1.9. Функции принадлежности нечетких множеств $B \subset A \subset U$

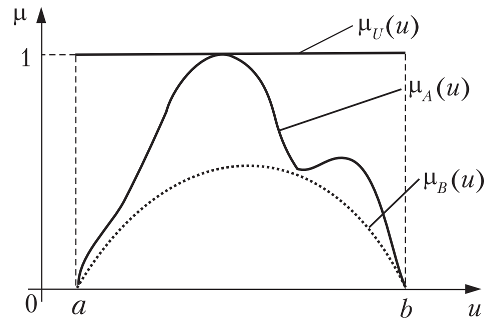


Рис. 1.10. Функции принадлежности нечетких множеств $B \subset A \subset U$

Универсальное множество U можно рассматривать как нечеткое множество, функция принадлежности которого тождественно равна 1, а пустое множество $\varnothing$ — как нечеткое множество, функция принадлежности которого тождественно равна 0. В этом случае все обычные и нечеткие подмножества, определенные на U, включая U и $\varnothing$, образуют ***множество всех нечетких подмножеств множества*** U. Будем обозначать это множество символом $\mathfrak{I}$. Множество U является наибольшим множеством в $\mathfrak{I}$, а $\varnothing$ — наименьшим. Если $A \subseteq B$, то говорят, что A не больше, чем B. Таким образом, отношение включения на множестве $\mathfrak{I}$ устанавливает порядок, т. е. делает $\mathfrak{I}$ упорядоченным множеством. Однако порядок этот частичный: существуют множества, не сравнимые друг с другом по отношению включения: $A \not\subset B$, $B \not\subset A$, $A \neq B$ (см. рис. 1.7).

1.6. Операции над нечеткими множествами

Операции над обычными множествами были изучены в курсе дискретной математики. Напомним определение алгебраической операции, заданной на каком-либо множестве X (например, на множестве действительных чисел).

Двуместной, или бинарной, алгебраической операцией на множестве X называют соответствие, по которому каждой паре (a, b) элементов множества X сопоставляется определенный элемент c множества X.

Например, бинарными алгебраическими операциями на множестве действительных чисел R являются сложение и умножение: для любых двух действительных чисел (a, b) найдется единственное число c, которое является их суммой, и единственное число d, которое является их произведением:

$$a + b = c,\ a \cdot b = d,\ a, b, c, d \in R.$$

Одноместной, или унарной, алгебраической операцией на множестве X называют соответствие, по которому каждому элементу a множества X сопоставляется определенный элемент b множества X. Например, унарной алгебраической операцией на множестве действительных чисел R является нахождение противоположного числа: для любого числа a найдется единственное противоположное число $-a$.

В первую очередь рассмотрим три основные алгебраические операции на множестве $\Im$ всех нечетких подмножеств множества U:

1) дополнение $\overline{A}$,
2) пересечение $A \cap B$,
3) объединение $A \cup B$.

Определения этих операций над обычными и нечеткими множествами, а также геометрические иллюстрации к определениям даны в табл. 1.5.

Определения операций над нечеткими множествами записаны для случая дискретного универсального множества. Если же U непрерывно, то результаты выполнения этих операций должны быть записаны следующим образом:

1) дополнение $\overline{A} = \int_U (1 - \mu_A(u)) / u$;
2) пересечение $A \cap B = \int_U \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) / u$;
3) объединение $A \cup B = \int_U \max(\mu_A(u), \mu_B(u)) / u$.

Рассмотрим несколько примеров выполнения этих операций.

Примеры.

1. Пусть $U = \{1, 2, ... 10\}$, $A = 0{,}8/3 + 1/5 + 0{,}6/6$, $B = 0{,}7/3 + $ j $+ 0{,}5/6$. $\overline{A} = (1 - 0)/1 + (1 - 0)/2 + (1 - 0{,}8)/3 + (1- 0)/4 + (1 - 1)/5 + (1 - 0{,}6)/7 + (1 - 0)/8 + (1 - 0)/9 + (1 - 0)/10 = 1/1 + 1/2 + 0{,}2/3 + 1/4 + 0{,}5 + 0{,}4/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10$.

   Обратим внимание на то, что в записи нечеткого множества A участвуют лишь элементы несущего множества {3, 5, 6}, т. е. подмножества U, на котором значения функции принадлежности $\mu_A \geq 0$. На подмножестве {1, 2, 4, 7, 8, 9, 10} $\mu_A(u) = 0$. Следовательно, согласно формулам (см. табл. 1.5), на этих элементах $\mu_{\overline{A}}(u) = 1$.

Учитывая это замечание, запишем

$$\overline{B} = 1/1 + 1/2 + 0{,}3/3 + 1/5 + 0{,}5/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10\,.$$

В соответствии с формулами (см. табл. 1.5), выполним другие операции над множествами A и B:

$$A \cap B = 0{,}7/3 + 0{,}5/6;$$

$$A \cup B = 0{,}8/3 + \mathrm{j} + 1/5 + 0{,}6/6;$$

$$\overline{A} \cap \mathrm{A} = 0{,}2/3 + 0{,}4/6 \neq \varnothing;$$

$$\overline{B} \cup B = 1/1 + 1/2 + 0{,}7/3 + 1/4 + 1/5 + 0{,}5/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 \neq U\,.$$

Пересечение нечеткого множества со своим дополнением может не быть пустым ($\overline{A} \cap A \neq \varnothing$), а объединение — не составлять универсальное множество ($\overline{B} \cup B \neq U$).

2. Множества A — «величина x велика» и B — «величина x мала» заданы на отрезке [0, 6]. Их функции принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leq x < 1; \\ \dfrac{x-1}{3}, & \text{если} \quad 1 \leq x \leq 4; \\ 1, & \text{если} \quad 4 < x \leq 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \leq x < 1; \\ \dfrac{3-x}{2}, & \text{если} \quad 1 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{если} \quad 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

показаны на рис. 1.11

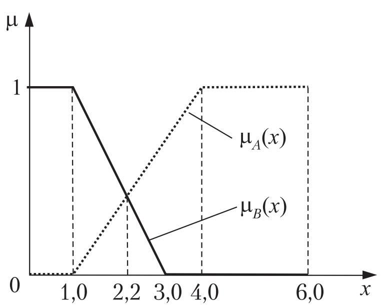
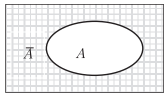
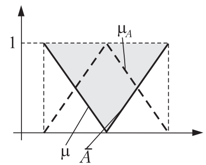
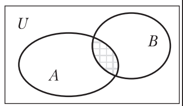
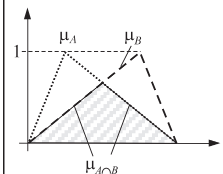
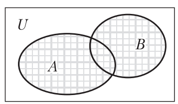
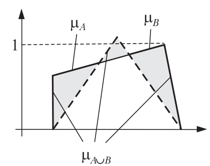


Рис. 1.11. Функции принадлежности $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$

Таблица 1.5. Операции над обычными и нечеткими множествами

<table>
<tr><th colspan="3">Обычные множества</th><th colspan="2">Нечеткие множества</th></tr>
<tr><th>Определение</th><th>Диаграмма Эйлера–Венна</th><th>Таблицы и формулы, характ. функции</th><th>Определение</th><th>Графическое пояснение</th></tr>
<tr>
<td>Дополнением множества A называют множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества U, которые не принадлежат множеству A</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{array}{|c|c|} \hline \mu_A & \mu_{\overline{A}} \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$
$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A$</td>
<td>Дополнением нечеткого множества
$A = \sum_U \mu_A(u_i)/u_i$ называют множество
$\overline{A} = \sum_U (1 - \mu_A(u_i))/u_i$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Пересечением множеств A и B называют множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu_A & \mu_B & \mu_{A\cap B} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$
$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A, \mu_B) = \mu_A \mu_B$</td>
<td>Пересечением нечетких множеств
$A = \sum_U \mu_A(u_i)/u_i$ и
$B = \sum_U \mu_B(u_i)/u_i$ называют нечеткое множество
$A \cap B = \sum_U \min(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))/u_i$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Объединением множеств A и B называют множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат либо множеству A, либо множеству B, либо обоим множествам</td>
<td>
</td>
<td>$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu_A & \mu_B & \mu_{A\cup B} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$
$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A, \mu_B) = \mu_A + \mu_B - \mu_A \mu_B$</td>
<td>Объединением нечетких множеств
$A = \sum \mu_A(u_i)/u_i$
и $B = \sum_U \mu_B(u_i)/u_i$ называют нечеткое множество
$A \cup B = \sum_U \max(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))/u_i$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Выполним над множествами A и B ряд операций.

1. *Дополнения множеств* A *и* B.

Воспользуемся формулой $\overline{A} = \int\limits_U (1-\mu_A(u))/u$. Функции принадлежности $\mu_{\overline{A}}$, $\mu_{\overline{B}}$ и их графики (рис. 1.12) в соответствии с этой формулой имеют вид

$$\mu_{\overline{A}}(x) = \begin{cases} 1-0, & \text{если } 0 \le x < 1 \\ 1-\dfrac{x-1}{3}, & \text{если } 1 \le x \le 4 \\ 1-1, & \text{если } 4 < x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ \dfrac{4-x}{3}, & \text{если } 1 \le x \le 4, \\ 0, & \text{если } 4 < x \le 6; \end{cases}$$

$$\mu_{\overline{B}}(x) = \begin{cases} 1-1, & \text{если } 0 \le x < 1 \\ 1-\dfrac{3-x}{2}, & \text{если } 1 \le x \le 3 \\ 1-0, & \text{если } 3 < x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, & \text{если } 1 \le x \le 3, \\ 1, & \text{если } 3 < x \le 6. \end{cases}$$

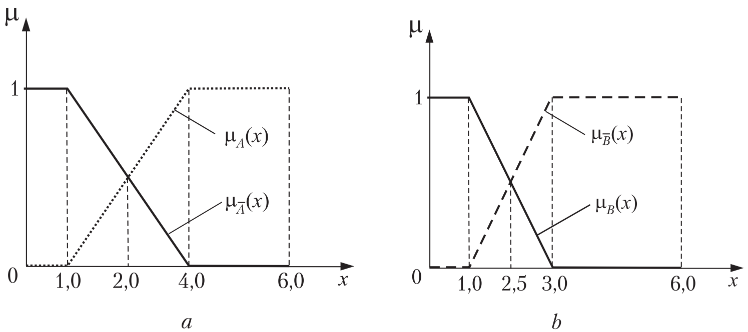


Рис. 1.12. Функции принадлежности: *а* — множества A; *б* — множества B

Окончательно получаем

$$\overline{A} = \int\limits_0^1 1/x + \int\limits_1^4 \frac{4-x}{3}/x\,; \ \overline{B} = \int\limits_1^3 \frac{x-3}{2}/x + \int\limits_3^6 1/x\,.$$

2. *Объединение множеств* A *и* B.

Воспользуемся формулой $A \cup B = \int\limits_U \max(\mu_A(u), \mu_B(u))/u$.

График функции принадлежности $\mu_{A\cup B}$ в соответствии с этой формулой имеет вид, представленный на рис. 1.13.

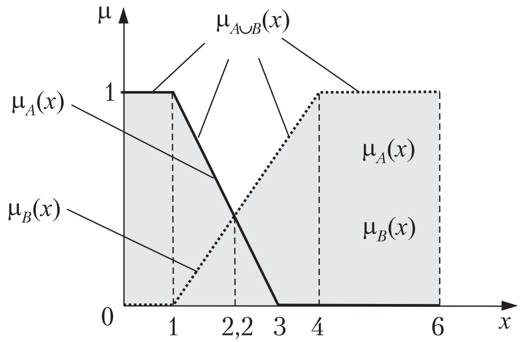


Рис. 1.13. Функция принадлежности $\mu_{A\cup B}$

Найдем функцию принадлежности объединения множеств A и B:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}\max(1,0)=1, & \text{если}\quad 0\le x<1\\ \max\left(\dfrac{x-1}{3},\dfrac{3-x}{2}\right)=\dfrac{3-x}{2}, & \text{если}\quad 1\le x<2{,}2\\ \max\left(\dfrac{x-1}{3},\dfrac{3-x}{2}\right)=\dfrac{x-1}{3}, & \text{если}\quad 2{,}2\le x<4\\ \max(1,0)=1, & \text{если}\quad 4\le x\le 6\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{если}\quad 0\le x<1;\\ \dfrac{3-x}{2}, & \text{если}\quad 1\le x<2{,}2;\\ \dfrac{x-1}{3}, & \text{если}\quad 2{,}2\le x<4;\\ 1, & \text{если}\quad 4\le x\le 6.\end{cases}$$

Окончательно получаем

$$A\cup B=\int_0^1 1/x+\int_1^{2,2}\frac{3-x}{2}/x+\int_{2,2}^4\frac{x-1}{3}/x+\int_4^6 1/x\,.$$

3. *Пересечение множеств A и* $\overline{B}$.

Воспользуемся формулой

$$A\cap B=\int_U \min(\mu_A(u),\mu_B(u))/u\,.$$

График функции принадлежности $\mu_{A \cap \overline{B}}(x)$ представлен на рис. 1.14. Обратим внимание на то, что $A \subseteq \overline{B}$, так как $\mu_A(x) \leq$ $\leq \mu_{\overline{B}}(x)$, $(x \in [0,6])$.

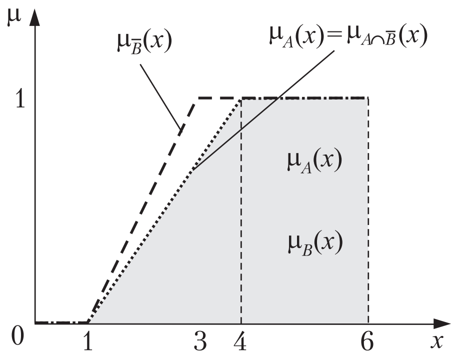


Рис. 1.14. Функция принадлежности $\mu_{A \cap \overline{B}}(x)$

Найдем функцию принадлежности пересечения множеств A и B. Окончательно получаем $A \subseteq \overline{B}$, $\mu_A(x) = \mu_{A \cap \overline{B}}(x)$ и $A \cap \overline{B} = A$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Вывод о том, что $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$, носит общий характер и справедлив как для нечетких, так и для обычных множеств.

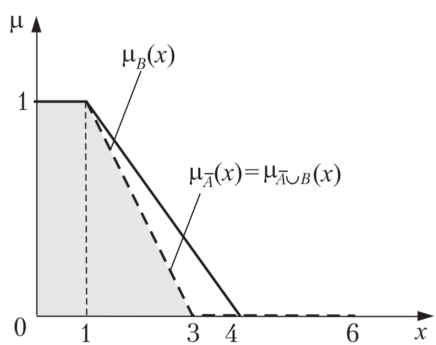


Рис. 1.15. Функция принадлежности $\mu_{\overline{A} \cup B}(x)$

4. *Объединение множеств* $\overline{A}$ *и* B.

   График функции принадлежности $\mu_{\overline{A}\cup B}$ показан на рис. 1.15. Обратим внимание на то, что $B \subseteq \overline{A}$, так как $\mu_B(x) \le \mu_{\overline{A}}(x)$, $(x \in [0,6])$.

   Найдем функцию принадлежности объединения множеств $\overline{A}$ и B.

$$\mu_{\overline{A}\cup B}(x) = \begin{cases} \max(1,1) = 1, & \text{если} \quad 0 \le x < 1 \\ \max\left(\dfrac{4-x}{3}, \dfrac{3-x}{2}\right) = \dfrac{4-x}{3}, & \text{если} \quad 1 \le x < 3 \\ \max\left(\dfrac{4-x}{3}, 0\right) = \dfrac{4-x}{3}, & \text{если} \quad 3 \le x < 4 \\ \max(0, 01) = 1, & \text{если} \quad 4 \le x \le 6 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{4-x}{3}, & \text{если} \quad 1 \le x \le 4 \\ 0, & \text{если} \quad 4 < x \le 6 \end{cases} = \quad \mu_{A}(x).$$

   Окончательно получаем, $B \subseteq \overline{A}$, $\mu_B(x) \le \mu_{\overline{A}}(x)$ и $\overline{A} \cap B = \overline{A}$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Вывод о том, что $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$, носит общий характер и справедлив как для нечетких, так и для обычных множеств.

Пусть $\mathfrak{I}$ — множество всех подмножеств (обычных и нечетких), заданных на универсальном множестве U. Пусть также U ($\overline{U} \subset \subset \mathfrak{I}$) — множество всех обычных подмножеств U. Любое обычное множество можно рассматривать как нечеткое, функцией принадлежности которого является его характеристическая функция. Если выполнять операции объединения, пересечения и дополнения в $\overline{U}$, то и результат этих операций не выйдет за пределы $\overline{U}$. Большинство свойств операций, выполняемых в $\overline{U}$, присущи этим операциям и во всем множестве $\mathfrak{I}$. Свойства операций объединения, пересечения над обычными и нечеткими множествами и дополнения в $\mathfrak{I}$ приведены в табл. 1.6.

Таблица 1.6. Свойства операций пересечения, объединения и дополнения над обычными и нечеткими множествами

Операция	**Свойство**	
	пересечения	**объединения**
Коммутативность	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Ассоциативность	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Дистрибутивность	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения)
Свойство нуля	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
Свойство единицы	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Идемпотентность	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Свойство поглощения	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Законы де Моргана	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Свойство порядка	$A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$	$A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$

Покажем справедливость некоторых свойств, приведенных в табл. 1.6, для нечетких множеств.

Поглощение $A \cap (A \cup B) = A$. Поскольку A и B определены на одном и том же универсальном множестве U, равенство будет верным, если для любого $x \in U$ справедливо $\mu_{A \cap (A \cup B)}(x) = \mu_A(x)$.

Покажем справедливость этого равенства.

$$\mu_{A \cap (A \cup B)}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{A \cup B}(x) = \min(\mu_A(x), \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) =$$

$$= \begin{cases} \min(\mu_A(x), \mu_A(x)) = \mu_A(x), & \text{если} \quad \mu_A(x) \geq \mu_B(x); \\ \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x), & \text{если} \quad \mu_A(x) < \mu_B(x). \end{cases}$$

Таким образом, какое бы из двух возможных соотношений, $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ или $\mu_A(x) < \mu_B(x)$, ни выполнялось, $\mu_{A \cap (A \cup B)}(x) = \mu_A(x)$.

Равенство доказано.

Закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Покажем справедливость равенства $\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = \mu_{\overline{A} \cap \overline{B}}$ (для любого $x \in U$):

$$\mu_{\overline{A \cup B}}(x) = 1 - \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} 1 - \mu_A(x), & \text{если} \quad \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \\ 1 - \mu_B(x), & \text{если} \quad \mu_A(x) < \mu_B(x) \end{cases} =$$

$$=\begin{cases}\mu_{\bar{A}}(x), & \text{если} \quad 1-\mu_A(x)\le 1-\mu_B(x)\\ \mu_{\bar{B}}(x), & \text{если} \quad 1-\mu_A(x)> 1-\mu_B(x)\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\mu_{\bar{A}}(x), & \text{если} \quad \mu_{\bar{A}}(x)\le \mu_{\bar{B}}(x)\\ \mu_{\bar{B}}(x), & \text{если} \quad \mu_{\bar{A}}(x)> \mu_{\bar{B}}(x)\end{cases}=\min(\mu_{\bar{A}}(x),\mu_{\bar{B}}(x))=\mu_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x).$$

В цепочке равенств использованы простейшие свойства числовых неравенств: $a\ge b\Rightarrow 1-a\le 1-b$, $a<b\Rightarrow 1-a>1-b$.

Аналогично доказываются и остальные свойства операций, приведенных в табл. 1.6.

Для нечетких множеств не действуют два закона, имеющих большое значение как в теории множеств, так и в логике. В логике эти законы называют ***законом исключения третьего*** ($A \cup \bar{A} = U$) и ***законом противоречия*** ($A\cap \bar{A} = \varnothing$).

Именно нарушение этих законов и определяет своеобразие теории нечетких множеств. Если для обычных множеств и обычной логики может быть справедливым только либо *A*, либо *неA* = , то для нечетких множеств и логики имеют право на существование и другие варианты. Если в теории обычных множеств и обычной логики *A* и *неA* = полностью исключают друг друга, то для нечетких множеств и логики они могут существовать совместно.

Подтвердим сказанное примером. Пусть U = {1, 2, 3, 4, 5}, A = = 0,3/1 + 0,5/2 + 0,7/3 + j + 0/5. Тогда $\bar{A}$ = (1 – 0,3)/1 + (1 – 0,5)/2 + + (1 – 0,7)/3 + (1 – 1)/4 + (1 – 0)/5 = 0,7/1 + 0,5/2 + 0,3/3 + 0/4 + + 1/5.

Найдем $A \cup \bar{A}$, $A \cap \bar{A}$ и покажем, что равенства $A \cup \bar{A} = U$ и $A \cap \bar{A} = \varnothing$ нарушены.

$$A\cup\bar{A}=\max(0{,}3;0{,}7)/1+\max(0{,}5;0{,}5)/2+\max(0{,}7;0{,}3)/3+$$
$$+\max(1{,}0)/4+\max(0{,}1)/5=$$
$$=0{,}7/1+0{,}5/2+0{,}7/3+1{,}0/4+1/5\ne U,$$

$$A\cap\bar{A}=\min(0{,}3;0{,}7)/1+\min(0{,}5;0{,}5)/2+\min(0{,}7;0{,}3)/3+$$
$$+\min(1{,}0)/4+\min(0{,}1)/5=$$
$$=0{,}3/1+0{,}5/2+0{,}3/3+0/4+0/5=0{,}3/1+0{,}5/2+0{,}3/3\ne\varnothing.$$

Множество с двумя бинарными операциями, которые обладают свойствами идемпотентности, коммутативности, ассоциативности и поглощения, в общей алгебре называют ***решеткой*** [1]. В общем случае решеточные операции называют ***решеточным пересечением*** и ***решеточным объединением***. Используются обозначения: $\{P, \wedge, \vee\}$ — решетка, P — множество, $\wedge$ — знак решеточного пересечения, $\vee$ — знак решеточного объединения.

Множество $\Im$ всех подмножеств (обычных и нечетких), заданных на универсальном множестве U, с операциями пересечения ($\cap$) и объединения ($\cup$) (см. табл. 1.5) образует решетку, так как эти операции обладают четырьмя необходимыми свойствами (см. табл. 1.6).

Кроме решетки $\{\Im, \cap, \cup\}$ на множестве $\Im$ могут быть заданы и другие решетки, в которых решеточное объединение и решеточное пересечение определены по-иному [13,16]. Определить различными способами решеточное пересечение и решеточное объединение позволяют так называемые T-нормы (триангулярные нормы) и T-конормы. Приведем формулы для наиболее типичных T-норм и соответствующих им T-конорм (табл. 1.7).

Таблица 1.7. Типичные T-нормы и T-конормы

Типичные *T*-нормы	**Соответствующие *T*-конормы**
Логическое произведение $T_M(x,y)=\min(x,y)$	Операция максимум $S_M(x,y)=\max(x,y)$
Алгебраическое произведение $T_P(x,y)=x\cdot y$	Вероятностная сумма $S_P(x,y)=x+y-x\cdot y$
Граничное произведение $T_L(x,y)=\max(x+y-1,0)$	Граничная сумма $S_L(x,y)=\min(x+y,1)$
Слабая T-норма $T_W(x,y)=\begin{cases} y, & \text{если } x=1 \\ x, & \text{если } y=1 \\ 0, & \text{во всех других случаях} \end{cases}$	Сильная T-конорма $S_W(x,y)=\begin{cases} y, & \text{если } x=0 \\ x, & \text{если } y=0 \\ 1, & \text{во всех других случаях} \end{cases}$

Пусть $A=\sum\limits_U \mu_A(u_i)/u_i$ и $B=\sum\limits_U \mu_B(u_i)/u_i, (u_i \in U)$. Используя различные типы T-норм и T-конорм (см. табл. 1.7), получаем следующие виды операций пересечения ($\wedge$) и соответствующего объединения ($\vee$) на множестве $\Im$:

1) $A \wedge B = \sum\limits_U T_M(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))/u_i$,

$A \vee B = \sum\limits_U S_M(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i))/u_i$;

2) $A \wedge B = \sum_U T_P(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)) / u_i$, $A \vee B = \sum_U S_P(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)) / u_i$;

3) $A \wedge B = \sum_U T_L(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)) / u_i$, $A \vee B = \sum_U S_L(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)) / u_i$;

4) $A \wedge B = \sum_U T_W(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)) / u_i$,

$A \vee B = \sum_U S_W(\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)) / u_i$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Первый вид операций пересечения и объединения, определенный через логическое умножение и операцию максимум (см. табл. 1.7), есть операции пересечения и объединения обычных и нечетких множеств, определенные ранее (см. табл. 1.5).

Можно проверить, что какие бы T–нормы и соответствующие T–конормы ни были использованы в определениях операций пересечения ($\wedge$) и объединения ($\vee$), множество $\{\Im, \wedge, \vee\}$ сохранит структуру решетки. Иными словами, каким бы из перечисленных выше способов ни были определены пересечения и объединения нечетких множеств, все утверждения, которые справедливы для решеток, будут справедливы и для множества $\{\Im, \wedge, \vee\}$.

В теории нечетких множеств в качестве триангулярных норм наиболее часто используются логическое и алгебраическое произведения. Если операция пересечения определена через логическое произведение, то она является ***жесткой*** в том смысле, что в ней недостаточно учитываются функции принадлежности обоих множеств. В противоположность этому операция пересечения, определенная через алгебраическое произведение, является ***мягкой***. Как определить пересечение, зависит от смысла, вкладываемого в эту операцию в конкретной задаче.

Кроме операций пересечения, объединения и дополнения над нечеткими множествами можно определить и другие операции:

1. *Умножение*

$$AB = \sum_{u_i \in U} \mu_A(u_i) \cdot \mu_B(u_i) / u_i \text{ или } AB = \int_U \mu_A(u) \cdot \mu_B(u) / u .$$

Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — обычные множества (A, $B \in \overline{U}$), то операция умножения и операция пересечения есть одна и та же операция (см.

табл. 1.5). Если же ***A*** и ***B*** — два нечетких множества, эта операция является операцией пересечения с T_P-нормой и результат такой операции не совпадает с результатом операции пересечения, определенным по T_M-норме. Частным случаем операции умножения является операция умножения на число.

2. *Умножение на число*

$$a \cdot A = \sum_{u_i \in U} a \cdot \mu_A(u_i) / u_i \text{ или } a \cdot A = \int_U a \cdot \mu_A(u) / u \text{ при условии}$$

$$a \cdot \sup_u \mu_A(u) \le 1 .$$

Умножение множества на число имеет аналоги в линейной алгебре. Можно говорить о ***выпуклой комбинации нечетких множеств*** $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$A = \sum_U \mu_A(u_i) / u_i \ ,$$

где $\mu_A(u) = w_1\, \mu_{A1}(u) + w_2\, \mu_{A2}(u) + ... + w_n\, \mu_{An}(u)$, $w_1, w_2, ..., w_{\mathrm{n}}$, — числовые коэффициенты линейной комбинации, $0 \le w_i \le 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $\mu_1(u) + \mu_2(u) + ... + \mu_n(u) \le 1$, $0 \le \mu_i(u) \le 1$ $(u \in U, i = 1, 2, ..., n)$.

Понятие выпуклой линейной комбинации нечетких множеств оказывается полезным при описании таких лингвистических неопределенностей, как «существенно», «типично» и т. п.

3. *Возведение в целую неотрицательную степень*

$$A^a = \sum_U \left(\mu_A(u)\right)^a / u \text{ или } A^a = \int_U \left(\mu_A(u)\right)^a / u \text{, где } a \in N \quad (1.10)$$

Если $a \in R_+$, то формула (1.10) определяет операцию ***возведения нечеткого множества в степень***. Частными случаями этой операции являются операция концентрирования и операция растяжения, рассмотренные в подразделе 1.5 (см. формулы (1.7) и (1.8)).

На множестве $\Im$ используется ***оператор нечеткости*** *K*, который служит для преобразования обычных множеств в нечеткие и для увеличения нечеткости нечетких множеств. В случае дискретного универсального множества *U* задать такой оператор можно в виде матрицы, определяющей результат его действия на каждый элемент множества *U*.

Пусть, к примеру, $U = \{1, 2, 3, 4\}$ — универсальное множество. На $\Im_u$ задан оператор увеличения нечеткости

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix}.$$

Действие оператора K на какое-либо множество A

$$A = \mu_A(1)/1 + \mu_A(2)/2 + \mu_A(3)/3 + \mu_A(4)/4$$

из $\Im_u$ заключается в следующем.

Элемент $\mu_A(1)/1$ преобразуется в нечеткое множество A_1:

$$\mu_A(1)/1 \to A_1 = \mu_A(1)\cdot k_{11}/1 + \mu_A(1)\cdot k_{21}/2 + \mu_A(1)\cdot k_{31}/3 + \mu_A(1)\cdot k_{41}/4 = \sum_{i=1}^{4}\mu_A(1)\cdot k_{i1}/i.$$

Аналогично

$$\mu_A(2)/2 \to A_2 = \mu_A(2)\cdot k_{12}/1 + \mu_A(2)\cdot k_{22}/2 + \mu_A(2)\cdot k_{32}/3 + \mu_A(2)\cdot k_{42}/4 = \sum_{i=1}^{4}\mu_A(2)\cdot k_{i2}/i;$$

$$\mu_A(3)/3 \to A_3 = \mu_A(3)\cdot k_{13}/1 + \mu_A(3)\cdot k_{23}/2 + \mu_A(3)\cdot k_{33}/3 + \mu_A(3)\cdot k_{43}/4 = \sum_{i=1}^{4}\mu_A(3)\cdot k_{i3}/i;$$

$$\mu_A(4)/4 \to A_4 = \mu_A(4)\cdot k_{14}/1 + \mu_A(4)\cdot k_{24}/2 + \mu_A(4)\cdot k_{34}/3 + \mu_A(4)\cdot k_{44}/4 = \sum_{i=1}^{4}\mu_A(4)\cdot k_{i4}/i.$$

Обратим внимание на то, что единице в каждом из множеств A_1, A_2, A_3 и A_4 соответствует произведение первой строки матрицы K на столбец $(\mu_A(1), \mu_A(2), \mu_A(3), \mu_A(4))^{\mathrm{T}}$, двойке — произведение второй строки K и т. д.

Затем множества A_1, A_2, A_3 и A_4, объединяются по какому-либо из правил объединения нечетких множеств, например, по правилу логической конормы $S_M(x, y) = \max(x, y)$:

$$KA = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 =$$
$$= \sum_{i=1}^{4}\mu_A(1)\cdot k_{i1}/i + \sum_{i=1}^{4}\mu_A(2)\cdot k_{i2}/i + \sum_{i=1}^{4}\mu_A(3)\cdot k_{i3}/i + \sum_{i=1}^{4}\mu_A(4)\cdot k_{i4}/i =$$
$$= \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}(\mu_A(j)\cdot k_{ij})/i = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(\mu_A(j)\cdot k_{ij})/i.$$

(Последнее равенство справедливо, поскольку объединение нечетких множеств коммутативно и ассоциативно.)

Таким образом, если $A \in \Im$ — множество (обычное или нечеткое), $U = \{u_1, u_2, ..., u_3\}$ — универсальное множество и K — оператор нечеткости, действующий в $\Im$, то результат действия оператора K на множество A есть нечеткое множество $KA \in \Im$, причем $\mu_{KA} = \sum_U \mu_B(u_i) / u_i$:

$$KA = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} k_{ij} \mu_A(u_j) / u_i \tag{1.11}$$

Рассмотрим пример выполнения действий с оператором нечеткости. Пусть $U = \{a, b, c\}$,

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix},\ A = \{a, c\},\ B = 0{,}3/a + 0{,}7/b + 0{,}9/c,\ C = 0{,}5/a +$$

$$+ 0{,}5/b + 0{,}5/c.$$

Найдем множества KA, KB и KC:

$$KA = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \max(0{,}3; 1) / a + 0{,}7 / b + \max(0{,}8; 0{,}5) / c =$$

$$= 1 / a + 0{,}7 / b + 0{,}8 / c;$$

$$KB = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \\ 0{,}9 \end{pmatrix} = \max(0{,}09; 0{,}49; 0{,}9) / a +$$

$$+ \max(0{,}21; 0{,}35) / b + \max(0{,}24; 0{,}42; 0{,}45) / c =$$
$$= 0{,}9 / a + 0{,}35 / b + 0{,}42 / c.$$

$$KC = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = 0{,}5 / a + 0{,}35 / b + 0{,}4 / c.$$

ПРИМЕЧАНИЕ

Обратим внимание на то, что индекс нечеткости $J_{KC} = \frac{2}{3}\left(|0{,}5 - 0| + |0{,}35 - 0| + |0{,}4 - 0|\right) \approx 0{,}83$ множества KC меньше индекса нечеткости $J_C = \frac{2}{3}\left(|0{,}5 - 0| + |0{,}5 - 0| + |0{,}5 - 0|\right) = 1$ множества C (см. табл. 1.4), т. е. действие оператора K на нечеткое множество не обязательно ведет к увеличени нечеткости последнего.

Операция увеличения нечеткости, введенная Л. Заде [4], играет важную роль при рассмотрении таких лингвистических неопределенностей, как «более или менее», «слегка», «несколько» и т. п.

Еще один пример действий с оператором нечеткости.

Пусть $U = \{2009, 2008, 2007, 2006\}$;

A — «недавно»: $A = \{1/2008, 0{,}8/2007, 0{,}7/2006\}$;

$$K \text{ — «более или менее»: } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем множество KA — «более или менее недавно»:

$$KA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}8 \\ 0{,}7 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/2006 + \max(0{,}9; 0{,}8)/2005 +$$

$$+ \max(0{,}72; 0{,}7)/2004 + 0{,}56/2003 =$$

$$= 1/2006 + 0{,}9/2005 + 0{,}72/2004 + 0{,}56/2003.$$

ПРИМЕЧАНИЕ

Как уже было отмечено выше, действие оператора K на нечеткое множество не обязательно ведет к увеличению нечеткости последнего. В то же время любые обычные множества, функции принадлежности которых состоят из нулей и единиц, превращаются под действием этого оператора в нечеткие множества. Именно с этой точки зрения данный оператор и можно называть оператором увеличения нечеткости.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятие нечеткого множества и сравните его с понятием обычного множества.
2. Что называют носителем нечеткого множества?
3. Дайте определение точки перехода, унимодальной функции принадлежности, нормального и субнормального нечеткого множества.
4. Сформулируйте понятие множества α-уровня и запишите формулу разложения нечеткого множества по множествам уровня.

5. Приведите пример нечеткого множества с дискретным и непрерывным носителем.
6. Сформулируйте аксиомы меры нечеткости.
7. Дайте определение обычного множества, ближайшего к нечеткому.
8. Запишите формулу расстояния между двумя произвольными нечеткими множествами по Хеммингу и Евклиду для дискретного и непрерывного носителя.
9. Запишите основные формулы вычисления индексов нечеткости по Хеммингу и Евклиду для дискретного и непрерывного носителя.
10. Что называют заострением нечеткого множества? Запишите операции растяжения и концентрации.
11. Дайте определение подмножества нечеткого множества.
12. Сформулируйте определение основных операций над нечеткими множествами и проведите их сравнение с аналогичными для четких множеств. Чем они различаются? В чем сходство? Можно ли назвать операции над канторовскими множествами частным случаем соответствующих операций над нечеткими?
13. Единственны ли определения операций дополнения, пересечения и объединения?
14. Сравните свойства операций над обычными и нечеткими множествами. Какие важнейшие логические законы не выполнимы над нечеткими множествами?
15. Дайте определение T-нормы и T-конормы. Для чего введены эти понятия?
16. Если в качестве операций дополнения, пересечения и объединения взять другие определенные T-нормы и T-конормы, можно ли утверждать, что все свойства операций над нечеткими множествами сохранятся?
17. Как определяют операции умножения нечетких множеств, возведения в целую неотрицательную степень, умножения на число?
18. Дайте определение оператора нечеткости. Для чего применяют этот оператор? Каковы границы его применимости?

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть U = {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}. Выступая в роли эксперта запишите в форме (1.2) следующие нечеткие множества: A — начало недели, B — середина недели, C — конец недели, D — не начало, но и не конец недели. Есть ли среди определенных вами функций принадлежности унимодальные?
2. Пусть $U = \{0, 1, 2,... 120\}$ — возможный возраст человека. Выступая в роли эксперта, постройте графики функций принадлежности следующих нечетких множеств: A — молодой, B — старый, C — очень молодой, D — не старый. Запишите эти множества в форме (1.3). Сравните полученные вами графики с графиками ваших коллег. Если есть различия, попытайтесь объяснить причины этих различий.
3. Игра состоит в двукратном подкидывании игрального кубика. На каждую сумму s выпавших очков (от $s = 2$ до $s = 12$) делается ставка, причем сумма всех ставок не превышает 100 усл. ед. Запишите свои ставки на каждое значение s.

   Совпадают ли сделанные вами ставки с вероятностями (в процентах) выпадения соответствующих сумм?

   Рассматривая сделанные вами ставки как функцию принадлежности нечеткого множества B = ожидаемая сумма выпавших очков при двукратном подбрасывании игральной кости, выполните следующие задания:

   1) нормируйте множество B;
   2) запишите B в форме (1.2);
   3) запишите несущее множество;
   4) запишите в виде таблицы ряд распределения вероятностей случайной величины s, дополнив его строкой нормированной функции принадлежности.

   Можно ли рассматривать вероятности $p(s)$ как функцию принадлежности $\mu_B(s)$ нечеткому множеству B? Можно ли, наоборот, рассматривать $\mu_B(s)$ как вероятности соответствующих значений s? Обоснуйте свое суждение.

4. Пусть U — множество дисциплин, изучаемых в текущем семестре. Присвойте номер каждой дисциплине и, выступая в роли эксперта, запишите нечеткие множества:

   A — мне нравится эта дисциплина;

   B — я не понимаю эту дисциплину;

   C — мне не нравится эта дисциплина;

   D — я хотел бы изучать эту дисциплину глубже.

   Представьте разложения каждого из нечетких множеств по множествам уровня.

5. $U = R+\cup\{0\}$ — множество неотрицательных действительных чисел. Заданы функции принадлежности нечетких множеств:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le x \le 5; \\ 0, & \text{если} \quad x > 5; \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-5}{5}}, & \text{если} \quad 5 \le x \le 10; \\ 0, & \text{если} \quad 0 \le x < 5 \quad \text{или} \quad x > 5; \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x < a_1; \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{если} \quad a_1 \le x \le a_2; \\ 1, & \text{если} \quad x > a_2; \end{cases} \quad \mu_D(x) = \frac{1}{1+2x^2}, \qquad 0 \le x < \infty.$$

   Для каждого нечеткого множества требуется:

   1) построить график функции принадлежности;
   2) записать разложение по множествам уровня;
   3) записать приближенное дискретное разложение, разбив отрезок [0, 1] на пять частей.

6. Пусть U — цены автомобилей, $4 \le u \le 5000$ (усл. ед.).

   1) выступая в роли эксперта, постройте графики функций принадлежности следующих нечетких множеств:

      A — цены автомобилей для среднего класса,

      B — цены автомобилей для богатых людей,

      C — цены автомобилей для небогатых людей;

2) для каждой кривой найдите подходящую формулу и запишите функции принадлежности аналитически (при выполнении задания воспользуйтесь табл. 1.1 и 1.2;
3) запишите разложение по множествам уровня каждого из нечетких множеств;
4) запишите приближенное дискретное разложение, разбив отрезок [0, 1] на десять равных частей.

7. Даны нечеткие множества:

$$A = 0{,}4/5 + 0{,}7/6 + 1/7 + 0{,}8/8 + 0{,}6/9 \text{ и}$$

$$B = 0{,}8/1 + \mathrm{S} + 0{,}8/3 + 0{,}5/4.$$

Требуется:

1) записать множества $CON(A)$, $DIL(A)$, $CON(B)$, $DIL(B)$;
2) сделать два чертежа: на одном изобразить множества A, $CON(A)$, $DIL(A)$, на втором — множества B, $CON(B)$, $DIL(B)$;
3) вычислить индексы нечеткости по метрике Хемминга для всех шести множеств;
4) вычислить индексы нечеткости по евклидовой метрике для всех шести множеств;
5) сравнить степень нечеткости множества A со степенью нечеткости множеств $CON(A)$, $DIL(A)$, а также множества B с множествами $CON(B)$, $DIL(B)$.

8. A — нечеткое множество, заданное на $U = R{+}\cup\{0\}$, с функцией принадлежности $\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}(x-1)), & \text{если} \quad x \le 2; \\ 0, & \text{если} \quad 2 > x \end{cases}$ (см. табл. 1.1). Требуется:

1) записать множества $CON(A)$ и $DIL(A)$;
2) построить графики функций принадлежности множеств A, $CON(A)$, $DIL(A)$;
3) вычислить индексы нечеткости по метрике Хемминга для всех трех множеств;
4) сравнить степень нечеткости множества A со степенью нечеткости множеств $CON(A)$, $DIL(A)$.

9. Докажите, что для любого нечеткого множества A справедливы утверждения: $CON(A) \subseteq A \subseteq DIL(A)$.

10. На универсальном множестве $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ заданы нечеткие множества

$$A = 0{,}3/b + 0{,}7/c + 1/d + 0{,}2/f + 0{,}6/g;$$
$$B = 0{,}3/a + 1/b + 0{,}5/c + 0{,}8/d + 1/e + 0{,}5/f + 0{,}6/g;$$
$$C = 1/a + 0{,}5/b + 0{,}2/d + 0{,}2/f + 0{,}9/g.$$

Требуется:

1) найти множества:

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $(A \cup \overline{B}) \cap C$, $\overline{(A \cap B)} \cap \overline{C}$, $(A \cap \overline{A}) \cdot (B \cap \overline{B})$

и дать геометрическую интерпретацию выполненных операций;

2) найти множества: $0{,}8A^2 \cup 0{,}5B^2 \cup 0{,}3C^2$, $0{,}6(A \cdot B) \cap C^2$;

3) найти множества: $A \wedge B$, $B \vee C$, $(A \vee C) \wedge B$, $(A \wedge B) \vee \vee (A \wedge C)$, если операции решеточных пересечения и объединения определены по правилам:

а) граничного произведения и граничной суммы;

б) слабой T-нормы и сильной T-конормы.

11. На универсальном множестве $U = [0, 3]$ заданы нечеткие множества $A = \int_U \frac{u^2}{9} / u$ и $B = \int_U \frac{(u-3)^2}{9} / u$.

Требуется:

1) построить графики функций принадлежности множеств A и B;

2) записать множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $(A \cap \overline{A}) \cdot (B \cap \overline{B})$ и построить графики их функций принадлежности.

12. Пусть $U = \{a, b, c, d, e\}$ — множество молодых людей. На U задано нечеткое множество A:

A = *молодой человек хорошо владеет компьютером,*

$$A = 0{,}8/a + 0{,}6/c + 0{,}9/d + 1/e.$$

Требуется:

1) используя операции концентрирования и растяжения, записать множества:

$$B = CON(A) = \textit{молодой человек очень хорошо владеет компьютером;}$$

$$C = DIL(A) = \textit{молодой человек не слишком хорошо владеет компьютером;}$$

2) записать множество C, используя оператор увеличения нечеткости:

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}7 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Нечеткие числа

2.1. Определение нечеткого числа

Рассмотрим простейшую задачу. В студенческой столовой чай стоит примерно 7 руб., пирожок — примерно 10 руб. Сколько денег приближенно будет стоить такой завтрак?

В задаче использованы два нечетких числа: $a = \{$*примерно 7*$\}$, $b = \{$*примерно 10*$\}$. Надо найти их сумму: $a + b = \{$*примерно 7 + примерно 10*$\}$. Нечеткие числа a и b можно рассматривать как нечеткие множества A и B, заданные экспертом (в данном случае студентом). Пусть они имеют вид

$$A = 0{,}3/5 + 0{,}8/6 + 1/7 + 0{,}7/8,\ B = 0{,}7/9 + 1/10 + 0{,}6/11 + 0{,}8/12.$$

Сумма $a + b$ также будет нечетким множеством, носитель которого состоит из всевозможных сумм чисел, входящих в несущие множества $U_a = \{5, 6, 7, 8\}$ и $U_b = \{9, 10, 11, 12\}$: $U_{a+b} = \{5+9{,}5 + 10,..., 8 + 12\} = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$. Встает вопрос: как по известным функциям принадлежностей a и b найти функцию принадлежности $a + b$?

Применим следующий подход. Каждой паре слагаемых (a_i, b_j) поставим в соответствие минимальное из чисел μ_{ai} и μ_{bj}: $\mu_{ai+bj} = \min(\mu_{ai}, \mu)$, а затем объединим полученные одноточечные нечеткие множества $\mu_{ai+bj}/(a_i + b_j)$ по правилу логической T-конормы. Эти действия удобно оформить в виде таблицы, в клетке (i, j) которой, т. е. в клетке, стоящей на пересечении i-й строки и j-го столбца, записано одноточечное множество $\mu_{a_i+b_j}/(a_i+b_j) = \min(\mu_{a_i}, \mu_{b_j})/(a_i+b_j)$:

	μ_{ai}/a			
μ_{bj}/b_j	0,3/5	0,8/6	1/7	0,7/8
0,7/9	0,3/14	**0,7/15**	0,7/16	0,7/17
1/10	**0,3/15**	0,8/16	1/17	0,7/18
0,6/11	0,3/16	06/17	0,6/18	0,7/19
0,8/12	0,3/17	0,8/18	0,8/19	0,7/20

Далее клетки, в которых $a_i + b_j$ имеют равное значение, например такие, как выделенные полужирным шрифтом, объединим одноточечные множества, попавшие в клетки с одинаковой раскраской. Получим

$$a+b=0{,}3\,/\,14+\max(0{,}3;0{,}7)\,/\,15+$$
$$+\max(0{,}7;0{,}8;0{,}3)\,/\,16+\max(0{,}7;0{,}6;0{,}3)\,/\,17+$$
$$+\max(0{,}7;0{,}6;0{,}8)\,/\,18+\max(0{,}7;0{,}8)\,/\,19+0{,}7\,/\,20=$$
$$=0{,}3\,/\,14+0{,}7\,/\,15+0{,}8\,/\,16+1\,/\,17+0{,}8\,/\,18+0{,}8\,/\,19+0{,}7\,/\,20\,.$$

В рассмотренной задаче нечеткие числа были натуральными. Обобщим понятие нечеткого числа на множество всех действительных чисел.

Определение 2.1. ***Нечетким числом*** a называют нечеткое подмножество A множества действительных чисел R.

Множество R является универсальным множеством, его промежуток $[a_1, a_2]$ (отрезок или интервал) — носителем множества A, на R задана функция принадлежности нечеткого числа $\mu_a(x)$ $\left(x\in R, \mu_a(x)\in[0,1]\right)$, принимающая над (a_1, a_2) положительные значения, а в остальных точках числовой оси равная нулю. Множество всех функций, принимающих значения на отрезке [0,1], будем обозначать символом $\Im(R)$.

Таким образом, множество нечетких чисел — это пара $(R,\Im(R))$, где $\Im(R)$ — множество всех отображений (функций) множества R в отрезок [0,1].

Определение 2.2. Нечеткое число a называют ***нормальным нечетким числом***, если $\max\limits_{x\in R}\mu_a(x)=1$.

Определение 2.3. Нечеткое число a называют ***унимодальным нечетким числом***, если $\mu_a(x)$ достигает своего наибольшего значения либо в единственной точке числовой оси, либо на непрерывном подмножестве числовой оси.

Определение 2.4. Нечеткое число a называют ***выпуклым нечетким числом***, если для любых действительных чисел x, y и z из неравенства $x \le y \le z$ следует неравенство $\mu_a(y) \ge \min\,(\mu_a(x), \mu_a(z))$.

С нечеткими числами можно выполнять те же операции, что и с обычными числами:

1) сравнение;
2) сложение, вычитание;
3) умножение, деление.

Желательно также, чтобы над множеством нечетких чисел были определены основные элементарные функции: степенные, логарифмические, тригонометрические и т. п.

2.2. Алгебраические операции над нечеткими числами

Пусть даны два нечетких числа, a и b, представляющие собой нечеткие множества: $A = \{U_a, \mu_a(x), x \in U_a\}$ и $B = \{U_b, \mu_b(x), x \in U_b\}$, где $U_a \subseteq R$, $U_b \subseteq R$ — носители множеств A и B. При выполнении операций над числами всегда будем пользоваться логическими T-нормой и T-конормой:

$$A \cap B = \int_R \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) / x, \; A \cup B = \int_R \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) / x.$$

Дадим определения арифметических операций над числами a и b.

Определение 2.5. ***Суммой (разностью) нечетких чисел*** a и b называют нечеткое множество $a \pm b = \int\limits_{u=x\pm y} \min(\mu_a(x), \mu_b(y)) / u$.

Определение 2.6. ***Произведением нечетких чисел*** a и b называют нечеткое множество $a \cdot b = \int\limits_{u=x\cdot y} \min(\mu_a(x), \mu_b(y)) / u$.

Определение 2.7. ***Частным нечетких чисел*** a и b называют нечеткое множество $a : b = \int\limits_{u=x:y(y\neq 0)} \min(\mu_a(x), \mu_b(y)) / u$.

Порядок выполнения каждой из этих четырех операций достаточно прост: найти одноточечные нечеткие множества: $\min(\mu_a(a_i), \mu_b(b_j) / \left(a_i * b_j\right)$, а затем объединить их. (Символом «*» обозначена любая из четырех арифметических операций.) Однако практическое выполнение этих действий в общем случае оказывается столь сложным, что приходится резко ограничивать класс функций принадлежности для того, чтобы применять нечеткие числа в математических моделях.

Сравнение нечетких чисел в общем случае также оказывается трудно выполнимым. Отношения «больше», «меньше», «равно» во множестве нечетких чисел определяются через операции ***нечеткий максимум*** и ***нечеткий минимум***.

Определение 2.8. Нечеткое число c называют ***нечетким максимумом*** $c = \max\ (a,b)$ чисел a и b, если функция принадлежности $\mu_c(z)$ этого числа удовлетворяет равенству $\mu_c(z) = \max\limits_{z=\max(x,y)}\left(\min(\mu_a(x), \mu_b(y))\right) \quad (x, y \in R)$.

Определение 2.9. Нечеткое число c называют ***нечетким минимумом*** $c = \min\ (a,b)$ чисел a и b, если функция принадлежности $\mu_c(z)$ этого числа удовлетворяет равенству $\mu_c(z) = \max\limits_{z=\min(x,y)}\left(\min(\mu_a(x), \mu_b(y))\right) \quad (x, y \in R)$.

Определение 2.10. Нечеткое число a ***не больше числа*** b ($a \le b$), если a есть нечеткий минимум чисел a и b: $a = \min\ (a + b)$.

Определение 2.11. Нечеткое число b ***не меньше числа*** a ($b \ge a$), если b есть нечеткий максимум чисел a и b: $b = \max\ (a, b)$.

Рассмотрим пример нахождения нечеткого максимума для чисел $a = \{$*примерно* $7\}$ и $b = \{$*примерно* $10\}$ и если $A = 0{,}3/5 + 1/7 + 0{,}7/8$ и $B = 0{,}7/9 + 1/10 + 0{,}6/11 + 0{,}8/12$. Согласно определению 2.8, нечеткое число c является нечетким максимумом чисел a и b, если функция принадлежности $\mu_c(z)$ этого числа удовлетворяет равенству $\mu_c(z) = \max\limits_{z=\max(x,y)}\left(\min(\mu_a(x),\ \mu_b(y))\right) \quad (x, y \in R)$. Поскольку в данном примере носителями нечетких множеств A и B являются множества $U_A = \{5,\ 7,\ 8\}$ и $U_B = \{9,\ 10,\ 11,\ 12\}$, соответственно нечеткое число $\widetilde{\max}(a, b)$ представляет собой нечеткое множество

$$\widetilde{\max}(a,\ b) = \sum_{j=1}^{4} \max\left(\sum_{i=1}^{3} (\min(\mu_i,\ \mu_j) / \max(a_i,\ b_j)\right).$$

Используя эту формулу, оформим решение в виде табл. 2.1.

Таким образом, $\max(a,\ b) = 0{,}7/9 + 1/10 + 0{,}6/11 + 0{,}8/12 = b$, следовательно, $b > a$.

С помощью аналогичной таблицы легко получить

$$\max(a,\ b) = 0{,}3/5 + 1/7 + 0{,}7/8 = a.$$

Следовательно, $a < b$.

Свойства операций над нечеткими числами значительно отличаются от свойств операций над обычными числами. Сложение и умножение нечетких чисел обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, но дистрибутивность, свойство нуля, свойство единицы, а также антисимметричность неравенства могут быть нарушены.

Таблица 2.1. Алгоритм нахождения нечеткого максимума

μ_j/b_j	μ_i/a_i			$\widetilde{\max}(a,b) =$
	0,3/5	1/7	0,7/8	
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$= \sum_{j=1}^{4} \max\left(\sum_{i=1}^{3} (\min(\mu_i,\ \mu_j) / \max(a_i,\ b_j)\right)$
0,7/9	min(0,3; 0,7) / max(5;9) = = 0,3/9	min(1; 0,7) / max(7; 9) = = 0,7/9	min(0,7; 0,7) / max(8;9) = 0,7/9	$\max\limits_{j=1}$ (0,3; 0,7; 0,7) / max (9; 9; 9) = = 0,7/9
1/10	min(0,3; 1) / max(5; 10) = = 0,3/10	min(1; 1) / max(7; 10) = = 1/10	min(0,7; 1) / max(8;10) = 0,7/10	$\max\limits_{j=2}$ (0,3; 1; 0,7) / max(10; 10; 10) = = 1/10
0,6/11	min(0,3; 0,6) / max(5; 11) = = 0,3/11	min(1;0,6) / max(7; 11) = = 0,6/11	min (0,7; 0,6) / max(8; 11) = 0,6/11	$\max\limits_{j=3}$ (0,3; 0,6; 0,6) / max (11; 11; 11) = = 0,6/11
0,8/12	min (0,3; 8) / max(5; 12) = = 0,3/12	min(1; 0,8) / max(7; 12) = = 0,8/12	min(0,7; 0,8) / max(8;12) = 0,7/12	$\max\limits_{j=4}$ (0,3; 0,8 ; 0,7) / max (12; 12; 12) = = 0,8/12

Существуют нечеткие числа, для которых справедливы утверждения:

1) $a(b+c) \neq a \cdot b + a \cdot c$;

2) $a + (-a) \neq 0$;

3) $a\dfrac{1}{a} \neq 1$;

4) если $a \geq b$, то не всегда $b \leq a$.

Нарушение обычных свойств операций над числами делает выполнение арифметических действий над нечеткими числами с непрерывными носителями и сравнение таких чисел довольно трудной задачей. Рассмотрим правила выполнения алгебраических операций над классом нечетких чисел, в который входят нормальные, унимодальные нечеткие числа, выпуклые слева и справа от точки максимума функции принадлежности.

Рассмотрим пример выполнения операций над числами этого класса. Пусть $a = \{\textit{примерно } 7\}$ и $b = \{\textit{примерно } 10\}$,

$$A = \int\limits_{x\in[4,\ 7]} \frac{x-4}{3} / x + \int\limits_{x\in(7,\ 9]} \frac{9-x}{2} / x,$$

$$B = \int\limits_{x\in[6,\ 10]} \frac{x-6}{4} / x + \int\limits_{x\in(10,\ 15]} \frac{15-x}{5} / x.$$

Графики функций принадлежности нечетких чисел a и b изображены на рис. 2.1.

Носителями нечетких чисел a и b являются отрезки: $U_a = [4,\ 9]$, $U_b = [6,\ 15]$.

Пусть множеством α-уровня числа a является отрезок $[a_1,\ a_2]$ ($4 \leq a_1,\ a_2 \leq 9$). Это означает, что для любого $x (x \in [a_1,\ a_2])$ выполняется неравенство $\mu_a(x) \geq \alpha$. Числа a_1 и a_2 найдем, решив уравнения:

$$\mu_{\uparrow a}(x) = \frac{x-4}{3} = \alpha, \qquad \mu_{\downarrow a}(x) = \frac{9-x}{2} = \alpha,$$

$$x = a_1 = \mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \qquad x = a_2 = \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha),$$

$$a_1 = 4 + 3\alpha, \qquad a_2 = 9 - 2\alpha,$$

где $\mu_{\uparrow a}(x) = \dfrac{x-4}{3}$ — функция принадлежности числа a на интервале ее возрастания $x \in [4,\ 7]$, $\mu_{\downarrow a}(x) = \dfrac{9-x}{2}$ — функция принадлежности числа a на интервале убывания $x \in [7, 9]$.

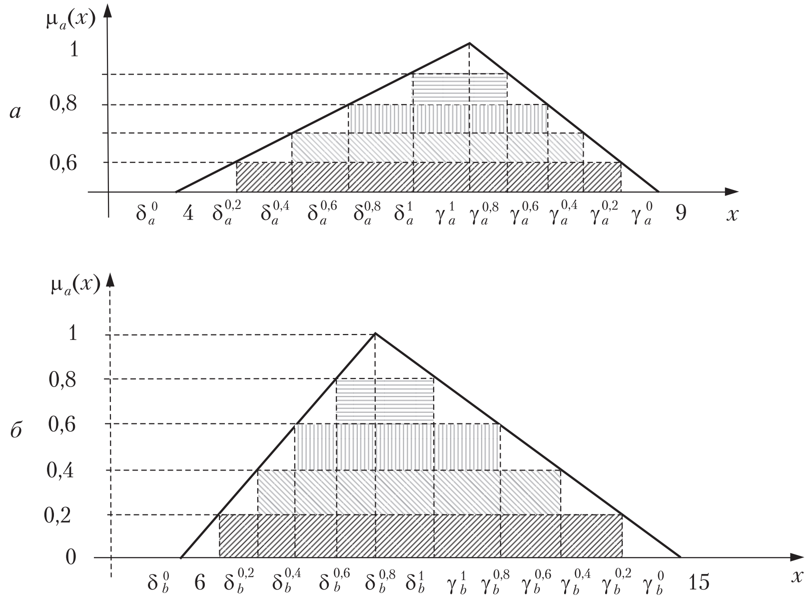


Рис. 2.1. График функции принадлежности нечеткого числа:
а — $a = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[4+3\alpha, 9-2\alpha]$ и множества уровня $\left[\delta_a^\alpha, \gamma_a^\alpha\right]$

($\alpha = 0,\ 0{,}2,\ 0{,}4,\ 0{,}6,\ 0{,}8,\ 1$) этого числа;

б — $b = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha/[6+4\alpha, 15-5\alpha]$ и множества уровня $\left[\delta_b^\alpha, \gamma_b^\alpha\right]$

($\alpha = 0,\ 0{,}2,\ 0{,}4,\ 0{,}6,\ 0{,}8,\ 1$) этого числа

Обозначим $\mu_{\uparrow a}(x) = y_1$ и $\mu_{\downarrow a}(x) = y_2$ и разрешим равенства относительно x. В результате получим функции

$$\mu_{\uparrow a}^{-1}(y_1) = x_1 = 4 + 3y_1 \text{ и } \mu_{\downarrow a}^{-1}(y_2) = x_2 = 9 - 2y_2,$$

обратные функциям $\mu_{\uparrow a}(x) = \dfrac{x-4}{3}$ и $\mu_{\downarrow a}(x) = \dfrac{9-x}{2}$.

Интервал

$$[a_1, a_2] = [\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)] = [4 + 3\alpha, 9 - 2\alpha]$$

является *множеством* α*-уровня числа* a, поскольку для всех x этого интервала выполняется неравенство

$$\mu_a(x) \geq \alpha \qquad (x \in [4 + 3\alpha, 9 - 2\alpha]).$$

Разложение числа a по множествам α-уровня имеет вид

$$a = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)] = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [4+3\alpha, 9-2\alpha].$$

Напомним, что символ $\int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)]$ означает *объединение* всех нечетких множеств, носителями которых являются интервалы вида $[\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)]$, а функция принадлежности на каждом из этих интервалов принимает значение α.

Выполнив аналогичные преобразования, получим разложение по множествам α-уровня числа b:

$$b = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [\mu_{\uparrow b}^{-1}(\alpha), \mu_{\downarrow b}^{-1}(\alpha)] = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [6+4\alpha, 15-5\alpha].$$

Обозначим $\mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha) = \delta_a^\alpha$, $\mu_{\uparrow b}^{-1}(\alpha) = \delta_b^\alpha$, $\mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha) = \gamma_a^\alpha$, $\mu_{\downarrow b}^{-1}(\alpha) = \gamma_b^\alpha$;

$$x \in [\delta_a^\alpha, \gamma_a^\alpha] \Rightarrow x = x_\alpha; \; x \in [\delta_b^\alpha, \gamma_b^\alpha] \Rightarrow x = y_\alpha.$$

Разложение по множествам α-уровням нечетких чисел a и b показано на рис. 2.1.

Учитывая простейшие свойства числовых неравенств, получаем множества α-уровня:

1) для суммы:

$$\begin{array}{ll} \delta_a^\alpha \le x_\alpha \le \gamma_a^\alpha & \\ \delta_b^\alpha \le y_\alpha \le \gamma_b^\alpha & \Rightarrow \alpha/(a+b) = \alpha/[\delta_a^\alpha + \delta_b^\alpha, \gamma_a^\alpha + \gamma_b^\alpha]; \\ \delta_a^\alpha + \delta_b^\alpha \le x_\alpha + y_\alpha \le \gamma_a^\alpha + \gamma_b^\alpha & \end{array}$$

2) разности:

$$\begin{array}{ll} \delta_a^\alpha \le x_\alpha \le \gamma_a^\alpha & \\ -\gamma_b^\alpha \le -y_\alpha \le -\delta_b^\alpha & \Rightarrow \alpha/(a-b) = \alpha/[\delta_a^\alpha - \gamma_b^\alpha, \gamma_a^\alpha - \delta_b^\alpha]; \\ \delta_a^\alpha - \gamma_b^\alpha \le x_\alpha - y_\alpha \le \gamma_a^\alpha - \delta_b^\alpha & \end{array}$$

3) произведения:

$$\begin{array}{ll} 0 \le \delta_a^\alpha \le x_\alpha \le \gamma_a^\alpha & \\ 0 \le \delta_b^\alpha \le y_\alpha \le \gamma_b^\alpha & \Rightarrow \alpha/(a \cdot b) = \alpha/[\delta_a^\alpha \cdot \delta_b^\alpha, \gamma_a^\alpha \cdot \gamma_b^\alpha] \\ \delta_a^\alpha \cdot \delta_b^\alpha \le x_\alpha \cdot y_\alpha \le \gamma_a^\alpha \cdot \gamma_b^\alpha & \end{array}$$

$$(\delta_a^\alpha \ge 0, \; \delta_b^\alpha \ge 0);$$

4) частного:

$$0 \le \delta_a^\alpha \le x_\alpha \le \gamma_a^\alpha$$
$$0 < \frac{1}{\gamma_b^\alpha} \le \frac{1}{y_\alpha} \le \frac{1}{\delta_b^\alpha} \quad \Rightarrow \alpha / \left(\frac{a}{b}\right) = \alpha / \left[\frac{\delta_a^\alpha}{\gamma_b^\alpha}, \frac{\gamma_a^\alpha}{\delta_b^\alpha}\right] \qquad (\delta_a^\alpha \ge 0, \quad \delta_b^\alpha > 0);$$
$$\frac{\delta_a^\alpha}{\gamma_b^\alpha} \le \frac{x_\alpha}{y_\alpha} \le \frac{\gamma_a^\alpha}{\delta_b^\alpha}$$

5) для максимума и минимума:

$$\max(\delta_a^\alpha,\ \delta_b^\alpha) \le \max(x_\alpha,\ y_\alpha) \le \max(\gamma_a^\alpha,\ \gamma_b^\alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha / \max(a,\ b) = \alpha / \left[\max(\delta_a^\alpha,\ \delta_b^\alpha), (\max(\gamma_a^\alpha,\ \gamma_b^\alpha)\right];$$
$$\min(\delta_a^\alpha,\ \delta_b^\alpha) \le \min(x_\alpha,\ y_\alpha) \le \min(\gamma_a^\alpha,\ \gamma_b^\alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha / \min(a,\ b) = \alpha / \left[\min(\delta_a^\alpha,\ \delta_b^\alpha), (\gamma_a^\alpha,\ \gamma_b^\alpha)\right].$$

Выполним все арифметические действия над числами a и b из приведенного выше примера:

$$\delta_a^\alpha = 4 + 3\alpha; \quad \gamma_a^\alpha = 9 - 2\alpha; \quad \delta_b^\alpha = 6 + 4\alpha, \quad \gamma_b^\alpha = 15 - 5\alpha;$$

$$a + b = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [4 + 3\alpha + 6 + 4\alpha, 9 - 2\alpha + 15 - 5\alpha] = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [10 + 7\alpha, 24 - 7\alpha];$$
$$a - b = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [4 + 3\alpha - 15 + 5\alpha,\ 9 - 2\alpha - 6 - 4\alpha] = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [-11 + 8\alpha,\ 3 - 6\alpha];$$
$$ab = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [(4 + 3\alpha)(6 + 4\alpha), (9 - 2\alpha)(15 - 5\alpha)] =$$
$$= \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [24 + 34\alpha + 12\alpha^2,\ 135 - 75\alpha + 10\alpha^2];$$
$$\frac{a}{b} = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / \left[\frac{4 + 3\alpha}{15 - 5\alpha}, \frac{9 - 2\alpha}{6 + 4\alpha}\right];$$

$$\max(a,\ b) = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [\max(4 + 3\alpha,\ 6 + 4\alpha), \max(9 - 2\alpha,\ 15 - 5\alpha)] =$$
$$= \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [6 + 4\alpha,\ 15 - 5\alpha] = b;$$

$$\min(a,b) = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha\,/[\min(4+3\alpha,\ 6+4\alpha),\ \min(9-2\alpha,\ 15-5\alpha)] =$$

$$= \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha\,/[4+3\alpha,\ 9-2\alpha] = a.$$

Составим таблицу множеств уровня нечетких чисел a и b для $\alpha \in$ $\in$ {0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1} (табл. 2.2).

Таблица 2.2. Множества уровней нечетких чисел *a* и *b*

α	**0**	**0,2**	**0,4**	**0,6**	**0,8**	**1**
$\left[\delta^{\alpha}_{a+b}, \gamma^{\alpha}_{a+b}\right]$	{10, 24}	$[11,4;\ 22,6]$	$[12,8; 21,2]$	$[14,2; 19,8]$	$[15,6; 18,4]$	{17}
$\left[\delta^{\alpha}_{a-b}, \gamma^{\alpha}_{a-b}\right]$	$[-11,\ 3]$	$[-9,4;\ 1,8]$	$[-7,8; 0,6]$	$[-6,2; -0,6]$	$[-4,6; -1,8]$	{–3}
$\left[\delta^{\alpha}_{a\cdot b}, \gamma^{\alpha}_{a\cdot b}\right]$	$[24,\ 135]$	$[31,28; 120,4]$	$[39,52; 106,6]$	$[48,72; 93,6]$	$[58,88; 81,4]$	{70}
$\left[\delta^{\alpha}_{\frac{a}{b}}, \gamma^{\alpha}_{\frac{a}{b}}\right]$	$\left[\frac{4}{15}, \frac{9}{6}\right]$	$\left[\frac{4,4}{14}, \frac{8,6}{6,8}\right] \approx$ $\approx [0,31; 1,26]$	$\left[\frac{5,2}{13}, \frac{8,2}{7,6}\right] \approx$ $\approx [0,4; 1,08]$	$\left[\frac{5,8}{12}, \frac{7,8}{8,4}\right] \approx$ $\approx [0,48; 0,93]$	$\left[\frac{6,4}{11}, \frac{7,2}{9,2}\right] \approx$ $\approx [0,58; 0,78]$	{0,7}

По данным, приведенным в табл. 2.2, построим графики функций принадлежности суммы, разности, произведения и частного этих нечетких чисел (рис. 2.2).

При разложении по множествам α-уровня нечетких чисел вычислялись значения функций, обратных функциям принадлежности на интервалах возрастания и убывания: $a = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha\,/[\mu^{-1}_{\uparrow a}(\alpha), \mu^{-1}_{\downarrow a}(\alpha)]$.

Напомним, что однозначная обратная функция $f^{-1}(y)$ существует на промежутке $[x_1,\ x_2]$, если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на этом промежутке. Вот почему из множества всех нечетких чисел был выделен класс *нормальных, унимодальных нечетких чисел, выпуклых слева и справа от точки максимума функции принадлежности*.

Пусть

1) $a = \int_{U_a} \mu_a(x)/x$, $b = \int_{U_b} \mu_b(x)/x$;

2) $\mu_a(a_0) = 1 \quad (a_0 \in U_a)$, $\mu_b(b_0) = 1 \quad (b_0 \in U_b)$;

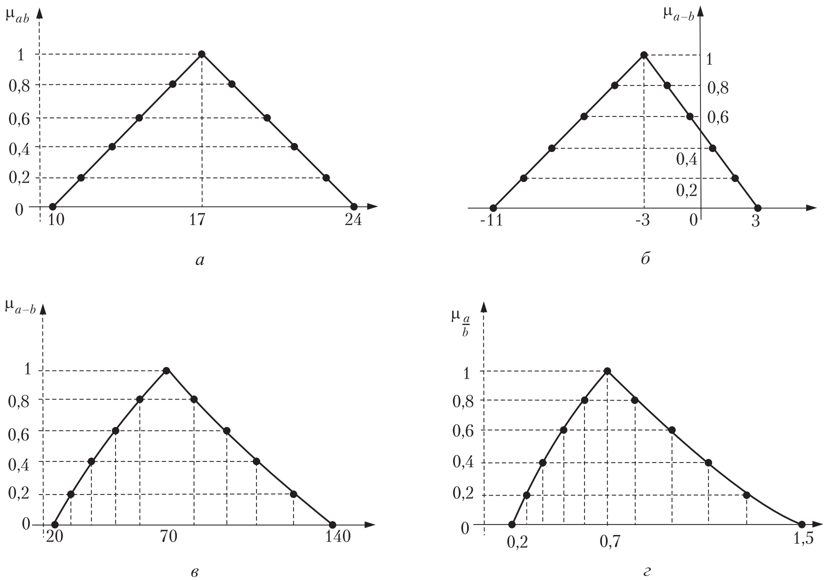


Рис. 2.2. График функций принадлежности: *а* — суммы нечетких чисел *a* и *b*; *б* — разности нечетких чисел *a* и *b*; *в* — произведения нечетких чисел *a* и *b*; *г* — частного нечетких чисел *a* и *b*

3) $\mu_a(x) = \mu_{\uparrow a}(x), \quad x \in (-\infty, a_0], \quad \mu_b(x) = \mu_{\uparrow b}(x), \quad x \in (-\infty, b_0]$ — функции принадлежности чисел a и b возрастают (не убывают) на интервалах $(-\infty, a_0]$ и $(-\infty, b_0]$;

4) $\mu_a(x) = \mu_{\downarrow a}(x), \quad x \in [a_0, \infty), \quad \mu_b(x) = \mu_{\downarrow b}(x), \quad x \in [b_0, \infty)$ — функции принадлежности чисел a и b убывают (не возрастают) на интервалах $[a_0, \infty)$ и $[b_0, \infty)$.

Тогда правила выполнения арифметических операций над нечеткими числами определяются следующими формулами:

$$(a+b) = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [\delta_a^\alpha + \delta_b^\alpha, \gamma_a^\alpha + \gamma_b^\alpha], \tag{2.1}$$

$$(a-b) = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [\delta_a^\alpha - \gamma_b^\alpha, \gamma_a^\alpha - \delta_b^\alpha], \tag{2.2}$$

$$(a\cdot b) = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / [\delta_a^\alpha \cdot \delta_b^\alpha, \gamma_a^\alpha \cdot \gamma_b^\alpha] \quad (\delta_a^\alpha \ge 0, \quad \delta_b^\alpha \ge 0), \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha \Big/ \left[\frac{\delta_a^\alpha}{\gamma_b^\alpha}, \frac{\gamma_a^\alpha}{\delta_b^\alpha}\right] \quad (\delta_a^\alpha \geq 0, \quad \delta_b^\alpha > 0)\,, \tag{2.4}$$

$$\max(a,b) = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha \,/ [\max(\delta_a^\alpha, \delta_b^\alpha), \max(\gamma_a^\alpha, \gamma_b^\alpha)]\,, \tag{2.5}$$

$$\min(a,b) = \int_{\alpha\in[0,1]} \alpha \,/ [\min(\delta_a^\alpha, \delta_b^\alpha), \min(\gamma_a^\alpha, \gamma_b^\alpha)]\,, \tag{2.6}$$

где $\delta_a^\alpha = \mu_{\uparrow a}^{-1}(\alpha)$, $\delta_b^\alpha = \mu_{\uparrow b}^{-1}(\alpha)$, $\gamma_a^\alpha = \mu_{\downarrow a}^{-1}(\alpha)$, $\gamma_b^\alpha = \mu_{\downarrow b}^{-1}(\alpha)$.

Рассмотрим вопрос о равенстве и нечетком равенстве нечетких чисел. Числа $a = \{U_a, \mu_a(x)(x \in U_a)\}$ и $b = \{U_b, \mu_b(x)(x \in U_b)\}$ равны друг другу, если $U_a = U_b$ и при любом x выполняется равенство $\mu_a(x) = \mu_b(x)$. В теории нечетких множеств закономерен также вопрос о нечетком или приближенном равенстве нечетких чисел, который решается с использованием понятия *обычного множества, ближайшего к данному нечеткому множеству*. Напомним, что обычным множеством, ближайшим к нечеткому множеству $a = \{U_a, \mu_a(x)(x \in U_a)\}$, называют множество A_0, характеристическая функция которого имеет вид

$$\mu_{A_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_a(x) < 0{,}5; \\ 1, & \text{если} \quad \mu_a(x) > 0{,}5; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если} \quad \mu_a(x) = 0{,}5. \end{cases}$$

Отметим, что при вычислении индексов нечеткости (см. подраздел 1.5) такое определение множества A_0 вполне удовлетворительно, поскольку индексы нечеткости определяются разностями вида $|\mu_A(x) - \mu_{A0}(x)|$ или $(\mu_A(x) - \mu_{A0}(x))^2$, которые имеют значение 0,5 или $0{,}5^2$ при $\mu_A(x) = 0{,}5$ независимо от того, какое из двух возможных значений, $\mu_A(x) = 0$ или $\mu_A(x) = 1$, выбрано. Однако при решении вопроса о нечетком равенстве необходимо выбрать какой-то определенный вариант. Примем

$$\mu_{a_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_a \leq 0{,}5; \\ 1, & \text{если} \quad \mu_a > 0{,}5. \end{cases}$$

Очевидно, что для каждого нечеткого числа существует единственный промежуток числовой оси, ближайший к нему. Но любой интервал или отрезок числовой оси является ближайшим множеством для различных нечетких чисел (рис. 2.3).

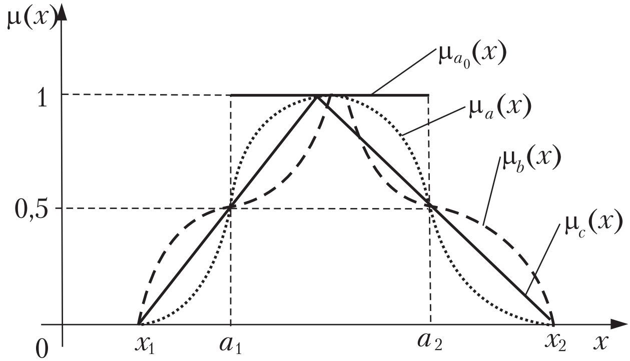


Рис. 2.3. Приближенно равные нечеткие числа: $a \approx b \approx c$

На рисунке носителем каждого из чисел a, b и c является отрезок $[x_1, x_2]$. Отрезок $[a_1, a_2]$ — обычное множество, ближайшее к каждому из этих нечетких чисел.

Определение 2.12. Нечеткие числа $a = \{U_a, \mu_a(x)(\mathrm{x} \in U_a)\}$ и $b = \{U_b, \mu_b(x)(\mathrm{x} \in U_b)\}$ называют ***приближенно равными***, если $a_0 = [a_1, a_2]$ — обычное множество, ближайшее как к a, так и к b.

Отметим, что если принять

$$\mu_{a_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_a < 0{,}5; \\ 1, & \text{если} \quad \mu_a \geq 0{,}5. \end{cases}$$

то результат сравнения нечетких чисел может оказаться другим, чем при первоначальном выборе (рис. 2.4).

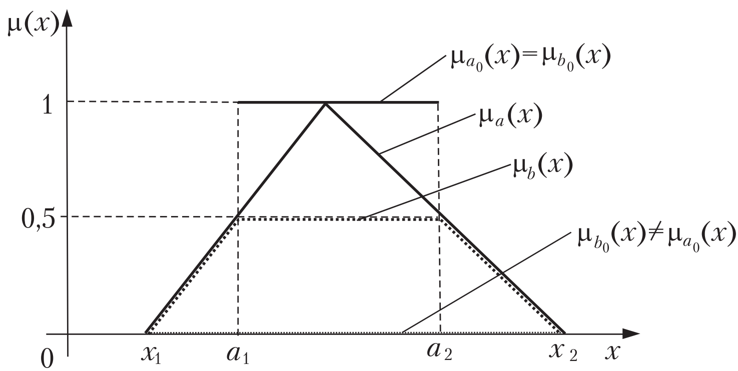


Рис. 2.4. Зависимость приближенного равенства нечетких чисел a и b от выбора обычного множества, ближайшего к этим числам

Так, если в качестве обычного множества, ближайшего к b, выбрать множество с функцией принадлежности

$$\mu_{b_{01}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_b < 0{,}5; \\ 1, & \text{если} \quad \mu_b \geq 0{,}5, \end{cases}$$

то $\mu_{a0} = \mu_{b01}$ и $a \approx b$. Если же выбрать

$$\mu_{b_{02}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_b \leq 0{,}5; \\ 1, & \text{если} \quad \mu_b > 0{,}5, \end{cases}$$

то $\mu_{a0} = \mu_{b1}$, $\mu_{a0} \neq \mu_{b2}$ и приближенного равенства нет.

Для построения моделей, в которых используются нечеткие числа, достаточно знать такие характеристики функций принадлежности этих чисел, которые позволяют отнести число к определенному классу приближенно равных чисел. Это очень облегчает оперирование с нечеткими числами. Так, большую роль в моделировании играют числа ($L - R$)-типа и S-типа.

Определение 2.13. Нечеткое число a называют ***числом (L–R)-типа***, если оно является нормальным унимодальным множеством, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & \text{если} \quad x \leq a; \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & \text{если} \quad x \geq a, \end{cases} \tag{2.7}$$

причем функции $L(t)$ и $\mathrm{R}(t)$ обладают следующими свойствами:

1) $L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) = L\left(\dfrac{x-a}{\alpha}\right)$, $R\left(\dfrac{a-x}{\beta}\right) = R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right)$, (2.8)

2) $L(0) = R(0) = 1$, (2.9)

3) $L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right)$ — неубывающая функция слева от точки $x = a$, (2.10)

4) $R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right)$ — невозрастающая функция справа от точки $x = a$. (2.11)

Любое число $(L - R)$-типа определяется тройкой параметров $A = (a, \alpha, \beta)$, где a — мода числа, т. е. действительное число, доставляющее функции принадлежности максимум, равный единице: $\mu_A(a) = 1$; α и β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) — левый и правый коэффициенты нечеткости, задаваемые экспертом.

Пусть $A_{LR} = (a, \alpha, \beta)$, $B_{LR} = (b, \gamma, \delta)$ арифметические действия для чисел $(L - R)$-типа выполняются по следующим правилам:

1) сложения:

$$(a,\ \alpha,\ \beta)_{LR} + (b,\ \gamma,\ \delta)_{LR} = (a + b,\ \alpha + \gamma,\ \beta + \delta)_{LR}\,; \qquad (2.12)$$

2) вычитания (при условии $(a,\ \alpha,\ \beta)_{LR} = (-a,\ \beta,\ \alpha)_{LR}$):

$$(a,\ \alpha,\ \beta)_{LR} - (b,\ \gamma,\ \delta)_{LR} = (a - b,\ \alpha + \delta,\ \beta + \gamma)_{LR}\,; \qquad (2.13)$$

3) умножения (при условии $a > 0$, $b > 0$):

$$(a,\ \alpha,\ \beta)_{LR} \cdot (b,\ \gamma,\ \delta)_{LR} \approx (a \cdot b,\ a \cdot \gamma + b \cdot \alpha,\ a \cdot \delta + b \cdot \beta)_{LR}\,; \quad (2.14)$$

4) умножения (при условии $a < 0$, $b > 0$):

$$(a,\alpha,\beta)_{LR} \cdot (b,\gamma,\delta)_{LR} \approx (a \cdot b,\ b \cdot \alpha - a \cdot \delta,\ b \cdot \beta - a \cdot \gamma)_{LR}\,; \quad (2.15)$$

5) умножения (при условии $a < 0, b < 0$):

$$(a,\ \alpha,\ \beta)_{LR} \cdot (b,\ \gamma,\ \delta)_{LR} \approx (a \cdot b,\ \ (-b \cdot \beta - a \cdot \delta),(-b \cdot \alpha - a \cdot \gamma))_{LR}\,;(2.16)$$

6) нахождения обратного нечеткого числа (при условии $x > 0$, $a > 0$):

$$(a,\ \alpha,\ \beta)^{-1}_{LR} = \left(\frac{1}{a},\ \frac{\beta}{a^2},\ \frac{\alpha}{a^2}\right)_{LR}; \qquad (2.17)$$

7) деления (при условии $x > 0, a > 0, b > 0$):

$$(a,\ \alpha,\ \beta)_{LR} \Big/ (b,\ \gamma,\ \delta)_{LR} \approx \left(\frac{a}{b},\ \frac{a \cdot \delta + b \cdot \alpha}{b^2},\ \frac{a \cdot \gamma + b \cdot \beta}{b^2}\right)_{LR}. \quad (2.18)$$

Рассмотрим пример вычислений по формулам (2.12) — (2.18).

Пусть a = {*примерно* 7} и b = {*примерно* 10} — нечеткие числа с функциями принадлежности

$$\mu_A = \begin{cases} \dfrac{x-4}{3}, & \text{если} \quad 4 \le x \le 7; \\ \dfrac{9-x}{2}, & \text{если} \quad 7 < x \le 9; \end{cases} \qquad \mu_B = \begin{cases} \dfrac{x-6}{4}, & \text{если} \quad 6 \le x \le 10; \\ \dfrac{15-x}{5}, & \text{если} \quad 10 < x \le 15; \end{cases}$$

(см. рис. 2.1).

Покажем, что числа a и b являются нечеткими числами $(L - R)$-типа.

Рассмотрим число a. Очевидно, что

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & \text{если} \quad x \le a; \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & \text{если} \quad x \ge a, \end{cases}$$

где $L_A\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) = \dfrac{x-4}{3} = 1 - \dfrac{|7-x|}{3}$, если $x < 7$;

$R_A\left(\dfrac{a-x}{\beta}\right) = \dfrac{9-x}{2} = 1 - \dfrac{|7-x|}{2}$, если $x \ge 7$, причем $a = 7$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

Легко проверить, что функции L_A и R_A удовлетворяют свойствам (2.8) — (2.11) в определении 2.13:

1) $L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) = 1 - \dfrac{|7-x|}{3} = 1 - \dfrac{|x-7|}{3} = L\left(\dfrac{x-a}{\alpha}\right)$;

$R\left(\dfrac{a-x}{\beta}\right) = 1 - \dfrac{|7-x|}{2} = 1 - \dfrac{|x-7|}{2} = R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right)$;

2) $L(0) = 1 - 0 = 1$, а $R(0) = 1 - 0 = 1$;

3) $L_A\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right) = \dfrac{x-4}{3}$ — неубывающая функция слева от точки $x = 7$, что легко проверить, найдя ее производную: $L_A' = \left(\dfrac{x-4}{3}\right)' = \dfrac{1}{3} > 0$;

4) $R_A\left(\dfrac{a-x}{\beta}\right) = \dfrac{9-x}{2}$ — невозрастающая функция справа от точки $x = a$, что также легко проверяется с помощью производной.

Итак, число $a = \{$*примерно* $7\}$ является числом $(L - R)$-типа, причем $A = (a, \alpha, \beta) = (7, 3, 2)$.

По аналогии легко показать, что и число $b = \{$*примерно* $10\}$ также является числом $(L - R)$-типа:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{b-x}{\gamma}\right), & \text{если} \quad x \le b; \\ R\left(\dfrac{x-b}{\delta}\right), & \text{если} \quad x \ge b, \end{cases}$$

причем

$$L_B\left(\frac{b-x}{\gamma}\right) = 1 - \frac{|10-x|}{4}, \quad R_B\left(\frac{b-x}{\delta}\right) = 1 - \frac{|10-x|}{5},$$

а следовательно, $b = 10$, $\gamma = 4$, $\delta = 5$; $B = (b, \gamma, \delta) = (10, 4, 5)$.

Выполним над числами a и b арифметические операции по формулам (2.12), (2.13), (2.14) и (2.18) (см. рис. 2.2):

1) сложение (7, 3, 2) + (10, 4, 5) = (17, 7, 7);
2) вычитание (7, 3, 2) – (10, 4, 5) = (–3, 8, 6);
3) умножение (7, 3, 2) · (10, 4, 5) ≈ (7 · 10, 7 · 4, + 10 · 3,7 · 5 + + 10 · 2) = (70, 58, 55);
4) деление

$$(7,\ 3,\ 2) \div (10,\ 4,\ 5) \approx \left(\frac{7}{10}, \frac{7\cdot 5 + 10\cdot 3}{10^2}, \frac{7\cdot 4 + 10\cdot 2}{10^2}\right) = (0{,}7;\ 0{,}65;\ 0{,}48).$$

Наиболее часто используются так называемые треугольные и трапезоидные нечеткие числа. Их функции принадлежности имеют вид

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad u < a_L \\ \dfrac{u-a_L}{a_1-a_L}, & \text{при} \quad a_L \le u \le a_1; \\ 1, & \text{при} \quad a_1 < u < a_2; \\ \dfrac{a_R-u}{a_R-a_2}, & \text{при} \quad a_2 \le u \le a_R; \\ 0, & \text{при} \quad u > a_R. \end{cases} \tag{2.19}$$

Нечеткие числа (L – R)-типа, имеющие функции принадлежности вида (2.19), называются *трапезоидными* (трапециевидными, трапецеидальными), если $a_1 < a_2$, и *треугольными*, если $a_1 = a_2 = a$.

Графики функций принадлежности трапезоидных и треугольных чисел приведены на рис. 2.5.

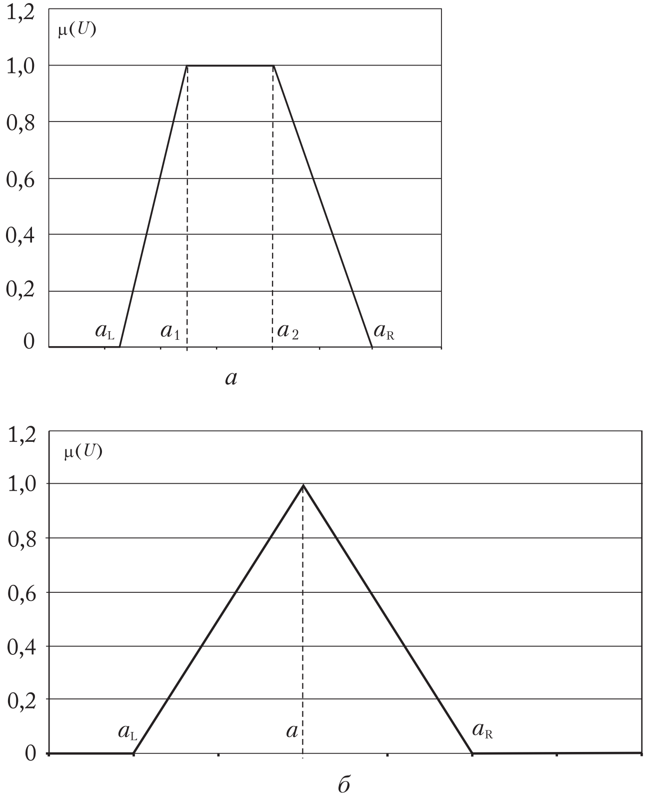


Рис. 2.5. График функции принадлежности:
а — трапезоидного нечеткого числа; *б* — треугольного нечеткого числа

С помощью трапезоидных чисел можно кодировать следующие выражения естественного языка: «число лежит в диапазоне примерно от a_L до a_R». При этом ребра трапеции обеспечивают формализацию понятия «примерно», а их наклон выражает степень «примерности». Кроме того, с помощью трапезоидных чисел можно кодировать и следующую качественную характеристику некоторого параметра: *среднее значение параметра примерно от* a_L *до* a_R.

Треугольные нечеткие числа формализуют выражения типа «число приблизительно равно *a*». Именно треугольные числа наиболее часто используются при решении экономических задач, причем чаще всего в качестве прогнозных значений измеряемого параметра.

2.3. Принцип обобщения

Принцип обобщения для нечетких множеств, в частности для нечетких чисел, представляет собой, в сущности, основное равенство, позволяющее расширить область определения U отображения или отношения, включив в нее наряду с точками (числовой оси) нечеткие подмножества множества U [2].

Пусть, к примеру, на универсальном множестве $U = \{1, 2,..., 10\}$ задано нечеткое число $a = 1/1 + 1/2 + 0{,}8/3 + 0{,}6/4 = 0{,}4/5$. Тогда нечеткое число $a^2 = 1/1 + 1/4 + 0{,}8/9 + 0{,}6/16 + 0{,}4/25$. Связь между множествами a и a^2 есть отображение множества $U_a = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ во множество $f(U) = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, причем $f(u) = u^2$, а $\mu_a(f(u)) = \mu_a(u)$ для любого u ($u \in \mathrm{U}_a$).

Пусть f — отображение $U \xrightarrow{f} V$. Дадим формулировку принципа обобщения для дискретных и непрерывных носителей:

1) $A = \mu_1 / u_1 + \mu_2 / u_2 + ... + \mu_n / u_n$ — нечеткое подмножество (нечеткое число) с дискретным носителем. Тогда

$$f(A) = f(\mu_1 / u_1 + \mu_2 / u_2 + ... + \mu_n / u_n) = \\ = \mu_1 / f(u_1) + \mu_2 / f(u_2) + ... + \mu_n / f(u_n); \qquad (2.20)$$

2) $A = \int\limits_U \mu_A(u) / u$ — нечеткое подмножество (нечеткое число) с непрерывным носителем. Тогда

$$f(A) = f\left(\int\limits_U \mu_A(u) / u\right) = \int\limits_V \mu_A(u) / f(u). \qquad (2.21)$$

Во многих случаях удобно применять принцип обобщения, используя разложение множества A по множествам α-уровня:

$$A = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / A_\alpha \Rightarrow f(A) = f(\int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / A_\alpha) = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / f(A_\alpha), \qquad (2.22)$$

$$A = \sum_\alpha \alpha / A_\alpha \Rightarrow f(A) = f(\sum_\alpha \alpha / A_\alpha) = \sum_\alpha \alpha / f(A_\alpha). \qquad (2.23)$$

Рассмотрим пример использования принципа обобщения.

Пример. Пусть множество $U = [1, 10]$ отображается во множество $V = [0, 1]$ по закону $v = 1gu$. Множество U является носителем нечеткого множества $A = \int\limits_U \frac{u-1}{9} / u$. Найдем образ множества A при данном отображении. Для этого разложим множество A по α-уровням:

$$A = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / A_\alpha,$$

где A_α– отрезки числовой оси, над которыми выполняется неравенство $\mu(u) = \frac{u-1}{9} \geq \alpha$.

Разрешая это неравенство относительно u и учитывая, что $u \in [1, 10]$, получаем $9\alpha + 1 \leq u \leq 10$, т. е. $A_\alpha = [9\alpha + 1, 10]$.

Найдем образ множества A при отображении $v = 1gu$. Общая формула, согласно принципу обобщения, имеет вид

$$\lg A = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / \lg A_\alpha = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / [\lg(9\alpha + 1),\ \lg 10] = \int\limits_{\substack{\alpha \in [0,1] \\ v = \lg(9\alpha+1)}} \alpha / [v, 1].$$

Из равенства $v = 1g(9\alpha + 1)$ получаем $\alpha = \frac{10^v - 1}{9},\ v \in [0, 1]$.

Таким образом, $\lg A = \int\limits_{v \in [0,1]} \frac{10^v - 1}{9} / v$ является нечетким множеством, носителем которого служит отрезок $V = [0, 1]$, а функцией принадлежности $- \mu_{\lg A}(v) = \frac{10^v - 1}{9}$.

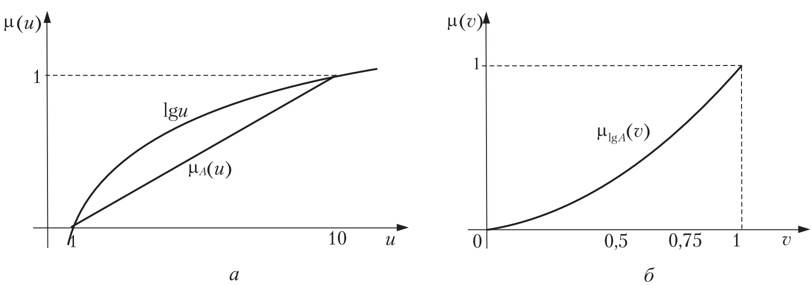


Рис. 2.6. Функция принадлежности: *а* — $\mu_A(u)$; *б* — $\mu_{\lg A}(v)$

Построим по точкам графики функций принадлежности $\mu_A(u)$ $(u \in [1, 10])$ и $\mu_{\lg A} v$ $(v \in [0, 1])$ (рис. 2.6). Для этого запишем таблицу значений данных функций:

u	1	—	—	—	10
$\mu_A(u) = \dfrac{u-1}{9}$	0	—	—	—	1
v	0	0,25	0,5	0,75	1
$\mu_{\lg A}(v) = \dfrac{10^v - 1}{9}$	0	0,09	0,24	0,51	1

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятие нечеткого числа.
2. Какие нечеткие числа называют нормальными, унимодальными и выпуклыми? Сравните определения с соответствующими определениями нечетких множеств. В чем различие? Сходство?
3. Дайте определения алгебраических операций над нечеткими числами.
4. Что называют нечетким минимумом и максимумом нечетких чисел? Как сравнить два нечетких числа?
5. Перечислите свойства операций над нечеткими числами, которые в некоторых случаях нарушаются или выполняются всегда.
6. Как определяются отношения «равенство» и «нечеткое равенство» для нечетких чисел? Какие нечеткие числа называют приближенно равными? В чем различие понятий равенства для обычных и нечетких чисел?
7. Дайте определение нечетких чисел (L–R)-типа.
8. Приведите пример треугольных и трапециевидных чисел.
9. Сформулируйте принцип обобщения для нечетких множеств. Охарактеризуйте границы его применимости и практическую значимость.

Задания для самостоятельной работы

1. Даны нечеткие числа: a = *«немного больше* 3» и b = *«примерно* 3», если $A = 1/4 + 0{,}5/5 + 0{,}2/6$ и $B = 0{,}3/1 + 0{,}8/2 + 1/3 + 0{,}8/4 + 0{,}3/5$.

Выполнить арифметические операции и сравнить нечеткие числа с дискретными носителями.

2. Пусть $U = \{0, 1, 2..., 25\}$ является носителем следующих нечетких чисел:

   a = «в городе N проезд на метро стоит приблизительно 8 руб.»;

   b = «проезд на маршрутке в этом городе стоит не менее 15 руб.»;

   c = «мне надо проехать на метро раз пять»;

   d = «мне надо проехать на маршрутке по крайней мере раза три».

   Требуется:

   1) выступая в роли эксперта, запишите нечеткие числа a, b, c и d в форме объединения точечных нечетких множеств;
   2) найти x = «примерная сумма расходов на транспорт в городе N»;
   3) разложить нечеткие числа a, b, c, d и x по множествам α-уровня, если $\alpha \in \{0; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1\}$;
   4) построить графики функций принадлежности чисел a, b, c, d и x.

3. Пусть a = «немного больше 3» и b = «примерно 5», причем

$$A = \int\limits_{x \in (3,6]} \frac{6-x}{3} / x\,; \; B = \int\limits_{x \in [3,5]} \frac{x-3}{2} / x + \int\limits_{x \in (5,7]} \frac{7-x}{2} / x\,.$$

   Требуется:

   1) разложить нечеткие числа a и b по множествам α-уровня, если $\alpha \in \{0; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1\}$;
   2) построить график функций принадлежности этих чисел, используя полученные разложения;
   3) записать функции принадлежности и построить их графики для чисел $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$;
   4) сравнить числа a и b.

4. Доказать, что нечеткие числа a и b являются числами (L–R)-типа, если

$$A = \int\limits_{x \in [0,4]} \frac{x}{4} / x + \int\limits_{x \in (4,6]} \frac{6-x}{2} / x\,; \; B = \int\limits_{x \in [3,5]} \frac{x-3}{2} / x + \int\limits_{x \in (5,10]} \frac{10-x}{5} / x\,.$$

   Выполнить над a и b все арифметические операции и сравнить эти числа.

5. Множество $U = [-1, 1]$ является носителем нечеткого множества $A = \int_U \frac{4-x}{8} / u$. Множество U отображается во множество $V = [0, 1]$.

Применяя принцип обобщения, найдите образы следующих нечетких множеств:

1) $A_1 = 1 - A^2$;

2) $A_2 = 2^{|A|-1}$;

3) $A_3 = \sin\frac{\pi|A|}{2}$.

Постройте графики функций принадлежности множеств A_1, A_2, A_3.

3. Нечеткие бинарные отношения и соответствия

3.1. Бинарные отношения

Бинарные отношения[1] на обычных множествах изучаются в курсе дискретной математики. Напомним основные положения теории бинарных отношений.

Пусть A — какое-либо множество, дискретное или непрерывное.

Определение 3.1. ***Декартовым квадратом*** множества A называют множество A^2 всех пар элементов этого множества.

Например, декартов квадрат множества $A = \{a, b, c\}$ — это множество всех пар элементов a, b и c:

$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b ,c), (c, a), (c, b), (c, c)\}.$$

Определение 3.2. ***Бинарным отношением на множестве*** A называют подмножество Γ множества A^2.

Например, для множества $A = \{a, b, c\}$ $\Gamma = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\} \subset A^2$; Γ — график бинарного отношения на множестве A.

Определение 3.3. Если $\Gamma \subseteq A^2$ — бинарное отношение на множестве A и $(a, b) \in \Gamma$, то элемент b $(b \in A)$ называют ***образом элемента*** a $(a \in A)$ в отношении Γ, элемент a — ***прообразом элемента*** b в отношении Γ. Множество всех образов элемента a образует ***полный образ*** этого элемента, а множество всех прообразов элемента b — ***полный прообраз*** b в отношении Γ. Множество образов всех элементов A составляет ***полный образ множества*** A, а множество прообразов всех его элементов — ***полный прообраз множества*** A в отношении Γ.

Поясним приведенные термины на примере отношения $\Gamma = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\} \subset A^2$ ($A = \{a, b, c\}$), представив их в виде таблицы:

---

[1] В современной литературе по алгебре понятия «бинарные отношения» и «бинарные соответствия» не разделяются. В данном пособии традиционное разделение этих понятий оказалось удобным с методической точки зрения.

Термин	**Элементы множества A**					**Полный образ множества A в отношении Г**
	a		b		c	
Образ элемента множества A в отношении Г	a	c	a	c	—	$\{a, c\}$
Прообраз элемента множества A в отношении Г	a	b	—	a	b	$\{a, b\}$

Бинарное отношение может быть задано несколькими способами.

1. *График бинарного отношения.* Если множество A конечно, то график Г — это список пар из множества A^2, в которых элементы соединены отношением. Если A — это часть числовой оси или вся ось, то график может быть представлен геометрически в системе координат.
2. *Характеристическое свойство бинарного отношения.* Характеристическое свойство — свойство, определяющее характер связи между элементами в парах. Для обозначения характеристического свойства употребляется символ «ρ». Например, $a\rho b$: «a старше b» (на множестве людей), $a\rho b$: «$a^2 + b^2 = 1$» (на множестве чисел) и т. п.
3. *Граф бинарного отношения.* Граф бинарного отношения — чертеж, состоящий из точек (вершин графа) и направленных отрезков или дуг (ребер графа). Вершины графа соответствуют элементам множества A. Ребра графа соединяют элементы множества A с их образами. Пример графа бинарного отношения $\Gamma = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\}$ на множестве $A = \{a, b, c\}$ приведен на рис. 3.1.

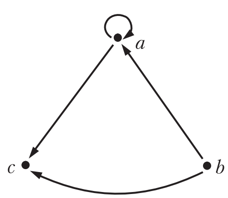


Рис. 3.1. Граф бинарного отношения $\Gamma = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\}$ на множестве $A = \{a, b, c\}$

4. *Матрица бинарного отношения.* Матрица $J_\Gamma = (x_{ij})$ бинарного отношения Г на множестве A, содержащем n элементов, — это

матрица порядка n, элементы которой x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ имеют следующие значения:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (a_i, a_j) \in \Gamma \\ 0, & \text{если} \quad (a_i, a_j) \notin \Gamma \end{cases} \qquad (a_i, a_j \in A).$$

Так, матрица отношения Γ, изображенного на рис. 3.1, имеет вид

$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Характеристическая функция.* Характеристическая функция $\mu(x, y)$ бинарного отношения Γ на множестве A — это функция от двух аргументов, x и y $(x, y \in A)$, такая, что

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x, y) \in \Gamma; \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \notin \Gamma. \end{cases}$$

Например, характеристическую функцию отношения Γ (см. рис. 3.1) можно записать в виде таблицы:

$\mu(a,a)$	$\mu(a,b)$	$\mu(a,c)$	$\mu(b,a)$	$\mu(b,b)$	$\mu(b,c)$	$\mu(c,a)$	$\mu(c,b)$	$\mu(c,c)$
1	0	1	1	0	1	0	0	0

С точки зрения математической логики элементы матрицы бинарного отношения, так же как и значения характеристической функции, являются значениями истинности высказываний $(a_i, a_j) \in \Gamma$. Например, характеристическую функцию в терминах математической логики можно записать следующим образом:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \text{истина}, & \text{если} \quad (x, y) \in \Gamma; \\ \text{ложь}, & \text{если} \quad (x, y) \notin \Gamma. \end{cases}$$

Определение 3.4. ***Композицией бинарных отношений*** Γ_1 и Γ_2, заданных на множестве A, называют отношение $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ такое, что

$$\forall a (a \in A), \forall b (b \in A) : ((a, b) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists c (c \in A) : (a, c) \in \Gamma_1 \wedge (c, b) \in \Gamma_2).$$

Пусть $A = \{a, b, c\}$. Отношения Γ_1 и Γ_2 заданы матрицами:

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x_{ij})_{3\times 3}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (y_{ij})_{3\times 3}.$$

Найдем композицию $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Для этого:

1) используя матрицы J_{Γ_1} и J_{Γ_2}, запишем графики отношений Γ_1 и Γ_2: $\Gamma_1 = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c), (c, b)\}$, $\Gamma_2 = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, a)\}$;
2) построим графы отношений Γ_1 и Γ_2 и объединим их (рис. 3.2);

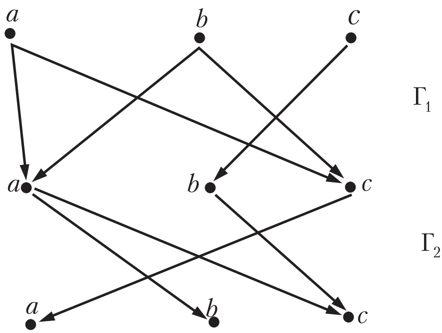


Рис. 3.2. Графы отношений Γ_1 и Γ_2 и их объединение

ПРИМЕЧАНИЕ 1

Графы Γ_1 и Γ_2 построены в виде двудольных графов, причем входы графа Γ_1 являются выходами графа Γ_2

ПРИМЕЧАНИЕ 2

Пути в объединении графов Γ_1 и Γ_2 ведут от элементов множества A к их образам в отношении Γ_1 и далее к образам в отношении Γ_2

3) выпишем все пути, ведущие от элементов a, b и c к их образам в отношении Γ, а также промежуточные элементы в этих путях, посредством которых осуществляются связи в отношении Γ. Результат представим в виде табл. 3.1;

Таблица 3.1. Пути от элементов множества

Пути от элементов множества A к их образам в отношении $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$	**Элемент, осуществляющий опосредованную связь в композиции отношений Γ_1 и Γ_2**	**Элементы графика отношения $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$**
$a \to a \to b$	a	(a,b)
$a \to a \to c$	a	(a,c)

Пути от элементов множества A к их образам в отношении $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$	**Элемент, осуществляющий опосредованную связь в композиции отношений** Γ_1 **и** Γ_2	**Элементы графика отношения** $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$
$a \to c \to a$	c	(a, c)
$b \to a \to b$	a	(b, b)
$b \to a \to c$	a	(b, c)
$b \to c \to a$	c	(b, a)
$c \to b \to c$	b	(c, c)

4) запишем график отношения $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \{(a,\ a), (a,\ b), (a,\ c),$ $(b,\ b), (b,\ c), (b,\ a), (c,\ c)\}$ и построим его граф (рис. 3.3).

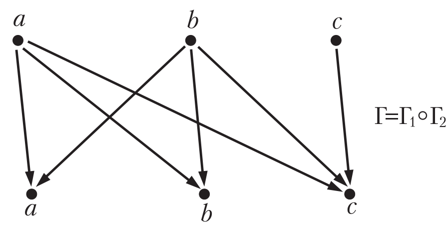


Рис. 3.3. Граф композиции отношений $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$

Рассмотрим вопрос об отыскании элементов композиции отношений с точки зрения математической логики. Например, высказывание $(a, a) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ является истинным, если истинна дизъюнкция высказываний:

$$((a,\ a) \in \Gamma_1 \wedge (a,\ a) \in \Gamma_2) \vee ((a,\ b) \in \Gamma_1 \wedge (b,\ a) \in \Gamma_2) \vee$$
$$((a,\ c) \in \Gamma_1 \wedge (c,\ a) \in \Gamma_2).$$

ПРИМЕЧАНИЕ

Напомним, что знаками $\wedge$ и $\vee$ в математической логике обозначаются операции конъюнкции и дизъюнкции высказываний. Высказывание $a \wedge b$ истинно, если истинны оба высказывания, как a, так и b, высказывание $a \vee b$ истинно, если истинно хотя бы одно из них. Конъюнкцию называют также операцией «И», или логическим умножением, дизъюнкцию — операцией «ИЛИ», или логическим сложением.

Истинность или ложность каждого простого высказывания, участвующего в этом сложном высказывании, соответствует единице или нулю в первой строке матрицы J_{Γ_1} и первом столбце матрицы J_{Γ_2}.

Например,

$$(a,\ a) \in \Gamma_1 = x_{11} = 1 \Rightarrow (a,\ a) \in \Gamma_1 \ - \textit{истина},$$
$$(a,\ a) \in \Gamma_2 = y_{11} = 0 \Rightarrow (a,\ a) \in \Gamma_2 \ - \textit{ложь},$$
$$(a,\ a) \in \Gamma_1 \wedge (a,\ b) \in \Gamma_2 = x_{11} \wedge y_{11} = x_{11} \cdot y_{11} = \min(x_{11},\ y_{11}) =$$
$$= \min(1,0) = 0 \Rightarrow (a,\ a) \in \Gamma_1 \wedge (a,\ b) \in \Gamma_2 \ - \textit{ложь}.$$

Аналогично

$$(a,\ b) \in \Gamma_1 \wedge (b,\ a) \in \Gamma_2 = x_{12} \wedge y_{21} = x_{12} \cdot y_{21} = \min(x_{12},\ y_{21}) =$$
$$= \min(0,\ 0) = 0 \Rightarrow (a,\ b) \in \Gamma_1 \wedge (b,\ a) \in \Gamma_2 \ - \textit{ложь},$$
$$(a,\ c) \in \Gamma_1 \wedge (c,\ a) \in \Gamma_2 = x_{13} \wedge y_{11} = x_{13} \cdot y_{31} = \min(x_{13},\ y_{11}) =$$
$$= \min(1,\ 1) = 1 \Rightarrow (a,\ c) \in \Gamma_1 \wedge (c,\ a) \in \Gamma_2 \ - \textit{истина}.$$

Значение истинности высказывания $(a,\ a) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ равно значению истинности дизъюнкции всех трех конъюнкций или, по-другому, логической суммы трех произведений:

$$(a,\ a) \in \Gamma_1 \wedge (a,\ b) \in \Gamma_2 \ \text{или} \ (a,\ b) \in \Gamma_1 \wedge (b,\ a) \in \Gamma_2 \ \text{или}$$
$$(a,\ c) \in \Gamma_1 \wedge (c,\ a) \in \Gamma_2 =$$
$$= x_{11} \cdot y_{11} + x_{12} \cdot y_{21} + x_{13} \cdot y_{31} = (x_{11},\ x_{12},\ x_{13}) \cdot \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix} =$$
$$= \max(\min(x_{11},\ y_{11}), \min(x_{12},\ y_{21}), \min(x_{13},\ y_{31})) =$$
$$= \max(0,\ 0,\ 1) = 1.$$

Следовательно, $(a,\ a) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ – *истина.*

Чтобы проверить истинность утверждения $(a,\ b) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$, следует таким же способом выполнить умножение первой строки матрицы J_{Γ_1} на второй столбец матрицы J_{Γ_2}:

$$(x_{11},\ x_{12},\ x_{13}) \cdot \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix} = \max(\min x,\ y), \min(x,\ y), \min(x,\ y)) =$$
$$= \max(\min(1,\ 1), \min(0,\ 0), \min(1,\ 0)) =$$
$$= \max(1,\ 0,\ 0) = 1.$$

Следовательно, $(a,\ b) \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ – *истина.*

Умножая элементы i-й строки матрицы J_{Γ_1} на соответствующие элементы j-го столбца матрицы J_{Γ_2} и складывая полученные произведения, находим элемент s_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы U. Элемент s_{ij} максиминного произведения матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2} равен 1, если соответствующая пара элементов множества A принадлежит композиции произведений $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$, и равен 0, если не принадлежит. Это означает, что матрица $J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = J$ есть матрица отношения $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Умножение матриц отношений называют максиминным, так как операции сложения и умножения выполняются по правилам максимума и минимума: $a + b = \max(a, b)$, $a \cdot b = \min(a, b)$.

Таким образом, чтобы получить матрицу Γ композиции отношений U, надо перемножить матрицы J_{Γ_1} и J_{Γ_2}: $J = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2}$. Правило умножения матриц бинарных отношений такое же, как и умножения любых матриц n-го порядка:

$$\mu_\Gamma(x, y),$$

где Γ — элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы J, x_{ik} и y_{kj} — элементы матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2} соответственно. Однако под умножением здесь понимают нахождение минимума, а под сложением — максимума:

$$s_{ij} = \max_k(\min(x_{ik},\ y_{kj})). \tag{3.1}$$

В рассматриваемом примере

$$J = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $J = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2}$ выявляет так называемые ***опосредованные связи***, или ***опосредованные влияния***. Например, как видно на рис. 3.2, элемент b не влияет на элемент b ни в отношении $D_\alpha \subseteq U^2$, ни в отношении Γ_2, но в Γ_1 включена пара (b, a), а в Γ_2 — пара (a, b).

Таким образом, опосредованно, через a, элемент b влияет на себя в результирующем отношении $(b, b) \in \Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$.

Введем для строк матриц J_{Γ_1}, J_{Γ_2} и J_{Γ} следующие обозначения:
$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$ — i-я строка матрицы J_{Γ_1};
$\beta_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3})$ — i-я строка матрицы J_{Γ_2};
$\gamma_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3})$ — i-я строка матрицы J_{Γ} $(i = 1, 2, 3)$.

Тогда

$$J_{\Gamma_1} = \begin{array}{c|c} \alpha_1 & \\ \alpha_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_3 & \end{array}, \quad J_{\Gamma_2} = \begin{array}{c|c} \beta_1 & \\ \beta_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta_3 & \end{array}, \quad J_{\Gamma} = \begin{array}{c|c} \gamma_1 & \\ \gamma_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 & \end{array}.$$

Сравнив строки матриц, можно обнаружить, что все элементы s_{1j} $(j = 1, 2, 3)$ первой строки матрицы J_{Γ} ***не меньше*** соответствующих элементов a_{1j}, b_{1j} первых строк матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}, т. е.

$$\begin{cases} s_{11} \ge a_{11} \quad \text{и} \quad s_{11} \ge b_{11}; \\ s_{12} \ge a_{12} \quad \text{и} \quad s_{12} \ge b_{12}; \\ s_{13} \ge a_{13} \quad \text{и} \quad s_{13} \ge b_{13}. \end{cases}$$

Кратко это можно записать так: $\gamma_1 \ge \alpha_1$ и $\gamma_1 \ge \beta_1$. Аналогичные неравенства справедливы и для вторых строк: $\gamma_2 \ge \alpha_2$ и $\gamma_2 \ge \beta_2$. Для третьих строк оба неравенства, $\gamma_3 \ge \alpha_3$ и $\gamma_3 \ge \beta_3$, ложны, так как некоторые элементы этих строк в матрицах Γ_1 и Γ_2 больше соответствующих элементов матрицы $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Неверны и обратные неравенства: $\alpha_3 \ge \gamma_3$ и $\beta_3 \ge \gamma_3$. Третья строка матрицы J_{Γ} *не сравнима* с третьими строками матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}. Что касается матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}, то ни одна из строк матрицы J_{Γ_1} не сравнима с соответствующей строкой матрицы J_{Γ_2}.

Рассмотрим композицию отношений $\Gamma_2^2 = \Gamma_2 \circ \Gamma_2$. Найдем матрицу этого отношения:

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x_{ij})_{3\times3}; \quad J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (y_{ij})_{3\times3};$$

$$J_{\Gamma_2^2} = J_{\Gamma_2}^2 = J_{\Gamma_2} \circ J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot0+1\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ни одна из строк результирующей матрицы не сравнима ни с одной из строк перемножаемых матриц. Опосредованные влияния, не учтенные в $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$, обнаруживаются при сравнении матриц J_{Γ_2}, $J_{\Gamma_2}^2$ и определяются элементами s_{11}, s_{21}, s_{32}, s_{33} n: в матрице J_{Γ_1} элементы y_{11}, y_{21}, y_{32}, y_{33} равны 0, а s_{11}, s_{21}, s_{32}, s_{33} в матрице b равны 1.

Проанализируем выявленные путем сравнения матриц J_{Γ_2} и a опосредованные влияния:

$$s_{11} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$\Rightarrow \Big(\big((a,\, c) \in \Gamma_2 \wedge (c,\, a) \in \Gamma_2\big) - \textit{истина}\Big) \Rightarrow (a,\, a) \in \Gamma_2^2,$$
$$s_{21} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$\Rightarrow \Big(\big((b,\, c) \in \Gamma_2 \wedge (c,\, a) \in \Gamma_2\big) - \textit{истина}\Big) \Rightarrow (b,\, a) \in \Gamma_2^2,$$
$$s_{32} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$
$$\Rightarrow \Big(\big((c,\, a) \in \Gamma_2 \wedge (a,\, b) \in \Gamma_2\big) - \textit{истина}\Big) \Rightarrow (c,\, b) \in \Gamma_2^2,$$
$$s_{33} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$
$$\Rightarrow \Big(\big((c,\, a) \in \Gamma_2 \wedge (a,\, c) \in \Gamma_2\big) - \textit{истина}\Big) \Rightarrow (c,\, c) \in \Gamma_2^2.$$

В каждой из сумм слагаемое, выделенное полужирным шрифтом, — определяющее значение этой суммы. Выделенные слагаемые соответствуют конъюнкциям высказываний о принадлежности определенного элемента множества A^2 отношению Γ_2, а значение всей суммы — высказыванию о принадлежности соответствующей пары отношению $\Gamma_2^2 = \Gamma_2 \circ \Gamma_2$.

Любой элемент s_{ij} матрицы $J_{\Gamma_1}^2$, меньший или равный элементу $y_{ij} (y_{ij} \in J_{\Gamma_2})$, свидетельствует о том, что либо опосредованная связь учтена в самом отношении Γ_2, либо такая связь отсутствует.

Например, $s_{13} = y_{13} = 1$. Равенство $s_{13} = 1$ означает, что существует опосредованное влияние элемента a на элемент c. Можно видеть, что влияние это осуществляется через элемент $\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(3,1) = 0.7$:

$$s_{13} = 0 \cdot 1 + \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + 1 \cdot 0 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big(\big((a,\, b) \in \Gamma_2 \wedge (b,\, c) \in \Gamma_2\big) - \textit{истина}\Big) \Rightarrow (a,\, c) \in \Gamma_2^2.$$

Однако равенство $y_{13} = 1$ говорит о том, что влияние a на c учтено в самом отношении Γ_2.

Другой пример. Справедливо неравенство $s_{23} < y_{23}$ ($s_{23} = 0$, $y_{23} = 1$). Запишем элемент s_{23} в виде суммы: $s_{23} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$. Во множестве A нет ни одного элемента, через который осуществлялось бы опосредованное влияние b на c.

Это становится очевидным, если перевести сложение и умножение в s_{23} на язык логики высказываний. Действительно, $(b, c) \notin \Gamma_2^2$ — *истина*, так как истинна каждая из следующих конъюнкций:

$$(b,\ a) \notin \Gamma_2 \wedge (a,\ c) \in \Gamma_2;$$
$$(b,\ b) \notin \Gamma_2 \wedge (b,\ c) \in \Gamma_2;$$
$$(b,\ c) \in \Gamma_2 \wedge (c,\ c) \notin \Gamma_{2.}$$

В то же время непосредственная связь между элементами b и c учтена в отношении Γ_2, так как $y_{23} = 1$.

Определение 3.5. Бинарное отношение $\Gamma \subseteq A^2$ называют ***транзитивным бинарным отношением***, если для любых a, b и c $(a,\ b,\ c \in A)$ из того, что $(a,\ c) \in \Gamma$ и $(c,\ b) \in \Gamma$, следует, что $(a,\ b) \in \Gamma$.

Другими словами, отношение $\Gamma \subseteq A^2$ транзитивно, если оно включает все опосредованные связи между элементами. Отсюда следует, что ***условием транзитивности отношения*** Γ является выполнение неравенства

$$J_\Gamma \geq J_{\Gamma^2},$$

где J_Γ, J_{Γ^2} — матрицы отношений Γ и Γ^2 соответственно, причем каждый элемент матрицы J_Γ не меньше соответствующего элемента матрицы J_{Γ^2}.

Отношения Γ_2 и Γ_2^2 не являются транзитивными. Найдем последовательно матрицы отношений Γ_2^3, $\Gamma_2^4, \ldots,$ Γ_2^n:

$$J_{\Gamma_2^3} = J_{\Gamma_2^2 \cdot \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma_2^4} = J_{\Gamma_2^3 \cdot \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma_2^5} = J_{\Gamma_2^4 \cdot \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma_2^6} = J_{\Gamma_2^5 \cdot \Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $J_{\Gamma_2^6} = J_{\Gamma_2^7} = ... = J_{\Gamma_2^n} \quad (\forall n(n \in N) : n \geq 6)$.

Определение 3.6. ***Транзитивным замыканием*** $\hat{\Gamma}$ ***бинарного отношения*** $\Gamma \subseteq A^2$ называют объединение степеней этого бинарного отношения:

$$\hat{\Gamma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^n . \tag{3.2}$$

Транзитивное замыкание отношения $\hat{\Gamma}_2$ в рассматриваемом примере имеет вид

$$\hat{\Gamma}_2 = \bigcup_{n=1}^{6} \Gamma_2^n = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c),$$
$$(c, a), (c, b), (c, c)\} = A^2 .$$

Пусть на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$ отношение Γ задано графом, изображенным на рис. 3.4. Запишем матрицу J_Γ этого отношения и найдем его транзитивное замыкание.

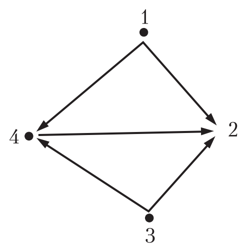


Рис. 3.4. Граф отношения $\Gamma = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Матрица отношения имеет вид

$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения транзитивного замыкания будем умножать матрицу J_Γ на себя, получая J_Γ^2, $J_\Gamma^3, ..., J_\Gamma^n$, до тех пор, пока не выполнится равенство $J_\Gamma^{n-1} = J_\Gamma^n$. Дальнейшее умножение не будет приводить к изменению матриц. Транзитивное замыкание получим по формуле (3.2).

$$J_\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любой элемент матрицы J_Γ^2 не превосходит соответствующий элемент матрицы J_Γ, т. е. $J_\Gamma \geq J_\Gamma^2$. Это означает, что Γ включает все опосредованные связи между элементами и, следовательно, Γ является транзитивным бинарным отношением. Покажем, что его транзитивное замыкание совпадает с самим Γ.

$$J_\Gamma^3 = J_\Gamma^2 \cdot J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0).$$

Умножение нуль-матрицы на любую другую матрицу есть нуль-матрица. Поэтому $J_\Gamma^n = (0)$ для любых $n \geq 3$.

Транзитивное замыкание отношения Γ найдем, используя формулу (3.2) и матрицы J_Γ и J_Γ^2:

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\} \cup \{(1, 2), (3, 4)\} =$$
$$= \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\} = \Gamma.$$

Как и следовало ожидать, поскольку отношение Γ является транзитивным, оно совпадает со своим транзитивным замыканием.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Транзитивное бинарное отношение совпадает со своим транзитивным замыканием.

Утверждение 2. Транзитивное замыкание бинарного отношения есть наименьшее по числу элементов транзитивное отношение, содержащее данное бинарное отношение.

Утверждение 3. Транзитивное замыкание $\hat{\Gamma}$ есть ближайшее к Γ транзитивное отношение.

ПРИМЕЧАНИЕ

Напомним, что расстояние между множествами Γ_1 и Γ_2 определяется либо как линейное расстояние, либо как евклидово расстояние (см. табл.1.3).

Не следует думать, что последовательность степеней матрицы отношения всегда имеет предел, т. е., начиная с некоторого шага n, выполняется равенство $J_\Gamma^n = J_\Gamma^{n+1}$. Приведем простой пример, показывающий, что это не так.

Пусть матрица отношения Γ на множестве $A = \{a, b\}$ имеет вид

$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$J_\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{n},\ J_\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_\Gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J_\Gamma^{2n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_\Gamma^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для любого $n \geq 1$.

Тем не менее $\overline{\Gamma} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma^n = \{(a, b), (b, a)\} \cup \{(a, a), (b, b)\} = A^2$.

Наиболее важными свойствами бинарных отношений являются *свойства рефлексивности*, *симметричности*, *антисимметричности* и *транзитивности* (табл. 3.2).

Особую роль в приложениях теории бинарных отношений играют *отношения эквивалентности* и *отношения порядка*.

Определение 3.7. ***Отношением эквивалентности*** называют рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение.

Определение 3.8. ***Отношением порядка*** называют антисимметричное и транзитивное отношение.

По отношению эквивалентности множество разбивается на непересекающиеся *классы эквивалентности*. В каждый класс попадают элементы, попарно связанные друг с другом отношением эквивалентности, элементы из разных классов отношением не связаны. Пересечение любых двух различных классов пусто, объединение всех классов равно всему множеству.

Отношение порядка делает множество, на котором оно задано, *упорядоченным множеством*. Различают *частичные порядки* и *линейные порядки*. В частично упорядоченном множестве существуют элементы, не связанные отношением порядка. В линейно упорядоченном множестве каждая пара элементов связана отношением порядка.

3.2. Нечеткие бинарные отношения

Пусть U — какое-либо множество, U^2 — декартов квадрат этого множества.

Определение 3.9. ***Нечетким бинарным отношением на множестве*** U называют нечеткое подмножество U^2:

$$\Gamma = \sum_{U^2} \mu_\Gamma(u_i,\ u_j)/(u_i,\ u_j)\,, \tag{3.3}$$

$$\Gamma = \int_{U^2} \mu_\Gamma(x,\ y)/(x,\ y)\,. \tag{3.4}$$

Функция принадлежности нечеткого бинарного отношения $\mu_\Gamma\ (x, y)$ является аналогом характеристической функции в случае обычных бинарных отношений.

Способы задания нечетких бинарных отношений те же, что и для обычных отношений. Приведем их.

1. *График нечеткого бинарного отношения.* Формулы (3.3) и (3.4) задают графики нечетких бинарных отношений. Если U — конечное множество, то используется формула (3.3), если U — часть числовой оси или вся числовая ось, — формула (3.4).
2. *Характеристическое свойство нечеткого бинарного отношения.* Например, $a\rho b$: «a имеет сходство с b» (на множестве людей), $a\rho b$: «a много больше, чем b» (на множестве чисел) и т. п.
3. *Граф нечеткого бинарного отношения.* Граф нечеткого бинарного отношения — ориентированный взвешенный граф (рис. 3.5). Каждое ребро $(x,\ y)(x,\ y \in U)$ графа имеет вес, равный значению функции принадлежности $\mu_\Gamma(x, y)$.

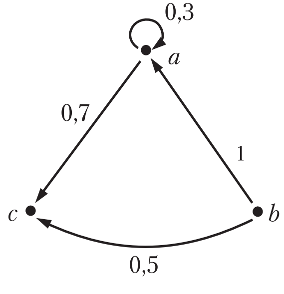


Рис. 3.5. Граф бинарного отношения $\Gamma = 0{,}3/(a,\ a) + 0{,}7/(a,\ c) + 1/(b,\ a) + 0{,}5/(b,\ c)$ на множестве $U = \{a,\ b,\ c\}$

4. *Матрица инциденций нечеткого бинарного отношения*. Матрица $J_\Gamma = (x_{ij})$ бинарного отношения Γ на множестве U, содержащем n элементов, — это матрица порядка n, элементами которой являются значения функции принадлежности: $x_{ij} = \mu_\Gamma(u_i,\ u_j)$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$.

Рассмотрим пример. Пусть нечеткое бинарное отношение $a\rho b$: «a значительно меньше, чем b» задано на множестве $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ и имеет график

$$\Gamma = 0{,}3/(1;\ 2) + 0{,}8/(1;\ 3) + 1/(1;\ 4) + 0{,}3/(2;\ 3) + \\ +0{,}8/(2;\ 4) + 0{,}3/(3;\ 4)$$

Граф такого отношения изображен на рис. 3.6, а матрицей отношения является матрица J, в клетках которой записаны значения функции принадлежности для каждого элемента множества U^2:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

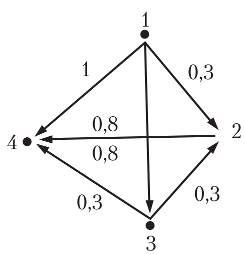


Рис. 3.6. Граф

Пример нечеткого отношения с непрерывным носителем: $U = R$; $x\rho y$: «x близко к y», график отношения — $\Gamma = \int\limits_{R^2} \mathrm{e}^{-\left|\frac{x-y}{2}\right|}/(x,\ y)$.

Разложение нечетких отношений по α-уровням называют ***декомпозицией нечеткого отношения***. Декомпозиция нечеткого отношения определяется следующим равенством:

$$\Gamma = \int\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha / D_\alpha, \qquad (3.5)$$

где $D_\alpha \subseteq U^2$, причем для любой пары (x, y) из множества D_α выполняется неравенство $\mu_\Gamma(x, y) \ge \alpha$. Можно показать, что если $\alpha \le \beta$, то $D_\alpha \subseteq D_\beta$. Раскладывая нечеткое отношение по α-уровням, переходят от нечетких отношений к обычным подмножествам множества U^2.

Выполним декомпозицию отношения $\Gamma = \int\limits_{R^2} e^{-\left|\frac{x-y}{2}\right|}/(x, y)$.

$$e^{-\left|\frac{x-y}{2}\right|} \ge \alpha,\ (\alpha > 0);$$

$$|x - y| \le -2\ln\alpha = -\ln\alpha^2;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge y \\ x - y \le -\ln\alpha^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < y \\ x - y \ge \ln\alpha^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow D_\alpha = \left\{(x, y) \in R^2 : x + \ln\alpha^2 \le y \le x - \ln\alpha^2;\right.$$

$$\left.(0 < \alpha \le 1)\right\}.$$

Все преобразования выполнены на основании свойств элементарных функций. Семейство областей D_α $(0 < \alpha \le 1)$ представляет собой систему вложенных друг в друга полос (рис. 3.7). С уменьшением α ширина полосы возрастает, $\lim\limits_{\alpha\to 0} D_\alpha = R^2$. При $\alpha = 1$ полоса вырождается в прямую $x = y$.

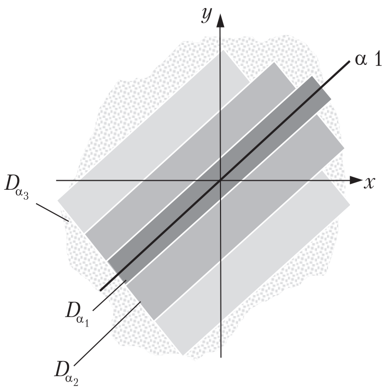


Рис.3.7. Области D_α в декомпозиции $\Gamma = \int\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha / D_\alpha$ нечеткого отношения

$$\Gamma = \int\limits_{R^2} e^{-\left|\frac{x-y}{2}\right|}/(x, y)$$

3.3. Композиция и транзитивное замыкание нечетких бинарных отношений

Пусть Γ_1 и Γ_2 — нечеткие отношения на множестве U и $\mu_{\Gamma_1}(x, y)$, $\mu_{\Gamma_2}(x,y)$ — их функции принадлежности.

Определение 3.10. ***Композицией нечетких бинарных отношений*** Γ_1 и Γ_2 называют нечеткое бинарное отношение $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$, причем

$$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x, y)/(x, y) = \bigcup_{z \in U} \Big(\big(\mu_{\Gamma_1}(x, z)/(x, z) \big) \cap \big(\mu_{\Gamma_2}(z, y)/(z, y) \big) \Big). \quad (3.6)$$

Пересечение одноточечных нечетких множеств $\mu_{\Gamma_1}(x, z)/(x, z)$ и $\mu_{\Gamma_2}(z, y)/(z, y)$ обычно выполняется по логической T-норме, а объединение — по логической T-конорме: $a \cap b = \min(a, b)$, $a \cup b = \ = \max(a, b)$.

При этом формула (3.6) принимает вид

$$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x, y)/(x, y) = \Big(\max_{z \in U} \big(\min(\mu_{\Gamma_1}(x, z), \mu_{\Gamma_2}(z, y)) \big) \Big) /(x, y). \quad (3.7)$$

График композиции отношений определяется следующими формулами:

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \sum_{U^2} \mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x, y)/(x, y) =$$
$$= \sum_{U^2} \Big(\max_{z \in U} \big(\min(\mu_{\Gamma_1}(x, z), \mu_{\Gamma_2}(z, y)) \big) \Big) /(x, y), \quad (3.8)$$

если U — конечное множество;

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \int_{U^2} \mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x, y)/(x, y) =$$
$$= \int_{U^2} \Big(\max_{z \in U} \big(\min(\mu_{\Gamma_1}(x, z), \mu_{\Gamma_2}(z, y)) \big) \Big) /(x, y), \quad (3.9)$$

если U — часть числовой оси или вся числовая ось.

Из формулы (3.6) следует, что для случая, когда U — конечное множество, матрица композиции отношений $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$ есть максиминное произведение матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}:

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = \Big(\max_k (\min(\mu_{\Gamma_1}(u_i, u_k), \mu_{\Gamma_2}(u_k, u_j) \Big)_{n \times n} = \Big(\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(u_i, u_j) \Big)_{n \times n},$$

где n — число элементов множества U.

Пусть, например, нечеткие отношения $a\rho_1 b$: «*a примерно равно b*» и $a\rho_2 b$: «*a немного больше b*» на множестве $U = \{1, 2, 3, 4\}$ заданы матрицами

$$J_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,7 & 1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,7 & 1 \end{pmatrix}; \; J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$:

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} \circ J_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,7 & 1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,7 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, как найдены некоторые элементы матрицы $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$:

$$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(1,1) = \max(\min(1;\ 0), \min(0,7;\ 1), \min(0,2;\ 0,4), \min(0;\ 001),$$
$$\min(0,\ 0)) = \max(0;\ 0,7;\ 0,2;\ 0,\ 0) = 0,7;$$

$$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(1,\ 2) = \max(\min(1;\ 0), \min(0,7;\ 0), \min(0,2;\ 1), \min(0;\ 0,4),$$
$$\min(0;\ 0,1)) = \max(0;\ 0;\ 0,2;\ 0;\ 0) = 0,2 \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим опосредованные влияния в композиции отношений $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$. Например, $\mu_{\Gamma_1}(3,\ 1) = 0,2 < 0,5$, $\mu_{\Gamma_2}(3,\ 1) = 0,4 < 0,5$, т. е., по оценкам экспертов, высказывания «3 примерно равно 1» и «3 немного больше 1» в данном случае скорее ложны, чем истинны. Но $\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(3,\ 1) = 0,7 > 0,5$, т. е. опосредованная связь между 3 и 1 явно имеется. Какие же элементы являются посредниками этого влияния?

Чтобы ответить на этот вопрос, составим схему вычисления $\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(3,\ 1)$:

$$\mu_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}(3,1) = \max(\min(\overbrace{0{,}2;0}^{\boxed{\mu_{\Gamma_1}(3,1),\ \mu_{\Gamma_2}(1,1)}}),\ \min(\overbrace{0{,}7;\ 1}^{\mu_{\Gamma_1}(3,2),\ \ \mu_{\Gamma_2}(2,1)}),\ \min(\overbrace{1;0{,}4}^{\boxed{\mu_{\Gamma_1}(3,3),\ \mu_{\Gamma_2}(3,1)}}),\ \min(\overbrace{0{,}7;0{,}1}^{\boxed{\mu_{\Gamma_1}(3,4),\ \mu_{\Gamma_2}(4,1)}}),\ \min(\overbrace{0{,}2;\ 0}^{\boxed{\mu_{\Gamma_1}(3,5),\ \mu_{\Gamma_2}(5,1)}})) = 0{,}7.$$

Выделенное слагаемое, которое определяет значение $\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(3{,}1) = 0{,}7$, есть минимум $\mu_{\Gamma_1}(3,\ 2)$ и $\mu_{\Gamma_2}(2,\ 1)$:

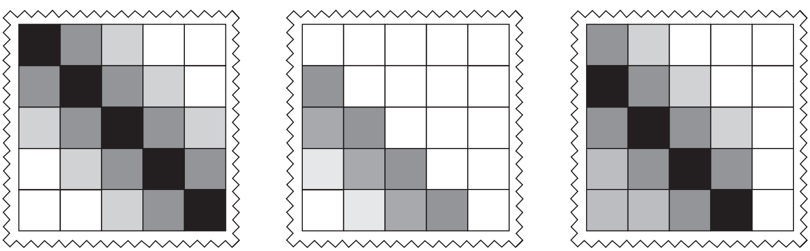
$$3\ \ \textit{примерно}\overset{\mu=0{,}7}{\ }\ \ \textit{равно}\ \ 2\ \text{ и }\ 2\ \ \textit{немного}\overset{\mu=1}{\ }\ \ \textit{больше}\ \ 1.$$

Отсюда следует

$$3\ \ \textit{примерно}\ \ \textit{равно,}\ \ \overset{\mu=0{,}7}{\textit{причем}}\ \ \textit{чуть}\ \ \textit{больше}\ \ 1.$$

Таким образом, влияние 3 на 1 в композиции отношений $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ данного примера осуществляется через 2.

Представим каждую матрицу J_{Γ_1}, J_{Γ_2} и $J_{\Gamma_1} \circ J_{\Gamma_2}$ в виде поля клеток 5×5, в котором значения функции принадлежности $\mu(u_i, u_j)$ соответствуют различной штриховке клеток (рис. 3.8).



J_{Γ_1} $\qquad$ J_{Γ_2} $\qquad$ $J_{\Gamma_1} \circ J_{\Gamma_2}$

Рис. 3.8. Матрицы нечетких бинарных отношений в виде полей клеток

Пусть теперь a, b и c — три психологические характеристики личности человека: a — интеллект, b — сила воли, c — трудолюбие ($U = \{a,\ b,\ c\}$). По оценкам экспертов, влияние друг на друга этих качеств определено, например, следующей матрицей:

$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Интерпретируем некоторые элементы матрицы J_{Γ}.

Влияние интеллекта на силу воли эксперты сочли индифферентным: оно в равной степени может быть или не быть ($\mu_{\Gamma}(a,\ b) = 0{,}5$), а вот влияние силы воли на трудолюбие, по оценке экспертов, очень сильно ($\mu_{\Gamma}(b,\ c) = 1$).

Выявим опосредованные влияния этих качеств друг на друга. Для этого найдем матрицу композиции $\Gamma \circ \Gamma = \Gamma^2$:

$$J_{\Gamma^2} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Матрица J_{Γ^2} обнаруживает весьма существенные опосредованные влияния показателя b (силы воли) на показатель a (интеллект):

$$\mu_{\Gamma}(b,\ a) = 0, \quad \mu_{\Gamma^2}(b, a) = 0{,}9,$$

а также показателя c (трудолюбие) на себя:

$$\mu_{\Gamma}(c,\ c) = 0, \quad \mu_{\Gamma^2}(c,\ c) = 0{,}7.$$

Проанализируем, каким образом возникают эти влияния.

1. $\mu_{\Gamma^2}(b,\ a) = \max(\min(0;\ 0{,}8), \min(0{,}2;\ 0),\ \mathbf{min(1;\ 0{,}9)}\ ) = 0{,}9.$

   Используя названия этих показателей (a — интеллект, b — сила воли, c — трудолюбие), вывод об опосредованном влиянии силы воли на интеллект можно записать такой фразой:

   «Силой воли можно воспитать трудолюбие ($\mu_{\Gamma}(b,\ c) = 1$), трудолюбие усиливает интеллект ($\mu_{\Gamma}(c,\ a) = 0{,}9$)».

   Из этого следует вывод:

   «Сила воли через воспитание трудолюбия усиливает интеллект ($\mu_{\Gamma^2}(b,\ a) = 0{,}9$)».

2. $\mu_{\Gamma^2}(c,\ c) = \max(\ \mathbf{min(0{,}9;\ \ 0{,}7)}\ \min(0{,}5;\ 0), \min(0;\ 0)) = 0{,}7$:

   «Трудолюбие повышает интеллект ($\mu_{\Gamma}(c,\ a) = 0{,}9$), интеллект усиливает трудолюбие ($\mu_{\Gamma}(a,\ c) = 0{,}7$)».

   Следовательно,

   «Трудолюбие дополнительно усиливается через интеллект ($\mu_{\Gamma}(c,\ c) = 0{,}7$)».

Вычислим матрицы более высоких степеней отношения Γ:

$$J_{\Gamma^3} = J_{\Gamma^2 \circ \Gamma} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix},$$

$$J_{\Gamma^4} = J_{\Gamma^3 \circ \Gamma} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $J_{\Gamma^n} = J_{\Gamma^3}$ для любого $n \geq 3$.

Найдем транзитивное замыкание нечеткого отношения Γ, т. е. объединение всех степеней отношения Γ. Значение функции принадлежности пары $(u_i,\, u_j)(u_i,\, u_j \in U)$ по правилу логической T-конормы имеет вид

$$\mu_{\bar{\Gamma}}(u_i,\, u_j) = \max(\mu_{\Gamma}(u_i,\, u_j),\, \mu_{\Gamma^2}(u_i,\, u_j), \ldots, \mu_{\Gamma^n}(u_i,\, u_j), \ldots)\,. \quad (3.10)$$

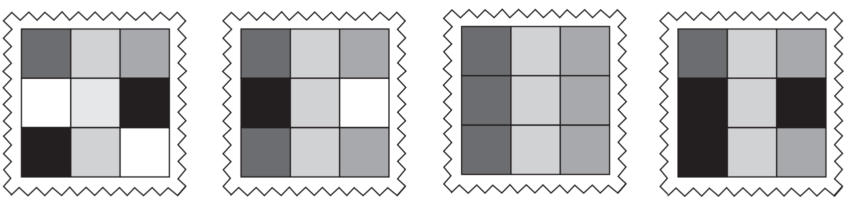
В данном примере

$$\max(\mu_{\Gamma}(u_i,\, u_j),\, \mu_{\Gamma^2}(u_i,\, u_j), \ldots, \mu_{\Gamma^n}(u_i,\, u_j), \ldots) = \max(\mu_{\Gamma}(u_i,\, u_j),$$
$$\mu_{\Gamma^2}(u_i,\, u_j), \mu_{\Gamma^3}(u_i,\, u_j))\,.$$

Этот максимум находим, сравнивая элементы, стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца в матрицах $J_{\Gamma}, J_{\Gamma^2}, J_{\Gamma^3}$ и выбирая наибольший:

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3 = 0{,}8\,/(a,\, a) + 0{,}5\,/(a,\, b) + 0{,}7\,/(a,\, c) + 0{,}9\,/(b,\, a) +$$
$$+0{,}5\,/(b,\, b) + 1\,/(b,\, c) + 0{,}9\,/(c,\, a) + 0{,}5\,/(c,\, b) + 0{,}7\,/(c,\, c)\,.$$

Изобразим различной штриховкой матрицы степеней отношения Γ и его транзитивного замыкания (рис. 3.9).



J_{Γ} J_{Γ^2} $J_{\Gamma^n}\,(n \geq 3)$ $J_{\bar{\Gamma}}$

Рис. 3.9. Матрицы степеней нечеткого отношения Γ и транзитивного замыкания этого отношения

Свойство транзитивности нечеткого бинарного отношения определяется через матрицу отношения.

Определение 3.11. Нечеткое бинарное отношение Γ называют ***транзитивным***, если каждый элемент матрицы J_Γ^2 не превосходит соответствующий элемент матрицы J_Γ, т. е. $J_\Gamma^2 \le J_\Gamma$.

Эквивалентное определение транзитивности нечеткого отношения можно дать через функцию принадлежности $\mu_\Gamma(x, y)(x, y \in U)$.

Определение 3.12. Нечеткое бинарное отношение Γ называют ***транзитивным***, если для любой пары $(x, y) \in U^2$ справедливо неравенство $\mu_\Gamma(x, y) \ge \max\limits_{z \in U}(\min(\mu_\Gamma(x, z), \mu_\Gamma(z, y))$.

С практической точки зрения значительно более удобным является определение 3.11.

Определение транзитивного замыкания $\hat{\Gamma}$ ***нечеткого*** бинарного отношения $\Gamma = \sum\limits_{U^2} \mu_\Gamma(u_i, u_j)/(u_i, u_j)$ или $\Gamma = \int\limits_{U^2} \mu_\Gamma(x, y)/(x, y)$ совпадает с определением 3.6 транзитивного замыкания обычного отношения. При этом нахождение степеней отношения и операция объединения выполняются по правилам оперирования с нечеткими множествами.

Так же, как и в случае обычных бинарных отношений, любое нечеткое транзитивное отношение Γ совпадает со своим транзитивным замыканием $\hat{\Gamma}$, а транзитивное замыкание есть наименьшее транзитивное отношение, включающее в себя отношение Γ.

3.4. Свойства и виды нечетких бинарных отношений

Основными свойствами любых бинарных отношений являются рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность (табл. 3.2). В табл. 3.3 эти свойства записаны в символах теории нечетких множеств. Определение свойства транзитивности не дается, так как оно подробно рассмотрено в разделе 3.3.

Обычные отношения, обладающие свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, являются отношениями эквивалентности, антисиммеричные и транзитивные отношения — отношениями порядка.

Отношения эквивалентности разбивают множества на классы эквивалентности, отношения порядка — упорядочивают множества.

Таблица 3.2. Свойства бинарного отношения $\Gamma \subseteq A^2$

Свойство	**График** Γ	**Характеристическое свойство** $a\rho b$	**Матрица отношения** $J_\Gamma = (x_{i,j})_{n\times n}$	**Характеристическая функция** $\mu(a,b)$
Рефлексивность	$(a, a) \in \Gamma \quad (a \in A)$	$a\rho a$ — истина, $(a \in A)$	$x_{ii} = 1\ (i = 1, 2, \ldots\ n)$	$\mu(a, a) = 1$, $(a \in A)$
Симметричность	$(a, b) \in \Gamma \Rightarrow (b, a) \in \Gamma$ $(a, b \in A)$	$a\rho b \Rightarrow b\rho a$ — истина, $(a, b \in A)$	$x_{ij} = 1 \Rightarrow x_{ji} = 1$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ $J_\Gamma = J_\Gamma^{\mathrm{T}}$	$\mu(a, b) = 1 \Rightarrow \mu(b, a) = 1$, $(a, b \in A)$
Антисимметричность	$(a, b) \in \Gamma \wedge (b, a) \in$ $\Gamma \Leftrightarrow a = b$, $(a, b \in A)$	$a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b$ — истина, $(a, b \in A)$	$x_{ij} = 1 \wedge x_{ji} = 1$ $\Leftrightarrow i = j$ $J_\Gamma \cap J_\Gamma^{\mathrm{T}} \subseteq E$	$\mu(a, b) = 1 \wedge \mu(b, a) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = b$, $(a, b \in A)$
Транзитивность	$(a, b) \in \Gamma \wedge (b, c) \in$ $\in \Gamma \Rightarrow (a, c) \in \Gamma$, $(a, b, c \in A)$	$a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$ — истина, $(a, b, c \in A)$	$J_\Gamma^2 \subseteq J_\Gamma$	$\mu(a, b) = 1 \wedge \mu(b, c) = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu(a, c) = 1$, $(a, b, c \in A)$

Примечание. Символом J_Γ^{T} обозначена транспонированная матрица J_Γ, E — единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Таблица 3.3. Свойства нечетких бинарных отношений

$$\Gamma = \sum_{U^2} \mu_\Gamma(u_i,\ u_j)/(u_i,\ u_j),\ \Gamma = \int_{U^2} \mu_\Gamma(x,y)/(x,y)$$

Свойство	**Матрица отношения** $J_\Gamma = (\mu_\Gamma(u_i,\ u_j))_{n\times n}$	**Характеристическая функция** $\mu_\Gamma(x,\ y)$
Рефлексивность	$\forall u_i (u_i \in U):$ $\mu_\Gamma(u_i,\ u_i) = 1\ (i = 1,\ 2,\dots\ n)$	$\forall x (x \in U):\ \mu_\Gamma(x,\ x) = 1$
Антирефлексивность	$\forall u_i (u_i \in U):$ $\mu_\Gamma(u_i,\ u_i) = 0\ (i = 1,\ 2,\dots\ n)$	$\forall x (x \in U):\ \mu_\Gamma(x,\ x) = 0$
Симметричность	$J_\Gamma = J_\Gamma^{\mathrm{T}}$	$\forall (x,\ y)(x,\ y \in U):$ $\mu_\Gamma(x,\ y) = \mu_\Gamma(y,\ x)$
Антисимметричность	$\forall u_i,\ u_j (u_i,\ u_j \in U,\ i \neq j):$ $\left(\mu_\Gamma(u_i,\ u_j) \neq \mu_\Gamma(u_j,\ u_i)\right) \vee$ $\vee \left(\mu_\Gamma(u_i,\ u_j) = \mu_\Gamma(u_j,\ u_i) = 0\right)$	$\forall (x,\ y)(x,\ y \in U,\ x \neq y)$ $\left(\mu_\Gamma(x,\ y) \neq \mu_\Gamma(y,\ x)\right) \vee$ $\vee (\mu_\Gamma(x,\ y) = \mu_\Gamma(y,\ x) =$ $= 0)$

Виды нечетких отношений приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4. Виды нечетких бинарных отношений

Отношение	**Свойство**				
	Рефлексивность	**Антирефлексивность**	**Транзитивность**	**Симметричность**	**Антисимметричность**
Предпорядок	+		+		
Сходство	+			+	
Несходство		+		+	
Подобие	+		+	+	

Отношение	Свойство				
	Рефлексивность	**Антирефлексивность**	**Транзитивность**	**Симметричность**	**Антисимметричность**
Порядок	+				+
Нестрогий порядок	+		+		+
Строгий порядок		+	+		+

ПРИМЕЧАНИЕ

«+» отмечены те свойства, которыми должно обладать отношение, чтобы его можно было отнести к указанному виду отношений.

Отношение предпорядка. Покажем, что если отношение Г рефлексивно, то $J_{\Gamma}^2 \geq J_{\Gamma}$. В самом деле, рефлексивность отношения означает, что все числа главной диагонали матрицы J_{Γ} — единицы:

$$J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & 1 & \ldots & \mu_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $s_{ij}(i,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ матрицы J_{Γ}^2 есть максиминное произведение i-й строки матрицы J_{Γ} на ее j-й столбец:

$$s_{ij} = \max_k(\min(\mu_{ik}\ \ \mu_{kj})) = \max(\min(\mu_{i1},\ \mu_{1j}), \min(\mu_{i2},\ \mu_{2j}), \ldots,$$
$$\min(\mu_{ii},\ \mu_{ij}), \ldots \min(\mu_{in},\ \mu_{nj})) =$$
$$= \max(\min(\mu_{i1},\ \mu_{1j}), \min(\mu_{i2},\ \mu_{2j}), \ldots, \min(1,\ \mu_{ij}), \ldots, \min(\mu_{in},\ \mu_{nj})) =$$
$$= \max(\min(\mu_{i1},\ \mu_{1j}), \min(\mu_{i2},\ \mu_{2j}), \ldots,\ \mu_{ij},\ \ldots,\ \min(\mu_{in},\ \mu_{nj})) \geq \mu_{ij}.$$

Отношение предпорядка выделяет из всех рефлексивных отношений транзитивные отношения. Транзитивные нечеткие отношения играют особую роль в приложениях теории нечетких множеств, так как определяют некоторую правильную структуру множества, на котором они заданы. Если отношение Γ не является транзитивным, то ближайшим к нему транзитивным отношением будет транзитивное замыкание Γ.

Отношение сходства. Нечеткое отношение сходства задается с помощью матриц сходства либо неориентированных взвешенных графов [7]. Матрицы отношений сходства, для которых свойства рефлексивности и симметричности имеют естественную интерпретацию, могут быть получены в результате как измерения некоторого физического параметра, отражающего связи между объектами, так и опроса экспертов, которые для каждой пары объектов из U указывают их степень сходства по некоторой шкале сравнений. Градации этой шкалы могут быть составлены из слов русского языка, отражающих силу сходства между объектами и линейно упорядоченных между собой. Например, такая шкала может состоять из фраз типа: «очень сильное сходство», «сильное сходство», «сходство средней силы», «слабое сходство», «очень слабое сходство» и т. п.

Отношение несходства. В определенном смысле отношение несходства является противоположным отношению сходства. Действительно, если $\Gamma \subseteq A^2$ является рефлексивным и симметричным отношением, то его дополнение $\overline{\Gamma}$ представляет собой антирефлексивное и симметричное отношение[1].

Пусть, например, имеется матрица рефлексивного и симметричного отношения (отношения сходства)

$$J_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 1 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значения функции принадлежности противоположного ему отношения $\overline{\Gamma}$, т. е. дополнения Γ до A^2, находим по правилу

$$\mu_{\overline{\Gamma}}(u_i,\, u_j) = 1 - \mu_\Gamma(u_i,\, u_j), \qquad ((u_i,\, u_j) \in A^2)$$

(см. табл. 1.5). Используя эту формулу, получаем

[1] Верно и обратное утверждение, если Γ является антирефлексивным и симметричным отношением (отношение несходства), то противоположное ему отношение $\overline{\Gamma}$ рефлексвно и симметрично (отношение сходства).

$$J_{\overline{\Gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $J_{\overline{\Gamma}}$ является матрицей антирефлексивного и симметричного отношения, то есть отношения несходства (см. табл. 3.4).

Отношение подобия. Отношение подобия выделяется из класса отношений сходства добавлением свойства транзитивности (см. табл. 3.4), что обеспечивает возможность разбиения множества A на классы подобия.

Пусть, например, отношение сходства Γ на множестве $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ задано матрицей инциденций

$$J_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, транзитивно ли отношение Γ:

$$J_{\Gamma^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix};\ \Gamma \subseteq \Gamma^2.$$

Следовательно, Γ не является транзитивным отношением. Найдем ближайшее к Γ транзитивное отношение, т. е. транзитивное замыкание Γ:

$$\hat{\Gamma} = \bigcup_{n=1,\ 2,\ldots} \Gamma^n.$$

Для этого вычислим матрицы инциденций следующих степеней отношения Γ:

$$J_{\Gamma^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,8 & 0,6 \\ 0,8 & 1 & 0,8 & 0,6 \\ 0,8 & 0,8 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\Gamma^4, \Gamma^5, \ldots$ совпадут с Γ^3. Следовательно, $\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3$, причем $J_{\Gamma^3} \geq J_{\Gamma^2} \geq J_{\Gamma}$, а значит, $\hat{\Gamma} = \Gamma^3$ — транзитивное замыкание отношения Γ, т. е. Γ^3 — ближайшее к Γ транзитивное отношение.

Построим графы отношений $\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3$ по множествам α-уровня (рис. 3.10 — 3.12).

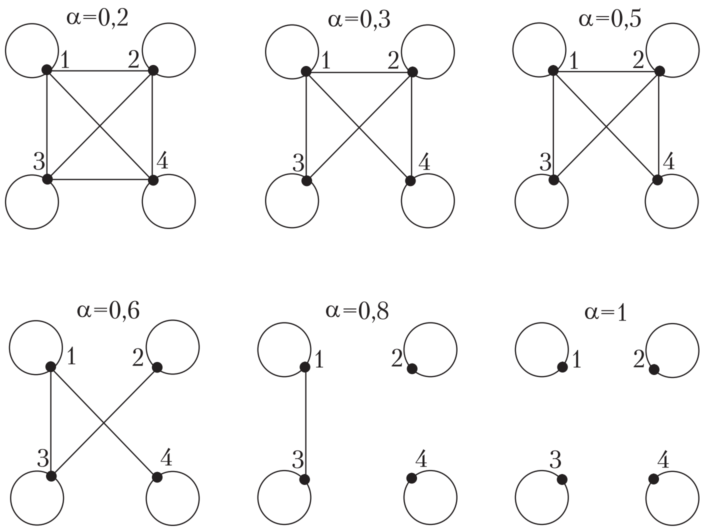


Рис. 3.10. Графы отношения Γ, построенные по множествам уровня α

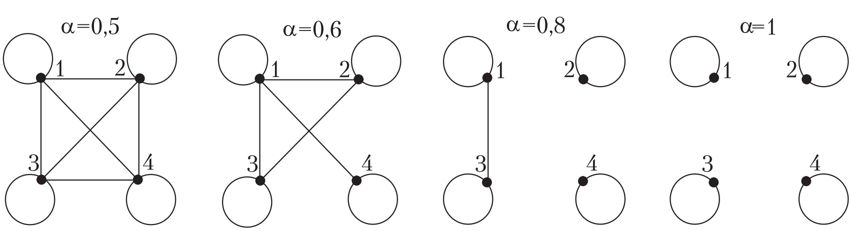


Рис. 3.11. Графы отношения Γ^2, построенные по множествам уровня α

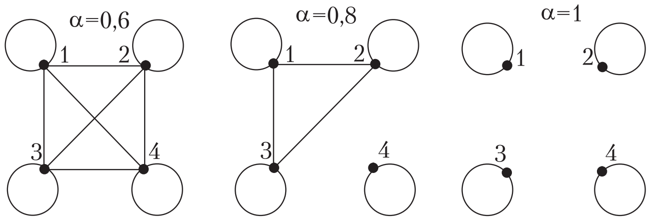


Рис. 3.12. Графы отношения $\hat{\Gamma} = \Gamma^3$, построенные по множествам уровня α

ПРИМЕЧАНИЕ

Поскольку обычные и нечеткие бинарные отношения определяются как подмножества универсального множества U^2 (см. определения 3.2, 3.9), то понятие множества α-уровня (см. раздел 1.3) естественным образом распространяется и на случай бинарных отношений.

Анализируя последовательность графов, изображенных на рис. 3.10, можно видеть, что при $\alpha = 0{,}2$ множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$ объединено отношением в один класс, так как все элементы множества связаны отношением Γ. При $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}6$ классы не образуются, поскольку некоторые элементы A отношением Γ не связаны. При $\alpha = 0{,}8$ множество A распадается на три непересекающихся класса: $A = \{1,3\} \cup \{2\} \cup \{4\}$, а при $\alpha = 1$ — на четыре одноточечных класса: $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$.

Анализ последовательности графов, представленных на рис. 3.11, показывает, что при $\alpha = 0{,}5$ множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$ объединено в один класс, так как все его элементы связаны отношением Γ^2. При $\alpha = 0{,}6$ и $\alpha = 0{,}8$ классы не образуются, поскольку некоторые элементы A отношением Γ^2 не связаны. При $\alpha = 1$ множество A распадается на четыре одноточечных класса: $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$.

Транзитивное отношение $\Gamma = \Gamma^3$ (см. рис. 3.12) разбивает $A = \{1, 2, 3, 4\}$ на непересекающиеся классы при любых значениях α. Все элементы, попадающие в один класс, попарно связаны друг с другом этим отношением. Если $\alpha = 0{,}6$, то образуется один класс $A = \{1, 2, 3, 4\}$, при $\alpha = 0{,}8$ — два класса $A = \{1, 2, 3\} \cup \{4,\}$, при $\alpha = 1$ — четыре класса $A = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$.

Рассмотренный пример иллюстрирует справедливость следующего утверждения о нечетких отношениях подобия (рефлексивных, симметричных и транзитивных отношениях).

Утверждение. Нечеткое отношение подобия на любом α-уровне разбивает несущее множество на непересекающиеся классы.

Отношение порядка. Если нечеткое отношение является каким-либо из отношений порядка (см. табл. 3.4), то ему обычно придается смысл «предпочтения», «доминирования», «подчиненности». В этих случаях транзитивность обеспечивает возможность естественного упорядочения объектов, выделения «наилучших», «недоминируемых» объектов и т. п.

3.5. Нечеткие бинарные соответствия

Определение 3.13. ***Бинарным соответствием на множестве*** $A \times B$ называют подмножество Γ декартова произведения множеств A и B: $\Gamma \subseteq A \times B$.

Декартово произведение $A \times B$ — множество всех пар, в которых на первом месте стоит элемент множества A, а на втором — элемент множества B. Бинарные отношения $\Gamma \subseteq A^2$ (см. подразделы 3.1–3.4) можно рассматривать как частный случай бинарных соответствий, когда $A = B$. Бинарные соответствия (обычные и нечеткие) задают так же, как и бинарные отношения.

1. *График* Γ *нечеткого бинарного соответствия* — $\Gamma \subseteq A \times B$.
2. *Характеристическое свойство нечеткого бинарного соответствия* — $a\rho b (a \in A,\ b \in B)$.
3. *Граф нечеткого бинарного соответствия* — ориентированный взвешенный двудольный граф (рис. 3.13). На рисунке направление стрелок — от элементов множества A к элементам множества B; веса ребер — функции принадлежности $\mu(a,\ b)$ нечеткого соответствия.

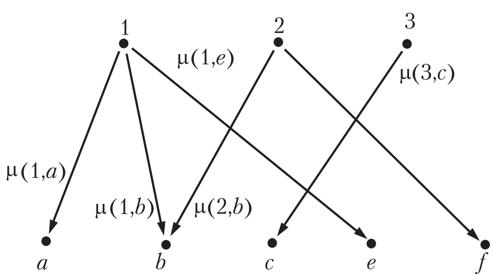


Рис. 3.13. Ориентированный взвешенный двудольный граф, граф бинарного соответствия $\Gamma \subseteq A \times B$, $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{a,\ b,\ c,\ e,\ f\}$

4. *Матрица инциденций нечеткого бинарного соответствия* $\Gamma \subseteq A \times B$ имеет вид $J_\Gamma = (x_{ij})_{m\times n}$, где m — количество элементов множества A, n — количество элементов множества B, $x_{ij} = \mu(a_i, b_j)$ — значение функции принадлежности пары (a_i, b_j), $(a_i \in A, b_j \in B)$ бинарному соответствию Γ.

Пусть даны множества A={*понедельник*, *вторник*, *среда*, *четверг*, *пятница*, *суббота*, *воскресенье*} — множество дней недели, B={*солнечно*, *тепло*, *ветрено*, *дождь*, *гроза*, *резкое похолодание*} — погодные условия. На множестве $A \times B$ задано бинарное соответствие $a\rho b$: «*в день a ожидается погода b*» $(a \in A,\ b \in B)$. Синоптики задали свой прогноз матрицей инциденций

$$J_\rho = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Как следует из матрицы инциденций, синоптики предполагают, что, к примеру, вторник (вторая строка матрицы инциденций) вряд ли будет солнечным (μ (*вторник*, *солнечно*) $= 0{,}2$), наверняка, не будет теплым (μ (*вторник*, *тепло*) $= 0$), скорей всего, будет ветреным (μ (*вторник*, *ветрено*) $= 0{,}8$), возможно, будет дождь (μ (*вторник*, *дождь*) $= 0{,}6$), но грозы и резкого похолодания не предвидится (μ (*вторник*, *гроза*) $= 0$, μ (*вторник*, *резкое похолодание*) $= 0$).

Композиция бинарных соответствий определяется аналогично композиции бинарных отношений (см. определение 3.10):

Определение 3.14. ***Композицией нечетких бинарных соответствий*** $\Gamma_1 \subseteq A \times B$ и $\Gamma_2 \subseteq B \times C$ называют нечеткое бинарное соответствие $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \subseteq A \times C$, причем

$$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x, y)/(x, y) = \bigcup_{z \in B} \left(\mu_{\Gamma_1}(x, z)/(x, z) \cap \mu_{\Gamma_2}(z, y)/(z, y) \right)$$
$$(x \in A,\ y \in C). \qquad (3.11)$$

Пересечение одноточечных нечетких множеств $\mu_{\Gamma_1}(x, z)/(x, z) \cap \mu_{\Gamma_2}(z, y)/(z, y)$ так же, как и в случае бинарных отношений, обычно выполняется по логической T-норме, а объединение — по логической T-конорме:

$$a \cap b = \min(a,\ b),\ a \cup b = \max(a,\ b).$$

При этом формула (3.11) принимает вид

$$\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x,\ y)/(x,\ y) = \left(\max_{z \in B}\left(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,\ z), \mu_{\Gamma_2}(z,\ y))\right)\right)/(x,\ y)$$
$$(x \in A,\ y \in C). \tag{3.12}$$

График композиции соответствий определяется формулами:

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \sum_{A \times C} \mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x,\ y)/(x,\ y) =$$
$$= \sum_{A \times C}\left(\max_{z \in B}\left(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,\ z), \mu_{\Gamma_2}(z,\ y))\right)\right)/(x,\ y), \tag{3.13}$$

если A, B и C — конечные множества;

$$\Gamma_1 \circ \Gamma_2 = \int_{A \times C} \mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x, y)/(x,\ y) =$$
$$= \int_{A \times C} (\max_{z \in B}(\min(\mu_{\Gamma_1}(x,\ z),\ \mu_{\Gamma_2}(z,\ y))/(x,\ y), \tag{3.14}$$

если множества A, B и C представляют собой промежуток числовой оси или всю числовую ось.

Из формулы (3.13) очевидно, что для случая, когда A, B и C — конечные множества, матрица композиции отношений $J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}$ есть максиминное произведение матриц J_{Γ_1} и J_{Γ_2}:

$$J_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} \cdot J_{\Gamma_2} = \left(\max_{k=1,2,\ldots,p}(\min(\mu_{\Gamma_1}(x_i,\ z_k), \mu_{\Gamma_2}(z_k,\ y_j)\right)_{m \times n} =$$
$$= \left(\mu_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}(x_i,\ y_j)\right)_{m \times n},$$

где p — количество элементов множества B; m — количество элементов множества A; n — количество элементов множества C.

Композиция бинарных соответствий, так же как и композиция бинарных отношений, выявляет скрытые, опосредованные связи между элементами множеств A и C, если заданы соответствия на множествах $A \times B$ и $B \times C$.

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ — качества личности, где x_1 — интеллект, x_2 — сила воли, x_3 — трудолюбие; $B = \{z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4\}$ — социальные показатели, где z_1 — успешность в бизнесе, z_2 — среднемесячный доход, z_3 — жилищные условия, z_4 — семейное положение, $C=\{y_1,y_2\}$ — показатели качества жизни, где y_1 — количество детей в семье, y_2 — регулярность отдыха. Пусть также, по оценкам экспертов, влияние друг на друга этих качеств определено следующими матрицами:

$$J_1=J_{\Gamma_1\circ\Gamma_2}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}9\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix};\ J_2=J_{\Gamma_2\circ\Gamma_3}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}7\\ 0{,}9 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}7\end{pmatrix}.$$

Выявим скрытые опосредованные влияния качеств личности на качества жизни. Для этого перемножим матрицы J_1 и J_2:

$$J=J_1\cdot J_2=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}9\\ 1 & 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}3\\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}7\\ 0{,}9 & 0{,}3\\ 1 & 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}7\\ 0{,}8 & 0{,}7\\ 0{,}7 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Интерпретируем наиболее значимые опосредованные влияния качеств личности на качества жизни:

1) $s_{11}=0{,}9$;
$s_{11}=\max(\ \min(0{,}8;0{,}8)\,,\min(0{,}5;0{,}2),\min(0{,}2;0{,}9)\,,\mathbf{\min(0{,}9;1)}\,)=0{,}9.$

Значение логической суммы $s_{11}=0{,}9$ определяется выделенным слагаемым $\mathbf{\min(0{,}9;1)}$, которое представляет собой логическое произведение функций принадлежности $\mu_1(x_1,\ z_4)\cdot\mu_2(z_4,\ y_1)$. Используя названия показателей (x_1 — интеллект, z_4 — семейное положение, y_1 — количество детей в семье), вывод об опосредованном влиянии x_1 на y_1 можно записать такой фразой:

«Интеллект влияет на семейное положение ($\mu_1(x_1,\ z_4)=0{,}9$), семейное положение определяет количество детей в семье ($\mu_2(z_4,\ y_1)=1$)».

Из этого следует вывод:

«Интеллект, обеспечивая устойчивое семейное положение, оказывает большое влияние на количество детей в семье».

2) $s_{21}=0{,}8$;
$s_{11}=\max\ (\mathbf{\min(1;\ 0{,}8)}\,,\min(0{,}9;\ 0{,}2),\min(0{,}7;\ 0{,}9)\,,\min(0{,}3;\ 1)\,)=0{,}8.$

Выделенное слагаемое $\mathbf{\min(1;\ 0{,}8)}$ является произведением $\mu_1(x_2,\ z_1)\cdot\mu_2(z_1,\ y_1)$. Применив аналогичные рассуждения в этом случае, запишем:

«Сила воли (x_2) определяет успешность в бизнесе (z_1 , $\mu_1(x_2, z_1) = 1$), успешность в бизнесе (z_1) позволяет планировать количество детей в семье (y_1 , $\mu_2(z_1, y_1) = 0{,}8$)».

Из этого следует вывод:

«Сила воли, определяя успешность бизнеса, оказывает большое влияние на количество детей в семье».

Контрольные вопросы

1. Дайте определение нечеткого бинарного отношения.
2. Перечислите способы задания нечетких бинарных отношений.
3. Сравните способы задания нечетких и обычных бинарных отношений.
4. Что называют декомпозицией нечеткого отношения?
5. Сформулируйте определение композиции транзитивного нечетких бинарных соотношений транзитивного замыкания.
6. Перечислите основные свойства нечетких бинарных отношений.
7. Приведите типы нечетких бинарных отношений и сравните их с обычными.
8. Что называют нечеткими бинарными соответствиями? В чем различие нечетких бинарных отношений и соответствий? В чем сходство нечетких бинарных отношений и соответствий?
9. Как с помощью введенных определений трактовать понятие «опосредованное влияние»?
10. Какие процедуры формализует транзитивное замыкание нечетких бинарных отношений и соответствий?

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$ — члены семьи Ивановых. На множестве A задано отношение $x\rho y$: «*x внешне похож на y*» $(x, y \in A)$. Требуется:

   1) выступая в роли эксперта, задайте график отношения ρ;

2) построить граф отношения;
3) записать матрицу инциденций отношения;
4) проверить, является ли отношение транзитивным, и записать матрицу его транзитивного замыкания (если оно существует).

2. На отрезке $U=[-1,\ 1]$ задано нечеткое отношение $\Gamma=\int\limits_{U^2}\cos\left(\dfrac{\pi(x-y)}{2}\right)/(x,\ y)$. Выполните декомпозицию отношения. Запишите множества α-уровня для $\alpha_1=\dfrac{1}{2}$, $\alpha_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. На множестве $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ заданы бинарные отношения:
$\Gamma_1=1/(1,\ 1)+0{,}8/(1,\ 3)+1/(2,\ 1)+1/(2,\ 2)+0{,}4/(2,\ 4)+$
$+0{,}7/(3,\ 1)+1/(3,\ 3)+0{,}6/(4,\ 2)+1/(4,\ 4)$;
$\Gamma_2=1/(1,\ 2)+0{,}8/(1,\ 3)+1/(1,\ 4)+1/(2,\ 3)+0{,}4/(2,\ 4)+$
$+0{,}7/(3,\ 1)+1/(3,\ 2)+0{,}6/(4,\ 2)+1/(4,\ 3)$. Требуется:
1) построить графы отношений;
2) записать матрицы инциденций отношений Γ_1 и Γ_2;
3) найти матрицу инциденций и график композиции отношений $\Gamma_1\circ\Gamma_2$.

4. На множестве $U=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\}$ задано отношение:

$x\rho y$: «*x оказывает влияние на y*», $(x,y\in U)$,

матрица инциденций которого имеет вид

$$J_\rho=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 1 & 1 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6\\ 0{,}7 & 0{,}7 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 & 1\\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 1 & 0{,}7 & 1\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 1 & 1 & 1 & 0{,}3\\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется выявить и интерпретировать наиболее существенные опосредованные влияния элементов множества друг на друга.

5. Пусть $U=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ — несколько девушек вашей группы. На множестве U заданы отношения:

$$x\rho_1 y: «x \quad такая \quad же \quad симпатичная, \quad как \quad y», \quad (x,\ y\in U),$$
$$x\rho_2 y: «x \quad немного \quad старше, \quad чем \quad y», \quad (x,\ y\in U),$$
$$x\rho_3 y: «x \quad и \quad y \quad учатся \quad примерно \quad одинаково», \quad (x,\ y\in U).$$

Задайте матрицы инциденций этих отношений так, чтобы отношения обладали свойствами:

1) ρ_1 — антирефлексивности и симметричности;
2) ρ_2 — антирефлексивности и антисимметричности;
3) ρ_3 — рефлексивности и симметричности.

Есть ли среди полученных отношений отношения сходства, отношения несходства, отношения подобия, отношения строгого или нестрогого порядков? (Ответ обоснуйте.)

6. Выпишите матрицы инциденций отношений ρ_1, ρ_2 и ρ_3 из задания 5:

1) для каждого из отношений запишите множества α-уровня, для $\alpha\in\{0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8;\ 1\}$. Постройте графы «обычных» отношений для каждого из множеств α-уровня;
2) найдите транзитивные замыкания отношений ρ_1, ρ_2 и ρ_3 (если они существуют) и постройте множества α-уровня и их графы для каждого из транзитивных замыканий.

7. На множествах $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ и $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4\}$ матрицами инциденций заданы бинарные отношения:

$$J_A=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}8 & 1 & 0{,}9 & 1 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}9 & 1 & 0 & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 & 0{,}2\\ 1 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } J_B=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0{,}5\\ 0{,}7 & 1 & 0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 1 & 0{,}8\\ 0{,}9 & 1 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix},$$

которые будем интерпретировать как отношения влияния элементов друг на друга внутри множеств A и B.

Также с помощью матрицы задано соответствие на множестве $A\times B$:

$$J_{A\times B}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,6 & 0,8 & 1\\ 0,6 & 0,8 & 1 & 0,3\\ 0,8 & 1 & 0,3 & 0,6\\ 1 & 0,3 & 0,6 & 0,8\\ 0,3 & 0,6 & 0,8 & 1\end{pmatrix}.$$

Требуется:

1) выявить и интерпретировать опосредованные влияния элементов внутри множеств A и B;
2) выявить и интерпретировать опосредованные влияния элементов множества A на элементы множества B, используя следующие матрицы:
   а) $J_A \cdot J_{A\times B}$;
   б) $J_{A\times B} \cdot J_B$;
   в) $J_A \cdot J_{A\times B} \cdot J_B$.

4. Лингвистическая переменная

4.1. Понятие лингвистической переменной

В школьном курсе математики значениями переменных являются числа. Такие переменные величины называют числовыми переменными. Например, предложение «$x = 3$» означает, что числовой переменной x присвоено значение 3.

Принципиальное отличие лингвистической переменной от переменной числовой состоит в том, что ее значениями являются не числа, а слова или предложения в естественном или формальном языке. Лингвистическая переменная позволяет приближенно описывать явления, которые настолько сложны, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах.

Пусть лингвистическая переменная x имеет смысл «*возраст*». С переменной x связано универсальное множество $U = [0{,}100]$, каждый элемент которого есть число лет, прожитых человеком. Однако значениями лингвистической переменной x являются не числа из множества U, а слова: «*молодой*», «*немолодой*», «*старый*», «*очень старый*», «*не молодой и не старый*» и т. п. По аналогии с числовой переменной предложение «*возраст*» = «*молодой*» означает, что лингвистической переменной «*возраст*» присвоено значение «*молодой*». Слова, являющиеся значениями лингвистической переменной, называются *термами* и объединяются в *терм-множество* $T(x)$. Так, терм-множество лингвистической переменной «*возраст*» составляют указанные выше слова.

Термы можно рассматривать как имена нечетких множеств, заданных на универсальном множестве U и имеющих определенную функцию принадлежности. Если X — элемент терм-множества лингвистической переменной x, то это есть название нечеткого множества $X = \sum_{U} \mu_X(u)/u$ или $X = \int_{U} \mu_X(u)/u$.

К примеру, одно из возможных значений лингвистической переменной «*возраст*» является терм «*старый*». Это есть название нечеткого подмножества X_1 универсального множества $U = [0{,}100]$.

Функция принадлежности нечеткого множества X_1 = «*старый*» может иметь вид $\mu_{X_1}(u) = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$.

Другой возможный терм X_2=«*очень старый*». Его функцию принадлежности можно получить, применив к нечеткому множеству X_1 операцию концентрирования (см. формулу (1.7)):

$$\mu_{X_2}(u) = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2}.$$

Запишем нечеткие множества X_1 и X_2 как суммы одноточечных множеств: «*старый*» $= \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} / u$, «*очень старый*» $= \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2} / u$.

Построим графики функций принадлежности $\mu_{\text{старый}} = \mu_{X_1}(u)$ и $\mu_{\text{очень старый}} = \mu_{X_1}(u)$ нечетких множеств X_1 и X_2 (рис. 4.1).

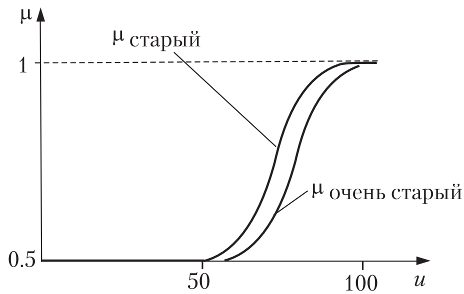


Рис. 4.1. Графики функций принадлежности нечетких множеств «*старый*» и «*очень старый*»

Определение 4.1. Пусть x — название лингвистической переменной. Слово или группу слов, являющихся значениями переменной X, называют ***термом***. Каждый терм является ***именем нечеткого подмножества*** универсального множества U.

Терм, состоящий из одного слова или нескольких слов, объединенных друг с другом в определенном порядке, называют ***атомарным термом***. Терм, состоящий из одного или более атомарных термов, называют ***составным термом***.

Результат приписывания друг к другу цепочек-компонент составного терма называют ***конкатенацией***.

Конкатенация некоторых компонент составного терма называется ***подтермом***.

Строго говоря, элементы терм-множества являются ***именами*** нечетких подмножеств X_1, X_2, ... множества U . Но во многих случаях имена множеств и сами множества отождествляются. При таком отождествлении терм-множество T можно представить в виде объединения всех значений лингвистической переменной X:

$$T = X_1 \cup X_2 \cup ... = \sum_i X_i \,.$$

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих смысл введенных понятий и символику, применяемую для их записи.

Пусть лингвистическая переменная x = «*возраст*» имеет базовое множество U = [0,100]. Атомарными термами являются, в частности, термы, о которых уже упоминалось: «*молодой*» и «*старый*». Атомарные термы входят в составные термы: «*более или менее молодой*» (подтермы – «*более или менее*» и «*молодой*»), «*очень старый*» (подтермы – «*очень*» и «*старый*»).

Терм-множество переменной «*возраст*»:

Т(«возраст») = «старый» ∪ «очень старый» ∪ «не старый» ∪
«более или менее молодой» ∪ «вполне молодой» ∪
«не очень молодой и не очень старый».

Каждый терм в T(«*возраст*») является названием нечеткого подмножества универсального множества U = [0,100].

Теперь рассмотрим лингвистическую переменную X = «*количество*» с базовым множеством $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ и терм-множеством

Т («количество») = «немного» ∪ «несколько» ∪ «много».

Здесь равенство «*количество*»=«*немного*» означает, что лингвистической переменной «*количество*» присвоено значение «*немного*» из терм-множества этой переменной.

Элементы терм-множества являются именами нечетких подмножеств множества U, определенных, например, следующим образом:

«*немного*» = 0,4/1 + 0,8/2 + 1/3 + 0,4/4;
«*несколько*» = 0,5/3 + 0,8/4 + 1/5 + 1/6 + 0,8/7 + 0,5/8;
«*много*» = 0,4/6 + 0,6/7 + 0,8/8 + 0,9/9 + 1/10.

Лингвистические переменные могут соединяться в пары, образуя ***составную лингвистическую переменную***. Например, составной лингвистической переменной является переменная $(x;\ \gamma)$ = «*равны*». Пусть базовое множество этой переменной — декартов квадрат множества $X = \{1, 2, 3, 4\}$, а терм-множество состоит из двух термов:

$$\mathrm{T} = «\text{приближенно равны}» \cup «\text{более или менее равны}»,$$

где

$$J_{\text{приближенно равны}} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 1 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$J_{\text{более или менее равны}} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix} -$$

матрицы инциденций этих отношений.

4.2. Синтаксическое и семантическое правила

В примерах, рассмотренных в подразделе 4.1, терм-множества лингвистических переменных x были заданы списком, т. е. все элементы множества $T(x)$ были перечислены, но такие случаи, вообще говоря, мало интересны. С практической точки зрения важно иметь не список термов, а *правило*, которое позволяло бы из определенного набора слов получать все возможные значения лингвистической переменной. Такое правило называют ***синтаксическим правилом***. Синтаксическое правило можно рассматривать как алгоритмическую процедуру для порождения элементов множества $T(x)$. Все термы, полученные с помощью синтаксического правила, составляют терм-множество.

Пусть задана лингвистическая переменная $x =$«*возраст*» и элементами терм-множества $T(x)$ являются термы «*старый*», «*очень старый*», «*очень, очень старый*», «*очень, очень, очень старый*» и т. п. Синтаксическое правило образования элементов множества $T(x)$ может быть сформулировано следующим образом.

Обозначим конкатенацию символьных цепочек x и y символом xy. В данном примере $x =$ *«очень»*, $y =$ *«старый»*, $xy =$ *«очень старый»*. Если A и B — множества цепочек:

$$A = x_1 + x_2 + ...;$$
$$B = y_1 + y_2 + ...,$$

то конкатенация $AB = (x_1 + x_2 + ...)(y_1 + y_2 + ...) = \sum_{i,j} x_i y_j$. Например, если A = *«очень»*, B = *«старый»* + *«очень старый»*, то AB = = *«очень»*(*«старый* + *«очень старый»*) = *«очень старый»* + *«очень очень старый»*.

Используя эти обозначения, терм-множество T(«возраст») можно рассматривать как решение уравнения

$$T = \text{«старый»} + \text{«очень } T\text{»}. \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) имеет следующее смысловое содержание: множество T состоит из терма *«старый»* и термов, представляющих собой конкатенации терма *«очень»* и некоторого терма из T.

Решим уравнение (4.1) методом итераций, используя рекуррентное соотношение

$$T^{i+1} = \text{«старый»} + \text{«очень } T^i\text{»},\ i = 0, 1, ...$$

Приняв $T^0 = \varnothing$, получаем все элементы терм-множества T:

$$T^0 = \varnothing,$$
$$T^1 = \text{«старый»} + \text{«очень} T^0\text{»} = \text{«старый»},$$
$$T^2 = \text{«старый»} + \text{«очень} T^1\text{»} = \text{«старый»} + \text{«очень старый»},$$
$$T^3 = \text{«старый»} + \text{«очень} T^2\text{»} = \text{«старый»} + \text{«очень старый»} +$$
$$+ \text{«очень, очень старый»}...$$

Синтаксическое правило в данном примере выражается уравнением (4.1) и его решением. В дальнейшем синтаксическое правило будем обозначать символом «G», а терм-множество, образованное с помощью этого правила, — «$T(G)$».

Каждый терм из $T(G)$ является именем нечеткого подмножества множества U. В связи с этим, помимо синтаксического правила G, необходимо правило, позволяющее для термов X, образуемых с помощью G, получать функции принадлежности этих нечетких подмножеств μ_x. Такое правило называют ***семантическим правилом***. Семантическое правило, как и синтаксическое, можно рассматривать как алгоритмическую процедуру для порождения функций принадлежности нечетких подмножеств X множества U. Семантическое правило будем обозначать символом «M».

Рассмотрим термы X_1 = «*старый*» и X_2 = «*очень старый*». Терм X_1 является ***первичным термом***, элементом терм-множества. Одновременно X_1 является нечетким подмножеством универсального множества $U = [0,100]$ с функцией принадлежности $\mu_{X_1}(u) = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$ (см. рис. 4.1). Терм X_2 образован из первичного терма с помощью ***модификатора*** «*очень*». Модификатор меняет функцию принадлежности μ_{X_1} нечеткого подмножества X_1 на функцию принадлежности μ_{X_2} нечеткого подмножества X_2 путем применения операции концентрирования (см. формулу (1.7)):

$$X_2 = \mathrm{CON}\ X_1.$$

Следовательно,

$$\mu_{X_2}(u) = \mu^2_{X_1}(u) = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2}.$$

Если терм X_{n+1} получен из терма X_n применением синтаксического правила (4.1), а действие модификатора «*очень*» сводится к операции концентрирования для любого терма X_n из $T(G)$, то соответствующее семантическое правило имеет вид

$$X_{n+1} = \mathrm{CON}\, X_n \text{ или } \mu_{X_{n+1}}(u) = \mu^2_{X_n}(u).$$

Применяя метод итераций, получаем последовательность:

$$\mu_{X_1} = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1},$$

$$\mu_{X_2} = \mu_{\mathrm{CON}X_1} = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2},$$

$$\mu_{X_3} = \mu_{\mathrm{CON}X_2} = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-4},$$

....

$$\mu_{X_{n+1}} = \mu_{\mathrm{CON}X_n} = \left(1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2n},$$

....

Дадим теперь строгое определение лингвистической переменной.

Определение 4.2. ***Лингвистической переменной*** называют набор

$$(x, T(x), U, G, M),$$

где x — название переменной; $T(x)$ — терм-множество, т. е. множество имен значений переменной x, причем каждому из этих имен соответствует нечеткое подмножество X, заданное на универсальном множестве U с базовой переменной u; G — синтаксическое правило, порождающее имена X значений переменной x; M — семантическое правило, которое ставит в соответствие каждому элементу терм-множества нечеткое подмножество X универсального множества U.

Синтаксическое и семантическое правила, связанные с лингвистической переменной, можно рассматривать как алгоритмические процедуры для порождения элементов множества $T(x)$ и вычисления значений функций принадлежности нечетких подмножеств множества U с именами из $T(x)$.

В рассмотренных примерах термы, являющиеся значениями лингвистической переменной и одновременно именами нечетких множеств, были получены применением модификатора «*очень*» к уже имеющимся термам. В качестве модификаторов обычно используют слова «*более или менее*», «*вполне*», «*существенно*» и т. п. Конкатенация модификатора h и терма X меняет функцию принадлежности μ_X. Семантическое правило, по которому происходит это изменение, определяется смыслом терма и модификатора, а также целью решения задачи. Смысл этот, а значит, и само семантическое правило задает специалист, решающий задачу и определяющий цели ее решения. Семантическое правило может представлять собой алгоритмическую процедуру для вычисления значений функций принадлежности, конкретную операцию над нечетким множеством, действие оператора нечеткости, элементы матрицы которого заданы экспертами, и т. п. Так, действие модификатора «*очень*» рассматривалось выше как операция концентрирования.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий зависимость результата действия модификатора от выбора семантического правила. Пусть x = «*экзамен сдан*», первичным термом множества $T(x)$

является слово X = «*успешно*». Задано нечеткое подмножество X универсального множества

$$U = \{m(\textit{математика}),\, f(\textit{физика}),\, i(\textit{информатика}),\, e(\textit{экономика})\}:$$
$$X = 0,5\,/\,m + 0,3\,/\,f + 0,9\,/\,i + 1\,/\,e$$

и модификатор «более или менее».

Рассмотрим два способа задания семантического правила:

1) изменение нечеткого множества X под действием оператора нечеткости (см. формулу (1.10)):

$$K = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} m \\ f \\ i \\ e \end{array};$$

2) применение операции растяжения DIL (см. формулу (1.8)) к множеству X.

Нечеткое множество KX = «*более или менее успешно*» находим по правилу (1.10):

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}9 \\ 1 \end{pmatrix} = \max(0{,}5; 0{,}15)\,/\,m +$$

$$+ \max(0{,}4; 0{,}3; 0{,}27)\,/\,f + \max(0{,}21; 0{,}81; 1)\,/\,i +$$
$$\max(0{,}9; 0{,}7)\,/\,e = 0{,}5\,/\,m + 0,4\,/\,f + 1\,/\,i + 0{,}9\,/\,e\,.$$

Применение операции DIL к нечеткому подмножеству X дает следующий результат:

$$\mathrm{DIL}(X) = X^{0{,}5} = \sqrt{0{,}5}\,/\,m + \sqrt{0{,}3}\,/\,f + \sqrt{0{,}9}\,/\,i + \sqrt{1}\,/\,e \approx$$
$$\approx 0,71\,/\,m + 0{,}55\,/\,f + 0{,}95\,/\,i + 1\,/\,e\,.$$

Результаты применения операции растяжения и оператора нечеткости значительно различаются. Какой из них предпочтительнее, сказать нельзя, так как цель решения задачи в данном случае является чисто дидактической.

4.3. Понятие «профессионализм» как лингвистическая переменная

В качестве примера применения лингвистической переменной рассмотрим модель понятия «профессионализм» [11].

Формализация таких понятий, как «профессионал», «профессионализм», «квалификация», «профессиональное мастерство», инварианты профессионализма и т. д. затруднена, во-первых, лингвистической неопределенностью рассматриваемого понятия на естественном языке, во-вторых, наличием в системе подготовки специалиста множества неопределенностей, связанных с человеческим фактором, составляющим базис этой системы. Математический аппарат, обеспечивающий адекватное описание и формализацию такого рода неопределенностей, предоставляет теория нечетких множеств, позволяющая задавать параметры и показатели модели с помощью лингвистических переменных. Как было отмечено (см. подраздел 4.1), основная особенность лингвистической переменной состоит в том, что ее значениями являются не числа, а слова или предложения в естественном или формальном языке.

В [11] предложена формализация понятия «профессионализм» как лингвистической переменной:

$$P \Leftrightarrow T(P) = \{P_1,\ P_2,\ P_3\} = T_1(A_1(t)) \cup T_2(A_2(t)) \cup T_3(A_3(t)), \tag{4.2}$$

где P = *«профессионализм»* — лингвистическая переменная;
$T(P) = \{P_1,\ P_2,\ P_3\} = T_1(A_1(t)) \cup T_2(A_2(t)) \cup T_3(A_3(t))$ — терм-множество переменной P.

Переменная P имеет значения:

P_1 = «низший уровень профессионализма»,
P_2 = «средний уровень профессионализма»,
P_3 = « высокий уровень профессионализма».

Терм-множество $T(P)$ представляет собой объединение трех терм-множеств: $T_1(A_1(t))$, $T_2(A_2(t))$, $T_3(A_3(t))$, которые имеют следующие имена:

1) $T_1(A_1(t))$ — *теоретические знания и умения, владение способами деятельности; способность решать проблемы, возникающие в профессиональной деятельности.* Данный терм объединяет наиболее общие характеристики системы профессиональной деятельности;

2) $T_2(A_2(t))$ — *система требований к нормированию и перенормированию профессиональной деятельности.* Терм определяет изменение характеристик деятельности в зависимости от внешних и внутренних системных факторов;
3) $T_3(A_3(t))$ — *личностные (психофизические и умственные) качества специалиста как совокупность его культурных и духовных ценностей, творческая активность в условиях гармоничного развития личности с учетом влияния внешних политических и экономических факторов.*

Понятие профессионализм (P) в каждый момент времени t определяется следующими переменными:

- $A_1(t)$ — уровнем профессиональной деятельности;
- $A_2(t)$ — уровнем требований к профессиональной деятельности;
- $A_3(t)$ — уровнем личностных качеств специалиста.

Будем полагать, что каждая $A_i(t)$, $i = 1, 2, 3,$ представляет собой совокупность определенного количества параметров.

Предложим технологию оценки параметров модели. Выбор таких параметров может быть осуществлен на основании метода прямых экспертных оценок. Например, в нашей модели в качестве $A_1(t)$ принимаются:

- хорошие знания основ соответствующей области науки и техники;
- умение вести самостоятельные исследования;
- умение делать неожиданные сопоставления и находить оригинальные связи между явлениями;
- способность к комбинированному синтезу идей и т. п. [11].

Проведем анализ предлагаемой модели в общем виде. Пусть выделены n параметров модели. Поставим каждому параметру в соответствие некоторое нечеткое число, имеющее функцию принадлежности треугольной формы (рис. 4.2).

Значение этого числа пронормировано по принадлежности множеству $[0; a]$. Эти числа моделируют высказывание следующего вида: «параметр приблизительно равен $\bar{a}$ и однозначно находится в диапазоне $[0, a]$». В нашем случае $\bar{a}$ совпадает с $\frac{a}{2}$.

Такая формализация понятия «профессионализм» позволяет учесть не только содержательный аспект, но и этапность формирования профессиональных качеств специалиста, т. е. выделить

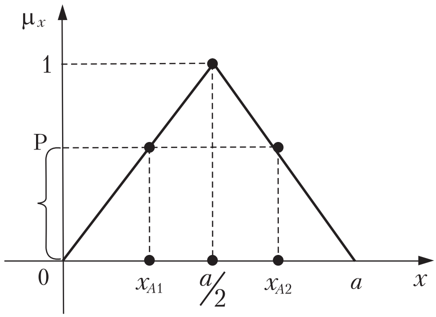


Рис. 4.2. Профиль А

временной инвариант подготовки специалиста. Можно предположить, что наиболее значимое формирование того или иного качества профессионализма зависит от этапа подготовки. Инвариант профессионализма специалиста учитывает это. Поэтому для количественной оценки инварианта профессионализма целесообразно разбить все показатели профессионализма на три группы (профиля) и каждому поставить в соответствие свою функцию принадлежности. На рис. 4.2 представлен профиль показателя модели, формирование которого значимо не зависит от этапа профессиональной подготовки (профиль А). На рис. 4.3 изображен профиль показателя модели, формирование которого может быть начато на раннем этапе подготовки специалиста (профиль В). На рис. 4.4 представлен профиль показателя модели, формирование которого может быть начато только на более позднем этапе подготовки специалиста (профиль С).

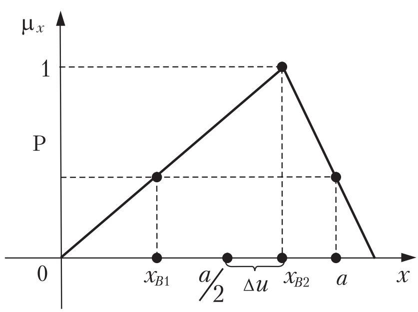


Рис. 4.3. Профиль В

Величины Δu и Δv задают смещение наиболее вероятного значения показателя профессионализма относительно центра и опреде-

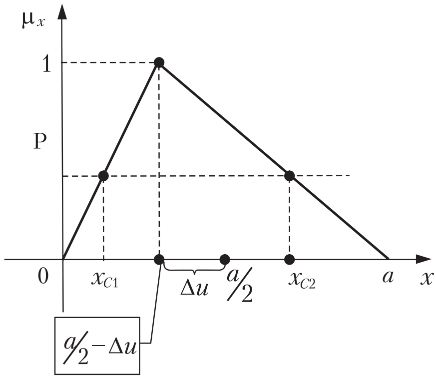


Рис. 4.4. Профиль С

ляют его вклад в показатель инварианта. Эти величины — входные параметры модели, задаваемые экспертным путем, причем по смыслу $\Delta v \geq \Delta u$. Зададимся произвольным уровнем функции принадлежности нечеткого показателя $\mu(x) = p$ и рассчитаем интервалы значений показателя, удовлетворяющих этому равенству. Такой интервал и будем считать инвариантом профессионализма $I(p)$ (для каждого профиля показателя в отдельности). В результате получим следующие интервальные переменные:

$$x_{\text{A}} = \left[\frac{ap}{2};\ a - \frac{ap}{2}\right];$$

$$x_{\text{B}} = \left[\left(\frac{a}{2} + \Delta\upsilon\right)p;\ a - \frac{ap}{2} + \Delta\upsilon p\right]; \tag{4.3}$$

$$x_{\text{C}} = \left[\left(\frac{a}{2} - \Delta\upsilon\right)p;\ a - \frac{ap}{2} - \Delta\upsilon p\right]$$

где X_{A} – интервал для профиля показателя А; X_{B} – интервал для профиля показателя В; X_{C} – интервал для профиля показателя С.

Пусть в модели профессионализма m — показателей профиля А, k — показателей профиля В, s — показателей профиля С.

Согласно технологии выполнения алгебраических операций над нечеткими числами имеем интервал, задающий значение показателя инварианта профессионализма:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{s\left(\dfrac{a}{2}-\Delta\upsilon\right)p+k\left(\dfrac{a}{2}+\Delta\upsilon\right)p+\dfrac{map}{2}}{k+m+s}; \\ \dfrac{m\left(a-\dfrac{ap}{2}\right)+k\left(a-\dfrac{ap}{2}+\Delta\upsilon p\right)+s\left(a-\dfrac{ap}{2}-\Delta v p\right)}{k+m+s} \end{array}\right]. \qquad (4.4)$$

Для того чтобы представить этот интервал в виде треугольного нечеткого числа, необходимо найти значение показателя для p=1:

$$\frac{s\left(\dfrac{a}{2}-\Delta u\right)+k\left(\dfrac{a}{2}+\Delta\upsilon\right)+\dfrac{ma}{2}}{k+m+s}.$$

Таким образом, показатель инварианта профессионализма можно представить в виде следующего нечеткого числа треугольного вида:

$$I(p)=\left[\begin{array}{l} \dfrac{s\left(\dfrac{a}{2}-\Delta u\right)p+k\left(\dfrac{a}{2}+\Delta\upsilon\right)p+\dfrac{map}{2}}{k+m+s}; \\ \dfrac{s\left(\dfrac{a}{2}-\Delta u\right)+k\left(\dfrac{a}{2}+\Delta\upsilon\right)+\dfrac{ma}{2}}{k+m+s}; \\ \dfrac{m\left(a-\dfrac{ap}{2}\right)+k\left(a-\dfrac{ap}{2}+\Delta\upsilon p\right)+s\left(a-\dfrac{ap}{2}-\Delta u p\right)}{k+m+s} \end{array}\right]. \qquad (4.5)$$

Контрольные вопросы

1. Что называют термом? В чем принципиальное различие атомарного и составного термов?
2. Дайте понятие составной лингвистической переменной.
3. Какие правила называют синтаксическими?
4. Определите сущность семантического правила. В чем различие и сходство семантического и синтаксического правил?
5. Дайте определение лингвистической переменной.
6. Приведите примеры лингвистических переменных из различных областей науки.

5. Нечеткие булевы переменные

5.1. Булева алгебра

Алгебра ***высказываний*** и ***предикатов*** является одним из разделов бинарной (обычной) математической логики. Высказывание — утверждение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно, предикат — утверждение, содержащее одну или несколько переменных. При одних значениях переменных предикат становится истинным высказыванием, при других — ложным. Высказывание и предикат можно понимать как переменную p, принимающую два возможных значения «*истина*» = 1 или «*ложь*» = 0.

Определение 5.1. Переменная, множеством значений которой является множество $B = \{0, 1\}$, называется ***булевой переменной***.

Если p — высказывание или предикат, то p — булева переменная, т. е. переменная, принимающая лишь одно из *двух* возможных значений: 0 или 1. Вот почему ту часть математической логики, которая занимается высказываниями и предикатами, называют бинарной (двоичной) логикой.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$, — булевы переменные. Каждая из них может принимать значение 0 или 1. Последовательность $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ есть n-мерный двоичный вектор. Существует 2^n различных n-мерных векторов, компонентами которых являются булевы переменные. Функция, ставящая каждому n–мерному вектору определенное значение из множества B, называется булевой функцией. Булеву функцию можно задать в виде таблицы, содержащей 2^n строк и $n + 1$ столбец. В первых n столбцах таблицы записаны все возможные двоичные n-мерные векторы, а в последнем столбце — соответствующее значение функции.

Пусть булева функция от трех переменных задана табл. 5.1.

Таблица 5.1. Булева функция от трех переменных

p_1	p_2	p_3	$y = (p_1, p_2, p_3)$
0	0	0	1

p_1	p_2	p_3	$y = (p_1, p_2, p_3)$
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Трехмерные двоичные векторы в первых трех столбцах табл. 5.1 можно рассматривать как номера этих векторов (от номера 0 до номера 7), записанные в двоичной системе счисления.

На множестве булевых переменных определены логические операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции и ряд других (табл. 5.2).

Таблица 5.2. Операции над булевыми переменными

<table>
<tr><th>Операция</th><th>Таблица истинности</th><th>Описание операций</th></tr>
<tr><td>Отрицание</td><td><table><tr><td>p</td><td>$\overline{p}$</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>Унарная операция, строится с помощью слов «не», «неверно, что...». Отрицание высказывания обозначается символом $\overline{p}$, который читается «не p»</td></tr>
<tr><td>Конъюнкция</td><td><table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$p \wedge q$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью союза «и». Конъюнкция высказываний обозначается символом $p \wedge q$, который читается «p и q»</td></tr>
<tr><td>Дизъюнкция</td><td><table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$p \vee q$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью союза «или». Дизъюнкция высказываний обозначается символом $p \vee q$, который читается: «p или q»</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Операция</th><th>Таблица истинности</th><th>Описание операций</th></tr>
<tr><td>Импликация</td><td><table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \Rightarrow q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью слов «если... то». Импликация высказываний обозначается символом $p \Rightarrow q$, который читается «если p то q».</td></tr>
<tr><td>Эквиваленция</td><td><table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \Leftrightarrow q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью слов «тогда и только тогда», «если и только если». Эквиваленция высказываний обозначается символом $p \Leftrightarrow q$, который читается «q тогда и только тогда, когда p»</td></tr>
<tr><td>Кольцевая сумма</td><td><table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \oplus q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>Бинарная операция, строится с помощью слов «сумма», «плюс». Циклическая сумма высказываний обозначается символом $p \oplus q$, который читается «сумма p и q»</td></tr>
</table>

ПРИМЕЧАНИЕ

Символами p и q обозначены высказывания.

Таблицы истинности операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции совпадают с таблицами характеристических функций операций дополнения, пересечения и объединения множеств (см. табл. 1.5). Такое совпадение таблиц истинности означает, что множество всех подмножеств универсального множества U с операциями дополнения, пересечения и объединения и множество высказываний с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции являются различными интерпретациями одной и той же математической модели. Эта модель называется ***булевой алгеброй***. Все свойства операций над множествами (см. табл. 1.6) присущи также и соответствующим операциям над высказываниями. Например, свойство порядка для конъюнкции и дизъюнкции имеет вид $p \wedge q \le p$ и $p \wedge q \le q$, $p \vee q \ge p$ и $p \vee q \ge q$.

Высказывания или их отрицания, соединенные знаками логических операций, образуют ***формулу логики высказываний***, или ***формулу булевой алгебры***. Две формулы называются ***эквивалентными***, если при любых наборах значений входящих в них переменных они принимают одинаковые значения. Две эквивалентные формулы соединяют знаком равенства.

Докажем, что формулы $\overline{p \vee q}$ и $\bar{p} \wedge \bar{q}$ эквивалентны. Составим таблицу истинности этих формул (табл. 5.3).

Таблица 5.3. Таблица истинности

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Выделенные столбцы, в которых записаны значения истинности формул $\overline{p \vee q}$ и $\bar{p} \wedge \bar{q}$, совпадают, т. е. при любых значениях высказываний p и q формулы $\overline{p \vee q}$ и $\bar{p} \wedge \bar{q}$ принимают одинаковые значения, что и означает их эквивалентность.

Известно, что любую булеву функцию можно представить в виде формулы, содержащей операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Напомним на примере, как это делается.

Представим импликацию $f(p,q) = p \Rightarrow q$ формулой, содержащей указанные выше операции.

p	q	$p \Rightarrow q$	**Элементарные конъюнкции**
0	0	1	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
0	1	1	$\bar{p} \wedge q$
1	0	0	
1	1	1	$p \wedge q$

$$\Rightarrow \left((p \Rightarrow q) = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee q) \vee (p \wedge q)\right)$$

Формула $\left((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \vee q) \vee (p \wedge q)\right)$ называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (СДНФ) импликации. Для сокращения записей знаки конъюнкции опускают или заменяют знаками умножения. Опускают также скобки, договорившись, что в формуле без скобок сначала выполняются все конъюнкции, а затем над ними производятся дизъюнкции. При таких договоренностях СДНФ импликации выглядит так: $p \Rightarrow q = \overline{p} \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q \vee p \cdot q$. Пользуясь свойствами операций булевой алгебры, СДНФ импликации можно упростить:

$$p \Rightarrow q = \overline{p} \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q \vee p \cdot q =$$
$$= \overline{p} \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q \vee \overline{p} \cdot q \vee p \cdot q = \overline{p} \cdot (\overline{q} \vee q) \vee (\overline{p} \vee p) \cdot q =$$
$$= \overline{p} \cdot 1 \vee 1 \cdot q = \overline{p} \vee q\,.$$

При выполнении преобразований были использованы следующие свойства операций булевой алгебры:

1) идемпотентность дизъюнкции $x \vee x = x$;
2) ассоциативность дизъюнкции $x \vee y \vee z = x \vee (y \vee z)$ и дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции: $x \cdot y \vee x \cdot z = x \cdot (y \vee z)$;
3) закон исключения третьего $x \vee \overline{x} = 1$;
4) свойство единицы для конъюнкции $x \cdot 1 = x$.

5.2. Нечеткие булевы переменные и логические операции над ними

Определение 5.2. ***Нечеткой булевой переменной*** называют переменную p, которая является именем нечеткого подмножества множества $U = [0,1]$.

В дальнейшем для сокращения записей будем обозначать одним и тем же символом саму нечеткую переменную и функцию принадлежности нечеткого множества, именем которого она является. Над нечеткими булевыми переменными, так же как и над обычными булевыми переменными, осуществимы операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Пусть p и q — две нечеткие булевы переменные. Запишем правила выполнения логических операций над ними:

1) отрицание нечеткой булевой переменной $\overline{p} = 1 - p$;
2) конъюнкция нечетких булевых переменных $p \wedge q = p \cdot q = \min(p,\ q)$;
3) дизъюнкция нечетких булевых переменных $p \vee q = \max(p,\ q)$.

Напомним, что конъюнкция и дизъюнкция нечетких переменных, выполненные по правилам 2 и 3, в общем случае называются, соответственно, логическим умножением и операцией максимум (см. табл. 1.7).

Множество булевых переменных с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции и множество всех нечетких подмножеств какого-либо универсального множества U с операциями дополнения, пересечения и объединения являются интерпретациями одной и той же математической модели. Операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции над нечеткими булевыми переменными обладают всеми свойствами, указанными в табл. 1.6. В алгебре нечетких высказываний так же, как и в алгебре нечетких множеств, нарушаются два логических закона: закон исключения третьего ($p \vee \overline{p} = 1$) и закон противоречия ($p \wedge \overline{p} = 0$).

Определение 5.3. Пусть $p_1,\ p_2, ...,\ p_n$ — нечеткие булевы переменные. Функцию $f(p_1,\ p_2, ...,\ p_n)$ называют ***функцией нечетких булевых переменных***, если она принимает значения на отрезке [0,1].

Аналогично формулам булевой алгебры, можно получать формулы нечеткой логики, каждая из которых представляет определенную функцию нечетких переменных. Чтобы записать значения функции, представленной формулой, содержащей лишь знаки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, можно использовать таблицы, аналогичные таблицам истинности в двоичной логике.

Рассмотрим пример на составление таблицы функции нечетких переменных. Пусть $f(p,q) = (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{q})$. Составим все возможные соотношения между переменными p, $\overline{p}$, q и $\overline{q}$, учитывая, что $\overline{p} = 1 - p$, $\overline{q} = 1 - q$ (табл. 5.4).

Таблица 5.4. Значение функции $f(p,\ q) = (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{q})$

Вид неравенства	$p \wedge \overline{p} = \min(p,\ \overline{p})$	$\overline{p} \wedge q \wedge \overline{q} = \min(\overline{p},\ q,\ \overline{q})$	$f(p,\ q) = (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{q}) = \max(\min(p,\ \overline{p}),\ \min(\overline{p},\ q,\ \overline{q}))$
$p \le q \le \overline{q} \le \overline{p}$	p	q	q

Вид неравенства	$p \wedge \overline{p} = \min(p, \overline{p})$	$\overline{p} \wedge q \wedge \overline{q} = \min(p, q, \overline{q})$	$f(p, q) = (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{q}) = \max(\min(p, \overline{p}), \min(\overline{p}, q, \overline{q}))$
$p \le \overline{q} \le q \le \overline{p}$	p	$\overline{q}$	$\overline{q}$
$\overline{p} \le q \le \overline{q} \le p$	$\overline{p}$	$\overline{p}$	$\overline{p}$
$\overline{p} \le \overline{q} \le q \le p$	$\overline{p}$	$\overline{p}$	$\overline{p}$
$q \le p \le \overline{p} \le \overline{q}$	p	q	p
$q \le \overline{p} \le p \le \overline{q}$	$\overline{p}$	q	$\overline{p}$
$qppq$	p	$\overline{q}$	p
$\overline{q} \le \overline{p} \le p \le q$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$

Задача сводится к тому, чтобы составить последовательность четырех символов, между которыми поставлены знаки неравенства «$\le$». Существует четыре способа выбора первого элемента последовательности: самым маленьким числом среди чисел p, $\overline{p}$, q и $\overline{q}$ может быть любое из них. Пусть, например, самым маленьким числом является p. Тогда самым большим числом будет число $\overline{p} = 1 - p$. Следовательно, выбор первого элемента последовательности однозначно определяет выбор ее последнего элемента. После выбора первого числа остается две возможности выбрать второй элемент последовательности. Выбор второго элемента последовательности однозначно определяет выбор третьего числа. Например, если на второе место поставлено число q, то на третье место можно поставить только число $\overline{q} = 1 - q$. Таким образом, существует восемь способов составления последовательности переменных p, $\overline{p}$, q и $\overline{q}$, соединенных знаками неравенства:

$$p \le q \le \overline{q} \le \overline{p},\ p \le \overline{q} \le q \le \overline{p};$$

$$\overline{p} \le q \le \overline{q} \le p,\ \overline{p} \le \overline{q} \le q \le p;$$

$$q \le p \le \overline{p} \le \overline{q},\ q \le \overline{p} \le p \le \overline{q};$$

$$qppq,\ \overline{q} \le \overline{p} \le p \le q.$$

Определение 5.4. Функции f_1 и f_2 называют ***равносильными***, или ***тождественными***, если они имеют одну и ту же таблицу значений, включающую все возможные соотношения между переменными.

Существует четыре различные функции от одной нечеткой переменной p (табл. 5.5).

Таблица 5.5. Функции от одной нечеткой переменной

Вид неравенства	**Функция**			
	f_1	f_2	f_3	f_4
$p \le \overline{p}$	p	p	$\overline{p}$	$\overline{p}$
$\overline{p} \le p$	p	$\overline{p}$	p	$\overline{p}$

Однако функций от двух переменных существует уже 4^8=65536, функций от n переменных – $(2n)^{(n!\cdot 2^n)}$ [6]. Только незначительная часть всех этих функций может быть представлена с помощью операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции над нечеткими переменными.

Определение 5.5. Функцию f от нечетких булевых переменных называют ***аналитической функцией***, если она может быть представлена формулой, содержащей операции конъюнкции и дизъюнкции, выполняемые над аргументами функции и их отрицаниями.

Составим таблицу простейших аналитических функций $p \wedge q$, $\overline{p} \wedge q$, $p \wedge \overline{q}$, $\overline{p} \wedge \overline{q}$, $p \vee q$, $\overline{p} \vee q$, $p \vee \overline{q}$, $\overline{p} \vee \overline{q}$ от двух переменных (табл. 5.6).

Таблица 5.6. Простейшие функции от двух нечетких булевых переменных

Вид неравенства	$p \wedge q$	$\overline{p} \wedge q$		$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p} \vee q$	$p \vee \overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
$p \le q \le \overline{q} \le \overline{p}$	p	q	p	$\overline{q}$	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$
$p \le \overline{q} \le q \le \overline{p}$	p	q	p	$\overline{q}$	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$
$\overline{p} \le q \le \overline{q} \le p$	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	p	q	p	$\overline{q}$
$\overline{p} \le \overline{q} \le q \le p$	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	p	q	p	$\overline{q}$
$q \le p \le \overline{p} \le \overline{q}$	q	q	p	$\overline{p}$	p	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{q}$

Вид неравенства	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge q$		$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \vee q$	$\bar{p} \vee q$	$p \vee \bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
$q \le \bar{p} \le p \le \bar{q}$	q	q	p	$\bar{p}$	p	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$
$qppq$	p	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$	q	q	p	$\bar{p}$
$\bar{q} \le \bar{p} \le p \le q$	p	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$	q	q	p	$\bar{p}$

Формулы, представляющие аналитические функции, можно упрощать, используя свойства операций над нечеткими переменными, однако при этом необходимо помнить о нарушении в нечеткой логике закона исключения третьего и закона противоречия:

$$p \vee \bar{p} \neq 1 \text{ и } p \wedge \bar{p} \neq 0\text{, если } p \neq 1, \quad p \neq 0\,. \qquad (5.1)$$

Например, упрощение СДНФ импликации во множестве обычных булевых переменных приводит к простой формуле (см. подраздел 5.1):

$$p \Rightarrow q = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q = \bar{p} \vee q\,.$$

Отметим, что во множестве функций нечетких переменных $f(p,q) = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q$ не поддается упрощению в силу неравенств (5.1):

$$f(p,q) = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q = \bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q =$$
$$= \bar{p} \cdot (\bar{q} \vee q) \vee q \cdot (\bar{p} \vee p)\,.$$

Поскольку $q \vee \bar{q} \neq 1$ и $p \vee \bar{p} \neq 1$, дальнейшие преобразования невозможны.

Составим таблицу СДНФ импликации нечетких переменных (табл. 5.7).

Таблица 5.7. СДНФ импликации нечетких переменных

Вид неравенства	$\bar{p} \cdot \bar{q} = \min(\bar{p}, \bar{q})$	$\bar{p} \cdot q = \min(\bar{p}, q)$	$p \cdot q = \min(p, q)$	$\bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \vee p \cdot q = \max(\min(\bar{p}, \bar{q}), \min(p, q), \min(p, q))$
$p \le q \le \bar{q} \le \bar{p}$	$\bar{q}$	q	p	$\bar{q}$
$p \le \bar{q} \le q \le \bar{p}$	$\bar{q}$	q	p	q
$\bar{p} \le q \le \bar{q} \le p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	q	q

Вид неравенства	$\bar{p} \cdot \bar{q} = \min(\bar{p}, \bar{q})$	$\bar{p} \cdot q = \min(\bar{p}, q)$	$p \cdot q = \min(p, q)$	$\bar{p} \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee p \cdot q = \max(\min(\bar{p}, \bar{q}), \min(\bar{p}, q), \min(p, q))$
$\bar{p} \le \bar{q} \le q \le p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	q	q
$q \le p \le \bar{p} \le \bar{q}$	$\bar{p}$	q	q	$\bar{p}$
$q \le \bar{p} \le p \le \bar{q}$	$\bar{p}$	q	q	$\bar{p}$
$qppq$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	p	$\bar{p}$
$\bar{q} \le \bar{p} \le p \le q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	p	p

5.3. Анализ функции нечетких булевых переменных

Выясним, при каких условиях аналитическая функция $f(p, q)$ от двух нечетких булевых переменных попадает в заданный промежуток $[\alpha, \beta)$ отрезка $[0, 1]$.

Пусть $p \in [a_1, a_2] \subseteq [0, 1]$ и $q \in [b_1, b_2] \subseteq [0, 1]$.

Возможны шесть вариантов взаимного расположения точек a_1, b_1, a_2, b_2 на отрезке $[0, 1]$, и каждому из них соответствует определенное множество значений аналитических функций $f(p, q) = p \wedge q$ и $f(p, q) = p \vee q$ ($p \in [a_1, a_2]$, $q \in [b_1, b_2]$) (рис. 5.1).

Очевидно, что при любых возможных соотношениях между a_1, b_1, a_2, b_2 справедливы следующие утверждения:

$$p \wedge q \in [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)], \tag{5.2}$$

$$p \vee q \in [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)]. \tag{5.3}$$

Из утверждений (5.2) и (5.3) получаем аналогичные включения для конъюнкций и дизъюнкций, содержащих отрицания p и q:

$$p \wedge \bar{q} \in [\min(a_1, 1 - b_2), \ \min(a_2, 1 - b_1)], \tag{5.4}$$

$$\bar{p} \wedge q \in [\min(1 - a_2, b_1), \ \min(1 - a_1, b_2)], \tag{5.5}$$

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \in [\min(1 - a_2, 1 - b_2), \ \min(1 - a_1, 1 - b_1)], \tag{5.6}$$

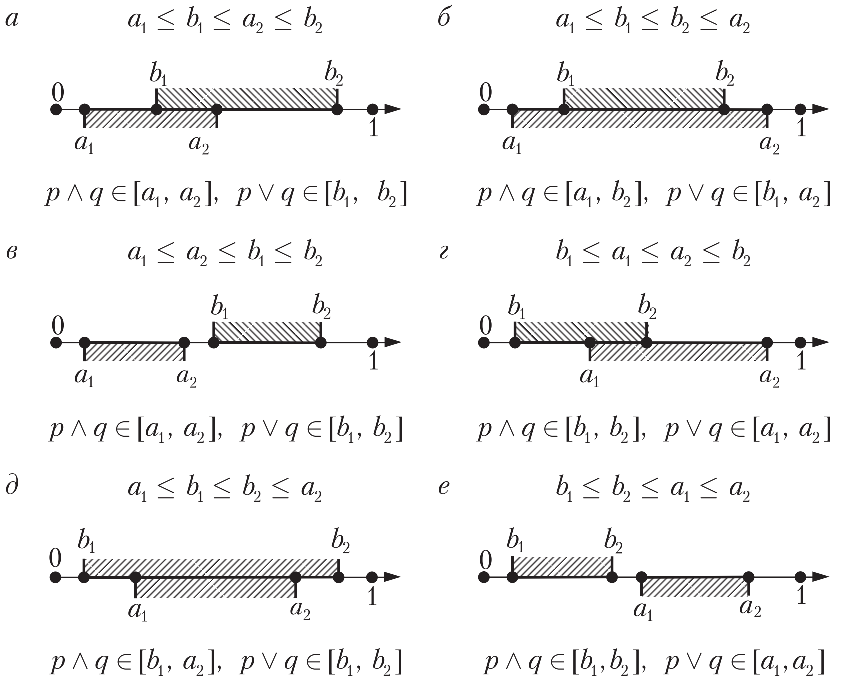


Рис. 5.1. Возможные варианты взаимного расположения точек a_1, b_1, a_2, b_2

$$p \vee \bar{q} \in [\max(a_1, 1-b_2), \; \max(a_2, 1-b_1)], \tag{5.7}$$

$$\bar{p} \wedge q \in [\max(1-a_2, b_1), \; \max(1-a_1, b_2)], \tag{5.8}$$

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \in [\max(1-a_2, 1-b_2), \; \max(1-a_1, 1-b_1)]. \tag{5.9}$$

Покажем, как, например, получается соотношение (5.4):

$$q \in [b_1, b_2] \Rightarrow \bar{q} \in [1-b_2, 1-b_1] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p \wedge \bar{q} \in [\min(a_1, 1-b_2), \; \min(a_2, 1-b_1)].$$

Соотношения (5.5) – (5.9) выводятся аналогично.

Получим условия, при которых функция $f(p, q) = p \wedge q$ попадет в промежуток $[\alpha, \beta)$:

$$p \wedge q \in [\min(a_1, b_1), \; \min(a_2, b_2)) \Rightarrow p \wedge q \in [\alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \min(a_1, b_1) \ge \alpha; \\ \min(a_2, b_2) < \beta. \end{cases}$$

Очевидно, что $\min(a_1,\ b_1) \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \geq \alpha; \\ b_1 \geq \alpha, \end{cases}$ т. е. *оба числа* a_1 и b_1 должны быть больше α. Действительно, если хотя бы одно из чисел, a_1 или b_1, удовлетворяет противоположному соотношению, например, $a_1 < \alpha < b_1$, то $\min(a_1,\ b_1) = a_1 < \alpha$. Поэтому неравенство $\min(a_1,\ b_1) \geq \alpha$ эквивалентно ***системе неравенств*** $\begin{cases} a_1 \geq \alpha; \\ b_1 \geq \alpha. \end{cases}$

В то же время неравенство $\min(a_2,\ b_2) < \beta$ будет выполнено, если *хотя бы одно из чисел*, a_1 или b_1 оказалось меньше β. Действительно, если, например, $a_2 > \beta > b_2$, то $\min(a_2,\ b_2) = b_2 < \beta$, т. е. неравенство $\min(a_2,\ b_2) < \beta$ эквивалентно ***совокупности неравенств*** $\left[\begin{array}{l} a_2 < \beta; \\ b_2 < \beta. \end{array}\right.$

Таким образом, система неравенств $\begin{cases} \min(a_1,\ b_1) \geq \alpha; \\ \min(a_2,\ b_2) < \beta \end{cases}$ эквивалентна системе, состоящей из системы $\begin{cases} a_1 \geq \alpha; \\ b_1 \geq \alpha \end{cases}$ и совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} a_2 < \beta; \\ b_2 < \beta. \end{array}\right.$

Окончательно получаем

$$p \wedge q \in [\alpha,\ \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_1 \geq \alpha; \\ b_1 \geq \alpha; \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} a_2 < \beta; \\ b_2 < \beta, \end{array}\right. \end{cases}$$

или, учитывая, что $p \in [a_1, a_2]$ и $q \in [b_1, b_2]$

$$p \wedge q \in [\alpha,\ \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p \geq \alpha; \\ q \geq \alpha; \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} p < \beta; \\ q < \beta. \end{array}\right. \end{cases} \tag{5.10}$$

Рассуждая аналогично и используя соотношения (5.2) – (5.8), получаем условия попадания простейших аналитических функций от двух нечетких булевых переменных в заданный промежуток [α, β) (табл. 5.8).

Таблица 5.8. Условия выполнения неравенства $\alpha \le f(p, q) < \beta$

№ п/п	$f(p, q)$	Условия, при которых $\alpha \le f(p, q) < \beta$	№ п/п	$f(p, q)$	Условия, при которых $\alpha \le f(p, q) < \beta$
1	$p \wedge q$	$\begin{cases}\begin{cases}p \ge \alpha;\\ q \ge \alpha;\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}p < \beta;\\ q < \beta\end{array}\right.\end{cases}$	5	$p \vee q$	$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p \ge \alpha;\\ q \ge \alpha;\end{array}\right.\\ \begin{cases}p < \beta;\\ q < \beta\end{cases}\end{cases}$
2	$\overline{p} \wedge q$	$\begin{cases}\begin{cases}p \le 1-\alpha;\\ q \ge \alpha;\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}p > 1-\beta;\\ q < \beta\end{array}\right.\end{cases}$	6	$\overline{p} \vee q$	$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p \le 1-\alpha;\\ q \ge \alpha;\end{array}\right.\\ \begin{cases}p > 1-\beta;\\ q < \beta\end{cases}\end{cases}$
3	$p \wedge \overline{q}$	$\begin{cases}\begin{cases}p \ge \alpha;\\ q \le 1-\alpha;\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}p < \beta;\\ q > 1-\beta\end{array}\right.\end{cases}$	7	$p \vee \overline{q}$	$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p \ge \alpha;\\ q \le 1-\alpha;\end{array}\right.\\ \begin{cases}p < \beta;\\ q > 1-\beta\end{cases}\end{cases}$
4	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$\begin{cases}\begin{cases}p \le 1-\alpha;\\ q \le 1-\alpha;\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}p > 1-\beta;\\ q > 1-\beta\end{array}\right.\end{cases}$	8	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p \le 1-\alpha;\\ q \le 1-\alpha;\end{array}\right.\\ \begin{cases}p > 1-\beta;\\ q > 1-\beta\end{cases}\end{cases}$

Системы и совокупности неравенств определяют объединения и пересечения числовых множеств. Их можно рассматривать как множества истинности соответствующих предикатов. Например, система 6 (см. табл._5.8) есть множество истинности двуместного предиката $H(p, q):\ \overline{p} \vee q \in [\alpha, \beta)$, который является результатом выполнения логических операций над одноместными предикатами: $H(p, q) = (h_1(p) \vee h_2(q)) \wedge h_3(p) \wedge h_4(q)$, где $h_1(p):\ (p \le 1-\alpha)$, $h_2(q):\ (q \ge \alpha)$, $h_3(p):\ (p > 1-\beta)$, $h_4(q):\ (q < \beta)$ — одноместные предикаты.

Определим, при каких условиях СДНФ кольцевой суммы $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2$ попадает в промежуток [0,1; 0,3).

Перепишем табл. 5.3, сделав ее более удобной для решения такого рода задач (табл. 5.9).

Таблица 5.9. Условия выполнения неравенства $\alpha \leq f(p, q) < \beta$

$f(p, q)$	**Условия, обеспечивающие нижнюю границу промежутка** $\alpha \leq f(p, q)$	**Условия, обеспечивающие верхнюю границу промежутка** $f(p, q) < \beta$
$p \wedge q$	$\begin{cases} p \geq \alpha; \\ q \geq \alpha \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p < \beta; \\ q < \beta \end{array}\right.$
$\bar{p} \wedge q$	$\begin{cases} p \leq 1-\alpha; \\ q \geq \alpha \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p > 1-\beta; \\ q < \beta \end{array}\right.$
$p \wedge \bar{q}$	$\begin{cases} p \geq \alpha; \\ q \leq 1-\alpha \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p < \beta; \\ q > \varphi \end{array}\right.$
$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\begin{cases} p \leq 1-\alpha; \\ q \leq 1-\alpha \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p > 1-\beta; \\ q > 1-\beta \end{array}\right.$
$p \vee q$	$\left[\begin{array}{l} p \geq \alpha; \\ q \geq \alpha \end{array}\right.$	$\begin{cases} p < \beta; \\ q < \beta \end{cases}$
$\bar{p} \vee q$	$\left[\begin{array}{l} p \leq 1-\alpha; \\ q \geq \alpha \end{array}\right.$	$\begin{cases} p > 1-\beta; \\ q < \beta \end{cases}$
$p \vee \bar{q}$	$\left[\begin{array}{l} p \geq \alpha; \\ q \leq 1-\alpha \end{array}\right.$	$\begin{cases} p < \beta; \\ q > 1-\beta \end{cases}$
$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\left[\begin{array}{l} p \leq 1-\alpha; \\ q \leq 1-\alpha \end{array}\right.$	$\begin{cases} p > 1-\beta; \\ q > 1-\beta \end{cases}$

Обозначим $\bar{x}_1 \cdot x_2 = p$, $x_1 \cdot \bar{x}_2 = q$. Согласно табл. 5.9, получаем

$$H(p,\ q) \wedge G(p,\ q):\ p \vee q \in [0{,}1;\ 0{,}3) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p \geq 0{,}1; \\ q \geq 0{,}1; \end{array}\right. \\ \begin{cases} p < 0{,}3; \\ q < 0{,}3, \end{cases} \end{cases}$$

где $H(p,\ q): \left[\begin{array}{l} p \geq 0{,}1; \\ q \geq 0{,}1 \end{array}\right.$ и $G(p,\ q): \begin{cases} p < 0{,}3; \\ q < 0{,}3 \end{cases}$ — двуместные предикаты бинарной логики.

Множество истинности предиката $H(p,\ q)$ обеспечивает нижнюю границу промежутка [0,1; 0,3), а предиката $G(p,\ q)$ — его верхнюю границу. Предикат $H(p,\ q)$ есть дизъюнкция одноместных предикатов $h_1(p): (p \geq 0{,}1)$ и $h_2(q): (q \geq 0{,}1)$, предикат $G(p,\ q)$ — конъюнкция предикатов $g_1(p): (p < 0{,}3)$ и $g_2(q): (q < 0{,}3)$.

Поскольку $p = \bar{x}_1 \cdot x_2$ и $q = x_1 \cdot \bar{x}_2$, предикаты $h_1(p)$, $h_2(q)$, $g_1(p)$ и $g_2(q)$ являются предикатами от двух переменных, x_1 и x_2, которые входят в предикаты либо сами, либо своими отрицаниями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$:

$$h_1(p) = h_1(x_1,\ x_2) :(0{,}1 \leq \bar{x}_1 \cdot x_2),$$

$$h_2(q) = h_2(x_1,\ x_2) :(0{,}1 \leq x_1 \cdot \bar{x}_2),$$

$$g_1(p) = g_1(x_1,\ x_2) :(\bar{x}_1 \cdot x_2 < 0{,}3),$$

$$g_2(q) = g_2(x_1,\ x_2) :(x_1 \cdot \bar{x}_2 < 0{,}3).$$

В соответствии с табл. 5.8, получаем множества истинности предикатов $h_1(x_1,\ x_2)$, $h_2(x_1,\ x_2)$, $g_1(x_1,\ x_2)$, $g_2(x_1,\ x_2)$:

$$(0{,}1 \leq \bar{x}_1 \cdot x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 0{,}9; \\ x_2 \geq 0{,}1, \end{cases}$$

$$(0{,}1 \leq x_1 \cdot \bar{x}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq 0{,}1; \\ x_2 \leq 0{,}9, \end{cases}$$

$$(\bar{x}_1 \cdot x_2 < 0{,}3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 > 0{,}7; \\ x_2 < 0{,}3, \end{array}\right.$$

$$(x_1 \cdot \bar{x}_2 < 0{,}3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < 0{,}3; \\ x_2 > 0{,}7. \end{array}\right.$$

Таким образом, функция $f(x_1,\ x_2) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2$ попадает в промежуток [0,1; 0,3), если выполняется система неравенств

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_3\in[0{,}1;\ 0{,}3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1\le 0{,}9;\\ x_2\ge 0{,}1;\end{cases}\\ \begin{cases}x_1\ge 0{,}1;\\ x_2\le 0{,}9;\end{cases}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x_1>0{,}7;\\ x_2<0{,}3;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1<0{,}3;\\ x_2>0{,}7.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Для упрощения записи, запишем полученную систему в виде конъюнкции двух двуместных предикатов: $H(x_1,\ x_2)=\ h_1(x_1,\ x_2)\ \vee$ $\vee\ h_2(x_1,\ x_2)$ и $G(x_1,\ x_2)=g_1(x_1,\ x_2)\wedge g_2(x_1,\ x_2)$, которая обеспечивает нижнюю и верхнюю границы промежутка [0,1; 0,3):

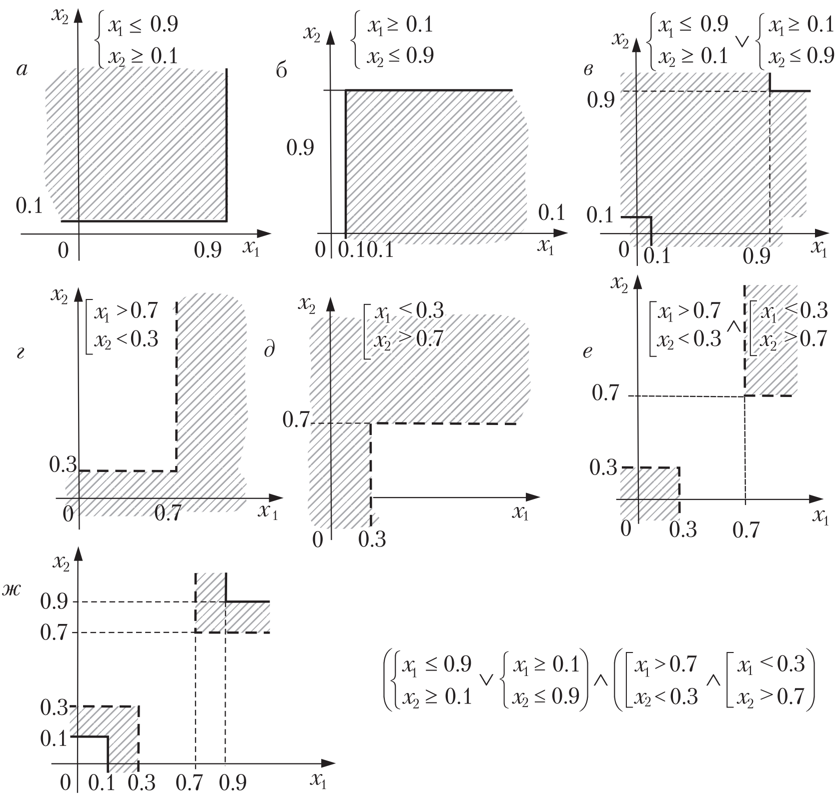
$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_3\in[0{,}1;\ 0{,}3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1\le 0{,}9;\\ x_2\ge 0{,}1;\end{cases}\\ \begin{cases}x_1\ge 0{,}1;\\ x_2\le 0{,}9;\end{cases}\end{array}\right.\wedge\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x_1>0{,}7;\\ x_2<0{,}3;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1<0{,}3;\\ x_2>0{,}7.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Проиллюстрируем порядок построения множества истинности двуместного предиката $\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_2\in[0{,}1;\ 0{,}3)$ рис. 5.2.

Рассмотрим более сложный пример. Найдем, каким промежуткам отрезка [0,1] должны принадлежать нечеткие переменные x_1, x_2, x_3, чтобы для функции $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee x_1\cdot\bar{x}_3$ выполнялось неравенство $0{,}6\le f<0{,}9$.

Обозначим $p=\bar{x}_1\cdot x_2$, $q=x_1\cdot x_3$. Множество истинности двуместного предиката $H(p,\ q): 0{,}6\le p\vee q<0{,}9$ определяется условиями:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}p\ge 0{,}6;\\ q\ge 0{,}6;\end{array}\right.\\ \begin{cases}p<0{,}9;\\ q<0{,}9;\end{cases}\end{array}\right.\quad\text{или}\quad\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\bar{x}_1\cdot x_2\ge 0{,}6;\\ x_1\cdot\bar{x}_3\ge 0{,}6;\end{array}\right.\\ \begin{cases}\bar{x}_1\cdot x_2<0{,}9;\\ x_1\cdot\bar{x}_3<0{,}9.\end{cases}\end{array}\right.$$



$$\left(\begin{cases} x_1 \le 0.9 \\ x_2 \ge 0.1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 \ge 0.1 \\ x_2 \le 0.9 \end{cases}\right) \wedge \left(\left[\begin{matrix} x_1 > 0.7 \\ x_2 < 0.3 \end{matrix}\right. \wedge \left[\begin{matrix} x_1 < 0.3 \\ x_2 > 0.7 \end{matrix}\right.\right)$$

Рис. 5.2. Геометрическая иллюстрация построения множества истинности двуместного предиката $q \cdot h$

Рассмотрим отдельно совокупность $\left[\begin{matrix} \bar{x}_1 \cdot x_2 \ge 0{,}6; \\ x_1 \cdot \bar{x}_3 \ge 0{,}6, \end{matrix}\right.$ выполнение которой является условием, обеспечивающим нижнюю границу интервала $[0{,}6;\ 0{,}9)$, и систему $\begin{cases} \bar{x}_1 \cdot x_2 < 0{,}9; \\ x_1 \cdot \bar{x}_3 < 0{,}9, \end{cases}$ которая обеспечивает верхнюю границу интервала.

Неравенство $\bar{x}_1 \cdot x_2 \ge 0{,}6$ означает, что конъюнкция $\bar{x}_1 \cdot x_2 \in [0{,}6;\ 1]$. Для попадания такой функции в указанный интервал, согласно табл. 5.8, необходимо выполнение системы условий:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 \le 1 - 0{,}6; \\ x_2 \ge 0{,}6; \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 > 1 - 1; \\ x_2 < 1. \end{array} \right. \end{cases}$$

Поскольку неравенства $x_1 > 0$ и $x_2 < 1$ выполняются при любых значениях нечетких булевых переменных, за исключением крайних случаев $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, которые следует рассматривать особо, справедлива равносильность:

$$\overline{x}_1 \cdot x_2 \ge 0{,}6 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично в отношении неравенства $x_1 \cdot \overline{x}_3 \ge 0{,}6$ и используя табл. 5.9, получаем цепочку эквивалентностей:

$$x_1 \cdot \overline{x}_3 \ge 0{,}6 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4; \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 < 1; \\ x_3 > 0; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4. \end{cases}$$

Таким образом, условием $H(x_1,\ x_2,\ x_3)$, обеспечивающим нижнюю границу интервала $[0{,}6;\ 0{,}9)$, в который должна попасть функция $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_3$, является выполнение совокупности двух систем неравенств:

$$H(x_1,\ x_2,\ x_3): \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Аналогичные рассуждения с использованием табл. 5.9 приводят к выводу о том, что условием $G(x_1,\ x_2,\ x_3)$, обеспечивающим верхнюю границу интервала $[0{,}6;\ 0{,}9)$, в который должна попасть функция $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_3$, является выполнение системы двух совокупностей неравенств:

$$G(x_1,\ x_2,\ x_3): \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 > 0{,}1; \\ x_2 < 0{,}9; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1 < 0{,}9; \\ x_3 > 0{,}1. \end{array} \right. \end{cases}$$

Чтобы функция $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3$ попала в заданный промежуток, необходимо выполнение как условия $H(x_1, x_2, x_3)$, так и условия $G(x_1, x_2, x_3)$:

$$H(x_1, x_2, x_3) \wedge G(x_1, x_2, x_3): \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4; \end{cases} \end{array}\right. \wedge \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 > 0{,}1; \\ x_2 < 0{,}9; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_1 < 0{,}9; \\ x_3 > 0{,}1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Условие $H(x_1, x_2, x_3)$ выполняется, если справедлива хотя бы одна из двух систем неравенств: $H_1: \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \end{cases}$ или $H_2: \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4. \end{cases}$

Условие $G(x_1, x_2, x_3)$ можно представить следующим образом:

$$G(x_1, x_2, x_3) = (g_1 \vee g_2) \cdot (g_3 \vee g_4),$$

где $g_1: (x_1 > 0{,}1)$, $g_2: (x_2 < 0{,}9)$, $g_3: (x_1 < 0{,}9)$, $g_4: (x_3 > 0{,}1)$ — одноместные предикаты.

Используя свойства конъюнкции и дизъюнкции, преобразуем предикат $G(x_1, x_2, x_3)$:

$$G(x_1, x_2, x_3) = (g_1 \vee g_2) \cdot (g_3 \vee g_4) = g_1 \cdot g_3 \vee g_1 \cdot g_4 \vee g_2 \cdot g_3 \vee g_2 \cdot g_4 =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 > 0{,}1; \\ x_1 < 0{,}9; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 > 0{,}1; \\ x_3 > 0{,}1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 < 0{,}9; \\ x_1 < 0{,}9; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 < 0{,}9; \\ x_3 > 0{,}1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Предикат $G(x_1, x_2, x_3)$ становится истинным, если переменные x_1, x_3, x_3 удовлетворяют хотя бы одной из четырех систем: $G_1: \begin{cases} x_1 > 0{,}1; \\ x_1 < 0{,}9, \end{cases}$ $G_2: \begin{cases} x_1 > 0{,}1; \\ x_3 > 0{,}1, \end{cases}$ $G_3: \begin{cases} x_2 < 0{,}9; \\ x_1 < 0{,}9, \end{cases}$ $G_4: \begin{cases} x_2 < 0{,}9; \\ x_3 > 0{,}1. \end{cases}$

Таким образом, выполнение условий $H(x_1, x_2, x_3)$ и $G(x_1, x_2, x_3)$ распадается на восемь систем неравенств:

$$1)\ H_1 \wedge G_1 = \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \\ x_1 > 0{,}1; \\ x_1 < 0{,}9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}1 < x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \end{cases}$$

$$2)\ H_1 \wedge G_2 = \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \\ x_1 > 0{,}1; \\ x_3 > 0{,}1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}1 < x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \\ x_3 > 0{,}1; \end{cases}$$

$$3)\ H_1 \wedge G_3 = \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \\ x_2 < 0{,}9; \\ x_1 < 0{,}9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ 0{,}6 \le x_2 < 0{,}9; \end{cases}$$

$$4)\ H_1 \wedge G_4 = \begin{cases} x_1 \le 0{,}4; \\ x_2 \ge 0{,}6; \\ x_2 < 0{,}9; \\ x_3 > 0{,}1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}1 < x_1 \le 0{,}4; \\ 0{,}6 \le x_2 < 0{,}9; \\ x_3 > 0{,}1; \end{cases}$$

$$5)\ H_2 \wedge G_1 = \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4; \\ x_1 > 0{,}1; \\ x_1 < 0{,}9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}6 \le x_1 < 0{,}9; \\ x_3 \le 0{,}4; \end{cases}$$

$$6)\ H_2 \wedge G_2 = \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4; \\ x_1 > 0{,}1; \\ x_3 > 0{,}1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ 0{,}1 < x_3 \le 0{,}4; \end{cases}$$

$$7)\ H_2 \wedge G_3 = \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4; \\ x_2 < 0{,}9; \\ x_1 < 0{,}9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}6 \le x_1 < 0{,}9; \\ x_2 < 0{,}9; \\ x_3 \le 0{,}4; \end{cases}$$

$$8)\ H_2 \wedge G_4 = \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ x_3 \le 0{,}4; \\ x_2 < 0{,}9; \\ x_3 > 0{,}1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \ge 0{,}6; \\ 0{,}1 < x_3 \le 0{,}4; \\ x_2 < 0{,}9. \end{cases}$$

Истинность любого из этих восьми предикатов обеспечивает попадание функции $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_3$ в промежуток $[0{,}6;\ 0{,}9)$. Пусть, например, истинным является предикат $H_2 \wedge G_2 : \begin{cases} x_1 \geq 0{,}6; \\ 0{,}1 < x_3 \leq 0{,}4. \end{cases}$ Данная система неравенств не содержит переменной x_2, но поскольку x_2 — нечеткая булева переменная, она удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq x_2 \leq 1$.

Найдем множество значений функции $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee \vee x_1 \cdot \overline{x}_3$ при условии истинности $H_2 \wedge G_2$:

1) $\begin{cases} 0{,}6 \leq x_1 \leq 1; \\ 0 \leq x_2 \leq 1; \\ 0{,}1 < x_3 \leq 0{,}4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \overline{x}_1 \leq 0{,}4; \\ 0 \leq \overline{x}_2 \leq 1; \\ 0{,}6 \leq \overline{x}_3 < 0{,}9; \end{cases}$.

2) $\overline{x}_1 \cdot x_2 \in [\min(0,\ 0), \min(0{,}4;\ 1)] = [0;\ 0{,}4];$

3) $x_1 \cdot \overline{x}_3 \in [\min(0{,}6;\ 0{,}6), \min(1;\ 0{,}9)) = [0{,}6;\ 0{,}9);$

4) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_3 \in [\max(0;\ 0{,}6), \max(0{,}4;\ 0{,}9)) =$
$= [0{,}6;\ 0{,}9).$

Подводя итог, можно сказать, что ***анализ аналитических функций нечетких булевых переменных сводится к оперированию предикатами бинарной (обычной) логики***.

Аналогично тому, как строятся схемы реализации булевых функций от обычных бинарных переменных, можно построить схему реализации нечеткой булевой функции. Задача состоит в том, чтобы задать последовательность действий преобразования произвольного набора входных сигналов $x_i \in [a_{1i},\ a_{2i}] \subseteq [0,\ 1]$ $(i = 1,\ 2, ...)$ в заранее заданный выходной сигнал. Решение такой задачи называется синтезом нечеткой функции [6].

Рассмотрим, каким образом можно построить схему реализации нечеткой булевой функции на следующем примере. Пусть требуется построить схему реализации функции $f(x_1,\ x_2) = x_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$, обеспечивающую выполнение условия $f(x_1,\ x_2) \in [0{,}4;\ 0{,}7)$, если $x_1 \in [0{,}2;\ 0{,}6]$ и $x_2 \in [0{,}4;\ 0{,}8]$.

Найдем и запишем в таблицу условия, которым должны удовлетворять входные сигналы x_1 и x_2 для того, чтобы на выходе оказалось выполненным включение $x_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \in [0{,}4;\ 0{,}7)$.

Введем обозначения: $p = x_1 \cdot x_2$, $q = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$, тогда $f = p \cdot q$. На основе табл. 5.9 получим табл. 5.10.

Таблица 5.10. Условия выходного сигнала

Условия, обеспечивающие нижнюю границу выходного сигнала f	**Условия, обеспечивающие верхнюю границу выходного сигнала** f
$\begin{cases} p \geq 0{,}4; \\ q \geq 0{,}4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} p < 0{,}7; \\ q < 0{,}7 \end{array}\right.$
$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \geq 0{,}4; \\ \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \geq 0{,}4 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 < 0{,}7; \\ \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 < 0{,}7 \end{array}\right.$
$\begin{cases} \begin{cases} x_1 \geq 0{,}4; \\ x_2 \geq 0{,}4; \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 \leq 1 - 0{,}4; \\ x_2 \leq 1 - 0{,}4 \end{array}\right. \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 < 0{,}7; \\ x_2 < 0{,}7; \end{array}\right. \\ \begin{cases} x_1 > 1 - 0{,}7; \\ x_2 > 1 - 0{,}7 \end{cases} \end{array}\right.$
$\begin{cases} \begin{cases} x_1 \geq 0{,}4; \\ x_2 \geq 0{,}4; \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_1 \leq 0{,}6; \\ x_2 \leq 0{,}6 \end{array}\right. \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 < 0{,}7; \\ x_2 < 0{,}7; \end{array}\right. \\ \begin{cases} x_1 > 0{,}3; \\ x_2 > 0{,}3 \end{cases} \end{array}\right.$

Легко показать, что сигналы $x_1 \in [0{,}2;\ 0{,}6]$ и $x_2 \in [0{,}4;\ 0{,}8]$, поступающие на вход схемы реализации, не обеспечивают нужного сигнала на ее выходе.

Действительно,
$$\overline{x_1} \in [1 - 0{,}6;\ 1 - 0{,}2] = [0{,}4;\ 0{,}8],$$
$$\overline{x_2} \in [1 - 0{,}8;\ 1 - 0{,}4] = [0{,}2;\ 0{,}6],$$
$$x_1 \cdot x_2 \in [\min(0{,}2;\ 0{,}4),\ \ \min(0{,}6;\ 0{,}8)] = [0{,}2;\ 0{,}6],$$
$$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \in [\max(0{,}4;\ 0{,}2),\ \ \max(0{,}6; 0{,}8)] = [0{,}4;\ 0{,}8],$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \in [\min(0{,}2;\ 0{,}4),\ \ \min(0{,}6;\ 0{,}8)] = [0{,}2;\ 0{,}6] \neq [0{,}4;\ 0{,}7).$$

Чтобы сигналы x_1 и x_2 обеспечивали нужный выход, введем ***параметры согласования***. Параметры согласования — это множители входных сигналов, обеспечивающие нижнюю и верхнюю границы выходного сигнала:

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x_1 \cdot k_1 \geq 0{,}4;\\ x_2 \cdot k_2 \geq 0{,}4;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1 \cdot k_3 \leq 0{,}6;\\ x_2 \cdot k_4 \leq 0{,}6;\end{array}\right.\end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x_1 \cdot m_1 < 0{,}7;\\ x_2 \cdot m_2 < 0{,}7;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x_1 \cdot m_3 > 0{,}3;\\ x_2 \cdot m_4 > 0{,}3.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Поскольку $x_1 \geq 0{,}2$, $x_2 \geq 0{,}4$, $x_1 \leq 0{,}6$ и $x_2 \leq 0{,}8$, параметры согласования находятся из следующих равенств:

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0{,}2 \cdot k_1 = 0{,}4;\\ 0{,}4 \cdot k_2 = 0{,}4;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}0{,}6 \cdot k_3 = 0{,}6;\\ 0{,}8 \cdot k_4 = 0{,}6;\end{array}\right.\end{array}\right. \wedge \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0{,}6 \cdot m_1 = 0{,}7;\\ 0{,}8 \cdot m_2 = 0{,}7;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}0{,}2 \cdot m_3 = 0{,}3;\\ 0{,}4 \cdot m_4 = 0{,}3;\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ll} k_1 = 2 & m_1 = 7/6;\\ k_2 = 1 & m_2 = 7/8;\\ k_3 = 1 & m_3 = 3/2;\\ k_4 = \dfrac{3}{4} & m_4 = 3/4.\end{array}$$

Для построения схем реализации используются следующие элементы:

k_i, m_i — устройство параметрического согласования; умножает входной сигнал на параметр согласования;

ИЛИ — логический элемент, реализующий объединение интервалов;

И — логический элемент, реализующий пересечение интервалов;

НЕ — логический элемент, реализующий операцию $1 - x$;

α — устройство, задающее нижний предел; пропускает сигналы, удовлетворяющие неравенству $p \geq \alpha$;

β — устройство, задающее верхний предел; пропускает сигналы, удовлетворяющие неравенству $p < \beta$.

Используя эти элементы, построим схему, реализующую попадание функции $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$ в интервал $[0{,}4;\ 0{,}7)$ (рис. 5.3).

Блоки 1 и 2 обеспечивают нижнюю границу промежутка $[0{,}4;\ 0{,}7)$.

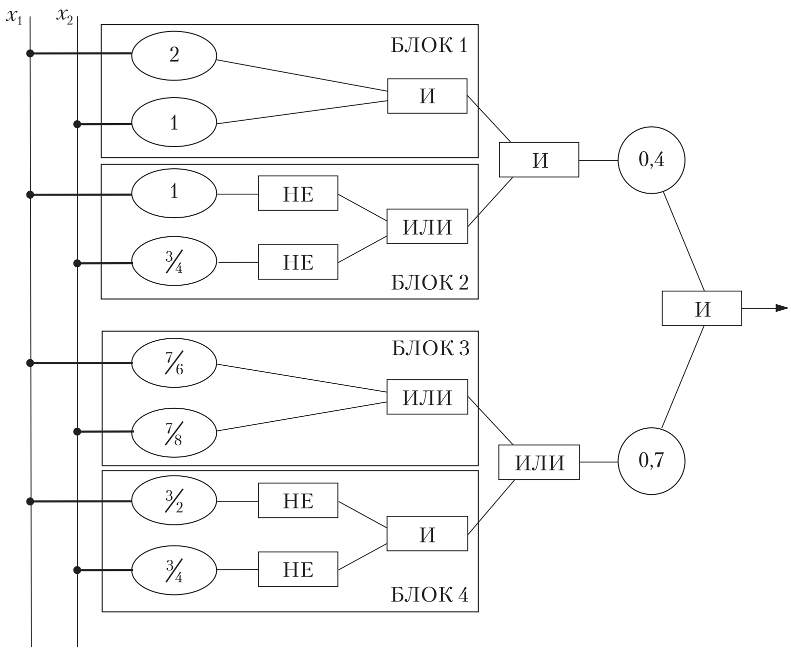


Рис. 5.3. Схема реализации попадания функции $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$ в интервал $[0{,}4;\ 0{,}7)$ при условиях $x_1 \in [0{,}2;\ 0{,}6)$, $x_2 \in [0{,}4;\ 0{,}8)$

Блок 1. На вход поступают сигналы $x_1 \in [0{,}2;\ 0{,}6]$ и $x_2 \in [0{,}4;\ 0{,}8]$. Проходя через устройства параметрического согласования, они умножаются на числа $k_1 = 2$ и $k_2 = 1$: $k_1 x_1 \in [2 \cdot 0{,}2;\ 2 \cdot 0{,}6] = [0{,}4;\ 1{,}2]$ и $k_2 x_2 \in [0{,}4;\ 0{,}8]$. Устройство И выполняет операцию пересечения интервалов: $p = k_1 x_1 \wedge k_2 x_2 \in [0{,}4;\ 1{,}2] \cap [0{,}4;\ 0{,}8] = [0{,}4;\ 0{,}8]$.

Блок 2. Сигналы $x_1 \in [0{,}2;\ 0{,}6]$ и $x_2 \in [0{,}4;\ 0{,}8]$, проходя устройства параметрического согласования, умножаются на числа $k_3 = 1$ и $k_4 = \dfrac{3}{4}$: $k_3 x_1 \in [0{,}2;\ 0{,}6]$ и $k_4 x_2 \in \left[\dfrac{3}{4} \cdot 0{,}4;\ \dfrac{3}{4} \cdot 0{,}8\right] = [0{,}3;\ 0{,}6]$. Далее сигналы преобразуются устройством НЕ, которое выполняет операцию вычитания из 1: $\overline{k_3 x_1} \in [1 - 0{,}6;\ 1 - 0{,}2] = [0{,}4;\ 0{,}8]$ и $\overline{k_4 x_2} \in$ $\in [1 - 0{,}6;\ 1 - 0{,}3] = [0{,}4;\ 0{,}7]$. Устройство ИЛИ выполняет операцию объединения промежутков, выдавая сигнал $q = \overline{k_3 x_1} \vee \overline{k_4 x_2} \in$ $\in [0{,}4;\ 0{,}7] \cup [0{,}4;\ 0{,}8] = [0{,}4;\ 0{,}8]$.

Сигналы $p \in [0{,}4;\ 0{,}8]$ и $q \in [0{,}4;\ 0{,}8]$ поступают на устройство И, выполняющее операцию пересечения промежутков: $H = p \wedge q \in$ $\in [0{,}4;\ 0{,}8] \cap [0{,}4;\ 0{,}8] = [0{,}4;\ 0{,}8]$.

Блоки 3 и 4 обеспечивают верхнюю границу промежутка [0,4; 0,7).

Блок 3. Сигналы $x_1 \in [0{,}2;\ 0{,}6]$ и $x_2 \in [0{,}4;\ 0{,}8]$, проходя через устройства параметрического согласования, умножаются на числа $m_1 = \dfrac{7}{6}$ и $m_2 = \dfrac{7}{8}$: $m_1 x_1 \in \left[\dfrac{7}{6}\cdot 0{,}2;\ \dfrac{7}{6}\cdot 0{,}6\right] = \left[\dfrac{1{,}4}{6};\dfrac{4{,}2}{6}\right] = [0{,}2(3);\ 0{,}7]$ и $m_2 x_2 \in \left[\dfrac{7}{8}\cdot 0{,}4;\ \dfrac{7}{8}\cdot 0{,}8\right] = [0{,}35;\ 0{,}7]$. Устройство ИЛИ выполняет операцию объединения интервалов:

$$p = m_1 x_1 \vee m_2 x_2 \in [0{,}2(3);0{,}7] \cup\ [0{,}35;\ 0{,}7]\ = [0{,}2(3);\ 0{,}7].$$

Блок 4. Устройства параметрического согласования умножают сигналы $x_1 \in [0{,}2;\ 0{,}6]$ и $x_2 \in [0{,}4;\ 0{,}8]$ на числа $m_3 = \dfrac{3}{2}$ и $m_4 = \dfrac{3}{4}$: $m_3 x_1 \in \left[\dfrac{3}{2}\cdot 0{,}2;\ \dfrac{3}{2}\cdot 0{,}6\right] = [0{,}3;\ 0{,}9]$, $m_4 x_2 \in \left[\dfrac{3}{4}\cdot 0{,}4;\ \dfrac{3}{4}\cdot 0{,}8\right] = [0{,}3;\ 0{,}6]$. Далее эти сигналы поступают на устройства НЕ, выполняющие операцию вычитания из единицы: $\overline{m_3 x_1} \in [1-0{,}9;\ 1-0{,}3] = [0{,}1;\ 0{,}7]$, [0,4; 0,7]. Устройство И выполняет операцию пересечения интервалов: $q = \overline{m_3 x_1} \wedge \overline{m_4 x_2} \in [0{,}1;\ 0{,}7] \cap [0{,}4;\ 0{,}7] = [0{,}4;\ 0{,}7]$.

Сигналы $p \in [0{,}2(3);\ 0{,}7]$ и $q \in [0{,}4;\ 0{,}7]$ с блоков 3 и 4 проходят устройство ИЛИ, которое выполняет операцию объединения интервалов: $G = p \vee q \in [0{,}2(3);\ 0{,}7] \cup\ [0{,}4;\ 0{,}7] = [0{,}2(3);\ 0{,}7]$.

Сигнал $H \in [0.4, 0.8]$ проходит устройство, которое задает нижний предел и пропускает лишь сигналы, не меньшие 0,4. Сигнал $G \in [0{,}2(3);\ 0{,}7]$ проходит через устройство, которое задает верхний предел и пропускает лишь сигналы, меньшие 0,7. Сигнал h пройдет через устройство, задающее нижний предел, полностью. Сигнал g выйдет с устройства, задающего верхний предел, в виде $G \in [0{,}2(3);\ 0{,}7)$. Устройство И на выходе схемы выполнит операцию пересечения промежутков $H \in [0{,}4;\ 0{,}8]$ и $G \in [0{,}2(3);\ 0{,}7]$. Таким образом, на выходе схемы будет сформирован сигнал $f = H \wedge G \in [0{,}4;\ 0{,}8] \cap [0{,}2(3);\ 0{,}7) = [0{,}4;\ 0{,}7)$.

5.4. Лингвистические переменные «истина» и «ложь»

Нечеткие булевы переменные можно рассматривать как **функции** принадлежности термов лингвистической переменной x.

Приведем пример. Пусть x = *«прогноз погоды»* — лингвистическая переменная. Терм-множество переменной x включает в себя термы: *«солнечно»*, *«ветрено»*. Сами синоптики дают оценку своим прогнозам, к примеру, с точки зрения теории вероятностей и указывают надежность своих прогнозов следующим образом:

- p = *«солнечно»*, $p \in [0{,}7;0{,}8)$;
- q = *«ветрено»*, $q \in [0{,}3;0{,}5)$;
- h = *«пасмурно»*, $h \in [0{,}8;0{,}9)$.

С точки зрения синоптиков, например, прогнозу *«солнечно»* следует доверять на 70 — 80%, аналогично другим прогнозам.

Пусть прогноз на завтра, т. е. значение лингвистической переменной x = *«завтра будет солнечно или пасмурно и ветрено»*. Построенное таким образом предложение представляет собой аналитическую булеву функцию от нечетких переменных $x = p \vee q \cdot h$. Найдем промежуток, в который попадают значения этой функции:

- $q \cdot h \in [\min(0{,}3;\ 0{,}8), \min(0{,}5;\ 0{,}9)) = [0{,}3;\ 0{,}5)$,
- $p \vee q \cdot h \in [\max(0{,}7;\ 0{,}3), \max(0{,}8;\ 0{,}5)) = [0{,}7;\ 0{,}8)$.

На завтра прогноз синоптиков был оценен как «не слишком истинный», т. е. определенному значению лингвистической переменной x была поставлена в соответствие модифицированная лингвистическая переменная *«истина»*.

Таким образом, значения лингвистических переменных можно рассматривать как нечеткие высказывания, к которым применимы оценки с точки зрения истинности или ложности. Однако эти оценки сами являются лингвистическими переменными, т. е. именами нечетких подмножеств множества $U = [0, 1]$.

В обычной бинарной логике оценка истинности высказывания или предиката имеет лишь два значения: 1 (*«истина»*) и 0 (*«ложь»*). В нечеткой логике такая оценка может принимать любое значение на отрезке [0, 1]. Значение функции принадлежности μ_p нечеткой переменной p может рассматриваться как результат действия какого-либо модификатора на термы *«истинно»* (T) или *«ложно»* (F).

Например, $\mu_T(p) = 0{,}5$ можно интерпретировать как *«не истинно и не ложно»*, $\mu_T(p) = 0{,}6$ — *«не слишком истинно»*, $\mu_F(p) = 0{,}6$ — *«слегка ложно»* и т. п.

Приведем типичный график функций принадлежности лингвистических переменных *«истинно»* и *«ложно»* (рис. 5.4) [2].

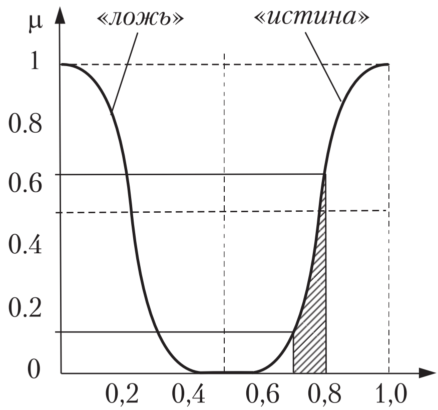


Рис. 5.4. Функции принадлежности лингвистических переменных *«ложь»* и *«истина»*

Значения истинности переменной $X = p \vee q \cdot h \in [0{,}7;\ 0{,}8)$ отмечены на рис. 5.4 штриховкой. Как видно на рис. 5.4, промежутку $[0{,}7;\ 0{,}8)$ на оси u соответствует промежуток $[0{,}15; 0{,}65)$ на оси μ, т. е. истинность прогноза синоптиков X = *«завтра будет солнечно или пасмурно и ветрено»*$= p \vee q \cdot h \in [0{,}7;\ 0{,}8)$ оказалась весьма невысокой: $\mu_{«истина»} \in [0{,}15; 0{,}65)$, что и может соответствовать терминам *«не слишком истинно»*, *«истинность прогноза весьма низкая»* и т. п.

Функции принадлежности лингвистических переменных *«истина»* и *«ложь»* симметричны относительно прямой $u = 0{,}5$ (см. рис. 5.4). При работе с этими функциями можно применять формулы:

$$\mu_{«истина»} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2x - 1 - a_1}{1 - a_1}\right)\right), \qquad x \in [a_1,\ 1]; \qquad (5.11)$$

$$\mu_{«ложь»} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - a_1 - 2x}{1 - a_1}\right)\right), \qquad x \in [0,\ 1 - a_1]; \qquad (5.12)$$

где $a_1 \in (0{,}1)$ — параметр, задаваемый экспертом.

Контрольные вопросы

1. Дайте понятие булевой переменной, формулы булевой алгебры, основных операций над булевыми переменными.
2. Дайте понятие нечеткой булевой переменной.
3. Что называют функцией нечетких булевых переменных?
4. Какие функции нечетких булевых переменных над тождествами?
5. Какие функции нечетких булевых переменных называют аналитическими?
6. В чем заключается смысл анализа аналитических функций нечетких булевых переменных?
7. Дайте понятие лингвистических переменных «*истина*» и «*ложь*». Приведите примеры функций принадлежности этих переменных.

Задания для самостоятельной работы

1. Функции нечетких булевых переменных заданы формулами:
   $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1 x_3}$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \vee \overline{x_2}} \vee \overline{\overline{x_1} x_3}$,
   $f_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1 x_3}}$, $f_4(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3}$ ...

   Требуется:
   1) упростить формулы;
   2) найти значения функций, если $x_1 = 0{,}4$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}9$.
2. Функции нечетких булевых переменных заданы формулами:
   $$f_1(x_1, x_2) = \overline{x_1} \vee x_2 \overline{x_1} \vee x_2, \; f_2(x_1, x_2) = x_1 \overline{x_1} \vee x_2 \overline{x_2},$$
   $$f_3(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_2, \; f_4(x_1, x_2) = x_1 \vee \overline{x_2 x_1 \overline{x_2}},$$
   $$f_5(x_1, x_2) = x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_1} \vee x_2.$$

   Требуется:
   1) упростить формулы (если это возможно);
   2) построить таблицы значений функций;
   3) записать множества истинности предикатов $f_i \in [0{,}4;\ 0{,}8)$ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ и дать их геометрическую интерпретацию;

4) построить схемы реализации каждой функции, если $x_1 \in [0{,}2; 0{,}5)$, $x_2 \in [0{,}5; 0{,}9)$.

3. Выступая в роли эксперта, оцените истинность и ложность следующего рекламного текста: «*Здесь Вы можете приобрести товар по Вашему вкусу и очень недорого*», если заказчики рекламы так оценивают достоверность ее высказываний:

   p = «*Вы можете приобрести товар по вашему вкусу*» $\in [0{,}6; 0{,}8)$,

   q = «*Вы можете приобрести товар очень недорого*» $\in [0{,}3; 0{,}9)$.

4. С помощью формул (5.11) и (5.12) рассмотрите несколько значений параметра a_1. Сформулируйте ваши заключения с помощью модифицированных термов «*истина*» и «*ложь*».

6. Лабораторные работы

6.1. Лабораторная работа 1. Нечеткие множества и операции над ними

Задача 6.1

Дано множество $W = \{a_1, a_2, \ldots a_3\}$ и два его нечетких подмножества: $X = \{x, \mu_1(x)\}$ и $Y = \{y, \mu_2(y)\}$, $x, y \in W$:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_1(x)$	0,1	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_2(y)$	0,7	0,5	1	0,6	0,4	0,3	0	0,2

Требуется:

1) представить X и Y геометрически;
2) найти функции принадлежности и представить геометрически множества: $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \oplus Y$;
3) найти расстояние между множествами X и Y:
   - абсолютное и относительное расстояние Хемминга,
   - абсолютное и относительное Евклидово расстояния;
4) найти подмножества (обычные), ближайшие к X и Y. Вычислить индексы нечеткости X и Y.

Решение. Приведем решение задачи в электронной таблице Excel (рис. 6.1–6.3).

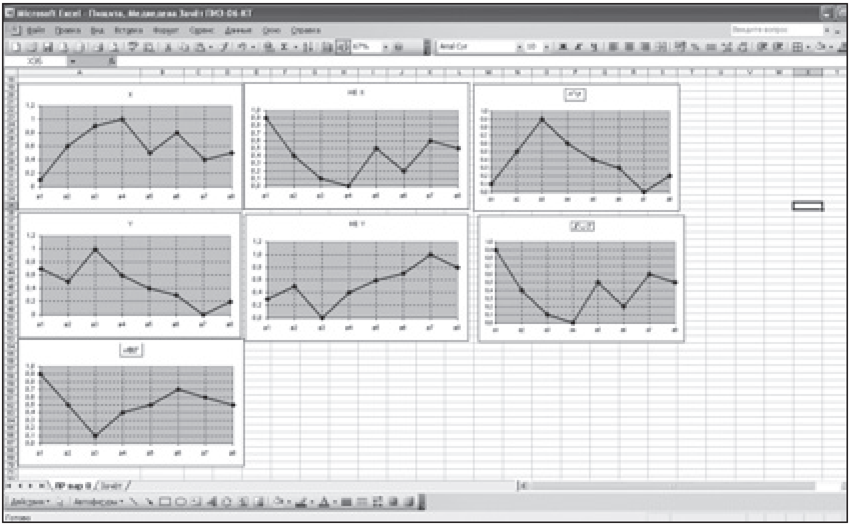
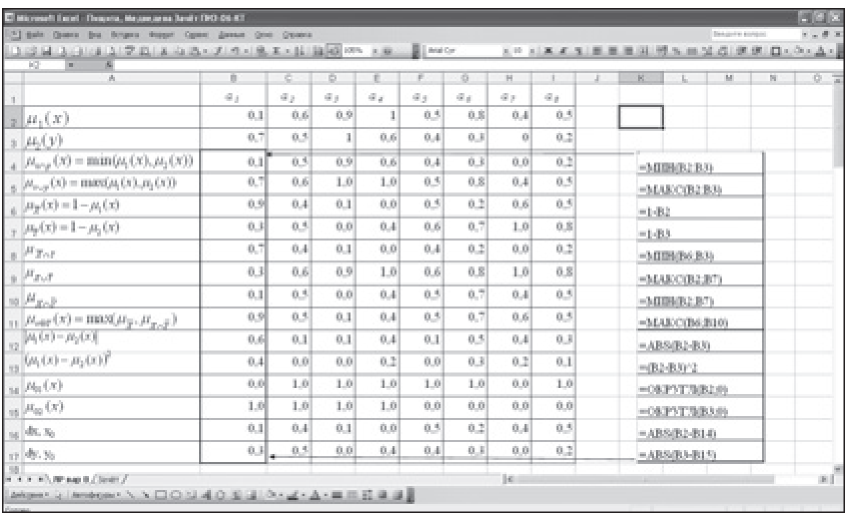


Рис. 6.1. Геометрическая интерпретация решения задачи



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
$\mu_1(x)$	0,1	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5	
$\mu_2(y)$	0,7	0,5	1	0,6	0,4	0,3	0	0,2	
$\mu_{x\wedge y}(x)=\min(\mu_1(x),\mu_2(x))$	0,1	0,5	0,9	0,6	0,4	0,3	0,0	0,2	=МИН(B2:B3)
$\mu_{x\vee y}(x)=\max(\mu_1(x),\mu_2(x))$	0,7	0,6	1,0	1,0	0,5	0,8	0,4	0,5	=МАКС(B2:B3)
$\mu_{\bar{x}}(x)=1-\mu_1(x)$	0,9	0,4	0,1	0,0	0,5	0,2	0,6	0,5	=1-B2
$\mu_{\bar{y}}(x)=1-\mu_2(x)$	0,3	0,5	0,0	0,4	0,6	0,7	1,0	0,8	=1-B3
$\mu_{\bar{x}\wedge y}$	0,7	0,4	0,1	0,0	0,4	0,2	0,0	0,2	=МИН(B6;B3)
$\mu_{x\vee\bar{y}}$	0,3	0,6	0,9	1,0	0,6	0,8	1,0	0,8	=МАКС(B2;B7)
$\mu_{x\wedge\bar{y}}$	0,1	0,5	0,0	0,4	0,5	0,7	0,4	0,5	=МИН(B2;B7)
$\mu_{x\oplus y}(x)=\max(\mu_{\bar{x}\wedge y},\mu_{x\wedge\bar{y}})$	0,9	0,5	0,1	0,4	0,5	0,7	0,6	0,5	=МАКС(B6;B10)
$\lvert\mu_1(x)-\mu_2(x)\rvert$	0,6	0,1	0,1	0,4	0,1	0,5	0,4	0,3	=ABS(B2-B3)
$(\mu_1(x)-\mu_2(x))^2$	0,4	0,0	0,0	0,2	0,0	0,3	0,2	0,1	=(B2-B3)^2
$\mu_{01}(x)$	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	=ОКРУГЛ(B2;0)
$\mu_{02}(x)$	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	=ОКРУГЛ(B3;0)
dx, %	0,1	0,4	0,1	0,0	0,5	0,2	0,4	0,5	=ABS(B2-B14)
dy, %	0,3	0,5	0,0	0,4	0,4	0,3	0,0	0,2	=ABS(B3-B15)

Рис. 6.2. Решение задачи в Excel (п. 2)

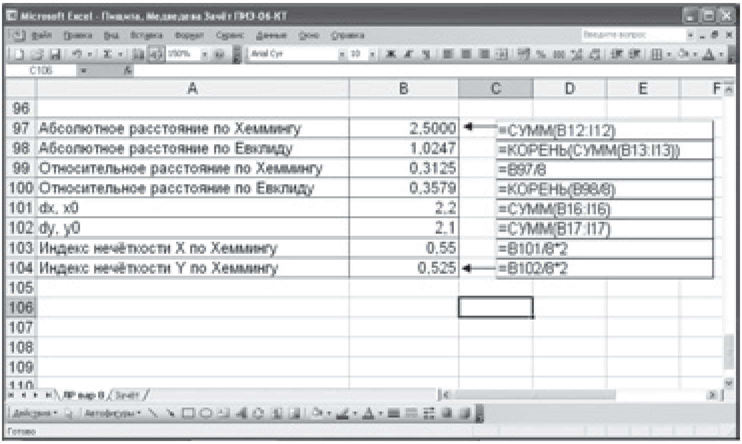


Рис. 6.3. Решение задачи в Excel (п. 3, 4)

Таблица 6.1. Варианты заданий

Вариант 1.1

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	0,2	0,8	0,5	1	0	0,9	0,3	0,4
$\mu_{12}(y)$	0,7	0	0	0,6	0,4	1	0	0,4

Вариант 1.2

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	1	0,6	0,3	0	0	0,5	0,5	0,9
$\mu_{12}(y)$	0,7	0,4	0	0,5	0,8	1	1	0,6

Вариант 1.3

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	0,5	0,3	0	0,8	0,9	1	0,4	0,2
$\mu_{12}(y)$	0,5	1	1	0,8	0,4	0	0	0,5

Вариант 1.4

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	0	0	0,7	0,6	0,1	0,5	0,8	1
$\mu_{12}(y)$	0,5	0,3	0	0,6	0,7	1	0,7	0,5

Вариант 1.5

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	0,4	0,7	0,2	0	0,3	0,7	1	0,7
$\mu_{12}(y)$	0,5	0,1	0	0,5	0,7	0,9	1	1

Вариант 1.6

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	1	1	0,6	0	0,7	0,4	0,1	0
$\mu_{12}(y)$	0,6	0,9	0,5	0,3	0	0,5	1	0.7

Вариант 1.7

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	0,5	0,8	1	0,4	0	0	0,2	0,6
$\mu_{12}(y)$	0,5	0,2	0,1	0	0	0,6	0,8	0,6

Вариант 1.8

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	1	0,5	0,6	0,9	0	0,5	0,4	0,2
$\mu_{12}(y)$	0	0,7	0,8	0,9	0,5	1	1	0

Вариант 1.9

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	0,6	0,4	0,8	0,5	0,9	0,3	0	0,2
$\mu_{12}(y)$	0,8	0,6	0,9	1	1	0,3	0	0

Вариант 1.10

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{11}(x)$	0,4	0,5	0,2	0	0,5	0,7	0,9	1
$\mu_{12}(y)$	0,4	0,2	0,6	0,9	1	0,7	0,3	0,1

Упражнение. Индексы нечеткости по евклидовой метрике вычислите самостоятельно по аналогии.

6.2. Лабораторная работа 2. Нечеткие числа и операции над ними

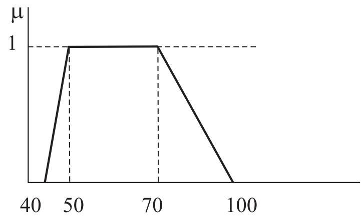
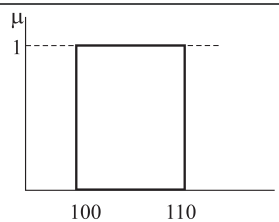
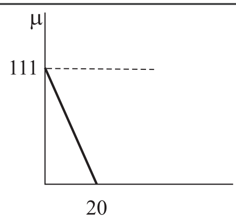
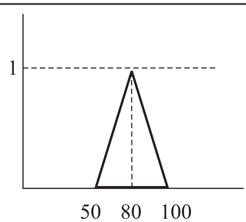
Задача 6.2

При анализе продажи четырех различных магазинов было отмечено:

- *магазин A* обеспечивает уровень продаж в течение месяца на сумму от 40 до 100 тыс. руб. в зависимости от спроса, но с наибольшей вероятностью можно ожидать сумму продаж от 50 до 70 тыс. руб.;
- *магазин B* надежно обеспечивает высокий уровень продаж на сумму от 100 — 110 тыс. руб. в месяц;
- *магазин C* ненадежен и обеспечивает уровень продаж не более 20 тыс. в месяц;
- *расходы D* составят около 50 — 100 тыс. руб., но наиболее вероятна выплата 80 тыс. руб.

Таким образом, имеем три источника доходов и один источник расхода. Построим на основе их описаний трапециевидные функции принадлежности для каждой из четырех нечетких переменных (табл 6.2).

Таблица 6.2. Интерпретация нечетких переменных

Источники дохода	**Функция принадлежности**	**Нечеткое число**
Магазин A		$A = (50, 70, 30, 10)$
Магазин B		$B = (100, 110, 0{,}0)$
Магазин C		$C = (0, 0, 0, 20)$
Расход D		$D = (80, 80, 30, 20)$

После задания всех нечетких переменных, встает задача определения суммы всех доходов от продаж, которая также будет нечеткой величиной. Для этого надо уметь выполнять простейшие арифметические операции над нечеткими переменными.

Определение этих операции рассмотрим для случая двух нечетких переменных, $Г_1$и $Г_2$, которые заданы своими трапециевидными функциями принадлежности вида

$$\tilde{A}_1 = (\underline{m}_1, \overline{m}_1, \alpha_1, \beta_1),$$
$$\tilde{A}_2 = (\underline{m}_2, \overline{m}_2, \alpha_2, \beta_2).$$

Результатом операции будет также нечеткая переменная $A = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)$, которая также имеет трапециевидную функцию принадлежности, параметры которой определяются в зависимости от типа арифметической операции (табл. 6.3).

Таблица 6.3. Арифметические операции

Операция	**Зависимости параметров функций принадлежности**
$A = \tilde{A}_1(+)\tilde{A}_2$	$\underline{m} = \underline{m}_1 + \underline{m}_2$, $\overline{m} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta = \beta_1 + \beta_2$.
$A = \tilde{A}_1(-)\tilde{A}_2$	$\underline{m} = \underline{m}_1 - \underline{m}_2$, $\overline{m} = \overline{m}_1 - \overline{m}_2$, $\alpha = \alpha_1 + \beta_2$, $\beta = \beta_1 + \alpha_2$.
$A = \tilde{A}_1(\times)\tilde{A}_2$	$\underline{m} = \underline{m}_1 * \underline{m}_2$, $\overline{m} = \overline{m}_1 * \overline{m}_2$, $\alpha = m_1 + m_2 - (m_1 - \alpha_1)(m_2 - \alpha_2)$, $\beta = (\overline{m}_1 + \beta_1) * (\overline{m}_2 + \beta_2) - m_1 * m_2$.
$A = \tilde{A}_1(/)\tilde{A}_2$	$\underline{m} = \underline{m}_1 / \underline{m}_2$, $\overline{m} = \overline{m}_1 / \overline{m}_2$, $\alpha = m_1 * \beta_2 + m_2 * \alpha_1 / (\overline{m}_2^2 + \overline{m}_2 * \beta_2)$, $\beta = m_1 * \beta_1 + m_1 * \alpha_2 / (\overline{m}_2^2 + \overline{m}_2 * \alpha_2)$.

На основе приведенных выше описаний арифметических операций для рассматриваемого примера можно определить оценку дохода от продаж без учета расходов (F) как сумму трех источников дохода. Причем результат будет также нечеткой переменной с трапециевидной функцией принадлежности:

$$F = A\ (+)B(+)C = (50+100+0,\ 70+110+0, 10+0+0, 30+0+20) =$$
$$= (150,\ 180,\ 10,\ 50).$$

Для получения оценки чистого дохода необходимо из F вычесть D:

$$F–D = (150–80,\ 180–80,\ 10+20,\ 50+30) = (70,\ 100,\ 30,\ 80).$$

Таким образом, чистый доход составит от 40 до 180 тыс. руб., но с наибольшей степенью уверенности можно говорить от 70 до 100 тыс. руб.

Упражнение. Реализуйте решение этой задачи в Excel.

Задача 6.3

Крупный московский автодилер торгует автомобилями популярной французской марки. Большую часть времени продажи автомашин колебались от 4 до 7 в неделю, в конце ноября и начале декабря была проведена рекламная акция общей стоимостью 30 тыс. долларов, в результате продажи автомашин выросли и составили около 16 автомобилей в неделю. Удельная прибыль от продажи каждого автомобиля составила 1,5 тыс. долл. Время действия акции 3 недели. Оценить эффективность проведенной рекламы.

Решение. Построим модель оценки эффективности рекламы по самому простому критерию — увеличению объема продаж.

Выберем сначала переменные, значимо влияющие на эффективность рекламы с точки зрения выбранного критерия, и учтем, что они являются функциями времени:

- $P(t)$ — совокупные продажи некоторого товара или услуги;
- $q(t)$ — удельная прибыль, т. е. сумма, зарабатываемая нами на продаже каждой единицы товара или услуги;
- $C(t)$ — совокупная стоимость рекламной кампании.

Коэффициент эффективности рекламной кампании может быть вычислен по формуле

$$E(t) = \frac{\Delta S(t)}{C(t)} = \frac{S_2(t) - S_1(t)}{C(t)} = \frac{P_2(t) \cdot q(t) - P_1(t) \cdot q(t)}{C(t)},$$

где $S_1(t)$, $S_2(t)$ — совокупная прибыль от рекламной кампании, полученная от продаж некоторого товара или услуги до и после рекламы; $P_1(t)$, $P_2(t)$ — совокупные продажи некоторого товара или услуг до и после рекламной кампании соответственно.

Полученная формула в математике называется функционалом, поэтому эффективность рекламы можно оценить как некоторый функционал. Из анализа формулы следует, что

- если $0 \le E(t) < 1$ — рекламная кампания не эффективна, т. е. прирост продаж не оправдал средств, затраченных на рекламу;
- если $E(t) \ge 1$ — рекламная кампания эффективна.

Рассмотрим пример оценки показателя рекламной эффективности, основанный на предлагаемом подходе.

Кодируя продажи в неделю как некоторые трапециевидные и треугольные нечеткие числа, используя правила операций над трапезоидными числами, получим, что коэффициент эффективности рекламы имеет следующее интервальное значение: $1{,}3 \le E(t) < 1{,}9$.

Упражнение. Реализовать задачу в Excel.

6.3. Лабораторная работа 3. Моделирование экономических процессов и явлений с помощью аппарата теории нечетких множеств

Задача 6.4. Вывод на рынок новой марки товара[1]

Решение задачи о выводе на рынок новой марки товара состоит из двух этапов:

1) построение подходящей обычной (четкой) математической модели с ожидаемыми наиболее вероятными (четкими) параметрами;
2) преобразование четкой математической модели в нечеткую, путем размывания параметров, т. е. представление параметров нечеткими числами.

В качестве четкой математической модели рассмотрим оценку эффективности инвестиционного проекта. Проект состоит в создании производства некоторого вида продукции в районе, отдаленном от иногородних производителей этой продукции, и вывода новой марки товара (в дальнейшем — товара) на рынок [12] при условии, что товар поставляется на местный рынок иногородней фирмой.

Используются следующие обозначения:

- t — время, прошедшее с момента выхода на рынок товара местного производства;
- $L(t)$ — планируемый объем продаж товара местного производства за месяц;
- $K(t)$ — объем продаж завозимого товара иногороднего производства за месяц;
- $F(t)$ — суммарный объем продаж товара местного и иногороднего производства за месяц.

[1] www.aup.ru/artices/marketing/15.htp

Суммарный объем продаж $F(t)$ удобно представить в следующем виде:

$$L(t) + K(t) = F(t) = F_{max} d\,(t), \quad (6.1)$$

где F_{max} — максимальный суммарный объем месячных продаж; $d(t)$ — функция сезонности спроса, т. е. относительных объемов продаж, изменяющаяся от 0 до 1. Значения F_{max} и $d(t)$ определяются в результате маркетинговых исследований.

Введя новые обозначения:

- $L(t)$ / $F(t) = j(t)$ — удельный объем товара местного производства;
- $K(t)$ / $F(t) = y(t)$ — удельный объем товара иногороднего производства,

получим упрощенную формулу:

$$j(t) + y(t) = 1. \quad (6.2)$$

Функцию $j(t)$, отражающую динамику продаж товара, представим в виде

$$j(t) = j_{max} R(t), \quad (6.3)$$

где j_{max} — максимальная доля товара местного производства от всего товара данного вида, который реализуется в районе; $R(t)$ — некоторая функция (профильная кривая). Поскольку $R(t)= j(t)/j_{max}$, справедливо неравенство: $0 \le R(t) \le 1$.

Как показывают маркетинговые исследования, достаточно хорошее (и простое) приближение профильной кривой $R(t)$ достигается накопительной функцией распределения Вейбулла:

$$R(t) = 1 - \exp\,[(-(t\,/\,b)^r)], \quad (6.4)$$

принимающей значения от 0 до 1 и имеющей параметры r и b.

Параметр r определяет форму кривой $R(t)$, поэтому его называют параметром формы. Если принять $r = 2$, то это обеспечит кривой $R(t)$ необходимую гладкость. Из формулы (6.4) следует, что параметр b, находится в обратной связи с ростом продаж: чем больше b, тем медленнее нарастают продажи местного товара.

Параметр b можно определить по характерной точке на кривой $R(t)$, например, в момент времени $t_{0,5}$, когда новая торговая марка займет 50 % своего предельного долевого уровня j_{max} на местном рынке. При $R(t) = 0{,}5$ и $r = 2$ из равенства (6.4) имеем

$$b = \mathrm{t}_{0,5}\,/\,\sqrt{\ln 2}\,. \quad (6.5)$$

Учитывая, что $L(t)\ /\ F(t) = j(t)$, а также равенства (6.1), (6.3) и (6.4), получаем окончательную математическую модель натурального объема продаж товара местного производства:

$$L(t) = F_{\max} d(t) j_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{b}r}\right). \tag{6.6}$$

Именно планируемый объем продаж $L(t)$ является целевой функцией модели.

Риск инвестирования проекта связан с размытостью (нечеткостью) экзогенных параметров модели. Для оценки риска примем следующие допущения:

1) все экзогенные параметры представляют собой нечеткие треугольные числа;
2) для каждого экзогенного параметра a функция принадлежности $\mu(a)$ свое наибольшее значение, равное 1, принимает в точке $a = a_0$, где a_0 — значение параметра a, определенное в результате экспертных оценок: $\mu(a) = 1$.

Пусть инвестор задал уровень α, который можно рассматривать как уровень достоверности наших рекомендаций. Потребуем, чтобы для каждого экзогенного параметра a выполнялось неравенство $\mu(a) \geq \alpha$. Вычислим в этих предположениях интервал размытости целевой функции $L(t)$. Именно этот интервал и является *мерой риска инвестирования проекта* при заданном инвестором уровне функции принадлежности $\mu(a) \geq \alpha$.

Пример. Пусть $\alpha = 0{,}8$ — уровень достоверности, предъявляемый инвестором к нашим расчетам, начало исследования — апрель. Требуется оценить риск инвестирования проекта, используя в качестве меры риска степень размытости натурального объема продаж товара местного производства:

$$L(t) = F_{\max} d(t) j_{\max} \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^2 d(t)}\right).$$

Экспертные оценки параметров модели:

$F_{\max} = F_0 = 3$ (млн ед./мес.);

$j_{\max} = j_0 = 0{,}7$;

$t_{0,5} = t_0 \approx 4$ мес.;

$b = t_0 / \sqrt{\ln 2}$;

$d_0(t)$ задана табл. 6.4.

Таблица 6.4. Функция сезонности спроса $d(t)$

t	–	–	–	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
$d_0(t)$	0,92	0,85	1,00	0,77	0,62	0,54	0,50	0,58	0,65	0,65	0,73	0,85

Согласуем с экспертами интервалы размытости каждого параметра. Пусть в результате согласования имеем

$$F_{\max} \in [0{,}5F_0;\ 1{,}5F_0] = [1{,}5;\ 4{,}5];$$

$$j_{\max} \in [0{,}7j_0;\ 1{,}3j_0] = [0{,}49;\ 0{,}91] \approx [0{,}5;\ 0{,}9];$$

$$t_{0,5} \in [0{,}75t_0;\ 1{,}25t_0] = [3;\ 5];$$

$$d(t) \in [d_{\min}(t),\ d_{\max}(t)] = [0{,}5;\ 1]; \qquad t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

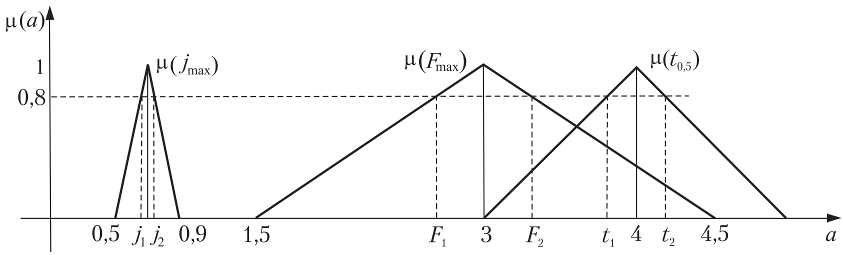


Рис. 6.4. Графики функций принадлежности экзогенных параметров математической модели натурального объема продаж «местного» товара

На рис. 6.4 показаны графики функций принадлежности экзогенных параметров $F_{\max}$, $j_{\max}$, $t_{0,5}$. Для записи этих функций используем уравнение прямой в виде

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1,$$

где (x_1, y_1), (x_2, y_2) — координаты двух точек, через которые проходит прямая. Имеем

$$\mu(F_{\max}) = \begin{cases} \dfrac{1{,}0 - 0}{3{,}0 - 1{,}5}(F_{\max} - 1{,}5) + 0; & 1{,}5 \le F_{\max} \le 3{,}0 \\ \dfrac{0 - 1{,}0}{4{,}5 - 3{,}0}(F_{\max} - 3{,}0) + 1{,}0; & 3{,}0 < F_{\max} \le 4{,}5 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1,5} F_{\max} - 1,0; & 1,5 \le F_{\max} \le 3,0 \\ -\dfrac{1}{1,5} F_{\max} + 3,0; & 3,0 < F_{\max} \le 4,5; \end{cases}$$

$$\mu(j_{\max}) = \begin{cases} \dfrac{1,0-0}{0,7-0,5}(j_{\max} - 0,5) + 0; & 0,5 \le j_{\max} \le 0,7 \\ \dfrac{0-1,0}{0,9-0,7}(j_{\max} - 0,7) + 1,0; & 0,7 < j_{\max} \le 0,9 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 5,0 j_{\max} - 1,0; & 0,5 \le j_{\max} \le 0,7 \\ -5,0 j_{\max} + 4,5; & 0,7 < j_{\max} \le 0,9; \end{cases}$$

$$\mu(t_{0,5}) = \begin{cases} \dfrac{1,0-0}{4,0-3,0}(t_{0,05} - 3,0) + 0; & 3,0 \le t_{0,5} \le 4,0 \\ \dfrac{0-1}{5,0-4,0}(t_{0,05} - 4,0) + 1,0; & 4,0 < t_{0,5} \le 5,0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} t_{0,5} - 3,0; & 3,0 \le t_{0,5} \le 4,0 \\ -t_{0,5} + 5,0; & 4,0 < t_{0,5} \le 5. \end{cases}$$

Положив $\alpha = 0,8$ найдем множества α-уровня нечетких чисел $F_{\max}$, $j_{\max}$, и $t_{0,5}$:

$$\mu(F_{\max}) \ge \alpha \Rightarrow \mu(F_{\max}) \ge 0,8 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1,0}{1,5} F_{\max} - 1 \ge 0,8; & 1,5 \le F_{\max} \le 3,0 \\ -\dfrac{1,0}{1,5} F_{\max} + 3 \ge 0,8; & 3,0 < F_{\max} \le 4,5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{\max} \ge 2,7; & 1,5 \le F_{\max} \le 3,0 \\ F_{\max} \le 3,96; & 3,0 < F_{\max} \le 4,5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,7 \le F_{\max} \le 3,96;$$

$$\mu(j_{\max}) \ge \alpha \Rightarrow \mu(j_{\max}) \ge 0,8 \Rightarrow \begin{cases} 5,0 j_{\max} - 1,0 \ge 0,8; & 0,5 \le j_{\max} \le 0,7 \\ -5,0 j_{\max} + 4,5 \ge 0,8; & 0,7 < j_{\max} \le 0,9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} j_{\max} \ge 0,36; & 0,5 \le j_{\max} \le 0,7 \\ j_{\max} \le 0,74; & 0,7 < j_{\max} \le 0,9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}36 \le j_{\max} \le 0{,}74;$$

$$\mu(F_{\max} \cdot j_{\max}) \ge \alpha \Rightarrow \mu(F_{\max} \cdot j_{\max}) \ge 0{,}8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2{,}70 \cdot 0{,}36 \le F_{\max} \cdot j_{\max} \le 3{,}96 \cdot 0{,}74 \Rightarrow 0{,}9720 \le F_{\max} \cdot j_{\max} \le 2{,}9304;$$

$$\mu(t_{0,5}) \ge \alpha \Rightarrow \mu(t_{0,5}) \ge 0{,}8 \Rightarrow \begin{cases} t_{0,5} - 3{,}0 \ge 0{,}8; & 3{,}0 \le t_{0,5} \le 4{,}0 \\ -t_{0,5} + 5{,}0 \ge 0{,}8; & 4{,}0 < t_{0,5} \le 5{,}0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{0,5} \ge 3{,}8; & 3{,}0 \le t_{0,5} \le 4{,}0 \\ t_{0,5} \le 4{,}2; & 4{,}0 < t_{0,5} \le 5{,}0 \end{cases} \Rightarrow 3{,}8 \le t_{0,5} \le 4{,}2.$$

Найдем отрезок, в который отображается множество α-уровня нечеткого числа $t_{0,5}$ накопительной функцией распределения Вейбулла

$$R(t) = (1 - \exp[-(\mathrm{t}\sqrt{\ln 2}\ / \ \mathrm{t}_{0,5})^2] = 1 - \exp^{-\frac{\ln 2 \cdot t^2}{t_{0,5}^2}}.$$

Множество α-уровня нечеткого числа $t_{0,5}$: $\mu(t_{0,5}) \ge 0{,}8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3{,}8 \le t_{0,5} \le 4{,}2$.

Согласно принципу обобщения, имеем

$$\mu(t_{0,5}^2) \ge 0{,}8 \Leftrightarrow 3{,}8^2 \le t_{0,5}^2 \le 4{,}2^2 \Leftrightarrow 14{,}44 \le t_{0,5}^2 \le 17{,}67;$$

$$\mu(\frac{\ln 2}{t_{0,5}^2}) \ge 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{17{,}67} \le \frac{\ln 2}{t_{0,5}^2} \le \frac{\ln 2}{14{,}44} \Leftrightarrow 0{,}0392 \le \frac{\ln 2}{t_{0,5}^2} \le 0{,}0480;$$

$$\mu(t^2 \cdot \frac{\ln 2}{t_{0,5}^2}) \ge 0{,}8 \Leftrightarrow 0{,}0392t^2 \le \frac{\ln 2 \cdot t^2}{t_{0,5}^2} \le 0{,}0480t^2;$$

$$\mu(\mathrm{e}^{\ln 2 \cdot t^2 / t_{0,5}^2}) \ge 0{,}8 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}0480t^2} \le \mathrm{e}^{-\ln 2 \cdot t^2 / t_{0,5}^2} \le \mathrm{e}^{-0{,}0392t^2};$$

$$\mu(R(t)) \ge 0{,}8 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-0{,}0392t^2} \le R(t) \le 1 - \mathrm{e}^{-0{,}0480t^2}.$$

Получим формулу множества α-уровня значений $d(t)$, заданных таблично с учетом включения $d(t) \in [0{,}5;\ 1]$. Введем обозначение: $d_0(t) = d_0$, $d(t) = d$. Тогда функция принадлежности нечеткого числа d имеет вид

$$\mu(d) = \begin{cases} \dfrac{1{,}0 - 0}{d_0 - 0{,}5}(d - 0{,}5); & 0{,}5 \le d \le d_0; \\ \dfrac{0 - 1{,}0}{1{,}0 - d_0}(d - d_0) + 1; & d_0 < d \le 1. \end{cases}$$

Множество α-уровня нечеткого числа d

$$\mu(d) \ge \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1{,}0}{d_0 - 0{,}5}(d - 0{,}5) \ge \alpha; & 0{,}5 \le d \le d_0 \\ -\dfrac{1{,}0}{1{,}0 - d_0}(d - d_0) + 1{,}0 \ge \alpha; & d_0 < d \le 1{,}0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \ge \alpha(d_0 - 0{,}5) + 0{,}5; & 0{,}5 \le d \le d_0 \\ d \le (1-\alpha)(1-d_0) + d_0; & d_0 \le d \le 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha d_0 + 0{,}5(1{,}0 - \alpha) \le d \le \alpha d_0 + (1{,}0 - \alpha).$$

При $\alpha = 0{,}8$: $0{,}8d_0 + 0{,}1 \le d \le 0{,}8d_0 + 0{,}2$.

Таким образом, имеем

$$0{,}9720 \le F_{\max} \cdot j_{\max} \le 2{,}9304,$$

$$R_1 = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}0392t^2} \le R(t) \le 1 - \mathrm{e}^{-0{,}0480t^2} = R_2,$$

$$d_1 = 0{,}8d_0 + 0{,}1 \le d \le 0{,}8d_0 + 0{,}2 = d_2.$$

Следовательно, для каждого момента времени t натуральный объем продаж товара местного производства $L(t) = F_{\max} j_{\max} R(t)\ d(t)$ «размывается» до множества α-уровня ($\alpha = 0{,}8$):

$$L_1 = 0{,}9720(1 - \mathrm{e}^{-0{,}0392t^2})(0{,}8d_0 + 0{,}1) \le L(t) \le$$

$$\le 2{,}9304(1 - \mathrm{e}^{-0{,}0480t^2})(0{,}8d_0 + 0{,}2) = L_2. \quad (6.7)$$

Используя формулу (6.7), найдем множества α-уровня величины $L(t)$ для $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Найдем также «четкие» значения $L(t)$ по формуле

$$L(t) = F_0 \cdot j_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\ln 2 \cdot t^2 / t_{0,5}^2}\right) d_0(t) = 2{,}1\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}0433t^2}\right) \cdot d_0(t). \quad (6.8)$$

Расчеты оформим в виде табл. 6.5.

Упражнение. Даны параметры модели натурального объема продаж товара местного производства $F_{\max}$, $j_{\max}$, и $t_{0,5}$. Используя значения функции сезонности спроса $d(t)$ (табл. 6.6), найти для указанных месяцев множества α-уровня (L_1, L, L_2) натурального объема продаж товара местного производства.

Таблица 6.5. Множества α-уровня ($\alpha = 0{,}8$) натурального объема продаж местного товара (L_1, L_2, L_3)

t	$R(t) = 1 - e^{-0{,}0433t^2}$	$d_0(t)$	$R_1 = 1 - e^{-0{,}0392t^2}$	$d_1 = 0{,}8d_0 + 0{,}1$	$R_2 = 1 - e^{-0{,}0480t^2}$	$d_2 = 0{,}8d_0 + 0{,}2$	L_1	L	L_2
0	0	0,77	0	–	0	–	0	0	0
1	0,0424	0,62	0,0384	0,596	0,0469	0,696	0,0222	0,0552	0,0868
2	0,1590	0,54	0,1451	0,532	0,1747	0,632	0,0750	0,1803	0,3235
3	0,3227	0,50	0,2973	0,500	0,3508	0,600	0,1445	0,3388	0,6168
4	0,4998	0,58	0,4659	0,564	0,5360	0,664	0,2554	0,6088	1,0429
5	0,6612	0,65	0,6247	0,620	0,6988	0,720	0,3765	0,9025	1,4774
6	0,7696	0,65	0,7561	0,620	0,8224	0,720	0,4556	1,0505	1,7352
7	0,8802	0,73	0,8535	0,684	0,9048	0,784	0,5674	1,3493	2,0787
8	0,9374	0,85	0,9186	0,780	0,9537	0,880	0,6964	1,6732	2,4593

Таблица 6.6. Варианты заданий

Параметр	**Номер варианта**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$F_{\max}$ млн ед.	3,2	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
$j_{\max}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
$t_{0,5}$	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Месяцы	1–5	2 –6	3–7	9–12, 1	10–12, 1, 2	11, 12, 13	12,1–4	1–5	2–6	1–3, 11, 12
α	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9

Задача 6.5. Анализ риска банкротства[1]

Требуется дать количественную оценку истинности экспертного заключения о риске банкротства предприятия.

Решение. Введем лингвистическую переменную g = «риск банкротства предприятия». Универсальным множеством для переменной g является отрезок [0, 1], а множеством значений переменной g — терм-множество $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$, где

- G_1 = «предельный риск банкротства»;
- G_2 = «степень риска банкротства высокая»;
- G_3 = «степень риска банкротства средняя»;
- G_4 = «низкая степень риска банкротства»;
- G_5 = «риск банкротства незначительный».

Каждый терм из множества G является именем нечеткого подмножества на отрезке [0, 1]. Будем рассматривать эти нечеткие подмножества как трапециевидные нечеткие числа (рис. 6.5).

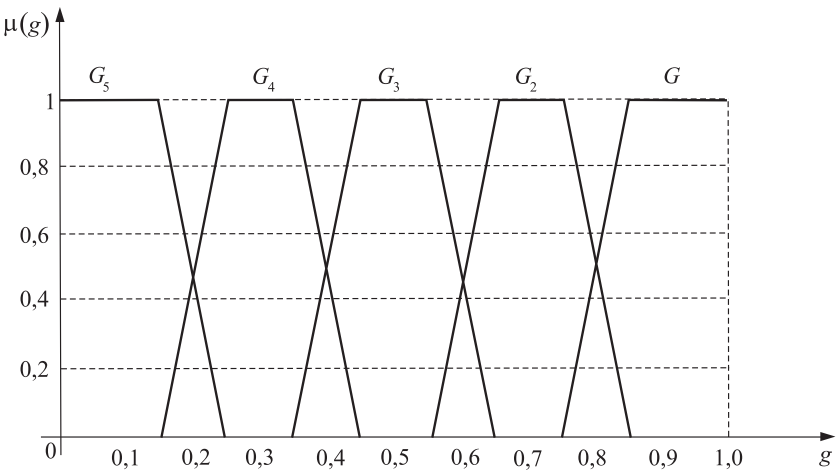


Рис. 6.5. Функции принадлежности подмножеств терм-множества g

Составим таблицу функций принадлежности каждого терма (табл. 6.7), используя формулу функции принадлежности трапезоидного нечеткого числа $x = (a_1, a_2, a_3, a_4)$:

[1] www.aup.ru/articles/finance/htm

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < a_1; \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & \text{если} \quad a_1 \le x < a_2; \\ 1, & \text{если} \quad a_2 \le x \le a_3; \\ \dfrac{x - a_4}{a_3 - a_4}, & \text{если} \quad a_3 < x \le a_4; \\ 0, & \text{если} \quad x > a_4. \end{cases} \tag{6.9}$$

Таблица 6.7. Функции принадлежности подмножеств терм-множества *g*

Терм G_k	**Функция принадлежности нечеткого множества** G_k
G_5 – «риск банкротства незначительный» $G_5 \in [0;\ 0{,}25]$	$\mu_5 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le g \le 0{,}15 \\ 10(0{,}25 - g), & \text{если} \quad 0{,}15 < g \le 0{,}25 \end{cases}$
G_4 – «низкая степень риска банкротства» $G_4 \in (0{,}15;\ 0{,}45]$	$\mu_4 = \begin{cases} 1 - 10(0{,}25 - g), & \text{если} \quad 0{,}15 < x \le 0{,}25 \\ 1, & \text{если} \quad 0{,}25 < x \le 0{,}35 \\ 10(0{,}45 - g), & \text{если} \quad 0{,}35 < x \le 0{,}45 \end{cases}$
G_3 – «степень риска банкротства средняя» $G_3 \in (0{,}35;\ 0{,}65]$	$\mu_3 = \begin{cases} 1 - 10(0{,}45 - g), & \text{если} \quad 0{,}35 < x \le 0{,}45 \\ 1, & \text{если} \quad 0{,}45 < x \le 0{,}55 \\ 10(0{,}65 - g), & \text{если} \quad 0{,}55 < x \le 0{,}65 \end{cases}$
G_2 – «степень риска банкротства высокая» $G_2 \in (0{,}55;\ 0{,}85]$	$\mu_2 = \begin{cases} 1 - 10(0{,}65 - g), & \text{если} \quad 0{,}55 < x \le 0{,}65 \\ 1, & \text{если} \quad 0{,}65 < x \le 0{,}75 \\ 10(0{,}85 - g), & \text{если} \quad 0{,}75 < x \le 0{,}85 \end{cases}$
G_1 – «предельный риск банкротства» $G_1 \in [0{,}75;\ 0{,}1]$	$\mu_1 = \begin{cases} 1 - 10(0{,}85 - g), & \text{если} \quad 0{,}75 \le g < 0{,}85 \\ 1, & \text{если} \quad 0{,}85 \le g \le 1 \end{cases}$

ПРИМЕЧАНИЕ

В формулах функций отброшены интервалы, на которых функция принадлежности принимает нулевое значение.

Значение функции принадлежности будем рассматривать как меру истинности терма G_i. Например, если было установлено, что $g = 0{,}62$, то отличную от нуля функцию принадлежности имеют два терма: G_3 — «степень риска банкротства средняя» и G_2 — «степень риска банкротства высокая». При этом

$$\mu_3(0{,}62) = 10(0{,}65 - g)\Big|_{g=0{,}62} = 0{,}3 \text{ и}$$

$$\mu_2(0{,}62) = 1 - 10(0{,}62 - g)\Big|_{g=0{,}62} = 0{,}7\,.$$

Таким образом, для $g = 0{,}62$ высказывание «степень риска банкротства высокая» является «более истинным», чем высказывание «степень риска банкротства средняя».

Заключение о риске банкротства эксперт делает на основании анализа финансовых показателей предприятия. Показатели следует выбирать так, чтобы *рост каждого отдельного показателя* X_i *был сопряжен со снижением степени риска банкротства*, с улучшением самочувствия рассматриваемого предприятия. Если для какого-либо финансового показателя наблюдается противоположная тенденция, то в анализе его следует заменить сопряженным.

Пусть эксперт выбрал систему из шести следующих показателей:

- X_1 — коэффициент автономии (отношение собственного капитала к валюте бизнеса);
- X_2 — коэффициент обеспеченности оборотных активов собственными средствами (отношение чистого оборотного капитала к оборотным активам);
- X_3 — коэффициент промежуточной ликвидности (отношение суммы денежных средств и дебиторской задолженности к краткосрочным пассивам);
- X_4 — коэффициент абсолютной ликвидности (отношение суммы денежных средств к краткосрочным пассивам);
- X_5 — оборачиваемость всех активов в годовом исчислении (отношение выручки от реализации к средней за период стоимости активов);
- X_6 — рентабельность всего капитала (отношение чистой прибыли к средней за период стоимости активов).

Каждый финансовый показатель — *числовая переменная*, или, по-другому, переменная, принимающая свои значения на определенном числовом промежутке. Каждую из этих числовых переменных будем рассматривать как множество носитель лингвистической переменной B_i, состоящей из следующих термов:

- B_{i1} — «очень низкий уровень показателя X_i»;
- B_{i2} — «низкий уровень показателя X_i»;
- B_{i3} — «средний уровень показателя X_i»;
- B_{i4} — «высокий уровень показателя X_i»;
- B_{i5} — «очень высокий уровень показателя X_i».

Примем, что каждая лингвистическая переменная имеет трапециевидную функцию принадлежности, которая может быть определена четверкой чисел: $x = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, т. е. функция принадлежности каждого терма B_{ij} имеет вид (6.9).

Экспертные оценки всех термов B_{ij}, ($i = 1, 2, 3, 4, 4, 6, j = 1, 2, 3, 4, 5$) даны в табл. 6.8.

Таблица 6.8. Экспертные оценки финансовых показателей предприятия

Показатель	Терм				
	B_{i1}	B_{i2}	B_{i3}	B_{i4}	B_{i5}
X_1	(0; 0; 0,1; 0,2)	(0,1;0,2; 0,25; 0,3)	(0,25; 0,3; 0,45; 0,5)	(0,34; 0,5; 0,6; 0,7)	(0,6; 0,7; 1; 1)
X_2	(–1; –1; –0,005; 0)	(–0,005; 0; 0,09; 0,11)	(0,09; 0,11; 0,3; 0,35)	(0,3; 0,35; 0,45; 0,5)	(0,45; 0,5; 1; 1)
X_3	(0; 0; 0,5; 0,6)	(0,5; 0,6; 0,7; 0,8)	(0,7; 0,8; 0,9; 1)	(0,9; 1; 1,3; 1,5)	(1,3; 1,5; ∞; ∞)
X_4	(0; 0; 0,01; 0,03)	(0,03; 0,03; 0,08; 0,1)	(0,08; 0,1; 0,3; 0,35)	(0,3; 0,35; 0,5; 0,6)	(0,5; 0,6; ∞; ∞)
X_5	(0; 0; 0,12; 0,14)	(0,12; 0,14; 0,18; 0,2)	(0,18; 0,02; 0,3; 0,4)	(0,3; 0,4; 0,5; 0,8)	(0,5; 0,8; ∞; ∞)
X_6	(–∞; –∞; 0; 0)	(0; 0; 0,006; 0,01)	(0,006; 0,01; 0,06; 0,1)	(0,06; 0,1; 0,225; 0,4)	(0,225; 0,4; ∞; ∞)

Из данных, приведенных в табл. 6.8, и формулы (6.9) следует, что если, к примеру, $X_3 = 0{,}78$, то состояние этого показателя может быть оценено как $B_{32} = (0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8)$ — «низкий уровень показателя X_3» или как $B_{33} = (0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1)$ — «средний уровень показателя X_3». При этом $\mu_{32} = \left.\dfrac{x-0,8}{0,7-0,8}\right|_{x=0,78} = \dfrac{-0,02}{-0,1} = 0,2$ – оценка истинности B_{32}; $\mu_{33} = \left.\dfrac{x-0,7}{0,8-0,7}\right|_{x=0,78} = \dfrac{0,08}{0,1} = 0,8$ – оценка истинности B_{33}.

Теперь необходимо перейти от финансовых показателей $X = (X_1, X_2, X_3, X_3, X_5, X_6)$ к высказываниям о степени риска банкротства предприятия $G = (G_1, G_2, G_3, G_4, G_5)$.

Для формирования правила перехода от значений финансовых показателей к лингвистическим переменным G_i надо проранжировать финансовые показатели по степени их вклада в риск банкротства предприятия, т. е. сопоставить каждому показателю X_i его вес r_i, определяющий вклад показателя в меру риска банкротства предприятия.

Если веса показателей упорядочены, т. е. имеется информация о том, что $r_1 \geq r_2 \geq ... \geq r_n$, и более никакой информации об этих величинах нет, то вес определяют по правилу Фишберна:

$$r_i = \frac{2(n-i+1)}{(n-1)n}. \tag{6.10}$$

Оценка (6.9) соответствует максимуму энтропии наличной информационной неопределенности об объекте исследования.

Если показатели равнопредпочтительны или системы предпочтений нет, то будем считать, что они обладают равным весом:

$$r_i = \frac{1}{n}. \tag{6.11}$$

Для выбранных выше показателей X_i, $I = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ примем формулу (6.11):

$$r_i = \frac{1}{6}.$$

При выбранной системе весов показателей, согласно [12], правило перехода от значений финансовых показателей к весам термов лингвистической переменной g имеет вид

$$p_k = \sum_{i=1}^{6} r_i \mu_{ki}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{6.12}$$

Вычислив наблюдаемые веса каждого терма лингвистической переменной G_i, получим значение самой переменной g по формуле

$$g = \sum_{k=1}^{5} p_k \cdot \overline{g}_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{6.13}$$

где $\overline{g}_k$ — середина промежутка, который является носителем терма $G_k \in (a_{k1}, a_{k4}]$.

Переход от финансовых показателей к лингвистическим оценкам риска показан на рис. 6.6.

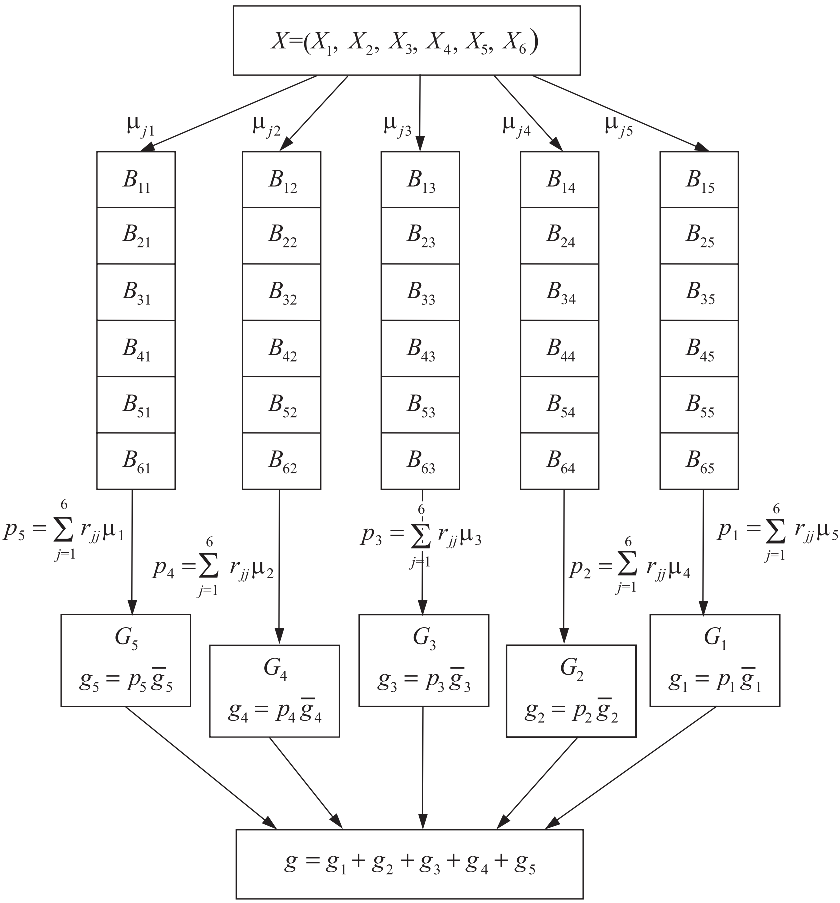


Рис. 6.6. Схема перехода от финансовых показателей к высказываниям о степени риска банкротства

Применим изложенный алгоритм к оценке риска банкротства предприятия, на котором были изучены финансовые показатели за I и II кварталы. Уровни показателей (трапециевидные числа) для их наблюдаемых значений взяты из табл. 6.8, значения функций принадлежности каждого нечеткого числа вычислены по формуле (6.9).

Первичная обработка финансовых показателей представлена табл. 6.9.

Таблица 6.9. Первичная обработка финансовых показателей

Наблюдаемое значение показателя		**Уровень показателя (трапезоидные числа)**	**Значение функции принадлежности**	
I квартал	**II квартал**		**I квартал**	**II квартал**
$X_1 = 0{,}619$	$X_1 = 0{,}566$	$B_{15} = (0{,}6;\ 0{,}7;\ 1;\ 1)$ $B_{14} = (0{,}45;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7)$	$\mu_{15} = 0{,}19$ $\mu_{14} = 0{,}81$	$\mu_{14} = 1$
$X_2 = 0{,}294$	$X_2 = 0{,}262$	$B_{23} = (9{,}09;\ 0{,}11;\ 0{,}3;\ 0{,}35)$	$\mu_{23} = 1$	$\mu_{23} = 1$
$X_3 = 0{,}670$	$X_3 = 0{,}622$	$B_{32} = (0{,}05;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8)$	$\mu_{32} = 1$	$\mu_{32} = 1$
$X_4 = 0{,}112$	$X_4 = 0{,}048$	$B_{42} = (0.02;\ 0{,}03;\ 0{,}08;\ 0{,}1)$ $B_{43} = (0{,}08;\ 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}35)$	$\mu_{43} = 1$	$\mu_{43} = 11$
$X_5 = 2{,}876$	$X_5 = 3{,}46$	$B_{55} = (0{,}5;\ 0{,}8;\ \infty;\ \infty)$	$\mu_{55} = 1$	$\mu_{55} = 1$
$X_6 = 0{,}113$	$X_6 = 0{,}008$	$B_{62} = (0;\ 0;\ 0{,}006;\ 0{,}01)$ $B_{63} = (0;\ 0;\ 0{,}006;\ 0{,}01)$ $B_{64} = (0{,}06;\ 0{,}1;\ 0{,}225;\ 0{,}4)$	$\mu_{64} = 1$	$\mu_{62} = 0{,}5$ $\mu_{63} = 0{,}5$

Вычислим значение функции принадлежности лингвистической переменной g = «риск банкротства предприятия» за I квартал в соответствии со схемой, изображенной на рис. 6.6 (табл. 6.10).

Таблица 6.10. Вычисление значений функции принадлежности лингвистической переменной g = «риск банкротства предприятия» за I квартал

Вес терма p_i лингвистической переменной g	**Множество носитель i-го терма лингвистической переменной g**	**Середина промежутка G_i, $\overline{g}_i$**	$g_i = p_i\overline{g}_i$
$p_5 = \sum_{j=1}^{6} r_j\mu_{j1} = 0;$	$G_5 \in [0;\ 0{,}25]$	0,125	0

Вес терма p_i **лингвистической переменной** g	**Множество носитель** i**-го терма лингвистической переменной** g	**Середина промежутка** G_i, $\overline{g}_i$	$g_i = p_i \overline{g}_i$
$p_4 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j2} = \frac{1}{6}\mu_{32} = \frac{1}{6} \approx 0,16667$	$G_4 \in (0,15;\ 0,45]$	0,3	0,05
$p_3 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j3} = \frac{1}{6}(\mu_{23} + \mu_{43}) = \frac{2}{6} \approx 0,33333$	$G_3 \in (0,35;\ 0,65]$	0,5	0,16667
$p_2 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j4} = \frac{1}{6}(\mu_{14} + \mu_{64}) = \frac{1,81}{6} \approx 0,30167$	$G_2 \in (0,55;\ 0,85]$	0,7	0,21117
$p_1 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j5} = \frac{1}{6}(\mu_{15} + \mu_{55}) = \frac{1,19}{6} \approx 0,19833$	$G_1 \in [0,75;\ 0,1]$	0,0875	0,01735
$g = \sum_{i=1}^{5} g_i = 0,445$			

Используя табл. 6.10, найдем значения функций принадлежности $\mu_k(g)$ для g = 0,445:

$$\mu_4(0,445) = 10(0,45 - g)\big|_{g=0,445} = 0,05;$$

$$\mu_5(0,445) = 1 - 10(0,45 - g)\big|_{g=0,445} = 0,95;$$

$$\mu_k = 0 \text{ для } k = 1,\ 2,\ 3.$$

Описание состояния предприятия за I квартал:

G_4 ($\mu_4 = 0,05$) или G_5 ($\mu_5 = 0,95$):

«низкая степень риска банкротства» или

«риск банкротства незначительный».

Вычислим значение функции принадлежности лингвистической переменной g = «риск банкротства предприятия» за II квартал (табл. 6.11):

$$\mu_3(0,49) = 1.$$

Таблица 6.11. Вычисление значений функции принадлежности лингвистической переменной $g =$ «риск банкротства предприятия» за II квартал

Вес терма p_i лингвистической переменной g	**Множество носитель i-го терма лингвистической переменной g**	**Середина промежутка G_i, $\bar{g}_i$**	$g_i = p_i \cdot \bar{g}_i$
$p_5 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j1} = 0$	$G_5 \in [0;\ 0{,}25]$	0,125	0
$p_4 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j2} = \frac{1}{6}(\mu_{32} + \mu_{62}) = \frac{1{,}5}{6} = 0{,}25$	$G_4 \in (0{,}15;\ 0{,}45]$	0,3	0,15
$p_3 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j3} = \frac{1}{6}(\mu_{23} + \mu_{43} + \mu_{63}) = \frac{2{,}5}{6} \approx 0{,}41667$	$G_3 \in (0{,}35;\ 0{,}65]$	0,5	0,20834
$p_2 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j4} = \frac{1}{6}\mu_{14} = \frac{1}{6} \approx 0{,}16667$	$G_2 \in (0{,}55;\ 0{,}85]$	0,7	0,11667
$p_1 = \sum_{j=1}^{6} r_j \mu_{j5} = \frac{1}{6}\mu_{55} = \frac{1}{6} \approx 0{,}16667$	$G_1 \in [0{,}75;\ 0{,}1]$	0,0875	0,01458
$g = \sum_{i=1}^{5} g_i = 0{,}490$			

Описание состояния предприятия за II квартал:

$G_3(\mu_3 = 1)$: «низкая степень риска банкротства» или «риск банкротства незначительный».

В табл. 6.12 даны номера вариантов лабораторной работы.

В каждом варианте даны значения финансовых показателей работы предприятия за два квартала.

Требуется:

1) выполнить первичную обработку финансовых показателей работы предприятия по образцу табл. 6.9 и 6.10;

Таблица 6.12. Варианты заданий

	Номер варианта									
	1		**2**		**3**		**4**		**5**	
	I квартал	**I квартал**	**I квартал**	**II квартал**	**I квартал**	**II квартал**	**I квартал**	**II квартал**	**I квартал**	**II квартал**
X_1	0,15	0,15	0,16	0,15	0,2	0,1	0,12	0,15	0,02	0,15
X_2	0,32	0,32	0,001	0,002	0,012	0	0,02	0,1	0	0
X_3	0,92	0,92	1,6	1,3	1,64	1,7	1,0	1,7	1,6	1,6
X_4	0,7	0,7	0,55	0,5	0,53	0,55	0,45	0,35	0,55	0,55
X_5	1,0	1,0	0,8	0,82	0,88	0,8	0,98	0,82	0,8	0,8
X_6	0,3	0,3	0,1	0,12	0,11	0,11	0,21	0,15	0,1	0,1
	6		**7**		**8**		**9**		**10**	
	I квартал	**I квартал**	**I квартал**	**II квартал**	**I квартал**	**II квартал**	**I квартал**	**II квартал**	**I квартал**	**II квартал**
X_1	0,16	0,12	0,2	0,15	0,15	0,02	0,15	0,15	0,15	0,1
X_2	0,001	0,02	0,012	0,32	0,1	0	0,32	0,002	0	0
X_3	1,6	1,0	1,64	0,92	1,7	1,6	0,92	1,3	1,6	1,7
X_4	0,55	0,45	0,53	0,7	0,35	0,55	0,7	0,5	0,55	0,55
X_5	0,8	0,98	0,88	1,0	0,82	0,8	1,0	0,82	0,8	0,8
X_6	0,1	0,21	0,11	0,3	0,15	0,1	0,3	0,12	0,1	0,11

2) найти значения функций принадлежности лингвистических переменных «риск банкротства предприятия в I квартале» и «риск банкротства предприятия во втором квартале»;
3) дать словесное описание состояния предприятия за I и II кварталы и сравнить степень риска банкротства предприятия в каждом из этих периодов.

Список литературы

1. *Баранский В. А.* Введение в общую алгебру и ее приложения: Учебное пособие. Екатеринбург, 1998.
2. *Бернштейн Л. С., Боженюк А. В.* Нечеткие графы и гиперграфы. М.: Научный мир, 2005.
3. Вопросы анализа и процедуры принятия решений / Под ред. И. Ф. Шахнова. М.: Мир, 1976.
4. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
5. Классификация и кластер / Под ред. Дж. Вэн Райзина. М.: Мир, 1980.
6. *Корн Г. А., Корн Т. М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.
7. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
8. *Лебедев В. И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2000.
9. *Люггер, Джордж Ф.* Искусственный интеллект. Стратегии и методы решения сложных проблем / Пер. с англ. М.–СПб.–Киев, 2003.
10. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.
11. *Назаров Д. М.* Совершенствование организационно-экономического механизма подготовки персонала промышленных предприятий в условиях рынка. Автореф. дис. канд. экон. наук. Екатеринбург, 2004.
12. *Недосекин А. О.* Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. СПб.: Типография «Сезам», 2002.
13. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

14. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Рональда Р. Ягера. М.: Радио и связь, 1986.
15. Экспертные системы. Принципы работы и примеры / Под ред. Р. Форсайта. М.: Радио и связь, 1987.
16. *Ярушкина Н. Г.* Основы теории нечетких и гибридных систем. М.: Финансы и статистика, 2004.

Людмила Константиновна Конышева,
Дмитрий Михайлович Назаров

Основы теории нечетких множеств: Учебное пособие

Заведующий редакцией	*А. Кривцов*
Руководитель проекта	*А. Кривцов*
Ведущий редактор	*Ю. Сергиенко*
Художественный редактор	*Л. Адуевская*
Корректор	*И. Тимофеева*
Верстка	*Л. Харитонов*

ООО «Мир книг», 198206, Санкт-Петербург, Петергофское шоссе, 73, лит. А29.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93,
том 2; 95 3005 — литература учебная.
Подписано в печать 16.03.11. Формат 60х90/16. Усл. п. л. 12,000. Тираж 2000. Заказ
Отпечатано по технологии CtP в ООО «Северо-Западный Печатный двор»,
188300, Ленинградская обл., г. Гатчина, ул. Железнодорожная, 45Б