



**Ю.Е. ВОСКОБОЙНИКОВ
А.В. ГОЧАКОВ
А.Б. КОЛКЕР**

**ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ
И ИЗОБРАЖЕНИЙ:
ФУРЬЕ И ВЕЙВЛЕТ
АЛГОРИТМЫ
(с примерами в Mathcad)**

НОВОСИБИРСК 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

Ю.Е. Воскобойников, А.В. Гочаков, А.Б. Колкер

**ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ
И ИЗОБРАЖЕНИЙ:
ФУРЬЕ И ВЕЙВЛЕТ
АЛГОРИТМЫ
(с примерами в Mathcad)**

Монография

НОВОСИБИРСК 2010

УДК 519.2
ББК 22.172
В 650

Воскобойников Ю. Е.

Фильтрации сигналов и изображений: фурье и вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad) : монография / Ю. Е. Воскобойников, А. В. Гочаков, А. Б. Колкер ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2010. – 188 с.

ISBN 978-5-7795-0519-2

Монография содержит изложение теории и практики частотных алгоритмов фильтрации, в которых обработке подлежат коэффициенты разложения зашумленного сигнала или изображения по Фурье-базису и вейвлет-базису. При этом большое внимание уделяется выбору параметров алгоритмов, исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации. Приводятся фрагменты документов математического пакета Mathcad, реализующие построенные алгоритмы фильтрации.

Результаты монографии будут полезны широкому кругу читателей: магистрантам, аспирантам, научным сотрудникам, всем кто сталкивается с необходимостью цифровой фильтрации сигналов или изображений.

Печатается по решению научно-технического совета
НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

- М.С. Соппа, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики НГАСУ (Сибстрин);
- В.И. Хабаров, д-р техн. наук, профессор, декан факультета бизнес-информатики, завкафедрой информационных технологий на транспорте СГУПС

ISBN 978-5-7795-0519-2

- © Воскобойников Ю.Е.,
Гочаков А.В., Колкер А.Б., 2010
- © Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	7
Введение	9
ГЛАВА 1. АЛГОРИТМЫ ФУРЬЕ-ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ.....	12
1.1. Непрерывное и дискретное преобразования Фурье
1.1.1. Непрерывное преобразование Фурье и ряд Фурье.....
1.1.2. Дискретное преобразование Фурье.....
1.1.3. Функции Mathcad для вычисления дискретного преобразования Фурье.....
1.1.4. Формирование периодических дискретных последовательностей.....
1.1.5. Свойства случайной периодической последовательности.....
1.2. Глобальные алгоритмы Фурье-фильтрации
1.2.1. Алгоритм Фурье-фильтрации одномерного дискретного сигнала.....
1.2.2. Алгоритм Фурье-фильтрации дискретного изображения.....
1.2.3. Ошибки алгоритмов Фурье-фильтрации.....
1.3. Алгоритмы выбора параметра сглаживания в алгоритмах Фурье-фильтрации
1.3.1. Критерий оптимальности линейного алгоритма фильтрации.....
1.3.2. Выбор параметра сглаживания на основе критерия оптимальности.....
1.3.3. Выбор параметра сглаживания на основе метода перекрестной значимости.....
1.3.4. Анализ построенных алгоритмов выбора параметра сглаживания.....
1.3.5. Оценка дисперсии σ^2
1.3.6. Реализация алгоритмов Фурье-фильтрации в системе компьютерной математики Mathcad.....
1.4. Квазиоптимальный локальный алгоритм Фурье-фильтрации.....

1.4.1. Оптимальный локальный алгоритм Фурье-фильтрации	
1.4.2. Алгоритм итерационного уточнения отношения «шум/сигнал»	
1.4.3. Исследование локальных алгоритмов Фурье-фильтрации	

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ..... 85

2.1. Непрерывное вейвлет-преобразование	
2.1.1. Недостатки Фурье-преобразования	
2.1.2. Оконное преобразование Фурье	
2.1.3. Прямое непрерывное вейвлет-преобразование и вейвлет-анализ сигналов	
2.1.4. Обратное непрерывное вейвлет-преобразование	
2.1.5. Диагональное вейвлет-преобразование непрерывных сигналов	
2.2. Масштабирующие функции и вейвлеты	
2.2.1. Масштабирующие подпространства и масштабирующая функция	
2.2.2. Операторы проектирования и подпространства вейвлетов	
2.2.3. Функции Mathcad, вычисляющие значения вейвлетов	
2.3. Кратномасштабное вейвлет-представление сигналов	
2.3.1. Вейвлет-представление сигналов	
2.3.2. Быстрое вейвлет-преобразование	
2.3.3. Функции Mathcad для быстрого вейвлет-преобразования	
2.4. Кратномасштабное вейвлет-представление изображений	
2.4.1. Вейвлет-представление изображений	
2.4.2. Функции Mathcad для выполнения двумерного вейвлет-преобразования	

Глава 3. Алгоритмы вейвлет-фильтрации

сигналов и изображений..... 134

3.1. Кратномасштабное представление и задачи фильтрации сигналов и изображений	
3.1.1. Статистические характеристики коэффициентов вейвлет-разложения зашумленных сигналов	
3.1.2. Общий подход к фильтрации шума на основе вейвлет-разложения	
3.1.3. Функции Mathcad обработки коэффициентов вейвлет-разложения	
3.2. Оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы вейвлет-фильтрации	
3.2.1. Оптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложения «шум/сигнал»	
3.2.2. Итерационное уточнение отношения «шум/сигнал»	
3.3. Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации	

3.3.1.	Пороговые оценки коэффициентов разложения.....	
3.3.2.	Универсальный порог (UNIV-порог).....	
3.3.3.	SURE-порог.....	
3.3.4.	EDK-порог.....	
3.3.5.	Bayes-порог.....	
3.3.6.	GVC-порог.....	
3.3.7.	Выбор пороговых значений на основе критерия оптимальности.....	
3.3.8.	Реализация алгоритмов вейвлет-фильтрации в Matlab.....	

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	178
-------------------------	------------

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	179
--------------------------------------	------------

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. МОДУЛИ 1D АЛГОРИТМОВ ФУРЬЕ-ФИЛЬТРАЦИИ	178
--	------------

Приложение 2. МОДУЛИ 1D АЛГОРИТМОВ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ	187
--	------------

Предисловие

В последние десятилетия теория и методы цифровой фильтрации сигналов и изображений получили новое развитие. Это обусловлено как появлением новых математических методов (дискретное преобразование Фурье, дискретное вейвлет-преобразование), позволяющих создать эффективные алгоритмы фильтрации, так и возросшими требованиями к точности фильтрации, особенно в случае обработки контрастных сигналов и изображений. При этом фильтрация в большинстве случаев является не конечным этапом обработки (для улучшения визуального восприятия), а некоторой предобработкой, например, для последующего распознавания образов.

Исходными данными для цифровой фильтрации являются отсчеты (значения) «точного» сигнала или изображения, которые зашумлены (искажены) случайным шумом (погрешностью) различной природы. Фильтрация заключается в построении алгоритма фильтрации (вычислительной процедуры), которая позволила бы достигнуть наилучших результатов в удалении шума из исходного (зашумленного) изображения.

Построение алгоритма фильтрации опирается на использование вероятностных моделей сигнала или изображения и шума, а также на применение различных статистических критериев оптимальности. Все это порождает многообразие методов и алгоритмов фильтрации.

Очевидно, что в одной монографии невозможно подробно рассмотреть все существующие алгоритмы цифровой фильтрации. Поэтому в этой книге будут рассмотрены только *частотные алгоритмы фильтрации*, в которых обработке подлежат коэффициенты разложения зашумленного сигнала по Фурье-базису и вейвлет-базису. Эти алгоритмы достаточно эффективны с точки зрения удаления шума, не требуют такой априорной информации, которая часто отсутствует на практике. При этом большое внимание уделяется *выбору параметров алгоритма, исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации*.

Такой подбор материала в определенной степени отражает «личные научные интересы» авторов и направления их научных

исследований. Это обусловлено оригинальностью большинства из излагаемых материалов, особенно это касается алгоритмов оценивания оптимальных параметров сглаживания и оценивания оптимальных коэффициентов Фурье-разложений и вейвлет-разложений.

Отличительной чертой монографии является то, что для многих алгоритмов *приводится программная реализация в системе компьютерной математики Mathcad*. Это позволит читателю использовать подходящий (для фильтрации его сигнала или изображения) алгоритм непосредственно, т.е. «с листа».

При изложении материала используется следующая последовательность: первоначально строится алгоритм для фильтрации одномерного дискретного сигнала (или просто сигнала), а затем результаты обобщаются на фильтрацию двумерного сигнала (далее просто изображения).

Авторы надеются, что материал монографии будет полезен широкому кругу читателей: магистрантам, аспирантам научным сотрудникам, всем кто сталкивается с необходимостью цифровой фильтрации сигналов или изображений.

Введение

Объектами цифровой фильтрации, рассматриваемыми в монографии, являются *одномерные и двумерные дискретные сигналы*.

Предположим, что наблюдаемое (измеренное) значение \tilde{f}_i одномерного дискретного сигнала описывается аддитивной

$$\tilde{f}_i = f(x_i) + \eta_i, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1, \quad (\text{B.1})$$

или мультипликативной моделью

$$\tilde{f}_i = f(x_i) \cdot \eta_i, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1, \quad (\text{B.2})$$

где $f(x)$ – некоторая функция (сигнал), измеряемая в точках (узлах) x_i со *случайным шумом* (погрешностью) η_i .

Аналогично для двумерного дискретного сигнала имеем аддитивную

$$\tilde{f}_{i,j} = f(x_i, y_j) + \eta_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1, \quad 0 \leq j \leq N_y - 1, \quad (\text{B.3})$$

или мультипликативную модель

$$\tilde{f}_{i,j} = f(x_i, y_j) \cdot \eta_{i,j}, \quad 0 \leq i \leq N_x - 1, \quad 0 \leq j \leq N_y - 1, \quad (\text{B.4})$$

где $f(x, y)$ – функция двух переменных (изображение), измеряемая в узлах (x_i, y_j) со *случайным шумом* $\eta_{i,j}$. В дальнейшем для упрощения изложения как одномерный, так и двумерный дискретный сигнал будет называться просто *сигналом* (если это не вызывает путаницы).

Физическая природа шума измерений может быть различной:

- шумы измерительной (регистрирующей) аппаратуры;
- помехи при передаче по каналам связи (особенно аналоговым);
- плохие условия съемки изображения и т.д.

В качестве наиболее распространенных статистических моделей шумов используются следующие:

- *белый шум* – случайный сигнал, отсчеты которого не коррелируются друг с другом, и его разновидность – *белый гауссовский шум*, отсчеты которого подчиняются гауссовскому (нормальному) распределению;

- *импульсный шум* – изолированные точки, случайные значения шума в которых существенно отличаются от значений сигнала в окружающих точках;

- шум вида «*соль и перец*», представляющий смесь белого и импульсного шумов. Такая модель достаточно часто используется при фильтрации изображений.

Очевидно, что фильтрация используется для того, что бы в максимальной степени удалить шумы из исходного сигнала, внося при этом минимальные искажения значений «точного» сигнала. Таким образом, фильтрация заключается в построении алгоритма фильтрации (вычислительной процедуры), которая позволила достигнуть наилучших (с точки зрения принятого критерия) результатов в удалении шума из зашумленного сигнала.

Построение алгоритмов фильтрации существенно опирается на вероятностные модели сигнала и шума измерения и зависит от используемого критерия оптимальности, который позволяет оценить оптимальность того или иного алгоритма. Все это обуславливает многообразие методов и алгоритмов, используемых для обработки сигналов.

По методу обработки исходных значений \tilde{f}_i (или $\tilde{f}_{i,j}$) можно выделить:

- *алгоритмы фильтрации в пространственной области* (пространственная фильтрация);

- *алгоритмы фильтрации в частотной области* (частотная фильтрация).

Здесь термин «частотная область» подразумевает не только область значений частот в преобразовании Фурье, но и область значений переменных, являющихся параметрами некоторого дискретного (как правило, ортогонального) преобразования (например, параметры вейвлет-преобразования).

Результатом работы алгоритмов пространственной фильтрации [3, 5, 6, 7, 19, 20, 26] является значение, получаемое обработкой непосредственно исходных зашумленных значений сигнала, попавших в апертуру фильтра и число которых существенно меньше общего числа значений обрабатываемого сигнала.

Результатом работы алгоритмов второй группы является дискретный сигнал, определяемый обратным дискретным преобразованием коэффициентов, которые получены в результате обработки (фильтрации) коэффициентов прямого дискретного преобразования всего исходного зашумленного сигнала [16, 18, 19, 20, 52].

В данной монографии будут рассмотрены два класса алгоритмов фильтрации в частотной области, в которых обрабатываются коэффициенты разложения зашумленного сигнала по Фурье-базису и вейвлет-базису. При этом большое внимание уделяется выбору параметров алгоритма, исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации.

Заметим, что в литературе наряду с термином «фильтрация» используется термин «сглаживание». Эти термины используются в сочетании «фильтрация шумов» и «сглаживание данных» (или «сглаживание функции»). Последнее сочетание применяется в случаях, когда по зашумленным измерениям некоторой функции необходимо ее восстановить, т.е. построить оценку $\hat{f}(x)$ для функции $f(x)$. Это в полной мере относится к задачам построения регрессий по пространственной выборке конечного размера. В монографии эти термины будут использоваться *на равных условиях*.

При фильтрации сигналов исследователь первоначально сталкивается с *проблемой выбора алгоритма фильтрации*, а затем – с *проблемой выбора параметров взятого алгоритма*, которые бы обеспечили успешную работу алгоритма. Надеемся, что содержание последующих глав монографии будет способствовать успешному решению этих проблем.

ГЛАВА 1. АЛГОРИТМЫ ФУРЬЕ-ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

В этой главе рассмотрены алгоритмы фильтрации, в которых обрабатываются не зашумленные значения сигналов или изображений, а их Фурье-образы. Поэтому такие алгоритмы будем называть *алгоритмами Фурье-фильтрации* и по классификации, приведенной во введении, эти алгоритмы относятся к алгоритмам фильтрации в частотной области.

Алгоритмы Фурье-фильтрации находят широкое и успешное применение при обработке *гладких* сигналов и изображений, в которых высокочастотные составляющие зашумленного сигнала обусловлены только шумами. Поэтому далее будет рассмотрено построение алгоритмов Фурье-фильтрации для этих случаев, которые будем называть как фильтрация *гладких сигналов*. Основное внимание будет уделяться выбору параметров алгоритма, которые бы минимизировали среднеквадратичную ошибку фильтрации.

1.1. Непрерывное и дискретное преобразования Фурье

Определены основные преобразования Фурье и рассмотрены их свойства, которые будут использоваться в алгоритмах Фурье-фильтрации.

1.1.1. Непрерывное преобразование Фурье и ряд Фурье

Первоначально напомним несколько понятий из функционального анализа.

Областью определения функции $f(x)$ называется интервал $[a, b]$ (или открытый интервал (a, b)) для значений, из которого функция $f(x)$ определена (т.е. существует). Бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$ будем обозначать R . Так, функция $\sin(x)$ определена на интервале R , т.е. определена для $x \in R$.

Носителем функции является область ее определения. Например, если $f(x)$ определена для $x \in [a, b]$ и $f(x) \equiv 0$ для $x \notin [a, b]$ (т.е. $x < a$ и $x > b$) и длина отрезка $[a, b]$ невелика, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *компактный носитель*.

Функция называется *периодической с периодом T* , если $f(x) = f(x \pm T)$. В частности, для 2π -периодических функций имеем $f(x) = f(x \pm 2\pi)$.

Функции могут принадлежать различным пространствам. Пространство $L_p[R]$ означает, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty. \quad (1.1.1)$$

К примеру, часто используемое гильбертово пространство $L_2[R]$ состоит из функций, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (1.1.2)$$

Непрерывным преобразованием Фурье (НПФ) (в зарубежной литературе – непрерывно-временным преобразованием Фурье) называется пара интегральных преобразований:

- прямое преобразование $F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\nu x} dx$; (1.1.3)

- обратное преобразование $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)e^{2\pi i\nu x} d\nu$, (1.1.4)

где $i = \sqrt{-1}$, ν – частота, измеряемая в герцах. Для существования НПФ необходима принадлежность $f(x)$ пространству абсолютно интегрируемых функций $L_1[R]$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (1.1.5)$$

или принадлежность пространству $L_2[R]$ (выполняется условие (1.1.2)). Имеет место известное равенство Парсеваля (или теорема для энергии):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu. \quad (1.1.6)$$

Если функция $f(x)$ является периодической с периодом T , то она может быть представлена рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos(2\pi k\nu_1 x) + \sum b_k \sin(2\pi k\nu_1 x), \quad (1.1.7)$$

где $\nu_1 = \frac{1}{T}$ – частота первой (основной) гармоники периодической функции. Коэффициенты ряда определяются формулами:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(2\pi k\nu_1 x) dx; \quad (1.1.8)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(2\pi k\nu_1 x) dx. \quad (1.1.9)$$

Разложение функции на гармонические составляющие с коэффициентами a_k , b_k можно интерпретировать как представление $f(x)$ в ортогональном базисе тригонометрических функций:

$$1, \cos(\nu_1 x), \sin(\nu_1 x), \dots, \cos(k\nu_1 x), \sin(k\nu_1 x), \dots$$

Ортогональность базиса означает, что интеграл от произведения двух любых функций этого базиса в промежутке $[0, T]$ равен нулю.

Вычисление коэффициентов Фурье принято называть *спектральным анализом*, построение функции по конечному набору коэффициентов ряда Фурье называется *спектральным синтезом*.

На рис. 1.1. показан фрагмент документа, содержащий описание подпрограммы-функции *Fourier_Ser*, вычисляющей коэффициенты Фурье (с номерами $k = 0, 1, \dots, N$) функции, периодической на интервале $[0, T]$ (назначение формальных параметров f, N, T очевидны).

Разложение в ряд Фурье

$$\begin{array}{l}
 \text{Fourier_Ser}(f, N, T) := \\
 \left. \begin{array}{l}
 C^{(0)} \leftarrow \left(\begin{array}{c} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \\ 0 \end{array} \right) \\
 \nu_1 \leftarrow \frac{1}{T} \\
 \text{for } k \in 1..N \\
 C^{(k)} \leftarrow \left(\begin{array}{c} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \nu_1 \cdot t) dt \\ \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \nu_1 \cdot t) dt \end{array} \right) \\
 C^T
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Рис. 1.1. Подпрограмма-функция *Fourier_Ser*

На рис. 1.2 показан фрагмент спектрального анализа ($N = 10$) прямоугольного сигнала, а также синтез двух функций $\hat{f}(x)$ рядом с ограниченным числом слагаемых:

$$\hat{f}(x) = a_0 + \sum_{k=0}^M (a_k \cos(2\pi\nu_1 kx) + b_k \sin(2\pi\nu_1 kx)), \quad (1.1.10)$$

Для первой функции $M = 5$ (значения показаны на левом рисунке точечной линией), для второй – $M = 15$ (значения показаны на правом рисунке точечной линией). Видно, что при увеличении M точность аппроксимации функции $f(x)$ рядом (1.1.10) повышается. Однако как в том, так и в другом случае виден эффект Гиббса – появление гармонических колебаний в

точках, где $f(x)$ имеет особенности или большие производные (например скачки амплитуды сигнала). Увеличение числа гармоник в ряде (1.1.10) не устраняет эффект, а лишь повышает частоту колебаний.

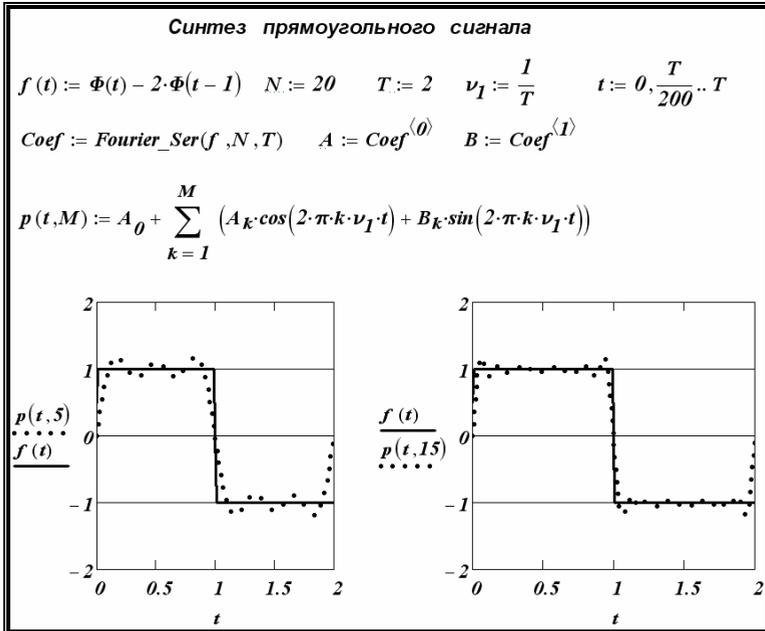


Рис. 1.2. Фурье-синтез прямоугольного сигнала

1.1.2. Дискретное преобразование Фурье

В настоящее время непрерывная функция $f(x)$ в основном является математическим объектом, так как реальные системы регистрации и сбора информации имеют дело с дискретными сигналами. *Дискретный сигнал*, обозначаемый f_j , состоит из значений функции $f(x)$ в равноотстоящие моменты времени $x_j = \Delta_x \cdot j$, т.е.

$$f_j = f(j\Delta_x), \quad -\infty < j < \infty, \quad (1.1.11)$$

где Δ_x – шаг дискретизации.

Возникает вопрос о Фурье-образе $F_S(\nu)$ дискретного сигнала f_j . Ответ дает следующее соотношение:

$$F_S(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\nu + k\nu_S) \quad -\nu_S < \nu < \nu_S, \quad (1.1.12)$$

где $\nu_S = 1/\Delta_x$ – частота дискретизации (или частота отсчетов). Таким образом, $F_S(\nu)$ является периодической функцией с периодом $2\nu_S$ [20, 24].

Предположим, что $f(x)$ – функция с *ограниченным спектром*, а именно: $F(\nu) = 0$ при $|\nu| > \nu_0$ и выполняется *неравенство Найквиста*:

$$\Delta_x \leq \frac{1}{2\nu_0}. \quad (1.1.13)$$

Тогда

$$F(\nu) \equiv F_S(\nu), \quad -\nu_S \leq \nu \leq \nu_S, \quad (1.1.14)$$

т.е. по спектру дискретного сигнала однозначно определяется спектр непрерывного сигнала. Это свойство является основой для спектрального анализа временных процессов. Если условие (1.1.13) не выполняется, то наблюдается *aliasing – эффект*, который проявляется в «перекачке» высокочастотных составляющих $F(\nu)$ в низкочастотные составляющие $F_S(\nu)$.

Предположим, что функция $f(x)$ периодична с периодом T на интервале $[0, T]$ и ее значения дискретизируются с шагом дискретности Δ_x . Таким образом, имеем дискретный периодический сигнал (с периодом $N = T/\Delta_x$ отсчетов), дискретный спектр которого также периодичен с периодом N отсчетов и

шагом дискретизации по частоте $\Delta_\nu = \frac{\nu_s}{N} = \frac{1}{N\Delta_x}$. Для такого дискретного периодического сигнала определено дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [20, 24].

Сформируем из дискретных значений $f(x_j)$ периодическую последовательность:

$$f_p(j) = f(j \cdot \Delta_x) = f_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (1.1.15)$$

и определим прямое ДПФ

$$F_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} jl\right), \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (1.1.16)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Тогда обратное ДПФ имеет вид

$$f_p(j) = \sum_{l=0}^{N-1} F_p(l) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} lj\right). \quad (1.1.17)$$

Замечание 1.1.1. Если выполняется условие (1.1.13), то для ДПФ (1.1.16), (1.1.17) можно показать связь:

$$f_p(j) = f(j \cdot \Delta_x), \quad j = 0, \dots, N-1; \quad (1.1.18)$$

$$F_p(l) = F(\Delta_\nu \cdot l) \cdot \Delta_\nu, \quad l = 0, \dots, N/2, \quad (1.1.19)$$

которая позволяет по спектру $F_p(l)$ найти значения спектра $F(\nu)$ непрерывной функции $f(t)$ на интервале частот $\left[0, \frac{N}{2} \cdot \Delta_\nu\right]$. ♦

Напомним, что введенные периодические последовательности удовлетворяют условиям:

$$f_p(j + kN) = f_p(j), \quad F_p(l + kN) = F_p(l), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Приведем без доказательства некоторые свойства ДПФ.

1. $\operatorname{Re}[F_p(l + N/2)] = \operatorname{Re}[F_p(N/2 - l)], l = 1, \dots, N/2 - 1.$

$$\operatorname{Im}\left[F_p(N/2+l)\right] = -\operatorname{Im}\left[F_p(N/2-l)\right], \quad (1.1.20)$$

так как относительно $N/2$ функция $\operatorname{Re}\left[F_p(l)\right]$ симметрична, а $\operatorname{Im}\left[F_p(l)\right]$ – антисимметрична.

$$\operatorname{Im}\left[F_p(0)\right] = -\operatorname{Im}\left[F_p(N/2)\right] = 0. \quad (1.1.21)$$

2. Равенство Парсеваля для ДПФ:

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_p^2(j) = N \sum_{l=0}^{N-1} |F_p(l)|^2. \quad (1.1.22)$$

Замечание 1.1.2. Свойства (1.1.20), (1.1.21) позволяют существенно «экономить» оперативную память компьютера при хранении коэффициентов ДПФ (вместо двух массивов длиной N достаточно одного массива длиной N). ♦

Замечание 1.1.3. Непосредственное вычисление ДПФ по формулам (1.1.16), (1.1.17) требует порядка N^2 операций, что при N порядка несколько тысяч и больше обуславливает существенные вычислительные затраты. В 60–70 годы прошлого столетия были разработаны так называемые алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), требующие порядка $N \log_2 N$ операций, что значительно уменьшает объем вычислений при взятии прямого и обратного ДПФ. Эта особенность алгоритмов БПФ определила широкое распространение ДПФ в задачах фильтрации сигналов (и особенно изображений), в спектральном анализе случайных процессов, а также в различных разделах вычислительной математики (в частности при решении обратных измерительных задач [2, 10, 13, 15]). ♦

Введем в рассмотрение двумерные периодические последовательности $\{f_p(j_1, j_2)\}$, $\{F_p(l_1, l_2)\}$ и определим двумерное дискретное преобразование Фурье:

$$F_p(l_1, l_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} f_p(j_1, j_2) e^{-\frac{2\pi i}{N_1 N_2} (j_1 l_1 + j_2 l_2)}, \quad (1.1.23)$$

$$f_p(j_1, j_2) = \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} F_p(l_1, l_2) e^{\frac{2\pi i}{N_1 N_2} (j_1 l_1 + j_2 l_2)}. \quad (1.1.24)$$

Очевидно, что последовательности $f_p(j_1, j_2), F_p(l_1, l_2)$ с периодами $N_1 \times N_2$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} f_p(j_1 + k_1 N_1, j_2 + k_2 N_2) &= f_p(j_1, j_2), & k_1 &= \pm 1, \pm 2, \dots \\ F_p(l_1 + k_1 N_1, l_2 + k_2 N_2) &= F_p(l_1, l_2), & k_2 &= \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Равенство Парсеваля для двумерного ДПФ имеет вид

$$\sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} f_p^2(j_1, j_2) = N_1 N_2 \sum_{l_1=0}^{N_1-1} \sum_{l_2=0}^{N_2-1} |F_p(l_1, l_2)|^2. \quad (1.1.25)$$

1.1.3. Функции Mathcad для вычисления дискретного преобразования Фурье

Пакет Mathcad включает набор функций, позволяющих вычислять прямое и обратное ДПФ с использованием алгоритма БПФ. В табл. 1.1 приведены некоторые из этих функций, которые будут использованы в дальнейшем. В левом столбце приводится обращение к функции, а в правом – описание формальных параметров и поясняющие формулы.

Пример 1.1.1. На рис. 1.3 показан фрагмент документа Mathcad, в котором:

а) вычисляется вещественная последовательность f длиной $N = 2^4 = 16$;

б) вычисляются с использованием функций FFT, CFFT коэффициенты ДПФ (прямое ДПФ) этой последовательности;

в) вычисляется с использованием функций IFFT, ICFFT обратное ДПФ;

г) определена точность выполнения ДПФ (относительная погрешность выполнения цепочки преобразований $FFT(f) \rightarrow IFFT(F)$ составляет порядка 10^{-12} , относительная погрешность выполнения цепочки преобразований $CFFT(f) \rightarrow ICFFT(F)$ составляет $< 10^{-15}$). ☹

Таблица 1.1

Функция	Описание функции
FFT(f)	<i>Вычисляет</i> прямое ДПФ (1.1.1) от вещественной последовательности f длиной 2^m . <i>Результатом</i> является комплексная последовательность коэффициентов ДПФ длиной $2^{m-1} + 1$
IFFT(F)	<i>Вычисляет</i> обратное ДПФ (1.1.2) от комплексной последовательности F длиной $2^{m-1} + 1$. <i>Результатом</i> является вещественная последовательность длиной 2^m
CFFT(f)	<i>Вычисляет</i> прямое ДПФ (1.1.1) от вещественной или комплексной последовательности длиной N . <i>Результатом</i> является комплексная последовательность коэффициентов ДПФ длиной N
ICFFT(F)	<i>Вычисляет</i> обратное ДПФ (1.1.2) от комплексной последовательности коэффициентов ДПФ длиной N . <i>Результатом</i> является комплексная последовательность длиной N

$$\begin{array}{l}
 j := 0..15 \quad f_{p_j} := j \\
 F_{p1} := FFT(f_p) \\
 F_{p2} := CFFT(f_p)
 \end{array}$$

$$F_{p1} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -0.5 + 2.514i \\ -0.5 + 1.207i \\ -0.5 + 0.748i \\ -0.5 + 0.5i \\ -0.5 + 0.334i \\ -0.5 + 0.207i \\ -0.5 + 0.099i \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$F_{p2} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -0.5 + 2.514 \\ -0.5 + 1.207 \\ -0.5 + 0.748 \\ -0.5 + 0.5 \\ -0.5 + 0.334 \\ -0.5 + 0.207 \\ -0.5 + 0.099 \\ -0.5 \\ -0.5 - 0.099 \\ -0.5 - 0.207 \\ -0.5 - 0.334 \\ -0.5 - 0.5 \\ -0.5 - 0.748 \\ -0.5 - 1.207 \\ -0.5 - 2.514 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|f_p - IFFT(FFT(f_p))|}{|f_p|} = 1.434 \times 10^{-12}$$

$$\frac{|f_p - ICFFT(CFFT(f_p))|}{|f_p|} = 0$$

Рис. 1.3. Примеры использования функций ДПФ

Замечание 1.1.4. Функции CFFT, ICFFT не требуют, чтобы период $N = 2^m$. ♦

Вычисление прямого и обратного двумерного ДПФ с использованием алгоритма БПФ можно осуществить с помощью функций $CFFT(f) \rightarrow ICFFT(F)$ (см. табл. 1.2).

1.1.4. Формирование периодических дискретных последовательностей

Напомним, что дискретное преобразование Фурье определено над периодическими (с периодом N) дискретными последовательностями, а применение алгоритма БПФ обуславливает требование на величину N . В дальнейшем будем полагать, что $N = 2^m$.

Таблица 1.2

Функция	Описание функции
CFFT(f)	Вычисляет прямое двумерное ДПФ (1.1.6) от вещественной или комплексной матрицы размера $N_1 \times N_2$. Результатом является комплексная матрица коэффициентов ДПФ размера $N_1 \times N_2$.
ICFFT(F)	Вычисляет обратное двумерное ДПФ (1.1.7) от комплексной матрицы коэффициентов ДПФ размера $N_1 \times N_2$. Результатом является комплексная матрица размера $N_1 \times N_2$.

Замечание 1.1.5. Несмотря на то, что функции CFFT, ICFFT не требуют периодических последовательностей с $N = 2^m$, для корректного формирования фильтрующих множителей и выбора параметров сглаживания в данной работе будут использоваться периодические последовательности длиной $N = 2^m$. ♦

Поэтому, если дана некоторая аperiodическая дискретная последовательность $\{f_j\}$, $0 \leq j \leq N_x - 1$, сформированная из значений функции $f(x)$ в равноотстоящих узлах x_j , то для применения к ней ДПФ необходимо сформировать из нее периодическую последовательность $\{f_p(j)\}$ добавлением к исходной $\{f_j\}$ нулевых отсчетов. Такой алгоритм формирования можно записать в виде:

$$f_p(j) = \begin{cases} f_j, & 0 \leq j \leq N_x - 1; \\ 0, & N_x \leq j \leq N - 1. \end{cases} \quad (1.1.26)$$

Выбор периода N можно осуществить по правилу:

$$N = \min_m \{2^m \geq N_x\}. \quad (1.1.27)$$

Рассмотрим двумерную аперIODическую последовательность $\{f_{j_x, j_y}\}$, $0 \leq j_x \leq N_x - 1, 0 \leq j_y \leq N_y - 1$, сформированную из значений функции $f(x, y)$ в равноотстоящих узлах x_{j_x}, y_{j_y} . Для применения к ней ДПФ необходимо сформировать из нее периодическую последовательность $\{f_p(j_x, j_y)\}$ с периодом $N_1 \times N_2$ добавлением к исходной $\{f_{j_x, j_y}\}$ нулевых отсчетов. Такой алгоритм формирования можно записать в виде:

$$f_p(j_x, j_y) = \begin{cases} f_{j_x, j_y}, & \begin{cases} 0 \leq j_x \leq N_x - 1; \\ 0 \leq j_y \leq N_y - 1, \end{cases} \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (1.1.28)$$

где $0 \leq j_x \leq N_1 - 1, 0 \leq j_y \leq N_2 - 1$. Выбор периода N_1, N_2 можно осуществить по правилу:

$$N_1 = \min_m \{2^m \geq N_x\}, \quad N_2 = \min_m \{2^m \geq N_y\}. \quad (1.1.29)$$

1.1.5. Свойства случайной периодической последовательности

Пусть дана случайная аперIODическая последовательность с N_x элементами $\eta_j, j = 0, \dots, N_x - 1$ и числовыми характеристиками:

$$M[\eta_j] = 0; \quad M[\eta_i \cdot \eta_j] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (1.1.30)$$

где символ $M[\cdot]$ означает операцию математического ожидания. В соответствии с правилом (1.1.26), сформируем периодическую последовательность $\eta_p(j)$ по правилу:

$$\eta_p(j) = \begin{cases} \eta_j, & 0 \leq j \leq N_x - 1; \\ 0, & N_x \leq j \leq N - 1. \end{cases} \quad (1.1.31)$$

С учетом характеристик (1.1.30) и формирования (1.1.31) можно доказать следующие соотношения:

$$M[\eta_p(i), \eta_p(j)] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{если } i = j, 0 \leq j \leq N_x - 1; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.1.32)$$

$$M\left[\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \eta_p(i) \eta_p(j)\right] = N_x \cdot \sigma^2. \quad (1.1.33)$$

Вычислим коэффициенты ДПФ $H_p(l)$ периодической последовательности $\{\eta_p(j)\}$:

$$H_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \eta_p(j) e^{-\frac{2\pi i}{N} l j}, \quad 0 \leq l \leq N-1. \quad (1.1.34)$$

Коэффициенты $H_p(l)$ являются случайными величинами с нулевым математическим ожиданием:

$$M[H_p(l)] = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} M[\eta_p(j)] e^{-\frac{2\pi i}{N} l j} = 0. \quad (1.1.35)$$

Утверждение 1.1.1. Случайные величины $H_p(l)$ имеют нулевое среднее и одинаковую дисперсию σ_H^2 , равную:

$$\sigma_H^2 = M\left[|H_p(l)|^2\right] = \frac{N_x}{N^2} \sigma^2. \quad (1.1.36)$$

Доказательство. Запишем дисперсию $M\left[|H_p(l)|^2\right]$ в виде:

$$M\left[|H_p(l)|^2\right] = M\left[\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \eta_p(k) \cdot \eta_p(j) e^{-\frac{2\pi i}{N} l(k-j)}\right].$$

Тогда соотношение (1.1.32) позволяет представить $M\left[\left|H_p(l)\right|^2\right]$ в виде $\sigma_H^2 = M\left[\left|H_p(l)\right|^2\right] = \frac{1}{N^2} \cdot N_x \cdot \sigma^2$, что и завершает доказательство утверждения. ♣

Пусть дана случайная двумерная аperiодическая последовательность $\left\{\eta_{j_x, j_y}\right\}$, $j_x = 0, \dots, N_x - 1$, $j_y = 0, \dots, N_y - 1$ и следующие числовые характеристики:

$$M\left[\eta_{j_x, j_y}\right] = 0; \quad (1.1.37)$$

$$M\left[\eta_{i_x, i_y} \cdot \eta_{j_x, j_y}\right] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{если } \begin{cases} i_x = j_x; \\ i_y = j_y, \end{cases} \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (1.1.38)$$

В соответствии с правилом (1.1.28) сформируем двумерную периодическую последовательность $\left\{\eta_p(j_x, j_y)\right\}$ и вычислим коэффициенты ДПФ $H_p(l_x, l_y)$ этой последовательности.

Утверждение 1.1.2. Случайные величины $H_p(l_x, l_y)$ имеют нулевое среднее и одинаковую дисперсию σ_H^2 , равную:

$$\sigma_H^2 = M\left[\left|H_p(l_x, l_y)\right|^2\right] = \frac{N_x \cdot N_y}{N_1^2 \cdot N_2^2} \cdot \sigma^2. \quad (1.1.39)$$

Доказательство этого утверждения выполняется аналогично доказательству утверждения 1.1.1. ♣

1.2. Глобальные алгоритмы Фурье-фильтрации

Приводятся алгоритмы Фурье-фильтрации, использующие ДПФ, которое совместно с алгоритмом быстрого преобразования Фурье (БПФ) обеспечивают их высокую эффективность.

Фильтрующие свойства алгоритмов зависят от одного параметра – параметра сглаживания, который является общим (глобальным) для всех обрабатываемых коэффициентов ДПФ зашумленного сигнала.

1.2.1. Алгоритм Фурье-фильтрации одномерного дискретного сигнала

Предположим, что:

- одномерный сигнал $f(x)$ измеряется в узлах x_i , равномерно расположенных на интервале $[a_x, b_x]$ с шагом Δx ;
- зарегистрированные значения \tilde{f}_i допускают представление:

$$\tilde{f}_j = f(x_j) + \eta_j, \quad 0 \leq j \leq N_x - 1; \quad (1.2.1)$$

- шумы измерения η_j являются случайными величинами, не коррелированными со значениями $f(x_j)$, $0 \leq j \leq N_x - 1$, имеющими одинаковый закон распределения, нулевое среднее

$$M[\eta_j] \equiv 0, \quad 0 \leq j \leq N_x - 1 \quad (1.2.2)$$

и дисперсию

$$D[\eta_j] = M[\eta_j^2] = \sigma^2, \quad 0 \leq j \leq N_x - 1. \quad (1.2.3)$$

При этих предположениях алгоритм Фурье-фильтрации одномерной дискретной последовательности $\{\tilde{f}_j\}$ можно представить следующими шагами:

Шаг 1. Выбирается целая величина $N \geq N_x$, которая определяет длину периодической последовательности и позволяет использовать алгоритмы БПФ (обычно N целая степень двойки, т.е. $N = 2^m$).

Шаг 2. Формируется периодическая последовательность $\{\tilde{f}_p(j)\}$ с периодом N по правилу:

$$\tilde{f}_p(j) = \begin{cases} \tilde{f}_j, & \text{если } 0 \leq j \leq N_x - 1; \\ 0, & \text{если } N_x \leq j \leq N - 1, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

где $j = 0, \dots, N - 1$.

Шаг 3. Вычисляются коэффициенты ДПФ периодической последовательности $\{\tilde{f}_p(j)\}$ (прямое ДПФ):

$$\tilde{F}_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_p(j) e^{-\frac{2\pi i}{N}jl}, \quad (1.2.5)$$

где $l = 0, \dots, N - 1$, $i = \sqrt{-1}$. Коэффициенты $\tilde{F}_p(l)$ имеют период N . Каждому индексу l можно сопоставить круговую частоту $\omega_l = \Delta_\omega l$, Δ_ω – шаг дискретизации по частоте, равный $2\pi/(\Delta_x \cdot N)$.

Шаг 4. Вычисляются «отфильтрованные» коэффициенты ДПФ:

$$\hat{F}_{pw}(l) = W_p(l) \cdot \tilde{F}_p(l), \quad 0 \leq l \leq N - 1. \quad (1.2.6)$$

Шаг 5. Вычисляется «отфильтрованная» периодическая последовательность (обратное ДПФ):

$$\hat{f}_{pw}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{F}_{pw}(l) e^{\frac{2\pi i}{N}jl}, \quad (1.2.7)$$

где $j = 0, \dots, N - 1$.

Шаг 6. Формируется дискретная «отфильтрованная» последовательность:

$$\hat{f}_{wj} = \hat{f}_{pw}(j), \quad 0 \leq j \leq N_x - 1. \quad (1.2.8)$$

Изложенный алгоритм будем в дальнейшем называть *алгоритмом 1D-Фурье-фильтрации*.

Замечание 1.2.1. Для вычисления прямого (1.2.5) и обратного (1.2.7) ДПФ используется алгоритм БПФ, что существенно (на 2–3 порядка) уменьшает количество вычислительных операций при фильтрации длинных последовательностей ($N_x > 1000$). ♦

Очевидно, что от выбора *фильтрующего множителя* $W_p(l)$ зависит ошибка фильтрации (более подробно см. п. 1.2.3). Он должен обеспечивать «уменьшение» тех коэффициентов ДПФ $\tilde{F}_p(l)$, которые в основном обусловлены шумами η_j .

Введем функцию

$$W_\alpha(\omega) = \frac{1}{1 + \alpha Q(\omega)}, \quad (1.2.9)$$

где α – параметр сглаживания; $Q(\omega)$ – стабилизирующий множитель, который должен увеличиваться при увеличении ω . Этому требованию удовлетворяют следующие функции:

$$Q(\omega) = \omega^{2p}; \quad (1.2.10)$$

$$Q(\omega) = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2p}. \quad (1.2.11)$$

В первой функции величина p определяет порядок производной, для которой ограничен интервал

$$\int_{a_x}^{b_x} \left(\frac{d^p}{dx^p} f(x) \right)^2 dx.$$

Задавая порядок производной, можно регулировать «гладкость отфильтрованного» сигнала. Вторая функция (1.2.11) моделиру-

ет фильтр, частотная характеристика резко возрастает для $\omega > \omega_0$, а величина p задает крутизну этого воздействия. Величину ω_0 можно интерпретировать как верхнюю границу частотного интервала $[-\omega_0, \omega_0]$, в котором находится основной спектр информативных составляющих сигнала $f(x)$.

В дальнейшем будем считать, что все параметры функций $Q(\omega)$ заданы за исключением параметра сглаживания α .

Учитывая свойства коэффициентов ДПФ (см. п. 1.1.2), определим $W_p(l)$ как

$$W_p(l) = \frac{1}{1 + \alpha Q_p(l)}, \quad 0 \leq l \leq N-1, \quad (1.2.12)$$

где

$$Q_p(l) = \begin{cases} Q(l \cdot \Delta_\omega), & \text{если } 0 \leq l \leq N/2; \\ Q((N-l)\Delta_\omega), & \text{если } \frac{N}{2} + 1 \leq l \leq N-1, \end{cases} \quad (1.2.13)$$

где $\Delta_\omega = 2\pi/(\Delta_x \cdot N)$.

В качестве иллюстрации на рис. 1.4 приведены функции $W(\Delta_\omega \cdot l)$ и $W_p(l)$, вычисленные для функции (1.2.11) при значениях: $\alpha = 1$, $\Delta_\omega = 1$, $\omega_0 = 50$, $N = 256$. Кривая 1 соответствует значениям функции $W(\Delta_\omega \cdot l)$ при $p = 1$; кривая 2 – функции $W_p(l)$ при $p = 1$; кривая 3 – функции $W(\Delta_\omega \cdot l)$ при $p = 4$; кривая 4 – функции $W_p(l)$ при $p = 4$. Видна симметрия $W_p(l)$ относительно точки $l = N/2 = 128$.

Таким образом, полностью определен алгоритм Фурье-фильтрации «гладких» сигналов, у которого есть один «управляющий» параметр α . Этот параметр одинаков для всех индексов l и поэтому построенный алгоритм Фурье-фильтрации можно назвать *глобальным*: изменением одного α , изменяются

все фильтрующие множители $W_p(l)$ и, следовательно, меняются глобальные фильтрующие свойства алгоритма в целом.

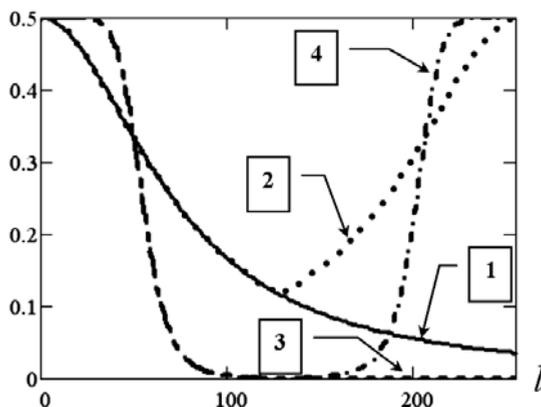


Рис. 1.4. Значения фильтрующих функций

Замечание 1.2.2. Из функции (1.2.12) видно, то при $\alpha \rightarrow 0$ все множители постоянны и равны 1, и в этом случае никакой фильтрации шума не происходит. При $\alpha \rightarrow \infty$ все множители $W_p(l) \rightarrow 0$, т.е. получаем «нулевой отфильтрованный сигнал». Следовательно, существует некоторое значение α_{opt} , которое минимизирует среднеквадратическую ошибку (СКО) фильтрации. Проблеме определения α_{opt} посвящен п. 1.3. ♦

1.2.2. Алгоритм Фурье-фильтрации дискретного изображения

Предположим, что:

- изображение $f(x, y)$ измеряется в узлах прямоугольной сетки с шагами дискретизации Δx , Δy (возможно $\Delta x \neq \Delta y$);
- зарегистрированные значения \tilde{f}_{j_x, j_y} допускают представление:

$$\tilde{f}_{j_x, j_y} = f(x_{j_x}, y_{j_y}) + \eta_{j_x, j_y}, \quad (1.2.14)$$

где $0 \leq j_x \leq N_x - 1$, $0 \leq j_y \leq N_y - 1$;

- шумы измерения η_{j_x, j_y} являются случайными величинами, не коррелированными со значениями f_{j_x, j_y} , имеющими одинаковое распределение, нулевое среднее

$$M[\eta_{j_x, j_y}] \equiv 0 \quad (1.2.15)$$

и дисперсию

$$D[\eta_{j_x, j_y}] \equiv \sigma^2. \quad (1.2.16)$$

При этих предположениях алгоритм Фурье-фильтрации можно представить следующими шагами:

Шаг 1. Выбирают целые величины $N_1 \geq N_x$; $N_2 \geq N_y$, определяющие размеры «периодического изображения» и позволяющие использовать алгоритмы двумерного БПФ (см. (1.1.29)).

Шаг 2. Формирование «периодического изображения» $f_p(k_x, k_y)$ из значений исходного изображения (см. (1.1.28)):

$$\tilde{f}_p(j_x, j_y) = \begin{cases} \tilde{f}_{j_x, j_y}, & \text{если } \begin{cases} 0 \leq j_x \leq N_x - 1; \\ 0 \leq j_y \leq N_y - 1, \end{cases} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.2.17)$$

где $j_x = 0, \dots, N_1 - 1$; $j_y = 0, \dots, N_2 - 1$. Период по индексу j_x равен N_1 , а по индексу $j_y = N_2$.

Шаг 3. Вычисление коэффициентов ДПФ периодического изображения

$$\tilde{F}_p(l_x, l_y) = \frac{1}{N_1 N_2} \cdot \sum_{j_x=0}^{N_1-1} \sum_{j_y=0}^{N_2-1} \tilde{f}_p(j_x, j_y) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N_1 N_2} (j_x l_x + j_y l_y)}, \quad (1.2.18)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $l_x = 0, \dots, N_1 - 1$, $l_y = 0, \dots, N_2 - 1$. Коэффициенты ДПФ $\tilde{F}_p(l_x, l_y)$ имеют период по индексу l_x , равный N_1 , а по индексу l_y — N_2 .

Заметим, что каждому индексу l_x , l_y можно сопоставить соответствующую круговую частоту

$$\omega_x = \Delta_{\omega_x} \cdot l_x; \quad \omega_y = \Delta_{\omega_y} \cdot l_y, \quad (1.2.19)$$

где

$$\Delta_{\omega_x} = \frac{2\pi}{\Delta_x N_1}; \quad \Delta_{\omega_y} = \frac{2\pi}{\Delta_y N_2}. \quad (1.2.20)$$

Шаг 4. Вычисление «отфильтрованных» коэффициентов ДПФ:

$$\hat{F}_{pw}(l_x, l_y) = W_p(l_x, l_y) \cdot \tilde{F}_p(l_x, l_y), \quad (1.2.21)$$

где $l_x = 0, \dots, N_1 - 1$; $l_y = 0, \dots, N_2 - 1$.

Шаг 5. Вычисление «отфильтрованного» периодического изображения (обратное ДПФ)

$$\hat{f}_{pw}(j_x, j_y) = \sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \hat{F}_p(l_x, l_y) \cdot e^{\frac{2\pi i}{N_1 N_2} (l_x j_x + l_y j_y)}, \quad (1.2.22)$$

где $j_x = 0, \dots, N_1 - 1$; $j_y = 0, \dots, N_2 - 1$.

Шаг 6. Формирование дискретного «отфильтрованного» изображения:

$$\hat{f}_{w_{j_x, j_y}} = \hat{f}_{pw}(j_x, j_y), \quad (1.2.23)$$

где $j_x = 0, \dots, N_x - 1$, $j_y = 0, \dots, N_y - 1$.

Изложенный алгоритм будет называться *алгоритмом 2D-Фурье-фильтрации*.

Замечание 1.2.3. Для вычисления прямого (1.2.18) и обратного (1.2.22) двумерного ДПФ используется алгоритм БПФ, что существенно (на несколько порядков) уменьшает количество вычислительных операций по сравнению с «прямыми» алгоритмами вычисления сумм (1.2.18), (1.2.22) даже при фильтрации изображений небольшого размера. ♦

Для определения фильтрующего множителя $W_p(l_x, l_y)$ введем функцию

$$W_\alpha(\omega) = \frac{1}{1 + \alpha Q(\omega_x, \omega_y)}, \quad (1.2.24)$$

где α – параметр сглаживания.

Функцию $Q(\omega_x, \omega_y)$ определим одним из следующих выражений:

$$Q(\omega_x, \omega_y) = \omega_x^{2p_x} + \omega_y^{2p_y}; \quad (1.2.25)$$

$$Q(\omega_x, \omega_y) = \left(1 + \left(\frac{\omega_x}{\omega_{x0}}\right)^{2p_x}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\omega_y}{\omega_{y0}}\right)^{2p_y}\right). \quad (1.2.26)$$

В первой функции p_x, p_y определяют порядок частных производных, для которых ограничен интервал

$$\iint \left[\left(\frac{\partial^{p_x}}{\partial x^{p_x}} f(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial^{p_y}}{\partial y^{p_y}} f(x, y) \right)^2 \right] dx dy.$$

Задавая различные порядки производных, можно «регулировать» гладкость отфильтрованного изображения по переменным x, y .

Вторая функция (1.2.26) моделирует фильтр, частотная характеристика которого резко возрастает при $\omega_x > \omega_{x0}$ и $\omega_y > \omega_{y0}$, а величины p_x, p_y задают крутизну возрастания по частотам ω_x, ω_y соответственно.

Учитывая свойства коэффициентов двумерного ДПФ (см. п. 1.1.2), определим $W_p(l_x, l_y)$ как

$$W_p(l_x, l_y) = \frac{1}{1 + \alpha Q_p(l_x, l_y)}, \quad (1.2.27)$$

где $l_x = 0, \dots, N_1 - 1$, $l_y = 0, \dots, N_2 - 1$,

$$Q_p(l_x, l_y) = \begin{cases} Q(l_x \cdot \Delta_{\omega_x}, l_y \cdot \Delta_{\omega_y}), & \text{если } \begin{cases} 0 \leq l_x \leq \frac{N_1}{2}, \\ 0 \leq l_y \leq \frac{N_2}{2}; \end{cases} \\ Q(l_x \cdot \Delta_{\omega_x}, (N_2 - l_y) \cdot \Delta_{\omega_y}), & \text{если } \begin{cases} 0 \leq l_x \leq \frac{N_1}{2}, \\ \frac{N_2}{2} + 1 \leq l_y \leq N_2 - 1; \end{cases} \\ Q((N_1 - l_x) \cdot \Delta_{\omega_x}, l_y \cdot \Delta_{\omega_y}), & \text{если } \begin{cases} \frac{N_1}{2} + 1 \leq l_x \leq N_1 - 1, \\ 0 \leq l_y \leq \frac{N_2}{2}; \end{cases} \\ Q((N_1 - l_x) \cdot \Delta_{\omega_x}, (N_2 - l_y) \cdot \Delta_{\omega_y}), & \text{если } \begin{cases} \frac{N_1}{2} + 1 \leq l_x \leq N_1 - 1, \\ \frac{N_2}{2} + 1 \leq l_y \leq N_2 - 1; \end{cases} \end{cases} \quad (1.2.28)$$

Таким образом, полностью определен двумерный алгоритм Фурье-фильтрации изображения, у которого есть только один «управляющий» параметр – *параметр сглаживания* α .

Этот параметр одинаков для всех индексов l_x, l_y и поэтому построенный алгоритм можно назвать *глобальным двумерным алгоритмом Фурье-фильтрации*. Для этого алгоритма остается справедливым замечание 1.2.2.

1.2.3. Ошибки алгоритмов Фурье-фильтрации

При заданном параметре сглаживания α алгоритмы 1D- и 2D-Фурье-фильтрации являются линейными. Для упрощения записи ошибок фильтрации введем матричное представление алгоритма 1D-Фурье-фильтрации.

Введем следующие векторы размерности N_x (см. (1.2.1)):

$$f = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N_x-1}) \end{pmatrix}; \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{N_x-1} \end{pmatrix}; \quad \hat{f}_\alpha = \begin{pmatrix} \hat{f}_{\alpha 0} \\ \hat{f}_{\alpha 1} \\ \vdots \\ \hat{f}_{\alpha(N_x-1)} \end{pmatrix}; \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{N_x-1} \end{pmatrix},$$

где $\hat{f}_{\alpha j}$ – элементы дискретной последовательности (1.2.8), вычисленные при заданном параметре α .

Определим вектор ошибки фильтрации соотношением

$$\varepsilon_\alpha = \hat{f}_\alpha - f = T(\alpha)\tilde{f} - f, \quad (1.2.29)$$

где $T(\alpha)$ – линейный оператор фильтраций, зависящий от α . Тогда с учетом (1.2.1), имеем

$$\varepsilon_\alpha = (T(\alpha) - I)f + T(\alpha)\eta = b_\alpha + \xi_\alpha, \quad (1.2.30)$$

где I – единичная матрица размером $N_x \times N_x$. Первое слагаемое $b_\alpha = (T(\alpha) - I)f$ является систематической ошибкой алгоритма фильтрации, второе слагаемое $\xi_\alpha = T(\alpha)\eta$ – случайной ошибкой. Далее СКО фильтрации определим функционалом:

$$\Delta(\alpha) = M \left[\|\hat{f}_\alpha - f\|^2 \right] = M \left[\|\varepsilon_\alpha\|^2 \right]. \quad (1.2.31)$$

Используя предположения (1.2.1), (1.2.2), можно доказать следующее представление:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \|(T(\alpha) - I)f\|^2 + M \left[\|T(\alpha)\eta\|^2 \right] = \\ &= \|b_\alpha\|^2 + M \left[\|\xi_\alpha\|^2 \right] = \\ &= Sp \left[(T(\alpha) - I)ff^T (T(\alpha) - I)^T + T(\alpha)V_\eta T^T(\alpha) \right], \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

где $Sp[\cdot]$ – след матрицы; $V_\eta = M[\eta\eta^T]$ – ковариационная матрица вектора η ; T – символ транспонирования матрицы.

Из выражения (1.2.12) следуют предельные соотношения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} T(\alpha) = I; \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} T(\alpha) = 0_{N_x \times N_x} \quad (1.2.33)$$

где $0_{N_x \times N_x}$ – нулевая матрица размера $N_x \times N_x$. Тогда имеем следующие пределы:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|b_\alpha\|^2 = 0; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} M[\|\xi\|^2] = N_x \sigma^2; \quad (1.2.34)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|b_\alpha\| = \tilde{f}^T \tilde{f}; \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M[\|\xi\|^2] = 0, \quad (1.2.35)$$

которые определяют *основное противоречие линейных алгоритмов фильтрации*:

При увеличении параметра сглаживания α уменьшается случайная ошибка фильтрации, но возрастает систематическая ошибка; при уменьшении α возрастает случайная ошибка фильтрации, но уменьшается систематическая ошибка.

Очевидно, что между предельными значениями параметра сглаживания 0 и ∞ находится значение α_{opt} (называемое *оптимальным параметром сглаживания*), при котором $\Delta(\alpha)$ принимает минимальное значение.

Пример 1.2.1. Сигнал $f(x)$, показанный на рис. 1.5 сплошной кривой, измерен в узлах x_i , $0 \leq i \leq 229$ с относительной погрешностью

$$\delta_\eta = \frac{\|\tilde{f} - f\|}{\|f\|}. \quad (1.2.36)$$

Необходимо построить зависимость относительной ошибки фильтрации

$$\delta_f(\alpha) = \frac{\|\hat{f}_\alpha - f\|^2}{\|f\|^2} \quad (1.2.37)$$

от параметра сглаживания α для двух уровней шума, равного 0.10 (зашумленные значения \tilde{f}_j показаны на рис. 1.5 точками) и равного 0.20 (на рисунке не показаны).

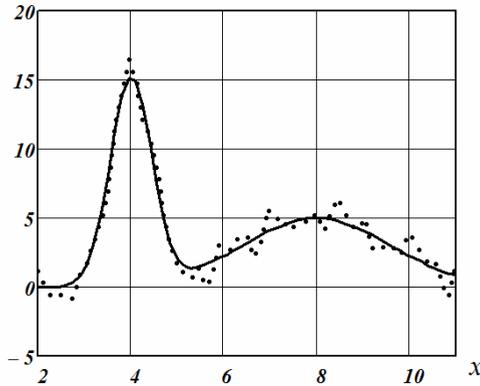


Рис. 1.5. Значения функций (к примеру 1.2.1)

Решение. Для α параметра сглаживания, меняющегося в широком диапазоне $[10^{-3}, 10^3]$ были вычислены значения $\delta_f(\alpha)$, которые приведены на рис. 1.6 (кривая 1 соответствует $\delta_\eta = 0.10$, кривая 2 – $\delta_\eta = 0.20$). Видно наличие на этих кривых точки минимума (для большего уровня шума точка минимума сдвигается вправо). Убывающая ветвь, расположенная левее точки минимума, обусловлена уменьшением случайной ошибки фильтрации. Возрастающая ветвь $\delta_f(\alpha)$ отражает увеличение систематической ошибки. Такое поведение функции $\delta_f(\alpha)$ отражает отмеченное ранее противоречие линейных алгоритмов фильтрации. ☹

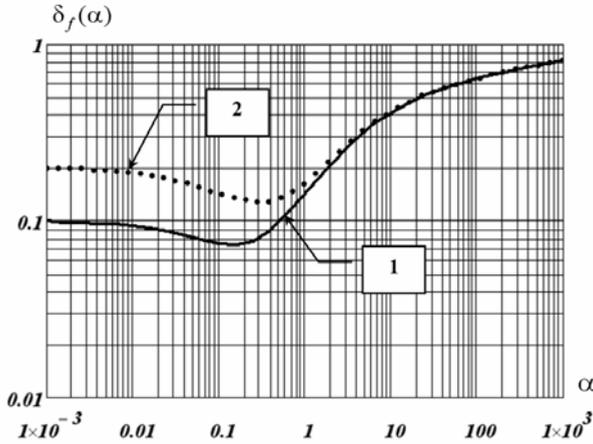


Рис. 1.6. Относительные ошибки сглаживания

Возникает вопрос: можно ли точно вычислить величину оптимального параметра сглаживания α_{opt} как решение вариационной задачи

$$\min_{\alpha > 0} \Delta(\alpha) ? \tag{1.2.38}$$

Для ответа на этот вопрос обратимся к выражению (1.2.30). Если предположить что ковариационная матрица шума η известна, то вектор f , составленный из значений «точной» функции $f(x)$, на практике не известен и поэтому нельзя вычислить α_{opt} , непосредственно решая вариационную задачу (1.2.38).

Для алгоритма 2D-Фурье-фильтрации можно также получить выражения для систематической и случайной ошибок фильтрации, аналогичные (1.2.29), (1.2.30), и представление СКО фильтрации, подобное (1.2.32). Поэтому алгоритму 2D-Фурье-фильтрации также присуще основное противоречие алгоритмов фильтрации и невозможно (из-за незнания значений «точного» изображения $f(x, y)$) вычислить α_{opt} из условия минимума СКО фильтрации.

Поэтому далее будут рассмотрены подходы, позволяющие оценить α_{opt} при различной априорной информации о числовых характеристиках вектора шума η .

1.3. Алгоритмы выбора параметра сглаживания в алгоритмах Фурье-фильтрации

Построены несколько алгоритмов, позволяющие с разной точностью оценить оптимальный параметр сглаживания.

1.3.1. Критерий оптимальности линейного алгоритма фильтрации

Вернемся к векторным обозначениям и представим результат фильтрации алгоритмом T в виде:

$$\hat{f}_T = T\tilde{f}, \quad (1.3.1)$$

а среднеквадратическую ошибку фильтрации такого алгоритма определим функционалом

$$\Delta(T) = M \left[\left\| \hat{f}_T - f \right\|^2 \right]. \quad (1.3.2)$$

Требуется определить оптимальный оператор сглаживания T_{opt} , доставляющий минимум $\Delta(T)$ среди всех других линейных операторов сглаживания вида (1.3.1). Для этого воспользуемся подходом, развитым Ю.Е. Воскобойниковым для построения критерия оптимальности линейного регуляризирующего алгоритма.

Введем матрицу вторых моментов $V_\varepsilon(T) = M \left[\varepsilon_T \varepsilon_T^T \right]$ вектора ошибки $\varepsilon_T = \hat{f}_T - f$ и матрицу $V_f = f f^T$. Тогда, используя представление $\varepsilon_T = (T - I)f + T\eta$, где I – единичная матрица, получим:

$$V_{\varepsilon}(T) = T(V_f + V_{\eta})T^T - TV_f - V_fT^T + V_f. \quad (1.3.3)$$

Матрица $(V_f + V_{\eta})$ представляет собой матрицу $V_{\tilde{f}}$ вторых моментов вектора $\tilde{f} = M[\tilde{f}\tilde{f}^T]$. Далее, используя известные свойства следа матрицы и (1.2.30), представим $\Delta(T)$ в виде

$$\Delta(T) = Sp[TV_{\tilde{f}}T^T - 2V_fT^T + V_f], \quad (1.3.4)$$

где $Sp[\]$ – след матрицы. Для определения T_{opt} возьмем две матрицы T и T' и разность $\Delta(T) - \Delta(T')$ выразим соотношением:

$$\begin{aligned} Sp[V_{\varepsilon}(T)] - Sp[V_{\varepsilon}(T')] &= \\ &= Sp\left[(T - T')V_{\tilde{f}}(T - T')^T + 2(T'V_{\tilde{f}} - V_f)(T^T - (T')^T)\right]. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Полагая

$$T'V_{\tilde{f}} = V_f \quad (1.3.6)$$

и учитывая положительную определенность матрицы $V_{\tilde{f}}$, приходим к неравенству

$$Sp[V_{\varepsilon}(T)] - Sp[V_{\varepsilon}(T')] = Sp\left[(T - T')V_{\tilde{f}}(T - T')^T\right] > 0$$

для любой матрицы $T \neq T'$. Таким образом, оператор T' является оптимальным оператором (в смысле минимума (1.3.2)), а условие (1.3.6) можно рассматривать как *необходимое и достаточное условие оптимальности оператора сглаживания T* .

К сожалению, этим условием на практике воспользоваться нельзя – оно *включает неизвестную матрицу V_f* .

Объектом, доступным для наблюдения при построении \hat{f}_T , является вектор невязки $e_T = \tilde{f} - \hat{f}_T$. Этот вектор является случайным, и поэтому определим матрицу вторых моментов $V_e(T) = M[e_T e_T^T]$ этого вектора при выполнении матричного тождества (1.3.6). Для этого введем оператор невязки $E(T) = I - T$, позволяющий представить e_T в виде $e_T = E(T)\tilde{f}$. Очевидно, что для любого оператора T справедливы тождества:

$$V_e(T) = E(T)V_{\tilde{f}}E^T(T), \quad E(T)V_{\tilde{f}} = V_{\tilde{f}} - TV_{\tilde{f}}.$$

Однако, если T удовлетворяет (1.3.6), то

$$E(T_{opt})V_{\tilde{f}} = V_{\tilde{f}} - V_f = V_\eta.$$

Умножая это соотношение справа на $E^T(T_{opt})$, получаем:

Утверждение 1.3.1. Необходимым и достаточным условие оптимальности линейного оператора фильтрации T , строящего $\hat{f}_T = T\tilde{f}$, где $\tilde{f} = f + \eta$, является матричное тождество:

$$V_e(T) = V_\eta E^T(T), \quad (1.3.7)$$

где V_η – ковариационная матрица вектора η . ♣

Заметим, что в отличие от (1.3.6) в это условие *не входит априорная информация об искомом решении* (матрица вторых моментов V_f вектора f).

Соотношение (1.3.7) трудно использовать для априорного построения оптимального оператора фильтрации T_{opt} , так как оно включает вектор невязки, определяемый по построенному оператору T . Однако его можно использовать для ответа на вопрос: *оптимален или нет построенный оператор фильтрации T ?* Поэтому соотношение (1.3.7) можно рассматривать как *критерий оптимальности фильтрующего оператора T* .

Применение изложенного выше критерия оптимальности для вычисления α_{opt} параметрического оператора фильтрации $T(\alpha)$, построенного в п. 1.2.1, связано с двумя трудностями.

Во-первых, оценка матрицы вторых моментов $V_e(\alpha)$, вычисленная по одной реализации вектора невязки $e_\alpha = \tilde{f} - \hat{f}_\alpha$, непригодна для проверки тождества (1.3.7) из-за малой точности оценивания. *Во-вторых*, в силу параметризации оператора T условие (1.3.7) становится только достаточным. Действительно, найдется величина α , доставляющая минимум СКО, но при этом α не будет точно выполняться тождество (1.3.7). Следовательно, целесообразно в качестве α_{opt} взять такое значение α_W , при котором принимается основная статистическая гипотеза:

$$H_0: V_e(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha). \quad (1.3.8)$$

В качестве альтернативной гипотезы примем

$$H_1: V_e(\alpha) \neq V_\eta E^T(\alpha). \quad (1.3.9)$$

Эта гипотеза принимается, если невыполнение тождества (1.3.8) обусловлено не случайными ошибками, возникающими из-за оценивания $V_e(\alpha)$ по одной реализации, а систематическими, обусловленными не оптимальностью параметра сглаживания. Таким образом, значение α_W можно рассматривать как оценку оптимального параметра сглаживания α_{opt} .

Для проверки гипотезы (1.3.8) введем статистику [2, 4, 10, 12]

$$\rho_W(\alpha) = e_\alpha^T [V_\eta E^T(\alpha)]^{-1} e_\alpha. \quad (1.3.10)$$

Существование матрицы $[E^T(\alpha)]^{-1}$ позволяет переписать $\rho_W(\alpha)$ в виде

$$\rho_W(\alpha) = \tilde{f}^T V_\eta^{-1} e_\alpha. \quad (1.3.11)$$

Для исследования свойств статистики $\rho_W(\alpha)$ запишем ее в виде

$$\rho_W(\alpha) = \tilde{f}^T V_\eta^{-1} E(\alpha) \tilde{f}, \quad (1.3.12)$$

а алгоритм 1D-Фурье-фильтрации представим матричным соотношением:

$$T(\alpha) = W_N^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{1}{1 + \alpha Q_p(l)} \right\} W_N, \quad (1.3.13)$$

где W_N , W_N^{-1} – матричная запись прямого и обратного ДПФ. Видно, что матрица $T(\alpha)$ является положительно определенной и для невырожденной матрицы V_η статистику $\rho_W(\alpha)$ можно представить как взвешенную сумму квадратов N_x случайных величин

$$\rho_W(\alpha) = \sum_{i=1}^{N_x} \lambda_i(\alpha) \tilde{f}^2(i), \quad (1.3.14)$$

где $\lambda_i(\alpha) > 0$, $1 \leq i \leq N_x$.

Утверждение 1.3.2. Если ковариационная матрица V_η невырождена, то:

а) для любого $\alpha \geq 0$ статистика $\rho_W(\alpha)$ есть сумма квадратов N_x случайных величин;

б) для значений α_W , при которых принимается гипотеза (1.3.8), математическое ожидание

$$M[\rho(\alpha_W)] = N_x. \quad (1.3.15)$$

Первое свойство $\rho_W(\alpha)$ непосредственно следует из (1.3.14). Для доказательства второго используем выражение

$$M[\rho_W(\alpha)] = Sp \left[\left(V_\eta E^T(\alpha) \right)^{-1} M \left[e(\alpha) e^T(\alpha) \right] \right],$$

справедливое для любого $\alpha \geq 0$. Для $\alpha = \alpha_W$ имеем

$$M[\rho_W(\alpha)] = Sp \left[\left(V_\eta E^T(\alpha) \right)^{-1} \left(V_\eta E^T(\alpha) \right) \right] = Sp \left[I_{N_x} \right] = N_x,$$

где I_{N_x} – единичная матрица размера $N_x \times N_x$. ♣

Доказанные свойства статистики $\rho_W(\alpha)$ позволяют аппроксимировать распределение $\rho_W(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_W$ χ^2 -распределением с N_x степенями свободы. Тогда проверка гипотезы (1.3.8) сводится к проверке предположения: *подчиняется ли величина $\rho_W(\alpha)$ χ_m^2 -распределению с $m = N_x$ степенями свободы.* Для этого построим интервал

$$\Theta_m(\beta) = [\mathcal{G}_{m, \beta/2}, \mathcal{G}_{m, 1-\beta/2}], \quad (1.3.16)$$

где $\mathcal{G}_{m, \beta/2}$ – квантиль χ_m^2 -распределения уровня $\beta/2$. Если $\rho_W(\alpha)$ попадает в интервал (1.3.16), т.е. выполняется неравенство

$$\mathcal{G}_{m, \beta/2} \leq \rho_W(\alpha) \leq \mathcal{G}_{m, 1-\beta/2}, \quad (1.3.17)$$

то гипотеза (1.3.8) может быть принята с вероятностью ошибки первого рода, равной β , и значение α_W , при котором выполняется (1.3.17), является оценкой для α_{opt} .

Возникает вопрос: как вычислить α_W в описанных выше алгоритмах Фурье-фильтрации, включая случай 2D-фильтрации? Ниже приводится эффективный алгоритм вычисления, использующий дискретное преобразование Фурье.

1.3.2. Выбор параметра сглаживания на основе критерия оптимальности

Предполагая некоррелированность значений η_j , ковариационная матрица вектора η имеет вид:

$$V_\eta = \sigma^2 \cdot I_{N_x}. \quad (1.3.18)$$

Критерий (1.3.11) можно записать в виде

$$\rho_W(\alpha) = \sum_{j=1}^{N_x} \frac{e_{\alpha_j} \cdot \tilde{f}_j}{\sigma^2}, \quad (1.3.19)$$

где e_{α_j} – проекции вектора невязки $e_\alpha = \tilde{f} - \hat{f}_\alpha$.

Для вычисления значения α_W , удовлетворяющего неравенству (1.3.17), используется итерационная процедура относительно величины $\gamma = 1/\alpha$ вида

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} - \frac{R_W(\gamma^{(n-1)}) - m}{R'_W(\gamma^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \gamma^{(0)} \ll 1, \quad (1.3.20)$$

где $m = N_x$, $R_W(\gamma) = \rho_W(1/\gamma)$, $R'_W(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} R_W(\gamma)$. В качестве значения α_W принимается $\alpha_W = 1/\gamma_W$, $\gamma_W = \gamma^{(n)}$, где $\gamma^{(n)}$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{G}_{m,\beta/2} \leq R_W(\gamma^{(n)}) \leq \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}. \quad (1.3.21)$$

Заметим, что подобная итерационная схема использовалась в работе [12] при выборе параметра регуляризации при построении регуляризованных решений плохо обусловленных СЛАУ и обратных измерительных задач.

С учетом представления (1.3.13) и равенства Парсеваля для ДПФ, критерий $\rho_W(\alpha)$ можно записать в виде:

$$\rho_W(\alpha) = \frac{\alpha N}{\sigma^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{Q_p(l)}{1 + \alpha Q_p(l)} \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2, \quad (1.3.22)$$

Тогда для $R_W(\gamma)$ и производной $R'_W(\gamma)$ получаем выражения:

$$R_W(\gamma) = \frac{N}{\sigma^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{Q_p(l)}{\gamma + Q_p(l)} \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2; \quad (1.3.23)$$

$$R'_W(\gamma) = -\frac{N}{\sigma^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{Q_p(l)}{[\gamma + Q_p(l)]^2} \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2. \quad (1.3.24)$$

Замечание 1.3.1. Предложенный алгоритм вычисления $R_W(\gamma)$, $R'_W(\gamma)$ требует порядка N операций и выполняется в «частотной» области над коэффициентами ДПФ. Это существенно уменьшает количество вычислительных операций по сравнению с непосредственным вычислением критерия (1.3.19). ♦

Утверждение 1.3.3. Если начальное значение $\gamma^{(0)} \ll 1$ удовлетворяет условию

$$R_W(\gamma^{(0)}) > \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}, \quad (1.3.25)$$

то существует конечное значение α_W , вычисляемое процедурой (1.3.20) и удовлетворяющее (1.3.17).

Доказательство основано на следующих свойствах функции $R_W(\gamma)$: $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} R_W(\gamma) = 0$; $R_W(\gamma) \geq 0$; $R'_W(\gamma) < 0$ для любых γ , которые следуют из (1.3.23), (1.3.24). Поэтому итерационная процедура (1.3.20) нахождения корня нелинейного уравнения

$$R_W(\gamma) = m \quad (1.3.26)$$

обязательно (при выполнении (1.3.25)) вычислит $\gamma_W = \gamma^{(n)}$, удовлетворяющее условию (1.3.21), а следовательно, и значение $\alpha_W = 1/\gamma_W$, которое удовлетворяет (1.3.17). ♣

Обычно $\gamma^{(0)} \approx 10^{-15}$ и для вычисления α_W требуется не более 4–5 итераций. Если условие (1.3.25) не выполняется даже для $\gamma^{(0)}$ близких к нулю, то это означает, что зарегистрированные значения \tilde{f}_i содержат только шумы и в этом случае $\alpha_W = \infty$ и отфильтрованный сигнал будет иметь нулевые значения.

Замечание 1.3.2. Условие (1.3.25) при $\gamma^{(0)} \approx 0$ эквивалентно условию

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N_x} \tilde{f}_i^2 > \mathcal{G}_{m, 1-\beta/2}, \quad (1.3.27)$$

которое проверяется без вычисления функции $R_W(\gamma^{(0)})$. ♦

Замечание 1.3.3. Если число степеней свободы $m > 30$, то χ_m^2 -распределение хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием m и дисперсией $2m$. Тогда, приняв вероятность ошибки первого рода $\beta = 0.05$, получаем формулы для вычисления квантилей, входящих в условия (1.3.17), (1.3.21):

$$\mathcal{G}_{m, 0.025} = m - 1.96\sqrt{2m}; \quad (1.3.28)$$

$$\mathcal{G}_{m, 0.975} = m + 1.96\sqrt{2m}. \quad \blacklozenge (1.3.29)$$

Пример 1.3.1. Для зашумленного сигнала, показанного на рис. 1.5 (точечная кривая) вычислить значения $\rho_W(\alpha)$ при значениях α в интервале $[10^{-3}, 10^3]$.

Решение. Для значения α из указанного интервала были вычислены:

- зависимость ошибки фильтрации $\hat{\Delta}(\alpha) = \|\hat{f}_\alpha - f\|$ от параметра α (рис. 1.7 кривая 1);
- зависимость $\rho_W(\alpha) = R_W(1/\alpha)$ (рис. 1.7 кривая 2).

На этом же рисунке нанесены значения $\mathcal{G}_{m, 0.025}$ (выражение (1.3.28)) и $\mathcal{G}_{m, 0.975}$ (см. (1.3.29)). Видно, что все значения α_W , для которых выполняется (1.3.17), находятся в области минимальной ошибки фильтрации. Это подтверждает высокую точность оценки α_W для α_{opt} . ●

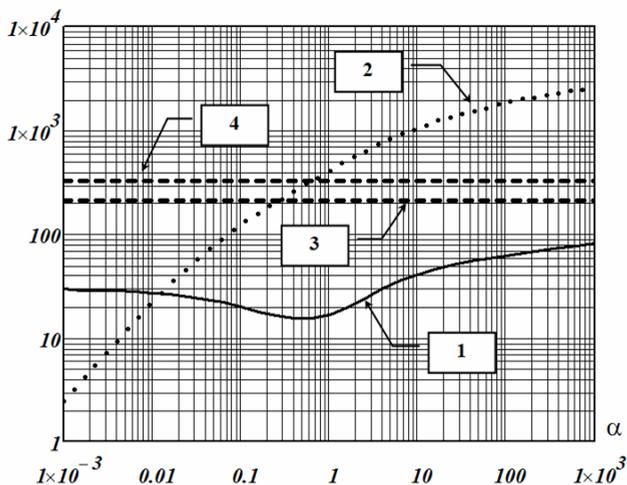


Рис. 1.7. Свойства параметра сглаживания α_W

Рассмотрим сходимость алгоритма 1D-Фурье-фильтрации, построенного при $\alpha = \alpha_W$. Будем говорить, что алгоритм фильтрации сходится, если имеет место предел:

$$\Delta(\alpha) = M \left[\left\| \hat{f}_\alpha - f \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (1.3.30)$$

Это означает, что сглаженные значения \hat{f}_{α_i} стремятся к значениям точной функции $f(x_i)$ при уровне шума, стремящегося к нулю.

Для доказательства сходимости введем СКО фильтрации периодических последовательностей

$$\Delta_p(\alpha) = M \left[\left\| \hat{f}_{p\alpha} - f_p \right\|^2 \right] = M \left[\sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{f}_{p\alpha}(j) - f_p(j) \right)^2 \right], \quad (1.3.31)$$

где $\{\hat{f}_{p\alpha}(j)\}$, $\{f_p(j)\}$ – периодические последовательности, представляющие результат фильтрации и значения точного сигнала соответственно. Из способов формирования \hat{f}_α (см.(1.2.8)) и f_p (см.(1.2.4)) видно, что сходимость

$$\Delta_p(\alpha) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0 \quad (1.3.32)$$

гарантирует сходимость (1.3.30).

Коэффициенты ДПФ $E_{p\alpha}(l)$ периодической ошибки

$$\varepsilon_{p\alpha}(j) = \hat{f}_{p\alpha}(j) - f_p(j) \quad (1.3.33)$$

определяются выражением

$$E_{p\alpha}(l) = \frac{\alpha Q_p(l)}{1 + \alpha Q_p(l)} F_p(l) + \frac{1}{1 + \alpha Q_p(l)} H_p(l), \quad (1.3.34)$$

где $H_p(l)$ - коэффициенты ДПФ последовательности $\{\eta_p(k)\}$. Первое слагаемое характеризует коэффициенты ДПФ систематической ошибки, второе – случайной ошибки (см. п. 1.3.1). При справедливости (1.2.2), (1.2.3) и учитывая равенство (1.1.22), СКО $\Delta_p(\alpha)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta_p(\alpha) = & \alpha^2 \cdot N \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{Q_p(l)}{1 + \alpha Q_p(l)} \right]^2 \cdot |F_p(l)|^2 + \\ & + \sigma^2 \cdot \frac{N_x}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{1}{1 + \alpha Q_p(l)} \right]^2. \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

Заметим, что граничные точки $\mathcal{G}_{m,\beta/2}$, $\mathcal{G}_{m,1-\beta/2}$ не зависят от дисперсии σ^2 , а зависят от вероятности ошибки первого рода β . Поэтому из выражения (1.3.22) можно сделать вывод, что для попадания величины $\rho_w(\alpha)$ в интервал $[\mathcal{G}_{m,\beta/2}, \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}]$

необходимо, чтобы параметр α_W изменялся с такой же скоростью, что и σ^2 , т.е. $\alpha_W \sim \sigma^2$. Тогда из (1.3.35) видно, что не только второе слагаемое (случайная ошибка), но и первое слагаемое (систематическая ошибка) будет стремиться к нулю при $\sigma^2 \rightarrow 0$. При достаточно малых значениях α (для которых $\alpha Q_p(l) \ll 1$) скорость сходимости будет порядка σ^2 .

Таким образом, доказано

Утверждение 1.3.4. Алгоритм 1D-Фурье-фильтрации с параметром сглаживания α_W имеет среднеквадратическую сходимость (1.3.30), (1.3.32) и при достаточно малой дисперсии эта сходимость имеет порядок σ^2 . ♣

Рассмотрим выбор параметра сглаживания алгоритма 2D-Фурье-фильтрации на основе критерия оптимальности. Вывод основных соотношений проводится в полной аналогии с одномерным случаем. Поэтому ограничимся записью конечных расчетных выражений с соответствующими пояснениями.

Для проверки гипотезы об оптимальности двумерного алгоритма Фурье-фильтрации введем критерий

$$\rho_W(\alpha) = \sum_{j_x=1}^{N_x} \sum_{j_y=1}^{N_y} \frac{\tilde{f}_{j_x, j_y} e_{\alpha_{j_x, j_y}}}{\sigma^2},$$

который можно выразить через коэффициенты ДПФ:

$$\rho_W(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} N_1 N_2 \sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \frac{Q_p(l_x, l_y)}{1 + \alpha Q_p(l_x, l_y)} \cdot |\tilde{F}_p(l_x, l_y)|^2. \quad (1.3.36)$$

Для вычисления α_W используется итерационная процедура (1.3.20) в которой $m = N_x \cdot N_y$, а $R_W(\gamma)$, $R'_W(\gamma)$ определяются формулами:

$$R_W(\gamma) = \frac{N_1 N_2}{\sigma^2} \sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \frac{Q_p(l_x, l_y)}{\gamma + Q_p(l_x, l_y)} \cdot |\tilde{F}_p(l_x, l_y)|^2; \quad (1.3.37)$$

$$R'_W(\gamma) = -\frac{N_1 N_2}{\sigma^2} \sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \frac{Q_p(l_x, l_y)}{[\gamma + Q_p(l_x, l_y)]^2} \cdot |\tilde{F}_p(l_x, l_y)|^2. \quad (1.3.38)$$

Видно, что этот алгоритм требует порядка $N_1 \cdot N_2$ операций и выполняется в «частотной» области над коэффициентами ДПФ зашумленного изображения $\tilde{F}_p(l_x, l_y)$. Это существенно уменьшает количество вычислительных операций по сравнению с непосредственным вычислением критерия $\rho_W(\alpha)$.

Утверждение 1.3.5. Если начальное значение $\gamma^{(0)} \ll 1$ удовлетворяет условию

$$R_W(\gamma^{(0)}) > \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}, \quad (1.3.39)$$

где $m = N_x \cdot N_y$, то существует конечное значение $\alpha_W < \infty$, вычисляемое процедурой (1.3.20) и удовлетворяющее (1.3.17).

Доказательство этого утверждение проводится так же, как и доказательство утверждения 1.3.3. ♣

Заметим, что условие (1.3.39) для $\gamma^{(0)} \approx 0$ эквивалентно условию

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i_x=1}^{N_x} \sum_{i_y=1}^{N_y} \tilde{f}_{i_x, i_y}^2 > \mathcal{G}_{m,1-\beta/2},$$

которое не требует вычисления коэффициентов двумерного ДПФ.

Пример 1.3.2. Для зашумленного изображения (относительный уровень шума $\delta_\eta = 0.10$) размером 256×256 , изолинии которого показаны на рис. 1.8, построить зависимости относительной ошибки фильтрации

$$\delta_F\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\left\| \frac{\hat{F}_1}{\gamma} - F \right\|}{\|F\|} \cdot 100 \quad (1.3.40)$$

и $R_W(\gamma)$, где $\|F\|, \|\hat{F}_\alpha\|$ – евклидовы нормы матриц, составленных из значений точного и отфильтрованного изображений соответственно.

Решение. Изменяя γ в широком интервале $[10^{-1}, 10^7]$ и используя (1.3.37), были вычислены значения $\delta_F\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ и $R_W(\gamma)$. На рис.1.9. показаны графики функции $R_W(\gamma)$ (кривая 1) и функции $\delta_F\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ (кривая 2), а также нанесены квантили $\mathcal{G}_{m,0.025}, \mathcal{G}_{m,0.975}$, вычисленные по формулам (1.3.28), (1.3.29) при $m = 256 \cdot 256 = 65536$ (точечные прямые, которые из-за масштаба слились в одну точечную прямую 3). Видно, что все значения α_W (для которых $R_W\left(\frac{1}{\alpha_W}\right)$ попадает в интервал (1.3.17), а на рисунке это пересечение $R_W\left(\frac{1}{\alpha_W}\right)$ с точечной прямой) находятся в области минимума относительной ошибки фильтрации. ☉

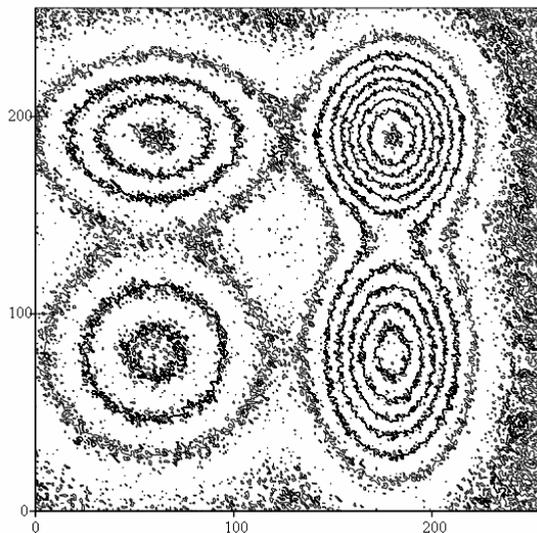


Рис. 1.8. Изолинии зашумленного изображения
 Определим СКО двумерной фильтрации выражением

$$\Delta(\alpha) = M \left[\sum_{j_x=1}^{N_x} \sum_{j_y=1}^{N_y} \left[\hat{f}_{\alpha, j_x, j_y} - f_{j_x, j_y} \right]^2 \right]. \quad (1.3.41)$$

Будем говорить, что двумерный алгоритм Фурье-фильтрации сходится, если имеет место предел:

$$\Delta(\alpha) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (1.3.42)$$

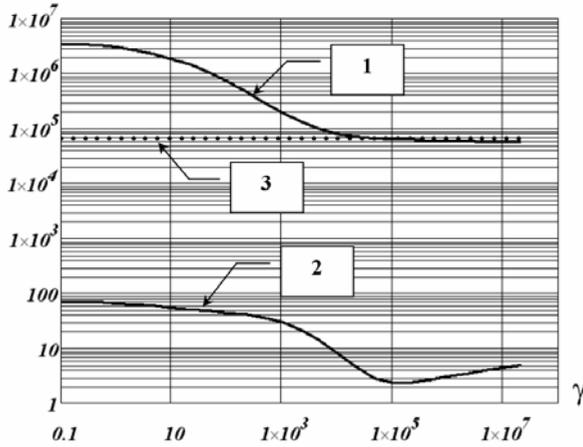


Рис. 1.9. Графики $R_w(\gamma)$ и относительной ошибки фильтрации изображения

Так же, как и в одномерном случае определим сходимость периодических изображений пределом

$$\Delta_p(\alpha) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0, \quad (1.3.43)$$

где СКО

$$\Delta_p(\alpha) = M \left[\sum_{j_x=0}^{N_1-1} \sum_{j_y=0}^{N_2-1} \left[\hat{f}_{p\alpha}(j_x, j_y) - f_p(j_x, j_y) \right]^2 \right]. \quad (1.3.44)$$

Учитывая алгоритмы формирования последовательностей $\{\hat{f}_{p\alpha}(j_x, j_y)\}$, $\{f_p(j_x, j_y)\}$, можно показать, что из сходимости (1.3.43) следует сходимость (1.3.42).

Коэффициенты ДПФ $E_{p\alpha}(l_x, l_y)$ периодической ошибки фильтрации

$$\varepsilon_{p\alpha}(j_x, j_y) = \hat{f}_{p\alpha}(j_x, j_y) - f_p(j_x, j_y)$$

определяются выражением

$$E_{p\alpha}(l_x, l_y) = \frac{\alpha Q_p(l_x, l_y)}{1 + \alpha Q_p(l_x, l_y)} F_p(l_x, l_y) + \frac{1}{1 + \alpha Q_p(l_x, l_y)} H_p(l_x, l_y), \quad (1.3.45)$$

где $H_p(l_x, l_y)$ – коэффициенты ДПФ двумерной периодической последовательности $\eta_p(j_x, j_y)$, дисперсия которых связана с дисперсией σ^2 следующим образом (см. (1.1.39)):

$$M \left[|H_p(l_x, l_y)|^2 \right] = \frac{N_x N_y}{N_1^2 \cdot N_2^2} \cdot \sigma^2. \quad (1.3.46)$$

Тогда СКО $\Delta_p(\alpha)$ можно записать в виде:

$$\Delta_p(\alpha) = N_1 N_2 \left[\alpha^2 \sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \left[\frac{\alpha Q_p(l_x, l_y)}{1 + \alpha Q_p(l_x, l_y)} \right]^2 \cdot |F_p(l_x, l_y)|^2 \right] + \sigma^2 \frac{N_x \cdot N_y}{N_1 \cdot N_2} \sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \left[\frac{1}{1 + \alpha Q_p(l_x, l_y)} \right]^2. \quad (1.3.47)$$

Выполнив аналогичные утверждению 1.3.4 рассуждения относительно соотношений (1.3.36), (1.3.47), можно доказать

Утверждение 1.3.6. Алгоритм 2D-Фурье-фильтрации с параметром сглаживания α_W имеет среднеквадратические сходимости (1.3.43), (1.3.42) и при достаточно малой дисперсии эта сходимость имеет порядок σ^2 . ♣

Замечание 1.3.4. Предложенные алгоритмы выбора параметра сглаживания 1D- и 2D-Фурье-фильтрации «требуют» задания дисперсии σ^2 шума η . По-видимому, число случаев, когда достоверно известна дисперсия σ^2 весьма незначительно. Возникает вопрос: что делать, если дисперсия σ^2 не задана? Возможны два ответа на этот вопрос: *первый* – построить на основе имеющейся информации «надежную» оценку для σ^2 (одна из таких оценок рассматривается ниже); *второй* – обратиться к

алгоритмам выбора параметра сглаживания, не требующих задания дисперсии или уровня шума (который приводится в следующих пунктах). ♦

При решении некорректно поставленных задач для выбора параметра регуляризации при неизвестной дисперсии погрешностей задания правой части операторного уравнения часто используется *метод перекрестной значимости (cross-validation method)* [2, 12, 15, 36, 37]. Адаптируем этот метод к выбору параметра сглаживания в алгоритмах Фурье-фильтрации изображений.

1.3.3. Выбор параметра сглаживания на основе метода перекрестной значимости

В основу этого метода положена идея нахождения такого значения параметра сглаживания α , который бы минимизировал сумму квадратов ошибки предсказания зашумленных значений \tilde{f}_i . Ошибка предсказания вычислялась следующим образом:

- из заданной выборки зашумленных значений $\{\tilde{f}_i\}$ удалялось одно или несколько значений \tilde{f}_j ;
- по оставшимся значениям при фиксированном параметре α строилась «сглаженная» функция $\hat{f}(x)$, по которой вычислялись значения $\hat{f}_\alpha(x_j)$ в узлах x_j , удаленных на первом этапе;
- вычислялась разница $\tilde{f}_j - \hat{f}_\alpha(x_j)$, которая интерпретировалась как ошибка предсказания.

Очевидно, что такой подход к нахождению α требовал существенных вычислительных затрат (из-за двойного цикла: внутренний – по множеству удаленных точек при фиксированном параметре сглаживания α ; внешний – по параметру α для нахождения минимума функционала – суммы квадратов ошибок предсказания). Поэтому был предложен *обобщенный метод перекрестной значимости (general cross-validation method – GCV*

метод), в котором искался минимум суммы «взвешенных» квадратов ошибок предсказания.

Используя обозначения п. 1.3.1, запишем следующий функционал:

$$U(\alpha) = \frac{\frac{1}{N_x} \|\tilde{f} - \hat{f}_\alpha\|^2}{\left[\frac{1}{N_x} Sp[E(\alpha)] \right]^2} = \frac{\frac{1}{N_x} \|E(\alpha) \tilde{f}\|^2}{\left[\frac{1}{N_x} Sp[E(\alpha)] \right]^2}, \quad (1.3.48)$$

где $E(\alpha) = I - T(\alpha)$ – оператор невязки; $Sp[\]$ – след матрицы. В GCV-методе в качестве оценки для α_{opt} принимается значение α_U , являющееся решением вариационной задачи:

$$\min_{\alpha \geq 0} U(\alpha). \quad (1.3.49)$$

Однако решение этой задачи также требует большого объема вычислений (особенно вычисление следа матрицы). Поэтому построим эффективный алгоритм вычисления значения функционала, основанного на ДПФ.

Рассмотрим периодическую невязку

$$e_{p\alpha} = \tilde{f}_p - \hat{f}_{p\alpha},$$

коэффициенты ДПФ которой определяются выражением

$$E_{p\alpha}(l) = \frac{\alpha Q_p(l)}{1 + \alpha Q_p(l)} \cdot \tilde{F}_p(l)$$

и введем функционал

$$U_p(\alpha) = \frac{\sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{\alpha Q_p(l)}{1 + \alpha Q_p(l)} \right]^2 \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2}{\left[\sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{\alpha Q_p(l)}{1 + \alpha Q_p(l)} \right] \right]^2}, \quad (1.3.50)$$

который с точностью до величины, не зависящей от α , совпадает с (1.3.48), но вычисление которого требует порядка N операций над коэффициентами ДПФ. Кроме этого, можно вычислить производную $\partial U_p(\alpha)/\partial \alpha$, что позволит использовать метод минимизации первого порядка. Все это в конечном результате существенно сокращает вычислительные затраты на нахождение значения α_U по сравнению с непосредственным вычислением значений (1.3.48).

Пример 1.3.3. Для зашумленного сигнала, показанного на рис. 1.5 точечной кривой, построить зависимости $\delta_f(\alpha)$, $U_p(\alpha)$.

Решение. Используя α в широком диапазоне $[10^{-4}, 10^4]$, вычислим относительную ошибку фильтрации $\delta_f(\alpha)$ и $U_p(\alpha)$. На рис.1.10 показаны графики $U_p(\alpha)$ (кривая 1) и $\delta_f(\alpha)$ (кривая 2). Видим, что значение $\alpha_U \sim 0.1$ (точка минимума функционала (1.3.50)) находится в области минимума относительной ошибки. Однако из рисунка видно, что левая ветвь функционала имеет пологий характер, что затрудняет поиск точки минимума численными методами. ☹

Сразу же отметим, что в случае коррелированных шумов η (коэффициент корреляции по модулю больше 0.2) вычисляемые значения α_U могут на два и более порядков меньше α_{opt} . Это обуславливает существенное понижение точности фильтрации по сравнению с оптимальным фильтром при $\alpha = \alpha_{opt}$. Кроме этого, остается открытым вопрос о сходимости алгоритма 1D-Фурье-фильтрации при $\alpha = \alpha_U$.

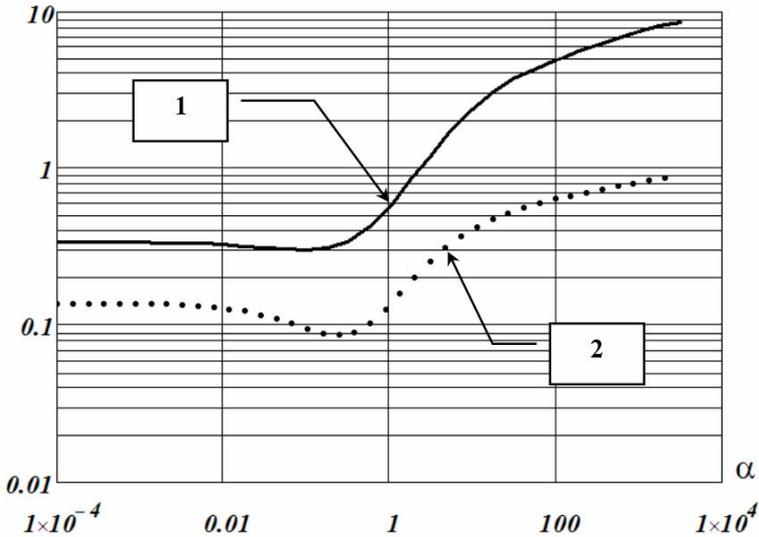


Рис. 1.10. Графики $U(\alpha)$ и относительной ошибки фильтрации

Приведем запись функционала $U_p(\alpha)$ для двумерного алгоритма Фурье-фильтрации:

$$U_p(\alpha) = \frac{\sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \left[\frac{\alpha Q_p(l_x, l_y)}{1 + \alpha Q_p(l_x, l_y)} \right]^2 \cdot |\tilde{F}_p(l_x, l_y)|^2}{\left[\sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \left[\frac{\alpha Q_p(l_x, l_y)}{1 + \alpha Q_p(l_x, l_y)} \right] \right]^2}. \quad (1.3.51)$$

Видно, что и в двумерном случае предлагаемый алгоритм вычисления функционала GCV-метода (из минимума которого определяется параметр сглаживания) **имеет высокую вычислительную эффективность.**

1.3.4. Анализ построенных алгоритмов выбора параметра сглаживания

Прежде всего отметим, что использование ДПФ в приведенных алгоритмах выбора α существенно (особенно в алгоритмах 2D-Фурье-фильтрации) уменьшает вычислительные затраты на выбор параметра α и это определяет вычислительную эффективность алгоритма Фурье-фильтрации в целом.

Из двух построенных (в этом пункте) оценок для α_{opt} , строгое теоретическое обоснование имеет только оценка α_W , определяемая на основе проверки статистических гипотез об оптимальности оператора фильтрации. Для этой же оценки доказана сходимость алгоритма фильтрации.

Построение оценки α_U основано на полуэвристических рассуждениях и не имеет строгого теоретического обоснования. Кроме этого, вопрос сходимости алгоритма фильтрации, использующего α_U , остается открытым. Следует отметить определенные ограничения по применению параметра α_U , в частности:

- при коррелированных проекциях шума η_j, η_{j_x, j_y} (коэффициент корреляции по модулю больше 0.2) значения α_U на два и более порядка меньше α_{opt} ;
- при небольшом относительном уровне шума (≤ 0.02) точка минимума функционала $U_p(\alpha)$ занижается на один-два порядка по сравнению с α_{opt} . Кроме этого, пологий характер левой ветви (от точки минимума) графика функционала $U_p(\alpha)$ затрудняет поиск точки минимума численными методами.

Применение α_W свободно от перечисленных ограничений, а использование быстро сходящейся итерационной процедуры (1.3.20) (совместно с выражениями (1.3.23), (1.3.24)) определяет высокую вычислительную эффективность алгоритмов 1D- и 2D-фильтрации с параметром сглаживания α_W .

Вычисление α_W требует задания дисперсии шума σ^2 , которая в ряде случаев может быть неизвестной.

Заметим, что задание заниженного значения дисперсии (меньше на 20÷30 % точного значения σ^2) приводит к уменьшению на 10÷15 % вычисленного α_W , что обуславливает эффект «недоглаживания» зашумленных данных. Задание завышенного значения дисперсии приводит к «переглаживанию» зашумленных данных. Поэтому рассмотрим алгоритм, позволяющий достаточно точно оценить σ^2 по зашумленным исходным данным.

1.3.5. Оценка дисперсии σ^2

Оценка дисперсии σ^2 была предложена в работах [10, 15] и основана на предположении, что коэффициенты ДПФ $\tilde{F}_p(l)$ зашумленного одномерного сигнала в некоторой окрестности точки $l = N/2$ определяются только погрешностями η_j . В принятых в этом пункте обозначениях эта оценка имеет вид:

$$\hat{D}(L) = \frac{N^2}{2 \cdot L \cdot N_x} \cdot \sum_{l=-L}^L \left| \tilde{F}_p\left(\frac{N}{2} + l\right) \right|^2. \quad (1.3.52)$$

Пример 1.3.4. Для зашумленного сигнала, показанного на рис. 1.5 точечной кривой ($\delta_\eta = 0.10$), проанализировать поведение квадрата модуля коэффициентов ДПФ $\tilde{F}_p(l)$ как функции l .

Решение. На рис. 1.11 показаны вычисленные значения $|\tilde{F}_p(l)|$ при $N = 256$. Видно, что коэффициенты симметричны относительно точки $l = N/2 = 128$; для $l \in [30, 225]$ коэффициенты $\tilde{F}_p(l)$ почти полностью обусловлены шумом измерения $|\tilde{F}_p(l)|^2 \leq 0.001 \cdot \max |\tilde{F}_p(l)|^2$. ●

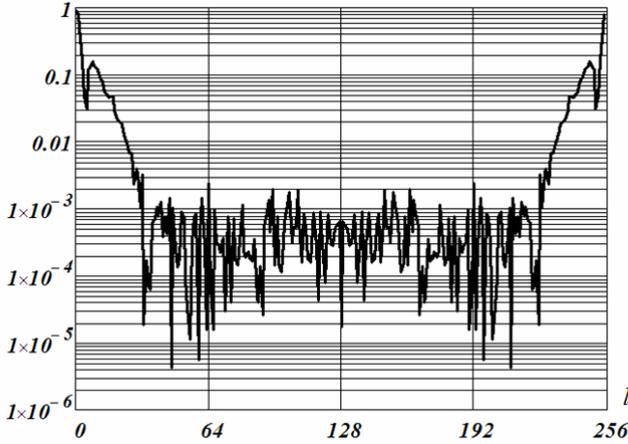


Рис. 1.11. Коэффициенты $\left| \tilde{F}_p(l) \right|^2$

Можно показать, что при сделанном предположении и соответствующем выборе L величина $\hat{D}(L)$ является несмещенной оценкой для σ^2 .

Пример 1.3.5. Для зашумленного сигнала, показанного на рис. 1.5 точечной кривой (относительный уровень шума $\delta_\eta = 0.10$), вычислить выборочное среднее оценки (1.3.52) и выборочную среднеквадратическую ошибку этой оценки.

Решение. Выборочные характеристики вычислим по следующим формулам:

$$m_{\hat{D}}(L) = \frac{1}{N_{sam}} \cdot \sum_{k=1}^{N_{sam}} \hat{D}_\eta^{(k)}(L);$$

$$s_{\hat{D}}(L) = \left[\frac{1}{N_{sam} - 1} \cdot \sum_{k=1}^{N_{sam}} \left(\hat{D}_\eta^{(k)}(L) - \sigma^2 \right)^2 \right]^{1/2},$$

где оценка $\hat{D}_\eta^{(k)}$ вычислялась по k -й реализации зашумленного сигнала $\tilde{f}^{(k)} = f + \eta^{(k)}$; $\sigma^2 = 0.15$ – значение дисперсии, зада-

ваемое при генерировании псевдослучайного вектора $\eta^{(k)}$. Объем выборки $N_{sam} = 50$, $N = 256$.

На рис. 1.12 приведены графики $m_{\hat{D}}(L)$ (кривая 1), $s_{\hat{D}}(L)$ (кривая 2) и $\sigma^2 = 0.15$ (кривая 3).

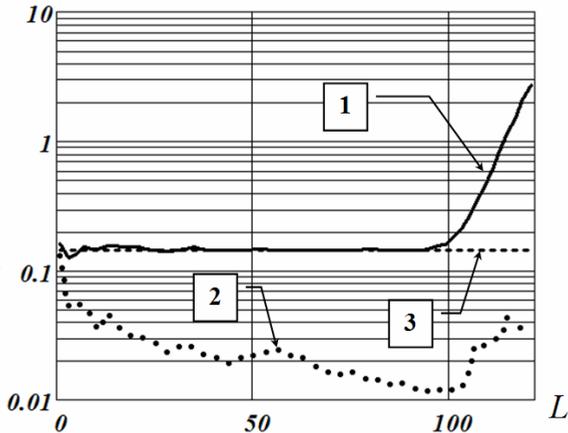


Рис. 1.12. Оценка дисперсии σ^2

При первоначальном увеличении L точность оценки увеличивается за счет увеличения объема выборки (равного $2L+1$). При дальнейшем увеличении L наблюдается уменьшение точности оценки из-за включения в выборку коэффициентов ДПФ, содержащих информацию о точной функции $f(x)$. При $L = L_{opt}$ (в этом примере $L_{opt} = 60$) оценка (1.3.52) имеет максимальную точность (см. рис. 1.12)). Для определения значения L_{opt} можно итерационно увеличивать значения L (начиная, например, с $L \approx N/10$) до тех пор, пока $\hat{D}(L)$ уменьшается. ●

Заметим, что даже при малых величинах $N=128$ объем выборки $2L_{opt} + 1 \approx 100$, что позволяет достаточно точно оценить дисперсию σ^2 .

Оценка дисперсии по зашумленному изображению \tilde{f}_{j_x, j_y} определяется выражением

$$\hat{D}(L_1, L_2) = \frac{N_1^2 \cdot N_2^2}{N_x \cdot N_y \cdot [(2L_1 + 1)(2L_2 + 1) - 1]} \times \sum_{l_x=-L_1}^{L_1} \sum_{l_y=-L_2}^{L_2} \left| \tilde{F}_p \left(\frac{N_1}{2} + l_x, \frac{N_2}{2} + l_y \right) \right|^2. \quad (1.3.53)$$

Здесь даже при небольших значениях (например, $L_1 = L_2 = 20$) объем выборки может достигать несколько тысяч коэффициентов $\tilde{F}_p(l_x, l_y)$, что гарантирует высокую эффективность оценки $\hat{D}(L_1, L_2)$.

В заключение этого параграфа, посвященного выбору параметра сглаживания, сделаем следующий вывод:

Выбор параметра сглаживания, минимизирующего СКО фильтрации в построенных алгоритмах 1D- и 2D-Фурье-фильтрации, предпочтительнее осуществлять на основе критерия оптимальности (см. п. 1.3.1). В случаях, когда дисперсия σ^2 шума не задана (или известна с большой погрешностью) рекомендуется использовать оценку (1.3.52) (1D-фильтрация) или оценку (1.3.53) (2D-фильтрация).

1.3.6. Реализация алгоритмов Фурье-фильтрации в системе компьютерной математики Mathcad

В Приложении 1 приведена программная реализация алгоритма Фурье-фильтрации с заданным параметром сглаживания и с выбираемым параметром сглаживания α_w .

Обращение к подпрограммам-функциям имеет вид:

$$D1_Filter_ \alpha_w(f, Q, \Delta_x, \sigma^2);$$

$$D1_Filter_ \alpha_{ZAD}(f, Q, \alpha, \Delta_x).$$

Формальные параметры:

f – одномерный массив длиной N_x , содержащий зашумленные значения функции;

Q – имя функции с одним аргументом ω , который определяет периодическую функцию $Q_p(\omega)$, входящую в фильтрующий множитель (1.2.12);

α – задаваемый параметр регуляризации, при котором осуществляется Фурье-фильтрация зашумленного сигнала (для подпрограммы-функции $D1_Filter_alpha_{ZAD}$);

Δ_x – шаг дискретизации функции $f(x)$;

σ^2 – дисперсия шума измерения (для подпрограммы-функции $D1_Filter_alpha_w$), которая используется при вычислении параметра сглаживания α_w . Если дисперсия неизвестна, то перед обращением к модулю $D1_Filter_alpha_w$ ее оценивают с помощью модуля $Calc_D_n$, который приведен в *Приложении 1*.

Результатом работы является массив длиной N_x , содержащий сглаженные значения функции.

1.4. Квазиоптимальный локальный алгоритм Фурье-фильтрации

Будет рассмотрен локальный алгоритм Фурье-фильтрации и предложен новый подход к оцениванию локального отношения «шум/сигнал», точное значение которого на практике неизвестно.

1.4.1. Оптимальный локальный алгоритм Фурье-фильтрации

В предыдущих пунктах были рассмотрены глобальные алгоритмы Фурье-фильтрации, в которых фильтрация осуществляется умножением коэффициента ДПФ зашумленного сигнала на некоторый весовой множитель – фильтрующий множитель, зависящий от параметра сглаживания. Изменяя этот параметр, можно варьировать ширину полосы пропускания фильтра, а следовательно, и ошибки фильтрации сигнала. Так как параметр сглаживания одинаков для всех фильтрующих множителей, то такой алгоритм Фурье-фильтрации был назван глобальным.

Наличие только одного «управляющего» параметра сглаживания не позволяет подобрать (на основе теории оптимальной фильтрации) для каждого коэффициента ДПФ $\tilde{F}(l)$ «свой» множитель, зависящий от локального отношения «шум/сигнал» в точке (l) . Алгоритм, в котором осуществляется такой подбор, можно называть *локальным алгоритмом Фурье-фильтрации*, и он (за счет успешного подбора фильтрующего множителя) может иметь существенно меньшую ошибку фильтрации.

Первоначально вернемся к алгоритму 1D-Фурье-фильтрации, в котором «отфильтрованные» коэффициенты ДПФ $\tilde{F}(l)$ определяются выражением:

$$\hat{F}_{pw}(l) = W(l) \cdot \tilde{F}_p(l), \quad (1.4.1)$$

где *фильтрующий множитель* $W(l)$ полностью определяет свойства алгоритма. Предполагая справедливость предположений (1.2.1), (1.2.2) и используя результаты оптимальной фильтрации [19], зададим множитель $W(l)$ в виде:

$$W(l) = \frac{1}{1 + S(l)}, \quad (1.4.2)$$

и определим величину $S_{opt}(l)$, доставляющее минимум СКО фильтрации

$$\Delta_p = M \left[\sum_{j=0}^{N-1} (\hat{f}_{pw}(j) - f_p(j))^2 \right], \quad (1.4.3)$$

где $f_p(j)$ – периодический точный сигнал, сформированный по правилу (1.1.26) из точных значений f_j . При предположении о нулевом среднем шуме η_j СКО Δ_p можно представить в виде:

$$\Delta_p = N \sum_{l=0}^{N-1} \frac{S^2(l)}{(1+S(l))^2} \cdot |F_p(l)|^2 + \quad (1.4.4)$$

$$+ N \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{(1+S(l))^2} \cdot M \left[|H_p(l)|^2 \right],$$

где $F_p(l)$ – коэффициенты ДПФ «точной» последовательности $\{f_p(j)\}$; $H_p(l)$ – коэффициенты ДПФ шумовой последовательности $\{\eta_p(j)\}$. Нетрудно показать, что минимум (1.4.4) достигается при значении $S(l) = S_{opt}(l)$, определяемым выражением:

$$S_{opt}(l) = \frac{M \left[|H_p(l)|^2 \right]}{|F_p(l)|^2} = \frac{D_H(l)}{|F_p(l)|^2}, \quad (1.4.5)$$

где $D_H(l)$ – дисперсия коэффициента $H_p(l)$. Подставляя (1.4.5) в (1.4.2), получаем оптимальный фильтрующий множитель

$$W_{opt}(l) = \frac{1}{1+S_{opt}} = \frac{1}{1 + \frac{D_H(l)}{|F_p(l)|^2}}, \quad (1.4.6)$$

Отношение (1.4.5) можно интерпретировать как локальное отношение «шум/сигнал» в точке l частотной области. Видно, что при уменьшении уровня шума ($D_H(l) \rightarrow 0$) это отношение стремится к нулю, а $F_{pW_{opt}}(l) \rightarrow F_p(l)$.

Для алгоритма 2D-Фурье-фильтрации минимум СКО ошибки фильтрации:

$$\begin{aligned}
\Delta_p &= M \left[\sum_{j_x=0}^{N_1-1} \sum_{j_y=0}^{N_2-1} \left(\hat{f}_{pw}(j_x, j_y) - f_p(j_x, j_y) \right)^2 \right] = \\
&= N_1 N_2 \sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \frac{S^2(l_x, l_y)}{(1 + S(l_x, l_y))^2} \cdot |F_p(l_x, l_y)|^2 + \\
&+ N_1 N_2 \sum_{l_x=0}^{N_1-1} \sum_{l_y=0}^{N_2-1} \frac{1}{(1 + S(l_x, l_y))^2} \cdot M[H_p(l_x, l_y)]
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

достигает минимума величины при

$$S(l_x, l_y) = S_{opt}(l_x, l_y) = \frac{M[H_p^2(l_x, l_y)]}{|F_p(l_x, l_y)|^2} = \frac{D_H(l_x, l_y)}{|F_p(l_x, l_y)|^2} \tag{1.4.8}$$

и оптимальном фильтрующем множителе, определяемым выражением:

$$W_{opt}(l_x, l_y) = \frac{1}{1 + \frac{D_H(l_x, l_y)}{|F_p(l_x, l_y)|^2}}. \tag{1.4.9}$$

К сожалению, использовать оптимальные фильтрующие множители на практике в большинстве случаев невозможно из-за незнания коэффициентов ДПФ $F_p(l)$ (или $F_p(l_x, l_y)$), а возможно и дисперсии $D_H(l)$ (или $D_H(l_x, l_y)$). Поэтому, используя (1.4.5), (1.4.8) в качестве отправных выражений, рассмотрим апостериорное уточнение отношения «шум/сигнал», временно предполагая известным дисперсии коэффициентов H_p .

1.4.2. Алгоритм итерационного уточнения отношения «шум/сигнал»

Вновь вернемся к алгоритму 1D-Фурье-фильтрации и предположим, что известен (или вычислен) некоторый сигнал $\hat{f}_i^{(0)}$ (являющийся некоторой оценкой для значений $f(x_i)$) и соответствующий ему периодический сигнал $\hat{f}_p^{(0)}(i)$. Используя коэффициенты ДПФ $\hat{F}_p^{(0)}(l)$ этого сигнала, определим «начальное» отношение «шум/сигнал»:

$$\hat{S}^{(0)}(l) = \frac{D_H(l)}{|\hat{F}_p^{(0)}(l)|^2}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.4.10)$$

Вычислим коэффициенты ДПФ:

$$\hat{F}_p^{(1)}(l) = \frac{1}{1 + \hat{S}^{(0)}(l)} \cdot \tilde{F}_p(l).$$

Далее, подставляя $\hat{F}_p^{(1)}(l)$ в (1.4.5), получаем $\hat{S}^{(1)}(l)$, $\hat{F}_p^{(2)}(l)$ и таким образом приходим к итерационной процедуре апостериорного отношения «шум/сигнал» вида:

$$\hat{S}^{(n)}(l) = \frac{D_H(l)}{|F^{(n)}(l)|^2}; \quad (1.4.11)$$

$$\hat{F}_p^{(n+1)}(l) = \frac{1}{1 + \hat{S}^{(n)}(l)} \cdot \tilde{F}_p(l), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4.12)$$

которая выполняется для $l = 0, 1, \dots, N-1$.

Возникает вопрос о сходимости этой процедуры. Для упрощения записи, доказательство сходимости проведем для фиксированного (но любого) значения l . Поэтому при доказательстве индекс l будем опускать.

Возведя модули обеих частей (1.4.12) в степень (-2) и умножив на D_H , переходим к следующему рекурсивному отношению

$$\hat{S}^{(n+1)} = (1 + \hat{S}^{(n)}) \cdot \tilde{S}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.13)$$

где $\tilde{S} = \frac{D_H}{|\tilde{F}_p|^2}$ – отношение «шум/сигнал» исходного зашумленного сигнала. Видно, что итерационный процесс (1.4.13) зависит от двух параметров $\hat{S}^{(0)}$ и \tilde{S} . Поэтому приведем два важных свойства последовательности $\hat{S}^{(n)}$, используемые в дальнейшем (более подробно см. [47, 48, 49]).

Пусть заданы два значения $\hat{S}_1^{(0)}$ и $\hat{S}_2^{(0)}$. Тогда справедливо

$$\hat{S}_1^{(n)} \leq \hat{S}_2^{(n)}, \text{ если } \hat{S}_1^{(0)} \leq \hat{S}_2^{(0)} \quad (1.4.14)$$

при любых $\tilde{S} \geq 0$, где $\tilde{S}_1^{(n)}$, $\tilde{S}_2^{(n)}$ элементы последовательностей со стартовыми точками $\tilde{S}_1^{(0)}$, $\tilde{S}_2^{(0)}$ соответственно. Аналогично

$$\hat{S}_1^{(n)} \leq \hat{S}_2^{(n)}, \text{ если } \tilde{S}_1 \leq \tilde{S}_2 \quad (1.4.15)$$

при любом $\hat{S}^{(0)} \geq 0$.

Стационарные точки \hat{S}^* последовательности $\hat{S}^{(n)}$ определяются корнями линейного уравнения

$$\hat{S}^* = (1 + \hat{S}^*)^2 \tilde{S}. \quad (1.4.16)$$

После преобразования приходим к квадратному уравнению

$$(\hat{S}^*)^2 + \left(2 - \frac{1}{\tilde{S}}\right) \hat{S}^* + 1 = 0, \quad (1.4.17)$$

корни которого находятся по формуле:

$$\hat{S}_{1,2}^* = \frac{1 - 2\tilde{S} \pm \sqrt{1 - 4\tilde{S}}}{2\tilde{S}} \quad (1.4.18)$$

и зависят от величины \tilde{S} .

Первоначально рассмотрим ситуацию $\tilde{S} \leq 1/4$ и выделим при этом четыре случая, положив для определенности $S_1^* \leq S_2^*$.

Случай 1: $0 < \hat{S}^{(0)} \leq \hat{S}_1^*$. Тогда используя свойство (1.4.14), можно доказать монотонную сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = S_1^*$.

Случай 2: $\hat{S}_1^* < \hat{S}^{(0)} \leq \hat{S}_2^*$. Тогда используя (1.4.14), (1.4.15), можно доказать монотонную сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = S_1^*$.

Случай 3: $\hat{S}^{(0)} = \hat{S}_2^*$. Можно доказать сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = S_2^*$.

Случай 4: $\hat{S}^{(0)} > \hat{S}_2^*$. Можно доказать сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \infty$.

Если $\tilde{S} > 1/4$, то корни (1.4.18) уравнения (1.4.17) являются комплексными величинами, что противоречит определению S . Поэтому будем полагать $\hat{S}^{(n)} \rightarrow \infty$ при $\tilde{S} > 1/4$.

Таким образом, доказано

Утверждение 1.4.1. Итерационная процедура уточнения отношения «шум/сигнал» сходится к следующему предельному значению:

$$\hat{S}^*(l) = \begin{cases} \hat{S}_1^*(l), & \text{если } \begin{cases} \tilde{S}(l) \leq 1/4; \\ 0 < \hat{S}^{(0)}(l) < \hat{S}_2^*(l), \end{cases} \\ \hat{S}_2^*(l), & \text{если } \begin{cases} \tilde{S}(l) \leq 1/4; \\ \hat{S}^{(0)}(l) = \hat{S}_2^*(l), \end{cases} \\ \infty, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.4.19)$$

где $\hat{S}_1^*(l), \hat{S}_2^*(l)$ – корни квадратного уравнения (1.4.17) при различных $l = 0, 1, 2, \dots, N-1$. ♣

Подставляя $\hat{S}^*(l)$ в (1.4.7), получаем выражение для коэффициентов ДПФ отфильтрованного сигнала:

$$\hat{F}_p^*(l) = \frac{1}{1 + \hat{S}^*(l)} \cdot \tilde{F}_p(l), \quad l = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.4.20)$$

Взятием обратного ДПФ вычисляется периодический отфильтрованный сигнал $\hat{f}_p^*(j)$, по которому формируется \hat{f}_j^* (см. (1.1.26)).

Таким образом, построен локальный алгоритм 1D-Фурье-фильтрации, в котором для каждого l определяется «свой» фильтрующий множитель $\frac{1}{1 + \hat{S}^*(l)}$.

Заметим, что полученное аналитическое выражение (1.4.19) для предельного отношения «шум/сигнал» исключает необходимость выполнять итерационный процесс (1.4.11), (1.4.12), что существенно уменьшает вычислительные затраты на построение локального алгоритма фильтрации.

Для аналогичного алгоритма 2D-Фурье-фильтрации имеем:

$$\hat{S}^*(l_x, l_y) = \begin{cases} \hat{S}_1^*(l_x, l_y), & \text{если } \begin{cases} \tilde{S}(l_x, l_y) \leq 1/4; \\ 0 < \hat{S}^{(0)}(l_x, l_y) < \hat{S}_2^*(l_x, l_y), \end{cases} \\ \hat{S}_2^*(l_x, l_y), & \text{если } \begin{cases} \tilde{S}(l_x, l_y) \leq 1/4; \\ \hat{S}^{(0)}(l_x, l_y) = \hat{S}_2^*(l_x, l_y), \end{cases} \\ \infty, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.4.21)$$

$$\hat{F}_p^*(l_x, l_y) = \frac{1}{1 + \hat{S}^*(l_x, l_y)} \cdot \tilde{F}_p(l_x, l_y), \quad (1.4.22)$$

$$0 \leq l_x \leq N_1 - 1; \quad 0 \leq l_y \leq N_2 - 1.$$

Величины $\hat{S}_1^*(l_x, l_y) \leq \hat{S}_2^*(l_x, l_y)$ есть корни квадратного уравнения:

$$\left(\hat{S}^*(l_x, l_y)\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{\tilde{S}(l_x, l_y)}\right)\hat{S}^*(l_x, l_y) + 1 = 0,$$

которые находятся по формуле (1.4.18),

где
$$\tilde{S}(l_x, l_y) = \frac{D_H(l_x, l_y)}{|\tilde{F}_p(l_x, l_y)|^2} - \quad (1.4.23)$$

отношение «шум/сигнал» в точке (l_x, l_y) зашумленного изображения.

Видно, что и в двумерном случае аналитическое вычисление предельной точки итерационной процедуры уточнения локального отношения «шум/сигнал» существенно уменьшает затраты машинного времени при фильтрации изображения.

Приведенные алгоритмы 1D- и 2D-Фурье-фильтрации можно назвать *квазиоптимальными локальными алгоритмами фильтрации*, так как в них вместо точного отношения «шум/сигнал» $S_{opt}(l)$ (или $S_{opt}(l_x, l_y)$) используется оценка $\hat{S}^*(l)$ (или $\hat{S}^*(l_x, l_y)$).

Очевидно, что «хороший» алгоритм фильтрации должен обеспечить сходимость сглаженного сигнала $\hat{S}(x)$ к точному при стремлении уровня шума к нулю.

Используя выражение (1.4.4), определим сходимость следующим пределом:

$$\Delta_p(\hat{f}_p^*) = M \left[\sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{f}_p^*(j) - f_p(j) \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (1.4.24)$$

Утверждение 1.4.2. Если стартовая (для итерационной процедуры уточнения) последовательность $\{\hat{f}_p^{(0)}(j)\}$ сходится к $\{f_p(j)\}$, т.е.

$$\Delta_p(\hat{f}_p^{(0)}) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0, \quad (1.4.25)$$

то имеет место сходимость (1.4.24).

Для доказательства вернемся к обозначениям $\tilde{S}, \hat{S}^{(0)}, \hat{S}_1^*, \hat{S}_2^*$ и приведем соотношение (см. (1.1.36)), устанавливающее связь между $M\left[|H_p(l)|^2\right]$ и дисперсией σ^2 :

$$D_{H_p} = M\left[|H_p(l)|^2\right] = \frac{N_x}{N^2} \cdot \sigma^2. \quad (1.4.26)$$

Тогда для сходимости (1.4.24) необходимо и достаточно (это видно из (1.4.19)) выполнение предельных соотношений:

$$\lim \hat{S}_1^* = 0 \text{ и } \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^* \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (1.4.27)$$

Если имеет место сходимость (1.4.25), то справедливы пределы

$$\hat{S}^{(0)} \geq \tilde{S} \text{ и } \lim \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^* \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0.$$

Рассмотрим предельное поведение корней \hat{S}_1^*, \hat{S}_2^* при $\tilde{S} \rightarrow 0$. Для достаточно малых значений \tilde{S} справедливо представление:

$$(1 - 4\tilde{S})^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\tilde{S} - 2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3 - 10\tilde{S}^4 - 28\tilde{S}^5 - \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} S_1^* &= \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S} - (1 - 4\tilde{S})^{\frac{1}{2}}}{2\tilde{S}} \approx \\ &\approx \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{2\tilde{S}^2 + 4\tilde{S}^3 + 10\tilde{S}^4}{2\tilde{S}} = 0.\end{aligned}\quad (1.4.28)$$

По аналогии можно доказать предел

$$\begin{aligned}\lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} S_2^* &= \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S} + (1 - 4\tilde{S})^{\frac{1}{2}}}{2\tilde{S}} \approx \\ &\approx \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{2 - 4\tilde{S} - 2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3}{2\tilde{S}} = \infty.\end{aligned}\quad (1.4.29)$$

Из существования пределов (1.4.28), (1.4.29) и условий (1.4.27) следует сходимость (1.4.24). ♣

Для доказательства сходимости локального алгоритма фильтрации в двумерном случае определим СКО фильтрации изображения формулой:

$$\Delta_p(\hat{f}_p^*) = M \left[\sum_{J_x=0}^{N_1-1} \sum_{J_y=0}^{N_2-1} \left(\hat{f}_p^*(J_x, J_y) - f_p(J_x, J_y) \right)^2 \right].$$

Утверждение 1.4.3. Если стартовое (для итерационной процедуры уточнения) изображение $\{\hat{f}_p^{(0)}(J_x, J_y)\}$ сходится к $\{\hat{f}_p(J_x, J_y)\}$, т.е.

$$\Delta_p(\hat{f}_p^{(0)}) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0, \quad (1.4.30)$$

то имеет место сходимость

$$\Delta_p(\hat{f}_p^*) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (1.4.31)$$

Доказательство этого утверждения выполняется точно так же, как и предыдущего утверждения. ♣

Ответим на два вопроса, возникающих на практике при использовании предложенных локальных алгоритмов фильтрации. Первый вопрос связан с заданием дисперсий $D_H(l) = M \left[|H_p(l)|^2 \right]$ (или $D_H(l_x, l_y) = M \left[|H_p(l_x, l_y)|^2 \right]$), входящих в числитель отношения «шум/сигнал». Если шумы измерения не коррелированы между собой и имеют дисперсию σ^2 , то величины $D_H(l)$, $D_H(l_x, l_y)$ не зависят от l (или l_x, l_y) и определяются выражениями (1.1.36), (1.1.39) соответственно, которые требуются задания дисперсии σ^2 .

Если дисперсия σ^2 неизвестна, то в качестве оценки \hat{D}_H для D_H можно принять величины:

- для одномерного случая

$$\hat{D}_H = \frac{1}{2 \cdot L} \sum_{l=-L}^L \left| \tilde{F}_p \left(\frac{N}{2} + l \right) \right|^2; \quad (1.4.32)$$

- для двумерного случая

$$\hat{D}_H = \frac{1}{(2L_1 + 1)(2L_2 + 1) - 1} \sum_{l_x=-L_1}^{L_1} \sum_{l_y=-L_2}^{L_2} \left| \tilde{F}_p \left(\frac{N_1}{2} + l_x, \frac{N_2}{2} + l_y \right) \right|^2. \quad (1.4.33)$$

Напомним (см. п. 1.3.4), что эти оценки основаны на предположении что в окрестности точки $\frac{N}{2}$ (или $\left(\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2} \right)$) коэффициенты ДПФ $\tilde{F}_p(l)$ (или $\tilde{F}_p(l_x, l_y)$) обусловлены шумом измерения. Выбор величин L, L_1, L_2 обсуждался в п. 1.3.4 и здесь ограничимся только ориентировочными рекомендациями:

$$L = (0.2 \div 0.3) \cdot N;$$

$$L_1 = (0.2 \div 0.3) \cdot N_1; \quad L_2 = (0.2 \div 0.3) \cdot N_2.$$

Второй вопрос связан с заданием стартового сигнала или изображения $\hat{f}_p^{(0)}$. В качестве такого сигнала может быть принят результат фильтрации каким-либо фильтром, например, глобальным фильтром с параметром α_w , который имеет сходимость (1.4.25) (или (1.4.29)).

Второй вариант задания рекомендует в качестве $\hat{f}^{(0)}$ принять сами исходные сигналы или изображения. Тогда

$$\hat{F}_p^{(0)}(l) = \tilde{F}_p(l), \quad 0 \leq l \leq N-1$$

или

$$\hat{F}_p^{(0)}(l_x, l_y) = \tilde{F}_p(l_x, l_y), \quad 0 \leq l_x \leq N_1 - 1; \quad 0 \leq l_y \leq N_2 - 1.$$

При таком задании предельная точка итерационной процедуры определяется более простыми (по сравнению с (1.4.19), (1.4.21)) выражениями:

$$\hat{S}^*(l) = \begin{cases} \hat{S}_1^*(l), & \text{если } \tilde{S}(l) \leq 1/4; \\ \infty, & \text{если } \tilde{S}(l) > 1/4 \end{cases}$$

или

$$\hat{S}^*(l_x, l_y) = \begin{cases} \hat{S}_1^*(l_x, l_y), & \text{если } \tilde{S}(l_x, l_y) \leq 1/4; \\ \infty, & \text{если } \tilde{S}(l_x, l_y) > 1/4. \end{cases}$$

1.4.3. Исследование локальных алгоритмов Фурье-фильтрации

Для иллюстрации эффективности предложенного локального алгоритма Фурье-фильтрации приведем результаты некоторых численных исследований. В этих исследованиях в качестве точного изображения бралось «гладкое» изображение размером 350×450 пикселей, изолинии которого показаны на рис. 1.13. Зашумленное изображение (представленное матрицей \tilde{F}) формировалось добавлением к точному изображению случайных некоррелированных величин с нулевым средним и дисперсией σ^2 , которая определялась по заданному относительному уров-

ню шума $\delta_\eta = \|\tilde{F} - F\| / \|F\|$; $\sigma^2 = \left(\frac{\delta_\eta \cdot \max |F|}{2} \right)^2$; F – матрица, составленная из значений точного изображения; $\|F\|$ – евклидова норма матрицы F .

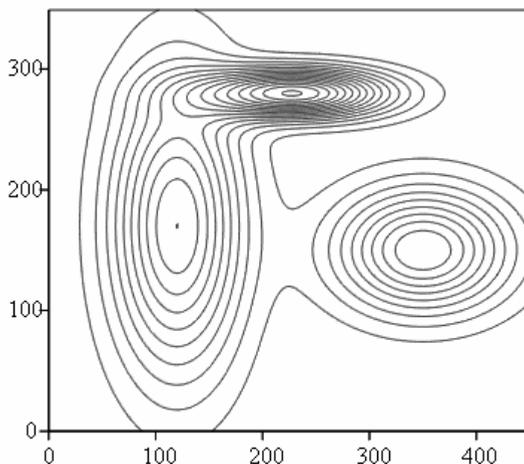


Рис. 1.13. Изолинии «точного» изображения

В первом эксперименте исследовались СКО двух фильтров:

- локального оптимального фильтра с $S_{opt}(l_1, l_2)$ (см. (1.4.9));
- глобального оптимального фильтра с фильтрующим множителем

$$W_{\alpha_{opt}}(l_1, l_2) = \frac{1}{1 + \alpha_{opt} Q_p(l_1, l_2)},$$

где α_{opt} – оптимальное значение параметра сглаживания, доставляющее минимум СКО и вычисленное по заданному точному изображению, $Q_p(l_1, l_2)$ соответствовала функции (1.2.25).

На рис. 1.14 приведено отношение $E = \frac{\|\hat{F}_{\alpha_{opt}} - F\|^2}{\|\hat{F}_{S_{opt}} - F\|^2}$ средне-

квадратических ошибок этих двух алгоритмов при разных уровнях шума, которое можно интерпретировать как коэффициент эффективности локального оптимального алгоритма. Чем больше значение E , тем меньше ошибку имеет локальный оптимальный алгоритм фильтрации по сравнению с глобальным оптимальным фильтром. Видно, что локальный алгоритм существенно точнее, особенно при малом уровне шума ($\delta_\eta \leq 0.05$).

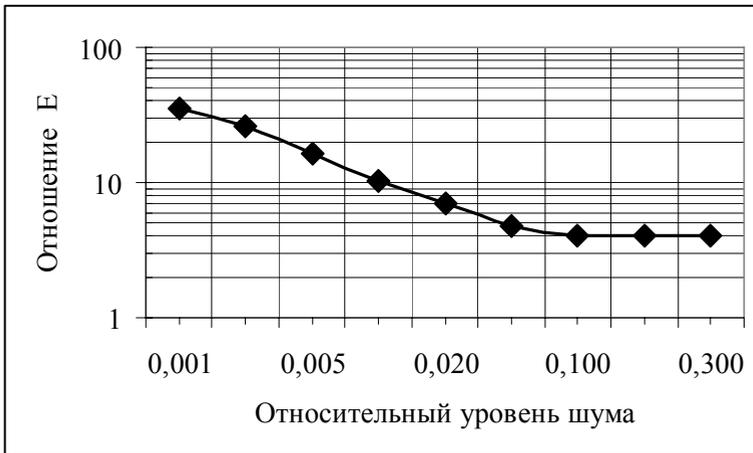


Рис. 1.14. График отношения E

Заметим, что оба сравниваемых фильтра на практике нереализуемы, так как требуют задания значений точного изображения: первый алгоритм – для вычисления оптимального отношения «шум/сигнал», а второй – для вычисления оптимального значения параметра сглаживания. Поэтому во втором эксперименте сравнивалась СКО локального оптимального алгоритмов фильтрации и квазиоптимального алгоритма фильтрации (1.4.22) с апостериорным уточнением «шум/сигнал».

Для этого вычислялась величина
$$P = \frac{\|\hat{F}^* - F\|^2}{\|\hat{F}_{\text{Сонн}} - F\|^2},$$

которую можно интерпретировать как величину «проигрыша» по точности квазиоптимального алгоритма фильтрации по сравнению с локальным оптимальным алгоритмом фильтрации.

На рис. 1.15 приведен график отношения P при разных относительных уровнях шума. Видно, что при относительном уровне шума больше 0.15 наблюдается значительное (в два и более раза) увеличение СКО квазиоптимального алгоритма фильтрации, хотя эта ошибка меньше ошибки глобального оптимального алгоритма.

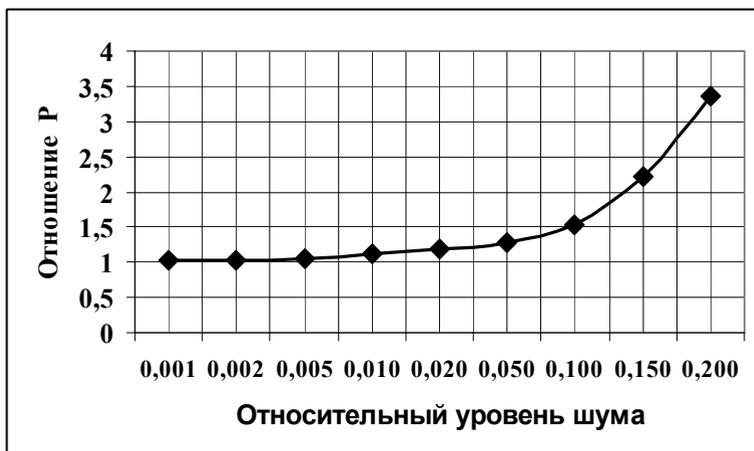


Рис. 1.15. График отношения P

Заметим, что аналогичные результаты получены и при обработке других изображений. Поэтому квазиоптимальный алгоритм можно рекомендовать для эффективной фильтрации изображений при относительном уровне шума, не превышающем значений 0.10–0.15.

Предложенный квазиоптимальный локальный алгоритм Фурье-фильтрации *не требует задания априорной информации о численных значениях спектров фильтруемого изображения и шума*. Единственным априорным предположением является условие, что информативные составляющие изображения сосредоточены на низких частотах, а *высокочастотные составляющие обусловлены только шумовой составляющей фильтруемого изображения*.

Обобщая содержание этой главы, можно сделать следующие выводы:

- *Построенные алгоритмы Фурье-фильтрации позволяют эффективно фильтровать однородный шум при предположении, что информативные составляющие изображения сосредоточены на низких частотах, а высокочастотные составляющие обрабатываемого сигнала обусловлены только шумовой составляющей фильтруемого сигнала или изображения.*

- *Предложенный алгоритм выбора параметра сглаживания с приемлемой точностью оценивает оптимальный параметр сглаживания в глобальных (зависящих от одного параметра) алгоритмах Фурье-фильтрации сигналов и изображений.*

- *Построенный локальный квазиоптимальный алгоритм фильтрации имеет меньшую среднеквадратическую ошибку фильтрации по сравнению с глобальными алгоритмами и не требует априорной информации о коэффициентах ДПФ «точного» сигнала, которая необходима для построения оптимального («винеровского») алгоритма фильтрации.*

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

В этой главе будут рассмотрены непрерывное и дискретное вейвлет-преобразования, многомасштабное преобразование сигналов и изображений, а также реализация этих преобразований в пакете Mathcad.

2.1. Непрерывное вейвлет-преобразование

Определены основные понятия вейвлет-функций, а также рассмотрено непрерывное вейвлет-преобразование сигналов.

2.1.1. Недостатки Фурье-преобразования

Интегральное преобразование Фурье (непрерывное преобразование Фурье – НПФ) и ряды Фурье, рассмотренные в п. 1.1, являются основой гармонического анализа.

Если функция $f(x)$ является периодической и задана в равноотстоящих узлах x_j , то для анализа таких дискретных периодических последовательностей используется дискретное преобразование Фурье (см. п. 1.1.2), на базе которого были построены алгоритмы фильтрации, изложенные в предыдущей главе.

С позиции анализа произвольных функций в частотной области и точного восстановления этих функций следует отметить недостатки рядов Фурье, которые привели к появлению оконного преобразования Фурье и стимулировали развитие вейвлет-преобразований.

Основные из них:

- ограниченное применение при спектральном анализе нестационарных сигналов и невозможность анализа их особенностей (разрывов, ступенек, пиков и т.д.), так как в частотной области эти особенности «размазываются» по всему частотному диапазону спектра;

- синусоидальные волны $\exp(ix)$ не способны отобразить сигналы с «бесконечной» крутизной (прямоугольные импульсы), так как для этого требуется бесконечно большое число членов ряда (1.1.10). При ограничении числа членов ряда в окрестности скачков и разрывов возникают гармонические колебания (явление Гиббса);

- преобразование Фурье не дает представление о локальных свойствах сигнала при быстрых изменениях его спектра во времени, и оно не может анализировать частотные характеристики сигнала в произвольные моменты времени.

2.1.2. Оконное преобразование Фурье

Частичным выходом из этой ситуации является оконное преобразование Фурье с движущейся по сигналу оконной функцией, имеющей компактный носитель. Временной интервал сигнала при большой его длительности разделяется на подинтервалы, и преобразование Фурье выполняется последовательно для каждого подинтервала в отдельности. Тем самым осуществляется переход к частотно-временному (частотно-координатному) представлению сигналов, при этом в пределах каждого подинтервала сигнал «считается» стационарным. Результатом оконного преобразования является семейство спектров, которым отображается изменение спектра сигнала по интервалам сдвига окна преобразования. Если на каком-то из подинтервалов присутствуют частотные составляющие анализируемого сигнала, то они будут присутствовать в вычисленном спектре. Это в какой-то мере позволяет выделять на координатной оси и анализировать особенности нестационарных сигналов. Размер носителя оконной функции $w(x)$ обычно устанавливается соизмеримым с интервалом стационарности сигнала. По существу, таким преобразованием один нелокализованный базис разбивается на определенное количество базисов, локализованных в пределах функции $w(x)$, что позволяет представлять результат преобразования в виде функции двух переменных – частоты и времен-

ного положения окна. При этом размер стационарности сигнала необходимо знать априори.

Оконное преобразование выполняется в соответствии с выражением (сравните с выражением (1.1.3)):

$$F(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x-b)e^{-i\omega x} dx. \quad (2.1.1)$$

Функция $w(x-b)$ представляет собой функцию (в общем случае комплексную) окна сдвига преобразования по координате x , где параметром b задаются фиксированные значения сдвига. При сдвиге окон с равномерным шагом значения b_k определяются выражением $b_k = k\Delta_b$. В качестве окна преобразования используются как простейшее прямоугольное окно ($w(x)=1$ в пределах окна и 0 за его границами), так и специальные весовые окна (Бартлетта, Гаусса, Кайзера и пр.), обеспечивающие малые искажения спектра за счет граничных условий вырезки оконных отрезков сигналов и нейтрализующие явление Гиббса. При этом для каждого положения окна на временной оси сигнала вычисляется свой комплексный спектр. Эффективная ширина оконной функции сохраняется постоянной по всему интервалу сигнала.

Пример 2.1.1. На рис. 2.1 приведена дискретная функция f_j , $0 \leq j \leq 399$, состоящая из трех сигналов: постоянный сигнал с нулевой амплитудой; синусоидальное колебание с частотой $\omega_1 = \frac{2\pi}{50}$; синусоидальное колебание с частотой $\omega_2 = \frac{2\pi}{10}$. На рис. 2.2 приведены модули коэффициентов $F_p(l)$ дискретного преобразования Фурье этой функции. По этому дискретному спектру невозможно определить положение составляющих сигнала на временной оси. На рис. 2.3 приведен текст подпрограммы-функции, реализующий оконное преобразование Фурье. На рис. 2.4 показаны графики модулей коэффициентов ДПФ, вычисленные по четырем временным интервалам (нумерация графиков соответствует порядку расположения отдельных со-

ставляющих сигнала). Графики модулей коэффициентов смещены относительно друг друга. Эти графики показывают наличие в сигнале гармонических колебаний на втором (частота ω_1) и четвертом (частота ω_2) интервалах. ☺

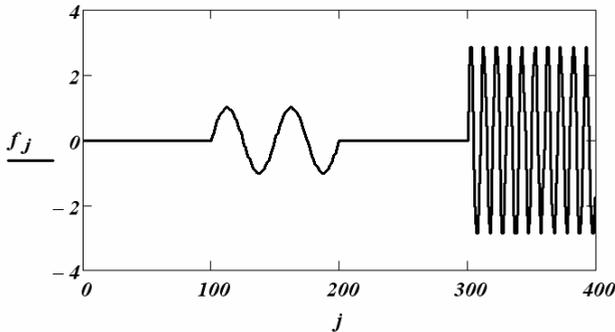


Рис. 2.1. Составной гармонический сигнал

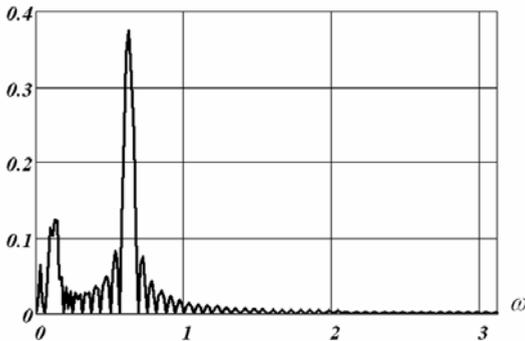


Рис. 2.2. Модули коэффициентов ДПФ составного сигнала

Координатная разрешающая способность оконного преобразования определяется шириной оконной функции и обратно пропорциональна частотной разрешающей способности. При ширине оконной функции, равной b , частотная разрешающая способность определяется значением $\Delta_\omega = 2\pi/b$. При требуемой величине частотного разрешения Δ_ω соответственно ширина

оконной функции $b = 2\pi/\Delta_\omega$. Для оконного преобразования Фурье эти ограничения являются принципиальными. Так, при размере массива данных $N = 400$ и ширине оконной функции $\Delta_b = 100$ частотная разрешающая способность результатов преобразования уменьшается в $N/\Delta_b = 4$ раза по сравнению с исходными данными.

```

DTFwin(f, N, Δb, w) :=
    k ← 0
    for b ∈ 0, Δb .. N - w
        for n ∈ b .. b + w
            yn-b ← fn
            Fw ← CFFT(y)
            for n ∈ 0 .. w
                Fn,k ← Fwn
            k ← k + 1
    F

```

Рис. 2.3. Подпрограмма-функция оконного преобразования Фурье

Заметим, что базисные функции преобразования Фурье ($\exp(i\omega x)$) локализованы в частотной области (при $T \rightarrow \infty$ имеем δ – функции в частотной области) и совсем не локализованы во временной (так как определены в интервале от $-\infty$ до ∞). Как видно из оконного преобразования Фурье для детального спектрального (а точнее спектрально-временного) анализа сигнала необходимо иметь базисные функции, которые имели бы локализацию как в частотной, так и во временной области. Такими свойствами обладают *вейвлет-функции*.

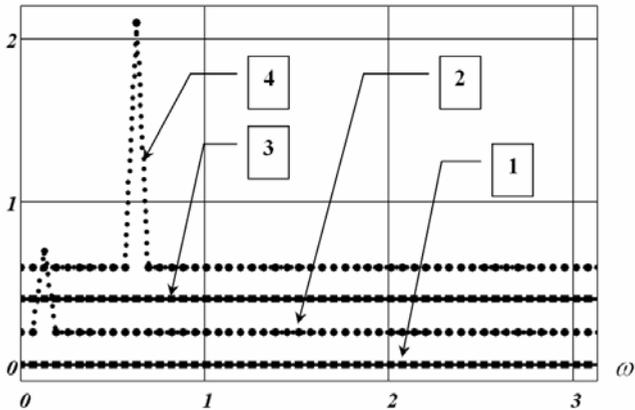


Рис. 2.4. Результаты оконного преобразования Фурье

2.1.3. Прямое непрерывное вейвлет-преобразование и вейвлет-анализ сигналов

Термин «вейвлет» (*wavelet*) в переводе с английского означает «маленькая (короткая) волна». Вейвлеты – это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, *которые локальны во времени и по частоте*, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени. Вейвлет-преобразования рассматривают анализируемые временные функции в терминах колебаний, локализованных по времени и частоте. Как правило, вейвлет-преобразования подразделяют на дискретное (DWT) и непрерывное (CWT).

Допустим, что функция $f(x)$ определена на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ и принадлежит пространству $L_2(R)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Непрерывным вейвлет-преобразованием функции $f(x) \in L_2(R)$ называют функцию двух переменных:

$$C(a, b) = \left\langle f(x) \psi(a, b, x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(a, b, x) dx, \quad (2.1.2)$$

$$a, b \in R, \quad a \neq 0,$$

где вейвлеты $\psi(a, b, x) \equiv \psi_{ab}(x)$ – масштабированные и сдвинутые копии порождающего вейвлета $\psi(x) \in L_2(R)$, совокупность которых создает новый базис пространства $L_2(R)$. Вейвлет-функция $\psi(x)$ имеет нулевое значение интеграла, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \text{ и Фурье-образ } \Psi(\omega).$$

Порождающими функциями могут быть самые различные функции с компактным носителем – ограниченные по времени и местоположению на временной оси и имеющие спектральный образ, в определенной степени локализованный на частотной оси. Как и для преобразования Фурье, базис пространства $L_2(R)$ целесообразно конструировать из одной порождающей функции, норма которой должна быть равна 1. Для перекрытия локальной функцией вейвлета всей временной оси пространства используется операция сдвига (смещения по временной оси): $\psi(b, x) \equiv \psi(x - b)$, где значение b для НВП также является величиной непрерывной. Для перекрытия всего частотного диапазона пространства $L_2(R)$ используется операция временного масштабирования вейвлета с непрерывным изменением независимой переменной: $\psi(a, x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x}{a}\right)$. Если временной образ вейвлета будет расширяться (увеличением значения параметра « a »), то его «средняя частота» будет понижаться, а частотный образ (частотная локализация) перемещаться на более низкие частоты. Таким образом, путем сдвига по независимой переменной $(x - b)$ вейвлет имеет возможность перемещаться по всей числовой оси произвольного сигнала, а путем изменения масштабной переменной « a » (в фиксированной точке $(x - b)$ вре-

менной оси) «просматривать» частотный спектр сигнала по определенному интервалу окрестностей этой точки.

С использованием этих операций вейвлетный базис функционального пространства образуется путем масштабных преобразований и сдвигов порождающего вейвлета $\psi(x) \in L_2(R)$:

$$\psi(a, b, x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right); \quad a, b \in R; \quad a \neq 0. \quad (2.1.3)$$

Нетрудно убедиться, что нормы вейвлетов $\psi(a, b, x)$ равны норме $\psi(x)$, что обеспечивает нормировочный множитель $|a|^{-1/2}$. При нормировке к 1 порождающего вейвлета $\psi(x)$ все семейство вейвлетов также будет нормированным. Если при этом выполняется требование ортогональности функций, то функции $\psi(a, b, x)$ будут представлять собой ортонормированный базис пространства $L_2(R)$.

В табл. 2.1 приведены выражения, определяющие часто используемые вейвлеты.

Пример 2.1.2. На рис. 2.5 показан фрагмент документа Mathcad, в котором определен МНАТ-вейвлет и исследуется его поведение при разных значениях параметров масштаба a и параметре сдвига $b = 0$. Сплошная кривая (номер 1) соответствует $a = 1$, точечная кривая (номер 2) – $a = 2$. Видно, что малые значения масштаба a «сжимают» вейвлет-функцию (частотный диапазон ее Фурье-образа расширяется (см. рис. 2.5 б)), большие значения параметра – «расширяют» вейвлет-функцию (частотный диапазон сжимается). ●

Таблица 2.1

Название вейвлета	Определение вейвлета
НААР-вейвлет	$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \\ 0, & x < 0, x \geq 1 \end{cases}$
ФНАТ-вейвлет («французская шляпа» – French hat)	$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{3}; \\ -\frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq 1; \\ 0, & x > 1 \end{cases}$
МНАТ-вейвлет («мексиканская шляпа» – Mexican hat)	$\psi(x) = (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

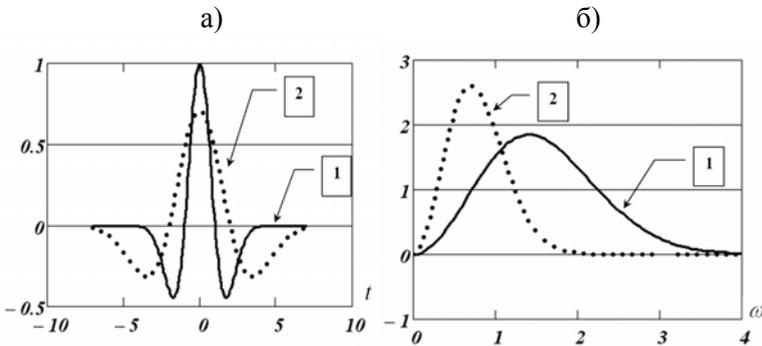


Рис. 2.5. Вейвлеты и их Фурье-образы

Вернемся к непрерывному вейвлет-преобразованию (2.1.2). Функция $S(a, b)$ несет информацию о частотно-временной структуре функции $f(x)$. Действительно, задавая малые значения масштаба a , получаем информацию об особенностях сигнала $f(x)$, которые имеют малую протяженность, большие значения a позволяют выявить «глобальную» информацию о сигнале (которая распределена по всему сигналу). Эта законо-

мерность хорошо иллюстрируется рис. 2.6. Данную закономерность можно назвать *отношением неопределенности* для вейвлет-функций, а именно: хорошее разрешение по частоте (маленькая ширина Фурье-образа вейвлет-функции), обуславливает плохое разрешение по времени (большая ширина вейвлет-функции) и наоборот.

Заметим, что для детализации самых высоких частот сигнала минимальный размер окна вейвлета не должен превышать периода самой высокочастотной гармоники. Если в сигнале присутствуют спектральные компоненты, соответствующие текущему значению a , то интеграл произведения вейвлета с сигналом в интервале, где эта спектральная компонента присутствует, дает относительно большое значение. В противном случае – произведение мало или равно нулю. С увеличением масштаба (ширины окна) вейвлета преобразование выделяет все более низкие частоты.

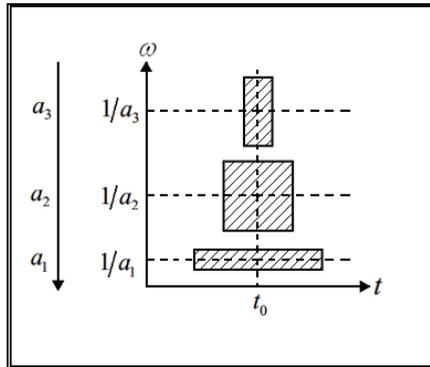


Рис. 2.6. Временное и частотное разрешение вейвлет-функций

Чисто гармоническим сигналам (функции $\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$) соответствуют яркие горизонтальные полосы, где модуль коэффициента $C(a, b)$ велик. Локальные особенности (на-

рушение гладкости сигнала) определяют вертикальные полосы, при этом пикам соответствует сгущение светлых областей, впадинам – сгущение темных областей. Чем резче выражена особенность сигнала, тем сильнее она отражается в функции $C(a, b)$ и тем выше значения этой функции. Вейвлет-спектр $C(a, b)$ отчетливо выделяет тонкие особенности сигнала, такие как небольшие разрывы, изменение знаков первой и второй производных, изменение частоты составляющих сигнала во времени и т.д.

Проведенные рассуждения позволяют говорить о новом способе изучения сигналов, а именно – вейвлет-анализе, основанном на изучении особенностей вейвлет-спектра $C(a, b)$.

При практическом использовании непрерывного вейвлет-преобразования необходимо учитывать:

- для вейвлетов с компактным носителем нет необходимости вычислять интегралы с бесконечными пределами, так как диапазон изменения сдвига b ограничен;
- для графического анализа вейвлет-спектра $C(a, b)$ или его табличного представления значения параметров преобразования a , b задаются дискретно (чаще всего по закону арифметической прогрессии).

Каждой вейвлет $\psi(x)$ имеет определенную «ширину» своего временного окна, которому соответствует определенная «средняя» частота Фурье-образа (или спектра) вейвлета, обратная его масштабному коэффициенту a . Так, малые значения параметра a , характеризующие быстрые составляющие в сигналах, соответствуют высоким частотам, а большие значения (соответствующие медленным изменениям сигнала) – низким частотам. Таким образом, за счет изменения масштаба вейвлеты способны выявлять различия на разных частотах, а за счет сдвига (параметр b) – проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем исследуемом временном интервале. В какой-то мере можно говорить о том, что вейвлет-преобразование адаптировано для выявления и низкочастотных, и высокочастотных характеристик сигналов (подробнее см. [1, 21, 23]).

Вывод: вейвлет-анализ сигналов, т.е. изучение функции $C(a, b)$, открывает принципиально новые возможности (по сравнению с Фурье-анализом) в исследовании тонких особенностей сигнала.

2.1.4. Обратное непрерывное вейвлет-преобразование

Так как форма базисных функций $\psi(a, b, x)$ зафиксирована, то вся информация о сигнале переносится на значения функции $C(a, b)$. Точность обратного интегрального вейвлет-преобразования зависит от выбора базисного вейвлета. Теоретически строго вейвлет может считаться базисной функцией $L_2(R)$ только в случае его ортонормированности. Для ортонормированных вейвлетов обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса, что и прямое:

$$f(x) = (1/C_\psi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1/a^2) C(a, b) \psi(a, b, x) da db, \quad (2.1.4)$$

где C_ψ – нормализующий коэффициент, определяемый выражением:

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (|\Psi(\omega)|^2 / \omega) d\omega < \infty, \quad (2.1.5)$$

где $\Psi(\omega)$ – Фурье-образ $\psi(t)$.

Условие конечности C_ψ ограничивает класс функций, которые можно использовать в качестве вейвлетов. В частности, при $\omega = 0$ для обеспечения сходимости интеграла (2.1.4) значение $\Psi(\omega)$ должно быть равно нулю. Это обеспечивает условие компактности Фурье-образа вейвлета в спектральной области с локализацией вокруг некоторой частоты ω_0 (средней частоте вейвлетной функции). Следовательно, функция $\psi(x)$ должна

иметь нулевое среднее значение по области его определения (интеграл функции по аргументу должен быть нулевым):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (2.1.6)$$

Однако это означает, что не для всех сигналов возможна их точная реконструкция вейвлетом $\psi(x)$, так как при нулевом первом моменте вейвлета коэффициент передачи постоянной составляющей сигнала в преобразовании (2.1.4) равен нулю. Условия точной реконструкции сигналов будут рассмотрены при описании кратномасштабного анализа.

Возникает вопрос: можно ли вейвлет-преобразование использовать для фильтрации зашумленных сигналов? В принципе ответ на этот вопрос положителен, но на практике возникают определенные трудности. Действительно, шум измерения имеет широкий спектр и определяет значения $C(a, b)$ при малых величинах параметра a . Поэтому, умножая $C(a, b)$ на некоторый фильтрующий множитель $W(a)$, который при малых a меньше 1, а затем, взяв обратное вейвлет-преобразование (2.1.4), можно уменьшить уровень шума. Однако возникают трудности:

- определение оптимального фильтрующего множителя, который бы минимизировал ошибку фильтрации;
- построение эффективной вычислительной процедуры для преобразований (2.1.2), (2.1.4), так как вычисление интегралов требует существенных затрат машинного времени.

Поэтому в настоящее время непрерывное преобразование (2.1.4) используется для анализа сигналов, а фильтрацию зашумленных сигналов осуществляют на основе дискретного вейвлет-преобразования, которое рассматривается далее.

2.1.5. Диадное вейвлет-преобразование непрерывных сигналов

Ранее отмечалось, что непрерывное вейвлет-преобразование требует больших вычислительных затрат и вычисляет избы-

точное число коэффициентов, которое не требуется для реконструкции (восстановления) сигнала.

Для преодоления этих недостатков следует задавать дискретные значения параметров a , b следующими соотношениями:

$$a = 2^j; b = k2^j, \quad (2.1.7)$$

где целые переменные j , k принимают значения из множества целых чисел $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, т.е. $j, k \in Z$. Параметр j в дальнейшем будем называть параметром масштаба, а параметр k – параметром сдвига. Подобная дискретизация a , b является наиболее распространенной, сетка дискретизации называется *диадистической*, а само вейвлет-преобразование часто называют *диадным*.

Выделение диадного преобразования в отдельный класс оправдано тем, что и непрерывное вейвлет-преобразование на практике вычисляется также для дискретных значений параметров a , b . Характер их дискретизации чаще всего определяется арифметической прогрессии с «перекрытием» носителей вейвлет-функций. Диадное вейвлет-преобразование исключает подобное «перекрытие».

Базисом пространства $L_2(R)$ являются функции:

$$\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), \quad j, k \in Z. \quad (2.1.8)$$

Тогда *прямое дискретное вейвлет-преобразование* сводится к вычислению коэффициентов:

$$d_{j,k} = C(j, k) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}x - k) f(x) dx, \quad (2.1.9)$$

которые будем называть *детализирующими*. *Обратное дискретное вейвлет-преобразование* для непрерывных сигналов задается выражением

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k). \quad (2.1.10)$$

В пакете Mathcad нормировка базисных функций выполнена таким образом, что $C_\psi = 1$.

Преобразования (2.1.9), (2.1.10) означают, что любая функция $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ может быть представлена рядом:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (2.1.11)$$

при условии, что множество функций $\{\psi_{j,k}\}$ образуют ортонормированную систему, т.е.

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j', k = k'; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Запись $\langle f, \psi \rangle$ означает скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$, т.е.

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(x) dx. \quad (2.1.13)$$

Доказано, что для ортогональных вейвлетов возможно точное восстановление сигнала после прямого и обратного дискретного вейвлет-преобразования только с использованием дополнительной аппроксимации с помощью функции $\varphi(x)$, называемой *отцовским вейвлетом* [1, 21]. При этом сам вейвлет $\psi(x)$ называют *материнским*. Далее рассматривается представление любой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ в базисе, образованном из функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ с помощью операций сдвига и масштабирования. Такое представление получило название *кратномасштабное*.

2.2. Масштабирующие функций и вейвлеты

Рассмотрены масштабирующие функции и вейвлеты, которые являются ортогональными базисами в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

С помощью этих функций реализуется плодотворная идея суммирования «грубой» аппроксимации сигнала с детализирующими локальными особенностями сигнала. Эта идея оказалась особенно эффективной, когда сигнал имеет высокочастотные компоненты короткой длительности и протяженные низкочастотные компоненты. Эффективность определяется также возможностью каскадного вычисления коэффициентов представления, алгоритм которого подобен быстрому преобразованию Фурье.

2.2.1. Масштабирующие подпространства и масштабирующая функция

Возьмем некоторую функцию $\varphi(x)$, целочисленные сдвиги которой

$$\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n); n \in Z \quad (2.2.1)$$

образуют ортонормированный базис подпространства V_0 , которое порождено линейными комбинациями функций $\varphi_{0,n}$. Напомним, что система функций $\{\varphi_{0,n}(x)\}$, $n \in Z$ называется ортонормированной, если

$$\langle \varphi_{0,n}, \varphi_{0,m} \rangle = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Далее рассмотрим систему функций

$$\varphi_{-1,n} = \sqrt{2} \cdot \varphi(2x - n), n \in Z,$$

которая получена из функции $\varphi(2x)$ сдвигами на $n/2$. Подпространство V_{-1} порождается линейными комбинациями $\varphi_{-1,n}(x)$ и система функций $\{\varphi_{-1,n}(x)\}$ образует ортонормированный базис

пространства V_{-1} . Продолжая процедуру масштабирования и сдвига, для любого $j \in Z$ образуем систему функций

$$\varphi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - n), \quad (2.2.3)$$

при этом j принимает как отрицательные, так и положительные значения. Пространства, порожденные функциями $\{\varphi_{j,n}(x)\}$, обозначим как V_j . Имеют место следующие вложения:

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \subset V_{-j} \subset \dots \quad (2.2.4)$$

Очевидно, что

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}; \quad \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L_2(R), \quad (2.2.5)$$

где горизонтальная черта сверху означает замыкание пространства.

Таким образом, построена последовательность масштабирующих пространств V_j , базисами которых являются системы функций $\{\varphi_{j,n}(x), n \in Z\}$.

Пример 2.2.1. Приняв в качестве функции $\varphi(x)$ прямоугольную функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{для других } x, \end{cases}$$

построить ортонормированный базис в $L_2(R)$ (называемый базисом Хаара).

Решение. образуем систему функций $\{\varphi_{0,n}(x)\}$, которая является ортонормированным базисом в пространстве V_0 :

$$\langle \varphi_{0,n}, \varphi_{0,m} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{0,n}(x) \varphi_{0,m}(x) dx = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Каждая функция $\{\varphi_{0,n}(x)\}$ отличается от нуля на отрезке $[n, n+1]$, который имеет единичную длину. Такой отрезок называется носителем функции $\{\varphi_{0,n}(x)\}$ и обозначается

$$\text{supp}(\varphi_{0,n}(x)) = [n, n+1].$$

Далее образуем систему функций $\varphi_{-1,n}(x)$ (см. (2.2.3)) при $j = -1$. Нетрудно видеть, что $V_0 \subset V_{-1}$. Действительно

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,0}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,1}(x) = \sum_n h_n \varphi_{-1,n}(x),$$

где $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, любой элемент пространства V_0 выражается в виде линейной комбинации элементов V_{-1} . Носитель функции $\varphi_{-1,n}(x)$ стал в два раза меньше и определяется как:

$$\text{supp}(\varphi_{-1,n}(x)) = \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2} \right] = [2^{-1}n, 2^{-1}(n+1)].$$

По аналогии для любого $j \in Z$ имеем систему функций (2.2.3), носитель которых $\text{supp}(\varphi_{j,n}(x)) = [2^j n, 2^j(n+1)]$ и которая является базисом в пространстве V_j .

Таким образом, построены системы функций $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ и соответствующие пространства V_j , удовлетворяющие (2.2.5), что говорит о том, что системы $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(R)$.

На рис. 2.7 изображены графики функций: $\varphi(x)$ (сплошная линия), $\varphi_{-1,3}(x) = \sqrt{2} \cdot \varphi(2x - 3)$ (точечная линия), $\varphi_{-2,11}(x) = 2 \cdot \varphi(4x - 11)$ (штриховая линия). Хорошо видно изменение ширины этих функций. Чем меньше номер j (параметр масштаба), тем более тонкие структуры сигнала можно представить в базисе $\{\varphi_{j,n}(x)\}$.

Приведенный пример показывает, что, задав соответствующим образом функцию $\varphi(x)$, можно построить масштабирующие пространства $\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$. Далеко не каждая функция $\varphi(x)$ позволяет это сделать.

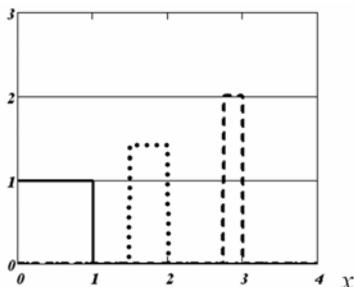


Рис. 2.7. Графики базисных функций Хаара

Функция $\varphi(x) \in L_2(R)$ называется *масштабирующей* (т.е. порождает базис масштабирующих пространств), если она может быть представлена в виде:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - n), \quad (2.2.6)$$

где числа h_n удовлетворяют условию:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n| < \infty. \quad (2.2.7)$$

Возвращаясь к примеру 2.2.1, видим, что прямоугольная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет (2.2.6), (2.2.7) и является масштабирующей.

Подробно построение масштабирующих функций рассматривается в ряде публикаций (например [1, 21]).

Дадим еще одно определение, полезное при построении алгоритмов фильтрации сигналов и изображений.

Ортогональным кратномасштабным разложением пространства $L_2(R)$ называется последовательность замкнутых вложенных друг в друга подпространств:

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots,$$

обладающая свойствами (2.2.5), и сдвигами масштабирующей функции $\varphi(x) \in V_0$ образуют ортонормированный базис $\{\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x-n), n \in Z\}$ подпространства V_0 .

Из примера 2.2.1 видно, что функция $\varphi(x)$ образует ортонормированный базис подпространства V_0 , а порожденные функциями $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ подпространства V_j являются ортогональным кратномасштабным разложением пространства $L_2(R)$.

Значение коэффициентов h_n в представлении (2.2.6) для масштабирующей функции, порождающей ортогональное кратномасштабное разложение пространства $L_2(R)$, определяется из условия

$$h_n = \sqrt{2} \int \varphi(x)\varphi(2x-n)dt. \quad (2.2.8)$$

Дополнительно условие нормировки:

$$\int \varphi(x)dx = 1 \quad (2.2.9)$$

обуславливает требование

$$\sum_n h_n^2 = 1. \quad (2.2.10)$$

В общем случае носитель функции $\varphi(x)$ может иметь произвольный размер с числом отсчетов N . Тогда масштабирующее уравнение (2.2.6) принимает вид:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \varphi(2x - n) \quad (2.2.11)$$

Забегая вперед, заметим, что функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую (2.2.11), часто называют (и это будет иметь место в дальнейшем) *отцовским вейвлетом*.

2.2.2. Операторы проектирования и подпространства вейвлетов

Для каждого $j \in Z$ рассмотрим оператор ортогонального проектирования пространства $L_2(R)$ на подпространство V_j (будем обозначать $P_j(f) : L_2(R) \rightarrow V_j$), который определим выражением:

$$P_j(f) = \sum_{n \in Z} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \cdot \varphi_{j,n} \quad (2.2.12)$$

Как следует из (2.2.11) и (2.2.12) проекции $P_j(f)$ являются приближениями функции $f(x)$ и точность этих приближений возрастает по мере уменьшения масштаба j .

Сравним два последовательных приближения. Для этого рассмотрим разность $P_{j-1}(f) - P_j(f)$, которая лежит в подпространстве V_{j-1} и ортогональна подпространству V_j , т.е. является ортогональным дополнением пространства V_j до пространства V_{j-1} . Таким образом, имеем ортогональное разложение

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.2.13)$$

которому можно дать следующую трактовку: более точное приближение $P_{j-1}(f)$ в пространстве V_{j-1} получается как сумма приближения $P_j(f)$ и дополнительного слагаемого $P_j^W(f)$, отражающего уточнение при переходе от $P_j(f)$ к $P_{j-1}(f)$.

Определим, какими функциями порождается пространство W_j . Поскольку все пространства V_j получены из V_0 изменением масштаба, то естественно сначала изучить пространство W_0 (ортогональное дополнение к V_0 в пространстве V_{-1}): $V_{-1} = V_0 + W_0$. Пусть функция $\psi(t) \in W_0$. Тогда она раскладывается по базису $\{\varphi_{-1,n}(x)\}$ пространства V_{-1} :

$$\psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi_{-1,n}(t). \quad (2.2.14)$$

Поскольку функция $\psi(t)$ ортогональна V_0 , то для любого n имеем $\langle \psi, \varphi_{0,n} \rangle = 0$. Так как пространство V_0 входит в V_{-1} , то $\varphi_{0,n}(x)$ также раскладывается по базису $\{\varphi_{-1,n}(x)\}$:

$$\varphi_{0,n}(x) = \sum h_k \varphi_{-1,k}(x).$$

Таким образом, приходим к условию ортогональности:

$$\langle \psi, \varphi_{0,n} \rangle = \left\langle \sum_n g_n \varphi_{-1,n}(x), \sum_k h_k \varphi_{-1,k} \right\rangle = 0, \quad (2.2.15)$$

из которого при известных h_k можно вычислить коэффициенты g_n , входящие в (2.2.14). Как правило, уравнение (2.2.15) имеет несколько решений.

Если последовательность

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$$

образует ортогональное кратномасштабное разложение пространства $L_2(R)$, то для каждого $j \in Z$ ортогональное дополнение W_j к подпространству V_j в подпространстве V_{j-1} называют *подпространством вейвлетов*, а его элементы – *вейвлетами*.

Подпространство вейвлетов обладает следующими свойствами:

- они образуют ортогональное разложение $L_2(R) = \overline{\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k}$;
- существует функция $\psi(x) \in W_0$, называемая материнским вейвлетом, множество ее сдвигов $\psi(x-n)$ образуют ортонормированный базис пространства W_0 , а функции

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - n), \quad n \in Z, \quad (2.2.16)$$

образуют ортонормированный базис подпространств W_j , $j \in Z$.

Пример 2.2.2. Для масштабирующей функции Хаара, определенной в примере 2.2.1, найти вейвлет $\psi(x)$.

Решение. В примере 2.2.1 показано, что $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,0}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,1}(x)$, что соответствует коэффициентам $h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из условия ортогональности (2.2.15) следует уравнение:

$$\langle \psi, \varphi_{0,n} \rangle = \left\langle \sum g_k \varphi_{-1,k}, \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,2n} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,2n+1} \right\rangle = 0.$$

Так как $\{\varphi_{-1,n}\}$ – ортонормированный базис, то получаем уравнение:

$$g_{2n} \frac{1}{\sqrt{2}} + g_{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \quad (2.2.17)$$

которое имеет множество решений. Возьмем простейшее решение:

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.2.18)$$

Этому решению соответствует функция:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{-1,1}(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1), \\ \psi(x) &= \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2); \\ -1, & x \in [1/2, 1); \\ 0 & x \notin [0, 1), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

которая называется вейвлетом Хаара. На рис 2.8 показан график вейвлета $\psi(x)$ (кривая 1), а также его масштабируемых сдвигов $\sqrt{2}\psi(2x-3)$ (кривая 2), $2\psi(4x-11)$ (кривая 3).

Функции $\psi_{0,n} = \psi(x-n)$ образуют ортонормированный базис пространства W_0 , а функции $\psi_{j,n} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x-n)$ образуют ортонормированный базис пространства W_j .

Заметим, что носитель функции $\psi_{j,n}(x)$ имеет ту же длину, что и функция $\varphi_{j,n}(x)$, т.е.

$$\text{supp}(\psi_{j,n}(x)) = [2^j n, 2^j (n+1)].$$

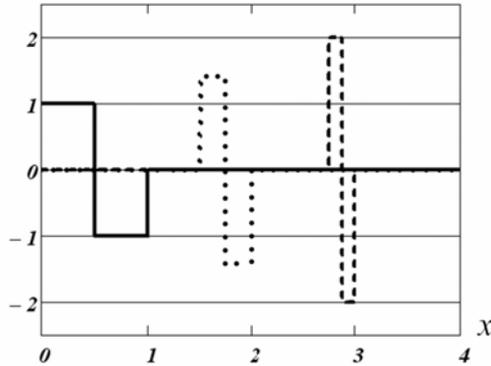


Рис. 2.8. Графики вейвлетов Хаара

На рис. 2.8 хорошо видно изменение ширины этих функций $\psi(x)$ (сплошная линия), $\psi_{-1,3}(x) = \sqrt{2} \cdot \psi(2x - 3)$ (точечная линия), $\psi_{-2,11}(x) = 2 \cdot \psi(4x - 11)$ (штриховая линия). Чем меньше номер j (параметр масштаба), тем более тонкие структуры сигнала можно представить в базисе $\{\psi_{j,n}(x)\}$.

В настоящее время разработаны около двух десятков различных вейвлетов, большая часть которых реализована в виде функций пакетов компьютерной математики.

Так, в пакете *Wavelet Toolbox 2.0/2.1* системы MatLab представлены полтора десятка базовых типов вейвлетов и множество вариантов для некоторых базовых вейвлетов [25]. В системе Mathcad пакет *Wavelet Extension* содержит около десятка базовых типов вейвлетов [22].

Очевидно, что каждый тип вейвлетов имеет определенные свойства, которые надо учитывать при подборе подходящего типа вейвлета для решение конкретных задач обработки сигналов и изображений. В книге [22, с. 155–158] приведены основные типы вейвлетов и их свойства. Критический анализ этих свойств позволил выбрать для дальнейшей работы ортогональные вейвлеты с компактным носителем, к которым относятся:

- *вейвлеты Добеши;*
- *симлет-вейвлеты – вейвлеты Добеши с наименьшей асимметрией и компактным носителем;*

- *вейвлеты Койфлета.*

Их основные свойства:

- функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют компактный носитель;
- возможны непрерывные и дискретные преобразования с применением быстрых преобразований;
- обеспечивается принципиальная возможность реконструкции (восстановления) сигналов и изображений.

К недостаткам можно отнести:

- недостаточную периодичность;
- отсутствие в той или иной степени симметрии.

Приведем некоторые свойства ортогональных вейвлетов. Ранее приводились уравнения для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k); \quad (2.2.20)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2x - k). \quad (2.2.21)$$

Из свойства ортогональности отцовского вейвлета $\varphi(x)$ следует уравнение:

$$\sum_k h_k h_{k+2m} = \delta_m, \quad (2.2.22)$$

а из условий нормировки $\int \varphi(x) dx = 1$ вытекает второе уравнение:

$$\sum h_k = \sqrt{2}. \quad (2.2.23)$$

Из ортогональности отцовских и материнских вейвлетов

$$\int \psi(x) \varphi(x - n) dx = 0 \quad (2.2.24)$$

следует уравнение:

$$\sum_k h_k g_{k+2m} = 0, \quad (2.2.25)$$

решением которого является значение коэффициентов g_k :

$$g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}, \quad (2.2.20)$$

где $2M$ – определяет число коэффициентов h_k .

Точность аппроксимации функции вейвлетами зависит от гладкости (регулярности) вейвлета, т.е. от дифференцируемости вейвлета. Вейвлеты с более высокой регулярностью обеспечивают более качественное восстановление сигнала. Для обеспечения заданной гладкости до степени $M-1$ вейвлеты должны быть ортогональны соответствующим полиномам, т.е.

$$\int \psi(x)x^m dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.2.27)$$

Из этого условия следует:

$$\sum_k k^m g_k = 0; \sum_k (-1)^k k^m h_k = 0, \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (2.2.28)$$

Уравнения (2.2.25), (2.2.26), (2.2.27), (2.2.28) используются для расчетов коэффициентов h_k, g_k при конструировании вейвлетов. Примеры такого конструирования можно увидеть в публикациях [22, 23, 25].

Замечание 2.2.1. Как уже отмечалось в системе компьютерной математики имеется пакет *Wavelet Extension*, включающий большой набор функций, осуществляющих вейвлет-преобразования с различными отцовскими и материнскими вейвлетами. Структура пакета и состав функций описаны в ряде книг и учебников (например [22]). Здесь будут рассмотрены только те функции пакета, которые связаны с ортогональными вейвлетами, имеющими компактные носители. ♦

2.2.3. Функции *Mathcad*, вычисляющие значения вейвлетов

Функции позволяют вычислить значения вейвлетов для заданного масштаба и сдвига. Эти функции полезны для визуализации вейвлетов.

Рассмотрим синтаксис следующих функций:

$$\text{wavelet}(x, j, k, m, s);$$

$$\text{father}(x, [j, k,]ss);$$

$$\text{mother}(x, [j, k,]ss).$$

Функция *wavelet* вычисляет значение в точке x отцовского вейвлета ($m = 0$) или материнского вейвлета ($m = 1$).

Функция *father* вычисляет значение в точке x отцовского вейвлета.

Функция *mother* вычисляет значение в точке x материнского вейвлета.

Формальные параметры этих функций:

- x – вещественная величина, в которой вычисляется значение вейвлета;

- j – целая величина, определяющая масштаб вейвлета;

- k – целая величина, определяющая сдвиг вейвлета;

- m – целая величина: $m=0$, вычисляется отцовский вейвлет $\varphi_{j,k}(x)$; $m=1$, вычисляется материнский вейвлет

$\psi_{j,k}(x)$;

- s – переменная, задающая семейство вейвлетов с использованием следующих обозначений:

$daublet(n)$ – n – коэффициентный вейвлет Добеши (n – четные числа от 2 до 20);

$coiflet(n)$ – n – коэффициентный вейвлет Койфлета ($n \in [6, 12, 18, 24, 30]$).

$symmlet(n)$ – n – коэффициентный вейвлет Добеши с наименьшей асимметрией и компактным носителем (n – четные числа от 4 до 20).

Например, $s := daulet(8)$.

- ss – строковая константа или переменная, которая может принимать следующие значения:

dn – вейвлет Добеши;

sn – вейвлет Добеши с наименьшей асимметрией (симлет-вейвлет);

cn (или $coif$) – вейвлет Койфлета.

Буква n обозначает число масштабных коэффициентов h_k соответствующего вейвлета.

Например, $ss := "coif12"$.

На рис. 2.9 показаны фрагменты документа Mathcad, в котором вычисляются с использованием функции *wavelet* значения вейвлетов Добеши с числом коэффициентов $m=4$: отцовских $\varphi(x)$, $\varphi(x-1)$ и материнских $\psi(x)$, $\psi(x-1)$. В этом же документе приведены графики этих вейвлетов (для удобства отображения графики материнских вейвлетов сдвинуты вниз на вели-

чину 2). Принятая нумерация графиков: 1 – $\varphi(x)$; 2 – $\varphi(x-2)$; 3 – $\psi(x)$; 4 – $\psi(x-2)$.

В качестве иллюстрации эффекта масштабирования на рис. 2.10. приведены графики тех же вейвлетов Добеши, но масштабированных при $j = +1$, т.е. графики $\varphi(x/2)$, $\varphi(x/2-1)$, $\psi(x/2)$, $\psi(x/2-1)$. Видно, что масштабированные вейвлеты представляют собой «растянутые» версии исходных вейвлетов. При отрицательных значениях j происходит «сжатие» вейвлетов.

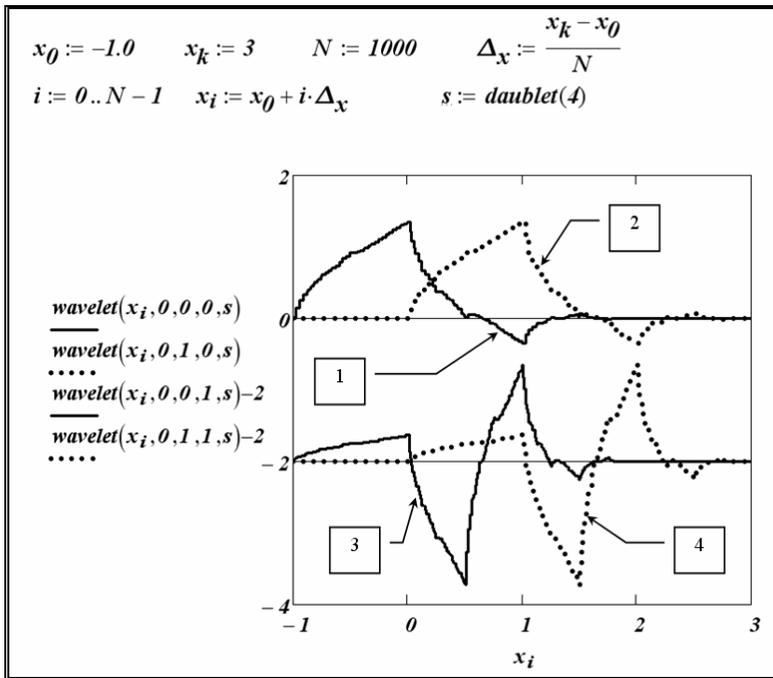


Рис. 2.9. Графики немасштабированных вейвлетов Добеши

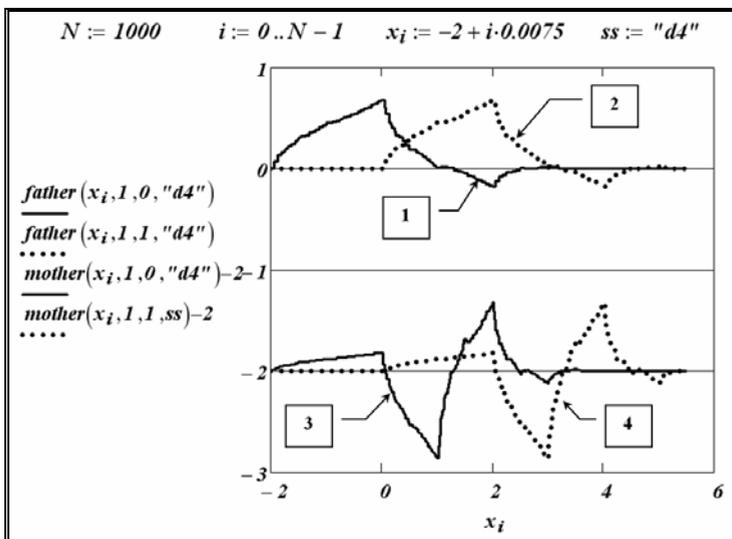


Рис. 2.10. Графики масштабированных вейвлетов Добеши

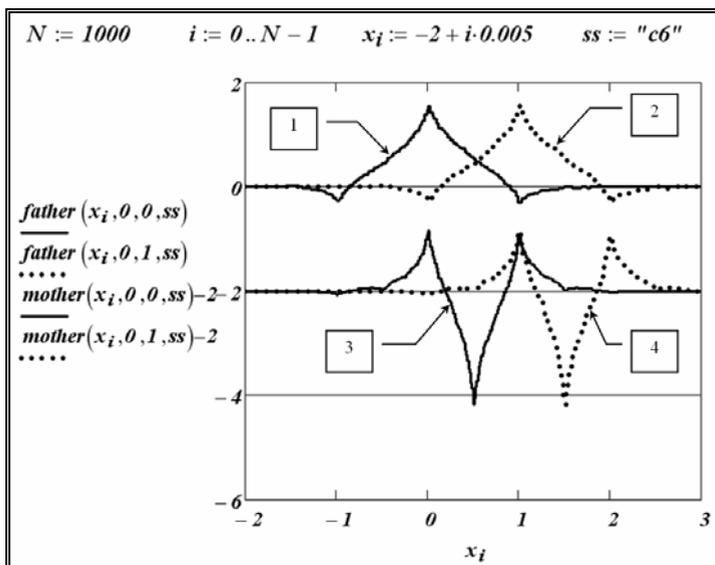


Рис. 2.11. Графики вейвлетов Койфлета

На рис. 2.11. показан фрагмент документа Mathcad, в котором приведены графики вейвлетов Койфлета $\varphi(x)$, $\varphi(x-1)$,

$\psi(x)$, $\psi(x-1)$, вычисленных с использованием функций *mother*, *father*. Видно, что эти вейвлеты имеют заметную симметрию, которая отсутствовала у вейвлетов Добеши. Нумерация кривых та же, что и в предыдущих рисунках.

В пакете *Wavelet Extension* также включены функции, вычисляющие набор коэффициентов $\{h_n\}$, $n = 0, \dots, m-1$, входящие в масштабирующие уравнения (2.2.6). Обращение к функциям имеет вид:

- *daublet(m)* – вычисляет m (четные числа от 6 до 20) коэффициентов вейвлета Добеши;
- *coiflet(m)* – вычисляет $m \in [6, 12, 18, 24, 30]$ коэффициентов вейвлета Койфлета;
- *symmlet(m)* – вычисляет m (четные целые значения от 4 до 20) вейвлета Добеши с наименьшей асимметрией.

На рис. 2.12 показан фрагмент документа Mathcad, в котором вычисляются коэффициенты h_n для некоторых вейвлетов. Далее будет рассмотрено представление функций $f(x) \in L_2(R)$ с использованием отцовских и материнских вейвлетов.

$$\begin{array}{l}
 \text{daublet}(4) = \begin{pmatrix} 0.483 \\ 0.837 \\ 0.224 \\ -0.129 \end{pmatrix} \\
 \\
 \text{symmlet}(6) = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.807 \\ 0.46 \\ -0.135 \\ -0.085 \\ 0.035 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{daublet}(6) = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.807 \\ 0.46 \\ -0.135 \\ -0.085 \\ 0.035 \end{pmatrix} \\
 \\
 \text{coiflet}(6) = \begin{pmatrix} -0.073 \\ 0.338 \\ 0.853 \\ 0.385 \\ -0.073 \\ -0.016 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 2.12. Вычисление коэффициентов вейвлетов

2.3. Кратномасштабное вейвлет-представление сигналов

Рассмотрено вейвлет-представление одномерных сигналов, которое в дальнейшем будет базовой конструкцией при построении алгоритмов фильтрации.

2.3.1. Вейвлет-представление сигналов

Возьмем некоторое значение параметра масштаба j_0 и рассмотрим соответствующее подпространство V_{j_0} . Оператор проектирования $P_{j_0}(f)$ на это пространство имеет вид:

$$P_{j_0}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j_0, n} \rangle \varphi_{j_0, n}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j_0, n} \varphi_{j_0, n}(x), \quad (2.3.1)$$

где $a_{j_0,n}$ – коэффициенты разложения функции $f(x)$ по ортонормированному базису пространства V_{j_0} . Обозначим набор этих коэффициентов через $A_0 = \{a_{j_0,n}\}$. Ранее было показано, что подпространство V_{j_0} можно разложить на сумму ортогональных подпространств $V_{j_0} = V_{j_0+1} \oplus W_{j_0+1}$ и вместо приближения $P_{j_0}(f)$ можно взять сумму:

$$P_{j_0}(f) = P_{j_0+1}(f) + P_{j_0+1}^W(f). \quad (2.3.2)$$

Первое слагаемое есть более грубое приближение $f(x)$ в подпространстве V_{j_0+1} , а второе – отражает детали, которыми $P_{j_0+1}(f)$ отличается от $P_{j_0}(f)$. В базисах подпространств V_{j_0+1} , W_{j_0+1} имеет следующее представление:

$$P_{j_0}(f) = \sum_{k \in Z} a_{j_0+1,k} \varphi_{j_0+1,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j_0+1,k} \psi_{j_0+1,k}(x),$$

где $a_{j_0+1,k}$ – аппроксимирующие коэффициенты $(j_0 + 1)$ -го уровня:

$$a_{j_0+1,k} = \int f(x) \varphi_{j_0+1,k}(x) dx, \quad (2.3.3)$$

$d_{j_0+1,k}$ – детализирующие коэффициенты $(j_0 + 1)$ -го уровня:

$$d_{j_0+1,k} = \int f(x) \psi_{j_0+1,k}(x) dx. \quad (2.3.4)$$

Обозначим полученный набор коэффициентов $A_1 = \{a_{j_0+1,k}\}$, $D_1 = \{d_{j_0+1,k}\}$. Таким образом, получены два набора коэффициентов разложения. По способу вычисления коэффициенты A_1 , D_1 в совокупности дают ту же информацию, что и первоначальный набор A_0 представления (2.3.1). Однако особенность нового набора коэффициентов заключается в том, что коэффициенты A_1 , определяющие разложение в подпространстве V_{j_0+1} , можно еще раз разложить на еще более сглаженную (аппрокси-

мирующую) часть $P_{j_0+2}(f)$ и детализирующую часть $P_{j_0+2}^W(f)$, а именно:

$$\begin{aligned}
 P_{j_0}(f) &= P_{j_0+2}(f) + P_{j_0+2}^W(f) + P_{j_0+1}^W(f); \\
 P_{j_0}(f) &= \sum_{k \in N} a_{j_0+2,k} \varphi_{j_0+2,k}(x) + \sum_{k \in N} d_{j_0+2,k} \psi_{j_0+2,k}(x) + \\
 &+ \sum_{k \in N} d_{j_0+1,k} \psi_{j_0+1,k}(x).
 \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Таким образом, получены следующие наборы коэффициентов:

- $A_2 = \{a_{j_0+2,k}\}$ – аппроксимирующие коэффициенты глубины разложения 2;
- $D_2 = \{d_{j_0+2,k}\}$ – детализирующие коэффициенты глубины разложения 2;
- $D_1 = \{d_{j_0+1,k}\}$ – детализирующие коэффициенты глубины разложения 1.

Повторяя процедуру J раз, получаем коэффициенты для J -го уровня разложения

$$\{A_J, D_J, D_{J-1}, D_{J-2}, \dots, D_1\}. \tag{2.3.6}$$

В дальнейшем *вейвлет-преобразованием* будем называть процедуру вычисления коэффициентов (2.3.6).

Вейвлет-представлением (или *вейвлет-разложением*) функции $f(x)$ с глубиной разложения J будем называть запись:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k \in Z} a_{j_0+J,k} \varphi_{j_0+J,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^J \sum_{k \in N} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \tag{2.3.7}$$

Обозначение $\hat{f}(x)$ указывает, что функция $\hat{f}(x)$ вычислена по коэффициентам разложения исходной функции $f(x)$ в ортонормированном базисе вейвлетов и является своеобразной оценкой $f(x)$ в подпространстве V_{j_0} . Поэтому $\hat{f}(x)$ можно

еще интерпретировать как проекцию $f(x)$ на подпространство V_{j_0} , т.е. $\hat{f}(x) = P_{j_0}(f)$.

Остается вопрос о выборе начального значения j_0 параметра масштаба или более конкретно о задании аппроксимирующих коэффициентов $a_{j_0,k}$. Возможно несколько вариантов задания, которые приведены в монографии [25, с. 122–123]. Остановимся на достаточно простом способе, который используется в системах компьютерной математики.

Как правило, при фильтрации сигналов и изображений обрабатываемые объекты задаются численными одномерными или двумерными массивами значений функции в узлах равномерной сетки (т.е. расстояние между узлами постоянно). В этом случае целесообразно использовать следующее задание:

$$a_{j_0,k} = f_k = f(x_k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (2.3.8)$$

2.3.2. Быстрое вейвлет-преобразование

Напомним, что для вейвлет-представления функции с глубиной разложения J необходимо вычислить набор коэффициентов (2.3.6), которые определяются интегрированием:

$$a_{j_0+J,k} = \langle f, \varphi_{j_0+J,k} \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0+J,k}(x) dx; \quad (2.3.9)$$

$$d_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \int f(x) \varphi_{j,k}(x) dx. \quad (2.3.10)$$

Возникает проблема вычисления большого количества интегралов с необходимой точностью от осциллирующих функций, что обуславливает значительные вычислительные затраты. *Быстрое вейвлет-преобразование*, предложенное Малла, позволяет решить эту проблему [39, 40].

Алгоритм Малла дает возможность вычислять коэффициенты без интегрирования, используя алгебраические операции ум-

ножения и суммирования. Не останавливаясь на построении этого алгоритма, запишем конечные формулы:

$$a_{j+1,k} = \sum_n h_n a_{j,n+2k} ; \quad (2.3.11)$$

$$d_{j+1,k} = \sum_n g_n a_{j,n+2k} , \quad (2.3.12)$$

Задав коэффициенты $a_{j_0,k}$ и рекуррентно повторяя формулы для каждого уровня разложения $j = j_0, j_0 + 1, \dots, j_0 + J$, можно вычислить все коэффициенты (2.3.6), т.е. осуществить декомпозицию исходной последовательности.

Соотношения (2.3.11), (2.3.12) допускают следующую «частотную» трактовку. На первом этапе преобразования исходная последовательность $\{a_{j_0,k}\}$ подвергается обработке двумя фильтрами декомпозиции. Низкочастотный фильтр (2.3.11) с коэффициентами h_k (обозначим LD) выделяет низкочастотные составляющие, а другой фильтр (2.3.12) с коэффициентами g_k (обозначим HD) выделяет высокие частоты.

Поскольку на выходе фильтра LD отсутствует верхняя половина частот, то частота дискретизации выходного сигнала может быть уменьшена в 2 раза, т.е. выполнена децимация выходного сигнала, что и производится в формуле (2.3.11) сдвигами $(2k + n)$ через 2 отсчета по входному сигналу. Соответственно на выходе фильтра HD освобождается место в области низких частот, и аналогичное прореживание выходного сигнала приводит к транспонированию верхних частот на освободившееся место. Таким образом, каждый из выходных сигналов несет информацию о своей половине частот, при этом выходная информация представлена таким же количеством отсчетов, что и входная. Аналогичные преобразования выполняются над полученными коэффициентами $a_{j_0+1,k}$ и т.д. для всех уровней разложения $j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, j_0 + J$.

Обратной операцией к вейвлет-преобразованию является *вейвлет-реконструкция*, когда по заданному набору коэффициентов (2.3.6) необходимо вычислить аппроксимирующие ко-

эффиценты $a_{j_0,k}$. Для этого используется рекуррентная формула:

$$a_{j,n} = \sum_k h_{n-2k} a_{j+1,k} + \sum_k g_{n-2k} d_{j+1,k} . \quad (2.3.13)$$

Вейвлет-реконструкцию часто называют *обратным вейвлет-преобразованием* и она также допускает следующую частотную интерпретацию.

Первое слагаемое можно рассматривать как результат работы низкочастотного фильтра реконструкции (обозначим LR), а второе слагаемое – высокочастотный фильтр реконструкции (обозначим HR). Эти два фильтра обеспечивают восстановление спектра коэффициентов $\{a_{j,k}\}$ в низкочастотную часть спектра новых коэффициентов $\{a_{j-1,k}\}$, а спектра коэффициентов $\{d_{j,k}\}$ в высокочастотную часть спектра коэффициентов $\{a_{j-1,k}\}$. Это выполняется расстановкой нулевых значений между коэффициентами $a_{j,k}$, $d_{j,k}$ (увеличение в 2 раза числа отсчетов – обратная децимация), фильтрация полученных массивов фильтрами LR, HR и сложением результатов фильтрации (см. (2.3.13)). Кроме этого фильтры LR, HR ликвидируют сдвиг фаз, который был внесен односторонними фильтрами декомпозиций LR, HR.

Видно, что изложенные алгоритмы быстрого прямого и обратного преобразования имеют особенности, которые необходимо учитывать при использовании этих алгоритмов:

1. Число N коэффициентов $a_{j_0,k}$ должно быть кратным 2, т.е.

$$N/2^m = \text{целое число} , \quad (2.3.14)$$

где $m > 0$. При задании (2.3.8) это означает, что число значений функции должно удовлетворять (2.3.14). Это позволяет определить значение «нулевого» уровня j_0 из уравнения:

$$N = 2^{j_0} . \quad (2.3.15)$$

2. При прямом вейвлет-преобразовании при переходе с уровня j к уровню $j+1$ количество коэффициентов $a_{j,k}$ и $d_{j,k}$ уменьшается в два раза.

3. При обратном вейвлет-преобразовании при переходе с уровня j к уровню $j-1$ количество коэффициентов $a_{j,k}$, $d_{j,k}$ увеличиваются в два раза.

Замечание 2.3.1. Максимальное значение m , при котором выполняется (2.3.14), определяет максимально возможную глубину разложения J_{\max} . Например, пусть $N = 384$. Тогда максимальное значение m , при котором выполняется (2.3.14), равно 7, т.е. $\frac{388}{2^7} = 3$. Следовательно, $J_{\max} = 7$. ♦

Если ни при одном $m > 1$ условие (2.3.14) не выполняется, то происходит увеличение количества отсчетов до ближайшего большого значения N различными способами (это называется заданием *граничных условий*). Например, периодическим продолжением (периодические граничные условия), симметричным (симметричные граничные условия), добавлением нулей, интерполяцией исходного сигнала до необходимого количества точек с новым шагом дискретизации.

В пакет *Wavelet Expansion* включены две функции, позволяющие определить максимальную глубину разложения для заданного вектора a с числом элементов N :

MaxDWTLevel(a) – периодические граничные условия;

MaxDWTSLevel(a) – симметрические граничные условия.

2.3.3. Функции *Mathcad* для быстрого вейвлет-преобразования

В пакет *Wavelet Expansion* включены несколько функций, осуществляющих прямое и обратное вейвлет-преобразование с использованием алгоритма Малла.

Функция $dwt(a, J, s)$ осуществляет прямое вейвлет-преобразование с вектора a глубиной разложения J . Параметр s – переменная, определяющая тип используемых вейвлетов. Например, $s := daublet(8)$. Для периодических граничных условий величина N (количество элементов вектора a) должно удовлетворять условию (2.3.14).

Функция $dwt_s(a, J, s)$ осуществляет прямое вейвлет-преобразование глубиной разложения J с симметричными граничными условиями. Эта функция требует использование симметричных вейвлетов (например, вейвлет Хаара $daublet(2)$). Назначение формальных параметров то же, что и у функции dwt . Величина N должна удовлетворять условию $N \geq 2^m$, $m > 0$.

Результатом работы этих двух функций является вектор длиной N , в котором размещаются следующие коэффициенты вейвлет-преобразования:

$$D_1 = \{d_{j_0+1,k}\} - \text{длиной } N/2; \quad D_2 = \{d_{j_0+2,k}\} - \text{длиной } N/4; \\ \dots; \quad D_J = \{d_{j_0+J,k}\} - \text{длиной } N/2^J; \quad A_J = \{a_{j_0+J,k}\} - \text{длиной } N/2^J.$$

Эти коэффициенты размещаются в векторе (результат работы функции) в следующем порядке: первоначально идут коэффициенты A_J , затем D_J , D_{J-1} и т.д. Последними размещаются D_1 , т.е. результат работы функций – массив длиной N – имеет структуру, показанную на рис. 2.13.

A_J	D_J	D_2	D_1
-------	-------	-------	-------

Рис. 2.13. Порядок расположения коэффициентов разложения

Функция $idwt(c, J, s)$ осуществляет обратное вейвлет-преобразование с периодическими граничными условиями. Вектор c должен иметь структуру, показанную на рис. 2.13. Значение J то же, что и при выполнении функции dwt .

Функция $idwts(c, J, s)$ осуществляет обратное вейвлет-преобразование с симметричными граничными условиями. Вектор c с длиной N должен иметь структуру, показанную на рис. 2.13.

Пример 2.3.1. На рис. 2.14 приведен фрагмент документа Mathcad, в котором вычисляется массив значений функции $f(x)$ (называемой доплеровским сигналом и часто используемой в качестве тестовой для вейвлет-разложений), состоящий из $N = 1024$ значений. Необходимо определить точность восстановления значений функции после выполнения прямого и обратного вейвлет-преобразования.

Решение. В этом же документе Mathcad (см. рис. 2.14) показаны обращения к функциям dwt , $idwt$ для двух типов вейвлет: $daublet(8)$ и $symmlet(12)$ и различных глубинах разложения $J = 4, 8$. Здесь же приведены евклидовы нормы векторов ошибки $\hat{y} - y$, из которых видна высокая точность реконструкции значений функции. ☺

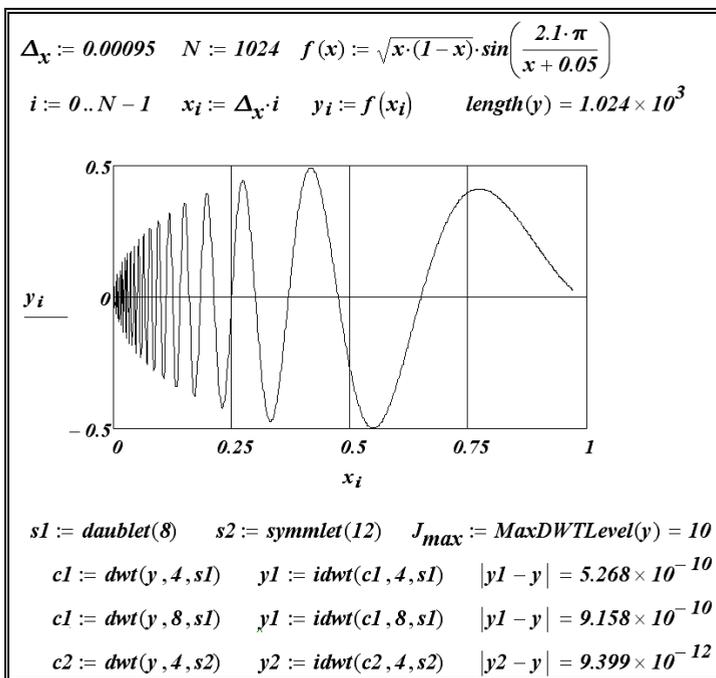


Рис. 2.14. Прямое и обратное вейвлет-преобразование «доплеровского» сигнала

2.4. Кратномасштабное вейвлет-представление изображений

Рассмотрено вейвлет-представление двумерных сигналов (изображений), которое в дальнейшем будет базовой конструкцией при построении алгоритмов фильтрации.

2.4.1. Вейвлет-представление изображений

Любое изображение можно интерпретировать как функцию двух переменных $f(x, y)$. Алгоритм вейвлет-преобразования двумерной функции аналогичен одномерному случаю.

Как и ранее полагаем, что $\varphi(x)$ – масштабируемая функция (отцовский вейвлет), а $\psi(x)$ – вейвлет (материнский вейвлет). Они порождают ортонормированные базисные функции в пространстве $L_2(R)$: $\{\varphi_{j,n}(x)\}$, $\{\psi_{j,n}(x)\}$. Тензорное произведение этих функций порождает следующие базисные функции в $L_2(R^2)$:

$$\begin{aligned} & \{\varphi\varphi_{j,n,m}(x,y) = \varphi_{j,n}(x) \cdot \varphi_{j,m}(y)\}; \\ & \{\varphi\psi_{j,n,m}(x,y) = \varphi_{j,n}(x) \cdot \psi_{j,m}(y)\}; \\ & \{\psi\varphi_{j,n,m}(x,y) = \psi_{j,n}(x) \cdot \varphi_{j,m}(y)\}; \\ & \{\psi\psi_{j,n,m}(x,y) = \psi_{j,n}(x) \cdot \psi_{j,m}(y)\}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Соответствующие коэффициенты разложения принято называть следующим образом.

- аппроксимирующие коэффициенты $A_j = \{aa_{j,n,m}\}$ получаются как коэффициенты разложения по базису $\{\varphi\varphi_{j,n,m}(x,y)\}$;
- горизонтальные детализирующие коэффициенты $H_j = \{ad_{j,n,m}\}$ получаются как коэффициенты разложения по базису $\{\varphi\psi_{j,n,m}(x,y)\}$;
- вертикальные детализирующие коэффициенты $V_j = \{da_{j,n,m}\}$ получаются как коэффициенты разложения по базису $\{\psi\varphi_{j,n,m}(x,y)\}$;
- диагональные детализирующие коэффициенты $D_j = \{dd_{j,n,m}\}$ получаются как коэффициенты разложения по базису $\{\psi\psi_{j,n,m}(x,y)\}$.

На практике изображение задается матрицей F (уровень j_0). Тогда вычисление рассмотренных коэффициентов допускает частотную трактовку. Так, аппроксимирующие коэффициен-

ты $A_1 = \{aa_{j_0+1,k,n}\}$ получаются сверткой строк матриц с фильтром LD (низкочастотный фильтр декомпозиции см. (2.2.4)) и децимацией и затем сверткой столбцов полученной матрицей с фильтром LD и децимацией. Детализирующие коэффициенты $H_1 = \{ad_{j_0+1,k,n}\}$ получаются сверткой строк матриц с фильтром LD , децимацией и затем сверткой столбцов полученной матрицей с фильтром HD (высокочастотный фильтр декомпозиции). Подобную интерпретацию можно провести для коэффициентов $V_1 = \{da_{j_0+1,k,n}\}$, $D_1 = \{dd_{j_0+1,k,n}\}$.

На втором уровне разложения аналогичной обработке подвергается матрица коэффициентов $A_1 \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2)$. Обобщая, приходим к следующей схеме разложения:

$$F \rightarrow (A_1, H_1, V_1, D_1) \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2, H_1, V_1, D_1) \rightarrow \dots$$

Отметим закономерность изменения размеров двумерных массивов коэффициентов разложения, а именно: на каждом уровне разложения размеры массивов новых коэффициентов *уменьшаются в два раза* по сравнению с предыдущими массивами. При этом сумма размеров массивов коэффициентов равна размеру исходной матрицы F , что говорит о сохранении «объема» информации, содержащейся в F .

Например, пусть исходная матрица F имеет размеры 512 (число строк) \times 384 (число столбцов). Тогда массивы коэффициентов A_1, H_1, V_1, D_1 имеют размеры 256×192 , массивы коэффициентов A_2, H_2, V_2, D_2 – размеры 128×96 и т.д.

Обратное двумерное вейвлет-преобразование осуществляется по схеме:

$$\dots \rightarrow (A_2, H_2, V_2, D_2, H_1, V_1, D_1) \rightarrow (A_1, H_1, V_1, D_1) \rightarrow F$$

При переходе с уровня j на $j-1$ размеры всех матриц коэффициентов увеличиваются в два раза.

Двумерным вейвлет-представлением с глубиной разложения J (с начального уровня $j = j_0$) будем называть запись:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) = & \sum_k \sum_n aa_{j_0+J,k,n} \varphi\varphi_{j_0+J,k,n}(x, y) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_k \sum_n ad_{j_0+j,k,n} \varphi\psi_{j_0+j,k,n}(x, y) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_k \sum_n da_{j_0+j,k,n} \psi\varphi_{j_0+j,k,n}(x, y) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_k \sum_n dd_{j_0+j,k,n} \psi\psi_{j_0+j,k,n}(x, y), \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

где $aa_{j_0+J,k,n}$, $ad_{j_0+j,k,n}$, $da_{j_0+j,k,n}$, $dd_{j_0+j,k,n}$ – коэффициенты разложения по базовым функциям $\varphi\varphi_{j_0+J,k,n}(x, y)$, $\varphi\psi_{j_0+j,k,n}(x, y)$, $\psi\varphi_{j_0+j,k,n}(x, y)$, $\psi\psi_{j_0+j,k,n}(x, y)$, являются элементами матриц A_j , H_j , V_j , D_j соответственно.

2.4.2. Функции Mathcad для выполнения двумерного вейвлет-преобразования

Пакет Wavelet Expansion системы компьютерной математики Mathcad содержит набор функций, позволяющих вычислить значения двумерных вейвлетов и выполнить вейвлет-преобразование изображений. Приведем описание некоторых из них.

Функция $wavelet2d(x, y, j, kx, ky, nx, ny, s)$ – вычисляет значение в точке (x, y) следующих вейвлетов:

$$\varphi\varphi_{j,n,m}(x, y), \text{ если } nx = 0, ny = 0;$$

$$\varphi\psi_{j,n,m}(x, y), \text{ если } nx = 0, ny = 1;$$

$$\psi\varphi_{j,n,m}(x, y), \text{ если } nx = 1, ny = 0;$$

$$\psi\psi_{j,n,m}(x, y), \text{ если } nx = 1, ny = 1.$$

Назначение других формальных параметров:

- j – целое положительное число, определяющее масштаб преобразования;
- kx – целое число, определяющее горизонтальное положение вейвлетов;
- ky – целое число, определяющее вертикальное положение вейвлетов;
- s – переменная, задающая семейство вейвлетов. Например, $s := daublet(4)$.

Допустимы следующие сокращения для указания семейства вейвлетов:

- d , $daub$, $daublet$ – семейство вейвлетов Добеши;
- s , $symm$, $symmlet$ – семейство симметричных вейвлетов;
- $coif$, c , $coiflet$ – семейство вейвлетов Койфлета;
- nx , ny – целые числа указывающие род (отцовский или материнский) вейвлета.

Функция $father2d(x, y, j, kx, ky, ss)$ вычисляет величину отцовского вейвлета $\varphi\varphi(x, y)$ в точке (x, y) . Параметр ss строковая константа или переменная, значение которой определяет обозначения семейства вейвлетов. Например, $ss := "daublet(8)"$.

Назначение остальных формальных параметров то же, что у функции $wavelet2d$.

Функция $mother2d(x, y, j, kx, ky, ss, ds)$ вычисляет величину материнского вейвлета в точке (x, y) . Параметр ds – строковая константа или переменная определяющая род вейвлетов. Используются следующие значения:

- " V " – вейвлет $\psi\varphi(x, y)$;
- " H " – вейвлет $\varphi\psi(x, y)$;
- " D " – вейвлет $\psi\psi(x, y)$.

Назначение остальных формальных параметров совпадает с $father2d$.

Функция $dwt(a, J, s)$ вычисляет прямое вейвлет-преобразование матрицы изображения (размера $N \times M$) глубиной разложе-

ния J . Размеры матрицы N , M должны удовлетворять условию:

$$\frac{N}{2^J} = \text{целое число}; \quad \frac{M}{2^J} = \text{целое число}.$$

Переменная s задает семейство вейвлетов. Например, $s := d(8)$ или $s := \text{symmlet}(12)$.

Функция $\text{idwt}(a, J, s)$ вычисляет обратное вейвлет-преобразование матрицы коэффициентов разложения a , которая была вычислена с использованием функции dwt . Назначение формальных параметров J, s те же, что и функции dwt .

Пример 2.4.1. На левой фотографии рис. 2.15 приводится изображение LENA (часто используемое в качестве тестового при исследовании алгоритмов фильтрации) размера 256×256 . Необходимо выполнить прямое и обратное двумерное вейвлет-преобразование.

Решение. На рис. 2.15 приведен фрагмент документа Mathcad, в котором с использованием функций dwt , idwt выполняется прямое и обратное вейвлет-преобразование, результат которого показан на правой фотографии. Видна идентичность этих двух преобразований, что подтверждается незначительной ошибкой преобразования (евклидова норма $\|A - A1\| \square 10^{-11}$).

На рис. 2.16 показаны изображения массивов коэффициентов разложения ($J=1$) A_1, H_1, V_1, D_1 (матрицы размера 128×128). Видно, что матрица A_1 представляет собой сглаженный образ исходной фотографии, а остальные массивы «дополняют» этот образ до исходной фотографии LENA. ☉

```

A := READBMP("LENA")
M := cols(A) = 256      N := rows(A) = 256
s := daublet(12)
W := dwt(A, I, s)      AI := idwt(W, I, s)

```



Рис. 2.15. Исходное и восстановленное изображения

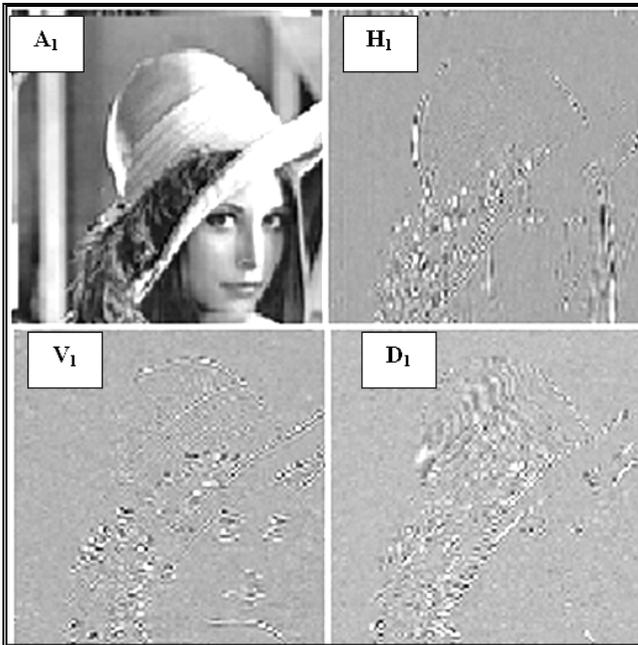


Рис. 2.16. Матрицы коэффициентов разложения
 Обобщая содержание этой главы, можно сделать следующие выводы:

- *Вейвлет-преобразование является эффективным инструментом для анализа и обработки сигналов и изображений.*
- *Пирамидальный алгоритм Малла позволяет с наименьшими вычислительными затратами находить коэффициенты разложения по базисным функциям ортогональных пространств.*
- *Вейвлет-преобразование сигналов и изображений широко используется для построения различных алгоритмов обработки. Подходы к построению таких алгоритмов фильтрации будут рассмотрены в следующей главе.*

Глава 3. Алгоритмы вейвлет-фильтрации сигналов и изображений

В этой главе рассматривается несколько подходов к построению алгоритмов фильтрации сигналов и изображений, основанных на вейвлет-разложении. Основное внимание будет уделено выбору тех или иных параметров алгоритмов (от величины которых зависит ошибка фильтрации), исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации. Рассматривается реализуемость этих алгоритмов выбора на практике в условиях ограниченной априорной информации (или отсутствие таковой) о шуме (погрешности) измерения и обрабатываемой функции.

3.1. Кратномасштабное представление и задачи фильтрации сигналов и изображений

Получены статистические характеристики коэффициентов вейвлет-разложений, вычисленных по зашумленным (искаженным) значениям сигнала или изображения, а также рассмотрен общий подход к построению алгоритмов вейвлет-фильтрации.

3.1.1. Статистические характеристики коэффициентов вейвлет-разложения зашумленных сигналов

В второй главе при изложении основратномасштабного разложения сигналов и изображений неявно полагалось, что эти объекты заданы своими *точными значениями* в узлах регулярной сетки. На практике это допущение не выполняется и возникает вопрос: как шумы измерений влияют на значения и свойства коэффициентов вейвлет-разложений?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующую модель измеряемого одномерного сигнала:

$$\tilde{f}_i = f(x_i) + \eta_i = f_i + \eta_i, \quad i=1, \dots, N, \quad (3.1.1)$$

где $f_i = f(x_i)$ – точное значение сигнала; η_i – шум измерения значения $f(x_i)$. Величины \tilde{f}_i в дальнейшем будем называть зашумленными значениями исходной функции $f(x)$. Первоначально относительно η_i сделаем не обременительные допущения:

- Величины η_i являются случайными;
- $M[\eta_i] = 0, i=1, \dots, N;$ (3.1.2)

- $D[\eta_i] = \sigma^2, i=1, \dots, N;$ (3.1.3)

- $M[\eta_i \eta_j] = 0, \text{ если } i \neq j.$ (3.1.4)

Последнее равенство означает некоррелированность значений η_i, η_j при $i \neq j$.

Рассмотрим вейвлет-разложение глубиной разложения J (см. п. 2.2):

$$f(x) = \sum_k a_{J+j_0, k} \varphi_{J+j_0, k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j_0+j, k} \psi_{j_0+j, k}(x),$$

где $\varphi_{J+j_0, k}(x)$, $\psi_{j_0+j, k}(x)$ – семейство ортонормированных вейвлетов. Начальный уровень разложения j_0 определяется из равенства $N = 2^{j_0}$, но для упрощения дальнейших записей положим $j_0 = 0$. Тогда имеем следующую запись:

$$f(x) = \sum_k a_{J, k} \varphi_{J, k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j, k} \psi_{j, k}(x), \quad (3.1.5)$$

где аппроксимирующие $a_{J, k}$ и детализирующие коэффициенты $d_{j, k}$ вычисляются по точным значениям f_i сигнала $f(x)$ с использованием алгоритма Малла (см. п. 2.3.2).

Обозначим $\tilde{a}_{J, k}$, $\tilde{d}_{j, k}$ коэффициенты, которые вычисляются по зашумленным значениям \tilde{f}_i и определим их статистические характеристики. Для этого приведем запись алгоритма Малла

для вычисления коэффициентов $\tilde{a}_{1,k}$, $\tilde{d}_{1,k}$ (т.е. $j=1$) по значениям $\tilde{a}_{0,k} = \tilde{f}_k$, $k = 1, \dots, N$:

$$\tilde{a}_{1,k} = \sum_m h_m \tilde{a}_{0,2k+m}; \quad \tilde{d}_{1,k} = \sum_m g_m \tilde{a}_{0,2k+m}. \quad (3.1.6)$$

Введем ошибки вычисления коэффициентов: $\varepsilon_{1,k}^a = \tilde{a}_{1,k} - a_{1,k}$; $\varepsilon_{1,k}^d = \tilde{d}_{1,k} - d_{1,k}$ и перепишем предыдущие выражения относительно этих ошибок: $\varepsilon_{1,k}^a = \sum_m h_m \eta_{2k+m}$; $\varepsilon_{1,k}^d = \sum_m g_m \eta_{2k+m}$. Вычислим корреляционный момент между двумя величинами $\varepsilon_{a_{1,k}}$, $\varepsilon_{a_{1,k+l}}$:

$$\begin{aligned} M[\varepsilon_{1,k}^a \varepsilon_{1,k+l}^a] &= M\left[\sum_m h_m \eta_{m+2k} \sum_{m'} h_{m'} \eta_{m'+2k+2l}\right] = \\ &= \sum_m \sum_{m'} h_m h_{m'} M[\eta_{m+2k} \eta_{m'+2k+2l}]. \end{aligned}$$

Если справедливы предположения (3.1.3), (3.1.4), то получаем:

$$M[\varepsilon_{1,k}^a \varepsilon_{1,k+l}^a] = \sigma^2 \sum_m h_m h_{m-2l}. \quad (3.1.7)$$

В силу ортонормированности отцовского вейвлета имеем:

$$\sum_m h_m h_{m-2l} = \delta_{0,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } l=0; \\ 0, & \text{если } l \neq 0. \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Тогда из (3.1.7) следуют статистические свойства ошибок $\varepsilon_{1,k}^a$: а) $\varepsilon_{1,k}^a$ являются случайными величинами с нулевым средним, т.е. $M[\varepsilon_{1,k}^a] = 0$ для всех k ; б) дисперсия $D[\varepsilon_{1,k}^a] = \sigma^2$; в) случайные величины $\varepsilon_{1,k}^a$ и $\varepsilon_{1,l}^a$ не коррелированы друг с другом при $k \neq l$.

Аналогично можно показать, что при выполнении условия

$$\sum_m g_m g_{m-2l} = \delta_{0,l}, \quad (3.1.9)$$

(которое справедливо для ортонормированных материнских вейвлетов), ошибки $\varepsilon_{1,k}^d$ имеют нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 и не коррелированы друг с другом.

Определим корреляционный момент между ошибками $\varepsilon_{1,k}^a$, $\varepsilon_{1,l}^d$:

$$\begin{aligned} M[\varepsilon_{1,k}^a \cdot \varepsilon_{1,k+l}^d] &= M\left[\sum_m h_m \eta_{m+2k} \sum_{m'} g_{m'} \eta_{m'+2k+2l}\right] = \\ &= \sum_m \sum_{m'} h_m g_{m'} M[\eta_{m+2k} \eta_{m+2k+2l}] = \sigma^2 \sum_m h_m g_{m-2l}. \end{aligned}$$

В силу ортогональности пространств V_2 и W_1 имеем:

$$\sum_m h_m g_{m-2l} = 0 \quad \text{при любых } l, \quad (3.1.10)$$

а следовательно, ошибки $\varepsilon_{1,k}^a$ и $\varepsilon_{1,k}^d$ не коррелированы друг с другом.

Ошибки $\varepsilon_{1,k}^a$ и $\varepsilon_{1,k}^d$ имеют те же первые два момента, что и исходный шум η_i . Поэтому повторяя на каждом уровне разложения сходные построения, можно доказать следующие свойства:

$$\bullet M[\varepsilon_{j,k}^a] = 0; M[\varepsilon_{j,k}^d] = 0, \text{ для всех } k; \quad (3.1.11)$$

$$\bullet D[\varepsilon_{j,k}^a] = \sigma^2; D[\varepsilon_{j,k}^d] = \sigma^2, \text{ для всех } k; \quad (3.1.12)$$

$$\bullet M[\varepsilon_{j,k+l}^a \varepsilon_{j,k}^a] = 0, \text{ для } l \neq 0; \quad (3.1.13)$$

$$\bullet M[\varepsilon_{j,k+l}^d \varepsilon_{j,k}^d] = 0, \text{ для всех } l \neq 0; \quad (3.1.14)$$

$$\bullet M[\varepsilon_{j,k}^a \varepsilon_{j,l}^d] = 0 \text{ для всех } k, l. \quad (3.1.15)$$

Следует отметить, что несмотря на одинаковую дисперсию ошибок вычисления коэффициентов $\tilde{a}_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$, их относительная величина будет различной. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 3.1.1. Тестовый «ступенчатый» сигнал, часто используемый в литературе при исследовании алгоритмов фильтрации, задан своими значениями $f_i = f(x_i)$, $x_i \in [0,1]$, в 2048 узлах x_i (см. рис. 3.1 а). Необходимо определить влияние погрешностей задания этих значений на точность вычисления коэффициентов вейвлет-разложений.

Решение. По точным значениям $f_i = f(x_i)$ были вычислены коэффициенты разложения для вейвлетов Добеши8 уровней $j = 1, \dots, J = 7$. Заметим, что количество детализирующих коэффициентов на каждом уровне определяется выражением

$N_j = \frac{N}{2^j}$. Далее вычислялись «зашумленные» значения \tilde{f}_i как

$\tilde{f}_i = f_i + \eta_i$, где η_i – нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсия σ^2 .

Относительный уровень погрешностей задания значений функции определялся величиной $\delta_\eta = \|\tilde{f} - f\| / \|f\|$, где f, \tilde{f} – векторы, составленные из значений f_i, \tilde{f}_i ;

$\|\tilde{f}\|, \|f\|$ – евклидовы нормы векторов. Значения \tilde{f}_i , соответствующие $\delta_\eta = 0.12$, показаны на рис. 3.1 б. По этим значениям были вычислены коэффициенты разложения для вейвлетов Добеши8 уровней $j = 1, \dots, J = 7$. В табл. 3.1 приведены относительные ошибки вычисления коэффициентов:

$$\delta_a(j) = \|\tilde{a}_j - a_j\| / \|a_j\|, \quad \delta_d(j) = \|\tilde{d}_j - d_j\| / \|d_j\|,$$

где $a_j, \tilde{a}_j, d_j, \tilde{d}_j$ – векторы, составленные из соответствующих коэффициентов разложения j -го уровня. Из табл. 3.1 видно, что относительная ошибка детализирующих коэффициентов \tilde{d}_j существенно выше (для малых значений j) по сравнению с аппроксимирующими коэффициентами. Поэтому на практике обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты $\tilde{d}_{j,k}$. ☹

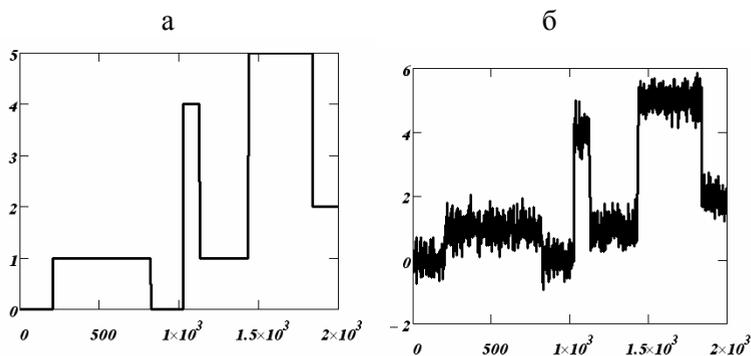


Рис. 3.1. Значения точной и зашумленной функций

Таблица 3.1

Уровень разложения	Относительные ошибки	
	$\delta_a(j)$	$\delta_d(j)$
1	0,082	2,674
2	0,059	0,983
3	0,044	0,637
4	0,033	0,185
5	0,024	0,102
6	0,017	0,051
7	0,012	0,028

3.1.2. Общий подход к фильтрации шума на основе вейвлет-разложения

Напомним, что Фурье-фильтрация, рассмотренная в первой главе, основывалась на предположении, что коэффициенты дискретного преобразования Фурье с большими индексами l (высокие частоты) в основном обусловлены шумами измерения и завуляя эти коэффициенты удаётся отфильтровать (лучше или хуже) шум измерения.

Алгоритмы вейвлет-фильтрации основаны на следующих свойствах вейвлет-разложения:

- информация о «точном» сигнале $f(x)$ содержится только в небольшом количестве коэффициентов вейвлет-разложения (*информативные коэффициенты*). Остальные коэффициенты равны нулю, либо незначительно отличаются от нуля по абсолютной величине и их можно назвать *незначимыми* (шумовыми) коэффициентами разложения. Это свойство также широко используется для сжатия сигналов и изображений;

- шум измерения равномерно «перераспределяется» по всем коэффициентам вейвлет-разложения. В частности, если значения шума η_i не коррелированы и имеют одинаковую дисперсию σ^2 , то коэффициенты разложения этого шума по базису ортогональных вейвлетов также не коррелированы между собой и имеют одинаковую дисперсию.

Иллюстрацией этих двух свойств является следующий пример.

Пример 3.1.2. В качестве значений точной и зашумленной функции примем значения, показанные на рис. 3.1. Необходимо вычислить детализирующие коэффициенты для уровней разложения $j = 1, 3, 5$ с использованием ортогональных вейвлетов Добеши8.

Решение. Графики вычисленных детализирующих коэффициентов $d_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ приведены на рис. 3.2 (точные значения функции) и на рис. 3.3 (зашумленные значения). При этом число детализирующих коэффициентов для уровня разложения $j = 1$

равно $N_1 = \frac{N}{2} = \frac{2048}{2} = 1024$, для уровня разложения $j = 3$ –

$N_3 = \frac{N}{2^3} = \frac{2048}{8} = 256$ и для уровня разложения $j = 5$ –

$N_5 = \frac{N}{2^5} = \frac{2048}{32} = 64$. Из анализа этих рисунков видно, что:

- только небольшое число коэффициентов $d_{j,k}$ точной функции уровней разложения 1, 2, 3 отличны от нуля;
- особенно сильному искажению подвергаются детализирующие коэффициенты с небольшим уровнем разложения. ☹

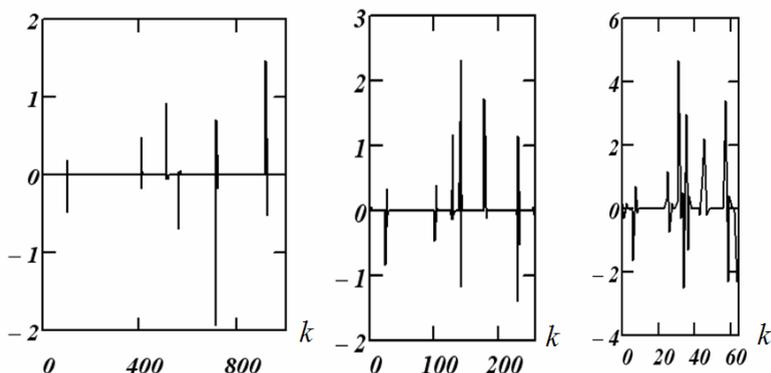


Рис. 3.2. Детализирующие коэффициенты точной функции

Приведенные и проиллюстрированные свойства коэффициентов вейвлет-разложения определяют общий подход для построения алгоритмов фильтрации с использованием вейвлетов (в дальнейшем вейвлет-фильтрации):

для уменьшения уровня шума в исходных данных (т.е. для фильтрации шума) необходимо к коэффициентам разложения $\tilde{a}_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ применить алгоритмы обработки, уменьшающие их дисперсию, а затем от этих новых «отфильтрованных» коэф-

коэффициентов разложения взять обратное вейвлет-преобразование.

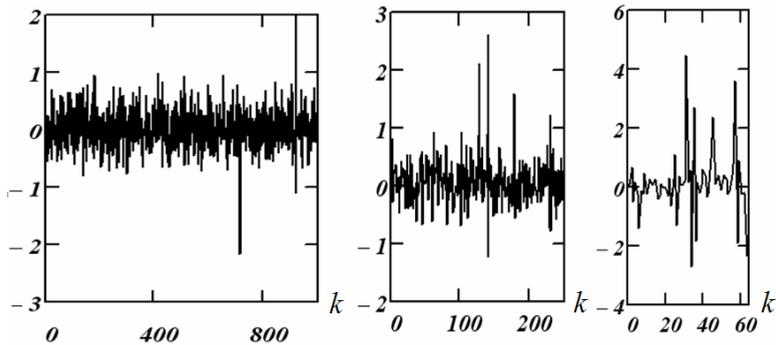


Рис. 3.3. Детализирующие коэффициенты
зашумленной функции

Таким образом, алгоритм вейвлет-фильтрации включает три следующих этапа:

- взятие прямого вейвлет-преобразования от зашумленных значений функции;
- обработка коэффициентов разложения $\tilde{a}_{J,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ (построение оценок $\hat{a}_{J,k}$, $\hat{d}_{j,k}$ для точных коэффициентов $a_{J,k}$, $d_{j,k}$);
- взятие обратного вейвлет-преобразования от коэффициентов $\hat{a}_{J,k}$, $\hat{d}_{j,k}$.

Замечание 3.1.1. Алгоритмы обработки коэффициентов разложения $\tilde{a}_{J,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ должны максимально уменьшать дисперсию этих коэффициентов, внося при этом минимальное смещение относительно точных значений $a_{J,k}$, $d_{j,k}$. Очевидно, что создание таких алгоритмов является достаточно трудной задачей. ♦

Одним из простейших алгоритмов обработки зашумленных коэффициентов вейвлет-разложения является использование на втором этапе порогового алгоритма с «жесткой» пороговой функцией:

$$\text{hard}(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda; \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Если обрабатываемый коэффициент меньше величины порога λ , то этот коэффициент заменяется нулем, в противном случае коэффициент сохраняется и «участвует» в обратном вейвлет-преобразовании. В этом алгоритме «управляющим» параметром, от которого зависит ошибка фильтрации, является величина порога λ . Проиллюстрируем критичность его выбора следующим примером.

Пример 3.1.3. В качестве зашумленных значений функции примем значения, изображенные на рис. 3.1 и соответствующие относительному уровню шума

$$\delta_\eta = \|\tilde{f} - f\| / \|f\| = 0.12.$$

По этим значениям необходимо вычислить коэффициенты вейвлет-разложения в базисе Добеши8 глубиной разложения 5, подвергнуть детализирующие коэффициенты пороговой обработке и определить ошибки фильтрации при различных величинах λ .

Решение. Первоначально примем $\lambda = 0.5$ и с помощью пороговой функции (3.1.16) обработаем все детализирующие коэффициенты $\tilde{d}_{j,k}$ уровней разложения $j = 1, 2, 3, 4, 5$. На рис. 3.4 а приведены результаты обработки коэффициентов $\tilde{d}_{1,k}$ (сплошная линия – точные значения коэффициентов, точки – обработанные). Видно, что часть зашумленных коэффициентов разложения, которые обусловлены только шумом (см. рис. 3.2 и 3.3),

«остались» после обработки с такой величиной порога. Это привело к тому, что результат обратного вейвлет-преобразования (отфильтрованная функция) содержит значительный «остаточный» шум (см. рис. 3.4 а и относительная ошибка фильтрации $\delta_f(\lambda) = \|\hat{f}_\lambda - f\|/\|f\|$ равна 0.082. На рис. 3.5 а приведены результаты обработки коэффициентов $\tilde{d}_{1,k}$ с порогом $\lambda = 1.0$, а на рис. 3.5 б соответствующая отфильтрованная функция. Относительная ошибка фильтрации равна 0.044. Видно, что при этом λ часть точных детализирующих коэффициентов не сохранились в результате обработки и это вызвало искажение сигнала в угловых точках (эффект, подобный эффекту Гиббса, при Фурье-фильтрации). ☹

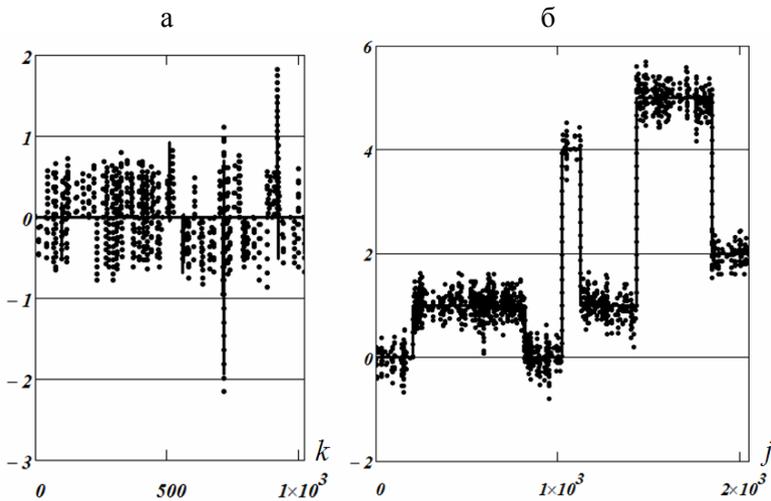


Рис. 3.4. Вейвлет-фильтрация при $\lambda = 0.5$

Для обработки коэффициентов разложения необходимо иметь программные средства, позволяющие:

- выбрать из общего массива коэффициентов разложения вектор, содержащий аппроксимирующие или детализирующие

коэффициенты заданного уровня разложения j (например, вектор из коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$);

- вставить в общий массив коэффициента разложения вектор, содержащий аппроксимирующие или детализирующие коэффициенты заданного уровня разложения j (например, вектор из коэффициентов $\hat{d}_{2,k}$ полученный обработкой коэффициентов $\tilde{d}_{2,k}$).

Рассмотрим реализацию этих операций в системе компьютерной математики Mathcad.

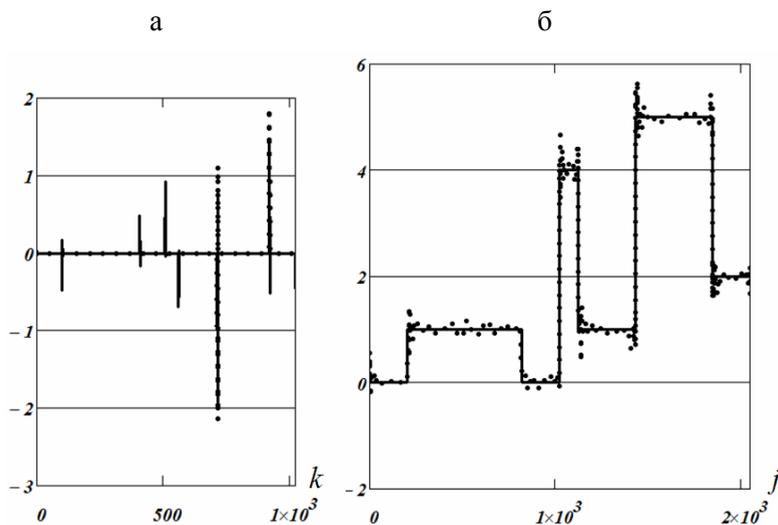


Рис. 3.5. Вейвлет-фильтрация при $\lambda = 1.0$

3.1.3. Функции Mathcad обработки коэффициентов вейвлет-разложения

В пакете *Wavelet Extension* системы Mathcad имеется ряд функций, которые выполняют эти операции.

Функция $get_smooth(w, l)$ позволяет выделить вектор аппроксимирующих коэффициентов разложения $a_{l,k}$ по базису $\varphi_{l,k}(x)$ уровня разложения l из массива коэффициентов w (массив w – результат выполнения функции dwt).

Функция $get_detail(w, l)$ позволяет выделять вектор детализирующих коэффициентов разложения $d_{l,k}$ по базису $\psi_{l,k}(x)$ уровня разложения l из массива коэффициентов w (где массив w – результат выполнения функции dwt).

Функция $get_subband(w, l, m)$ выделяет вектор аппроксимирующих коэффициентов (если $m = 0$) или вектор детализирующих коэффициентов (если $m = 1$) уровня разложения l из массива коэффициентов w (где массив w – результат выполнения функции dwt).

Функция $put_smooth(w, l, y)$ заменяет в массиве w аппроксимирующие коэффициенты уровня разложения l на элементы вектора y .

Функция $put_detail(w, l, y)$ заменяет в массиве w детализирующие коэффициенты уровня разложения l на элементы вектора y .

3.2. Оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы вейвлет-фильтрации

Построен оптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации, использующий отношение «шум/сигнала» для каждого коэффициента разложения, значение которого на практике точно неизвестно. Поэтому строится квазиоптимальный алгоритм, не тре-

бующий задания точного значения отношения «шум/сигнал», а использующий некоторые оценки этого отношения.

3.2.1. Оптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложений

Вернемся к вейвлет-представлению «точного» сигнала $f(x)$ с глубиной разложения J :

$$f(x) = \sum_k a_{J,k} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (3.2.1)$$

Напомним, что начальный уровень разложения j_0 определяется из равенства $N = 2^{j_0}$, но для удобства дальнейших обозначений принимаем $j_0 = 0$. Вновь предположим, что значения функции $f(x)$ заданы в узлах x_i , $1 \leq i \leq N$ со случайной аддитивной погрешностью (шум измерения) η_i , имеющей нулевое среднее и дисперсию σ^2 . Очевидно, что коэффициенты разложения (глубина разложения равна J)

$$\{\tilde{d}_{1,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{j,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{J,k}\}, \{\tilde{a}_{J,k}\}, k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2^j}, j = 1, \dots, J, \quad (3.2.2)$$

вычисленные по зашумленным значениям $\tilde{f}_i = f(x_i) + \eta_i$, также содержат случайные ошибки $\varepsilon_{j,k}^d, \varepsilon_{J,k}^a$. В силу линейности прямого дискретного вейвлет-преобразования эти ошибки носят аддитивный характер, т.е. справедливы следующие модели:

$$\tilde{d}_{j,k} = d_{j,k} + \varepsilon_{j,k}^d; \quad \tilde{a}_{J,k} = a_{J,k} + \varepsilon_{J,k}^a. \quad (3.2.3)$$

Предположим, что по коэффициентам (3.2.2) были вычислены оценки $\{\hat{d}_{j,k}\}, \{\hat{a}_{J,k}\}$ для соответствующих коэффициентов $\{d_{j,k}\}, \{a_{J,k}\}$ и построена аппроксимирующая функция:

$$\hat{f}(x) = \sum_k \hat{a}_{J,k} \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (3.2.4)$$

Определим среднеквадратическую ошибку (СКО) фильтрации выражением

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\int_R (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right] = M \left[\int_R \varepsilon^2(x) dx \right], \quad (3.2.5)$$

где ошибка фильтрации $\varepsilon(x) = \hat{f}(x) - f(x)$ определяется (с учетом (3.2.1)) выражением

$$\varepsilon(x) = \sum_k (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k}) \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k}) \psi_{j,k}(x). \quad (3.2.6)$$

Квадрат ошибки $\varepsilon^2(x)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(x) = & \sum_k \sum_{k'} (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})(\hat{a}_{J,k'} - a_{J,k'}) \varphi_{J,k}(x) \varphi_{J,k'}(x) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{j'=1}^J \sum_k \sum_{k'} (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k})(\hat{d}_{j',k'} - d_{j',k'}) \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) + \\ & + 2 \sum_k \sum_{j=1}^J \sum_{k'} (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})(\hat{d}_{j,k'} - d_{j,k'}) \varphi_{J,k}(x) \psi_{j,k'}(x). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Напомним, что для используемых ортогональных вейвлетов имеют место следующие равенства:

$$\int_R \varphi_{j,k}(x) \varphi_{j',k'}(x) dx = \delta_{j',j} \delta_{k',k}; \quad \int_R \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) dx = \delta_{j',j} \delta_{k',k};$$

$$\int_R \varphi_{j,k}(x) \psi_{j,k}(x) dx = 0, \quad \text{для любых } k, j,$$

где величина $\delta_{j,j'} = 1$, если $j = j'$ и равна 0 во всех остальных случаях. Поэтому выражение (3.2.5) можно записать в виде:

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\sum_k (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})^2 \right] + M \left[\sum_{j=1}^J \sum_k (\hat{a}_{j,k} - d_{j,k})^2 \right]. \quad (3.2.8)$$

Коэффициенты $\{\hat{a}_{J,k}\}$, $\{\hat{d}_{j,k}\}$, доставляющие минимум функционалу $\Delta(\hat{f})$, назовем *оптимальными оценками* коэффициентов вейвлет-разложения функции $f(t)$. Оптимальные оценки будем искать в виде:

$$\hat{a}_{J,k} = \omega_{J,k}^a \cdot \tilde{a}_{J,k}, \quad \hat{d}_{j,k} = \omega_{j,k}^d \cdot \tilde{d}_{j,k}, \quad (3.2.9)$$

где $\omega_{J,k}^a, \omega_{j,k}^d$ назовем *фильтрующими множителями*. Так как математическое ожидание $M[\eta_i] = 0, i = 1, \dots, N$, то (3.2.8) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{f}) = & \sum_k \left[(\omega_{J,k}^a - 1)^2 a_{J,k}^2 + (\omega_{J,k}^a)^2 D[\varepsilon_{J,k}^a] \right] + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_k \left[(\omega_{j,k}^d - 1)^2 d_{j,k}^2 + (\omega_{j,k}^d)^2 D[\varepsilon_{j,k}^d] \right], \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где $D[\varepsilon_{J,k}^a], D[\varepsilon_{j,k}^d]$ – дисперсии соответствующих ошибок вычисления коэффициентов разложения. В п. 3.1 было показано, что дисперсии $D[\varepsilon_{J,k}^a] = \sigma^2, D[\varepsilon_{j,k}^d] = \sigma^2, j = 1, \dots, J$, т.е. дисперсии одинаковы для всех уровней j . Тогда из необходимых и достаточных условий минимума $\Delta(\hat{f})$:

$$\frac{\partial \Delta(\hat{f})}{\partial \hat{a}_{J,k}} = 0; \quad \frac{\partial \Delta(\hat{f})}{\partial \hat{d}_{j,k}} = 0,$$

получаем *оптимальные фильтрующие множители*:

$$\omega_{opt_{J,k}}^a = \frac{1}{1+S_{J,k}^a}; \quad \omega_{opt_{j,k}}^d = \frac{1}{1+S_{j,k}^d} \quad (3.2.11)$$

и *оптимальные оценки* для соответствующих коэффициентов разложения:

$$\hat{a}_{opt_{J,k}} = \frac{1}{1+S_{J,k}^a} \tilde{a}_{J,k}; \quad \hat{d}_{opt_{j,k}} = \frac{1}{1+S_{j,k}^d} \tilde{d}_{j,k}. \quad (3.2.12)$$

Отношения

$$S_{J,k}^a = \frac{\sigma^2}{a_{J,k}^2}; \quad S_{j,k}^d = \frac{\sigma^2}{d_{j,k}^2} \quad (3.2.13)$$

можно трактовать как отношение «шум/сигнала» соответствующего коэффициента разложения. Можно показать, что СКО $\Delta(\hat{f})$ при оптимальных множителях (3.2.11) определяется выражением:

$$\Delta(\hat{f}_{opt}) = \sum_k \frac{S_{J,k}^a}{1+S_{J,k}^a} \cdot a_{J,k}^2 + \sum_{j=1}^J \sum_k \frac{S_{j,k}^d}{1+S_{j,k}^d} \cdot d_{j,k}^2, \quad (3.2.14)$$

из которого (с учетом (3.2.13)) видно, что при достаточно малых σ^2 величина $\Delta(\hat{f}_{opt})$ имеет порядок σ^2 , т.е. $\Delta(\hat{f}_{opt}) \propto \sigma^2$.

Оптимальные оценки (3.2.12), построенные из условия минимума СКО фильтрации, можно назвать *винеровскими оценками*, а соответствующий алгоритм фильтрации – *винеровским алгоритмом*.

Замечание 3.2.1. Оценки (3.2.12) имеют характерную особенность: они получаются в результате «сжатия» соответствующих зашумленных коэффициентов, т.е. умножением $\{\tilde{a}_{J,k}\}$, $\{\tilde{d}_{j,k}\}$ на величины $\omega_{opt_{J,k}}^a$, $\omega_{opt_{j,k}}^d$ меньше 1 (или равные 1, если

$\sigma^2 = 0$ и когда фильтрация не нужна). Такая процедура получения оценок в англоязычной литературе получила название *shrinkage* (глагол *to shrinkage* – сжимать). ♦

К сожалению, построенные оптимальные оценки (3.2.12) включают в себя отношение «шум/сигнал», который на практике неизвестен из-за незнания значений «точного» коэффициента разложения, стоящего в знаменателях выражений (3.2.13). *Эти оценки представляют теоретический интерес, так как указывают, к чему надо стремиться при построении оценок, реализуемых на практике.* Одна из таких оценок, основанная на итерационном уточнении «шум/сигнал», строится ниже.

3.2.2. Итерационное уточнение отношения «шум/сигнал»

Для упрощения записи алгоритма вычисления оценок с уточнением отношения «шум/сигнал» введем следующие обозначения: θ – любой точный коэффициент разложения; $\tilde{\theta}$ – коэффициент, вычисленный по зашумленным значениям функции; $\tilde{S} = \sigma^2 / \tilde{\theta}^2$. Пусть задана (или вычислена) некоторая «стартовая» оценка $\hat{\theta}^{(0)}$ для коэффициента θ . Вычислим нулевое приближение для отношения «шум/сигнал»: $\hat{S}^{(0)} = \sigma^2 / (\hat{\theta}^{(0)})^2$. Подставляя это отношение в (3.2.12), получаем $\hat{\theta}^{(1)} = \frac{1}{1 + \hat{S}^{(0)}} \tilde{\theta}$. Далее подставляя $\hat{\theta}^{(1)}$ в отношение «шум/сигнал», получаем $\hat{S}^{(1)}$, $\hat{\theta}^{(2)}$ и таким образом приходим к итерационной процедуре апостериорного уточнения отношения «шум/сигнала» вида:

$$\hat{S}^{(n)} = \frac{\sigma^2}{(\hat{\theta}^{(n)})^2}; \hat{\theta}^{(n+1)} = \frac{1}{1 + \hat{S}^{(n)}} \tilde{\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.15)$$

Эта процедура уточнения аналогична процедуре оценивания квазиоптимальных коэффициентов ДПФ в алгоритмах Фурье-

фльтрации (см. п. 1.4). Поэтому далее приведем только конечные выражения, опуская промежуточные выводы и доказательства, которые полностью аналогичны приведенным в п. 1.4.2.

Запишем квадратное уравнение:

$$\left(\hat{S}^*\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{\tilde{S}}\right)\hat{S}^* + 1 = 0, \quad (3.2.16)$$

корни которого определяются по формуле:

$$\hat{S}_{1,2}^* = \frac{1 - 2\tilde{S} \pm \sqrt{1 - 4\tilde{S}}}{2\tilde{S}} \quad (3.2.17)$$

и зависят от величины \tilde{S} .

Утверждение 3.2.1. Итерационная процедура уточнения отношения «шум/сигнал» сходится к следующему предельному значению:

$$\hat{S}^* = \begin{cases} \hat{S}_1^*, & \text{если } \tilde{S} \leq 1/4 \text{ и } 0 < \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^*; \\ \hat{S}_2^*, & \text{если } \tilde{S} \leq 1/4 \text{ и } \hat{S}^{(0)} = \hat{S}_2^*; \\ \infty, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Подставляя \hat{S}^* в выражение (3.2.11), получаем оценку

$$\hat{\theta}^* = \frac{1}{1 + \hat{S}^*} \tilde{\theta}. \quad (3.2.19)$$

Алгоритм (3.2.19) можно назвать *квазиоптимальным* алгоритмом оценивания коэффициента разложения, так как в нем вместо оптимальной величины отношения «шум/сигнал» используется ее оценка (3.2.18) – предельная точка итерационной процедуры (3.2.15).

Деля в (3.2.19) замену общего обозначения $\tilde{\theta}$ на конкретный зашумленный коэффициент разложения ($\tilde{a}_{j,k}$ или $\tilde{d}_{j,k}$), получаем соответствующие *квазиоптимальные коэффициенты* ($\hat{a}_{j,k}^*$ или $\hat{d}_{j,k}^*$) вейвлет-разложения. Сглаженную функцию с такими коэффициентами обозначим как $\hat{f}^*(x)$.

Очевидно, что «хороший» алгоритм фильтрации должен обеспечивать сходимость сглаженной функции $\hat{f}(x)$ к точной функции $f(x)$ (которая имеет вейвлет-представление) при стремлении уровня шума к нулю. Определим такую сходимость следующим пределом:

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{f}) &= M \left[\|\hat{f} - f\|^2 \right] = \\ &= M \left[\int_R (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Из выражения (3.2.14) видно, что оптимальные оценки (3.2.12) обеспечивают сходимость (3.2.20) и при достаточно малых σ^2 , величина СКО сглаживания имеет порядок σ^2 . Покажем сходимость функций $\hat{f}^*(t)$ с квазиоптимальными коэффициентами разложения $\hat{a}_{j,k}^*$, $\hat{d}_{j,k}^*$.

Утверждение 3.2.2. Если «стартовая» (для итерационной процедуры уточнения) функция $\hat{f}^{(0)}(x)$ с коэффициентами разложения $\hat{a}_{j,k}^{(0)}$, $\hat{d}_{j,k}^{(0)}$ сходится к функции $f(x)$ при $\sigma^2 \rightarrow 0$, т.е.

$$M \left[\|\hat{f}^{(0)} - f\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0, \quad (3.2.21)$$

то имеет место сходимость

$$M \left[\|\hat{f}^* - f\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (3.2.22)$$

Доказательство. Вернемся к обозначениям $\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}^*$, \hat{S}_1^* , \hat{S}_2^* и заметим, что для сходимости (3.2.22) необходимо и достаточно выполнение предельных соотношений:

$$\lim \hat{S}_1^* = 0 \text{ и } \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^* \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (3.2.23)$$

Если имеет место сходимость (3.2.21), то справедливы выражения: $\hat{S}^{(0)} \geq \tilde{S}$; $\lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \hat{S}^{(0)} = 0$ при $\sigma^2 \rightarrow 0$. Рассмотрим предельное поведение корней \hat{S}_1^*, \hat{S}_2^* при $\tilde{S} \rightarrow 0$. При достаточно малых значениях \tilde{S} справедливо представление $(1 - 4\tilde{S})^{1/2} = 1 - 2\tilde{S} - 2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3 - 10\tilde{S}^4 - 28\tilde{S}^5 - \dots$.

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \hat{S}_1^* &= \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S} - (1 - 4\tilde{S})^{1/2}}{2\tilde{S}} \approx \\ &\approx \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3 - 10\tilde{S}^4}{2\tilde{S}} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

По аналогии можно доказать предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \hat{S}_2^* &= \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S} + (1 - 4\tilde{S})^{1/2}}{2\tilde{S}} \approx \\ &\approx \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{2 - 4\tilde{S} - 2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3}{2\tilde{S}} = \infty. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Из существования пределов (3.2.24), (3.2.25) и условий (3.2.24) следует сходимость (3.2.22). ♣

Очевидно, что в качестве функций $\hat{f}^{(0)}(t)$ могут быть приняты либо «исходная» функция $\tilde{f}(t)$, либо предварительно сглаженная функция, которая удовлетворяет условию (3.2.21).

Замечание 3.2.2. Построенный квазиоптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации относится к классу локальных – для каждого коэффициента разложения вычисляется свой фильтрующий множитель $\frac{1}{1 + \hat{S}^*}$. ♦

Замечание 3.2.3. Для вычисления нулевого отношения $\hat{S}^{(0)} = \sigma^2 / (\hat{\theta}^{(0)})^2$ и отношения $\tilde{S} = \sigma^2 / (\tilde{\theta})^2$ необходимо задать

дисперсию σ^2 . Как правило, на практике σ^2 неизвестна и поэтому используется оценка:

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{\text{median}(|d_{1,k}|)}{0.6745} \right]^2, \quad (3.2.26)$$

где оператор $\text{median}(|d_{1,k}|)$ вычисляет медиану абсолютных величин коэффициентов первого уровня (объем выборки равен $N/2$). Эта оценка получена из оценки среднеквадратического отклонения, используемой в робастных алгоритмах регрессионного анализа. Приведем результаты некоторых вычислительных экспериментов по исследованию точности оценки [16, 52].

В первом эксперименте дисперсия погрешностей η_i задавалась $\sigma^2 = 0.91 \cdot 10^{-3}$ (что соответствовало относительному уровню $\delta_\eta = 0.012$). Далее по 30 различным реализациям $\tilde{d}_{1,k}$ ($N/2 = 1024$) вычислялась оценка (3.2.26) и все значения этой оценки находились в интервале $[0.87 \cdot 10^{-3}, 1.01 \cdot 10^{-3}]$.

Во втором эксперименте дисперсия погрешностей η_i задавалась $\sigma^2 = 0.91 \cdot 10^{-1}$ (что соответствовало $\delta_\eta = 0.12$) и вычисленные значения оценки (3.2.26) находились в интервале $[0.88 \cdot 10^{-1}, 0.97 \cdot 10^{-1}]$. Эти результаты говорят о приемлемой точности оценки (3.2.26). ♦

3.3. Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации

Рассмотрены алгоритмы вейвлет-фильтрации, в которых оценки для детализирующих коэффициентов вычисляются с использованием пороговых функций. Эти функции обращают в

ноль (зануляют) относительно малые коэффициенты, сохраняя или линейно преобразуя только относительно большие коэффициенты.

3.3.1. Пороговые оценки коэффициентов разложения

Теоретической основой построения пороговых оценок служат следующие предпосылки:

- только небольшое число детализирующих коэффициентов $d_{j,k}$ разложения точной функции уровнями $j = 1, 2, 3$ отличны по модулю от нуля;

- особенно сильному влиянию шума измерения подвергаются детализирующие коэффициенты уровнями разложения $j = 1, 2, 3$.

- уровень ошибок вычисления коэффициентов разложения достаточно мал по сравнению с коэффициентами разложения точной функции, что позволяет «распознать» две ситуации: «шумовой коэффициент» или «информативный коэффициент».

Хорошей иллюстрацией этих предпосылок являются примеры 3.1.1 (относительные ошибки вычисления коэффициентов) и 3.1.2.

Таким образом, необходимо обратить в ноль шумовые коэффициенты разложения, которые обусловлены только шумом измерения, сохранив при этом коэффициенты разложения точной функции (такие коэффициенты выше были названы информативными).

В определенной степени этому требованию удовлетворяют пороговые алгоритмы оценивания коэффициентов разложения, которые в зарубежной литературе получили название *thresholding*. В этих алгоритмах наиболее часто используются две пороговые функции:

- «жесткая» пороговая функция вида:

$$\text{hard}(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda; \end{cases} \quad (3.3.1)$$

- «мягкая» пороговая функция вида:

$$\text{soft}(\tilde{d}, \lambda) = \text{sign}(\tilde{d}) \cdot \left[|\tilde{d}| - \lambda \right]_+, \quad (3.3.2)$$

где обозначение $[z]_+$ определяется как:

$$[z]_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0; \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Графики этих функций приведены на рис. 3.6 (функция *hard* обозначена сплошной линией, функция *soft* – точечной).

Кроме приведенных пороговых функций, на практике используются (но гораздо реже) и другие функции [30, 35], параметрами которых являются пороговые величины.

Величина порога λ выполняет роль «управляющего» параметра, влияющего на ошибку фильтрации. Критичность его выбора иллюстрируется примером 3.1.3. При заниженном значении λ часть шумовых коэффициентов разложения не зануляются и результат обратного вейвлет-преобразования (отфильтрованная функция) может содержать значительный остаточный шум, т.е. функция не достаточно сглажена. При завышенном пороге λ зануляются информативные коэффициенты и результат фильтрации оказывается переглаженным.

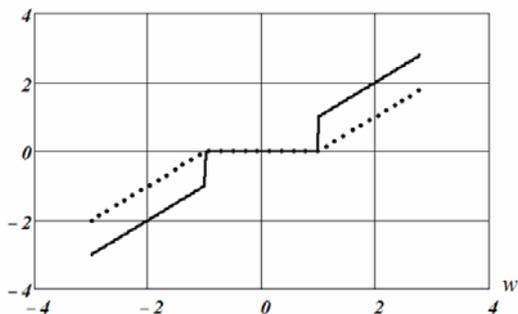


Рис. 3.6. Графики пороговых функций

Программная реализация алгоритма вейвлет-фильтрации с задаваемым порогом λ в виде подпрограмм-функций приведена в *Приложении 2*.

Обращение к подпрограммам-функциям имеет вид:

$$D1_Filter_H(f_\eta, \lambda, J_{fil}, J_{wav}, wavelet);$$

$$D1_Filter_S(f_\eta, \lambda, J_{fil}, J_{wav}, wavelet).$$

Формальные параметры:

f_η – одномерный массив длины $N = 2^{j_0}$, содержащий зашумленные значения функции;

λ – задаваемое значение порога;

J_{fil} – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

J_{wav} – уровень разложения в базисе вейвлет-функции (необходимо выполнения неравенства $J_{fil} \leq J_{wav} < j_0$);

wavelet – задает имя семейства вейвлет-функций. Например, задав *daublet(8)*, имеем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8.

Результатом работы является массив длины N , содержащий сглаженные значения функции.

Заметим, что в этих подпрограммах-функциях использовались функции Mathcad, описанные в п. 3.1.3, находящиеся в файле *Wavedef*, который входит в состав пакета *Wavelet Extension* системы компьютерной математики Mathcad14.

Пример 3.3.1. Для зашумленной функции примера 3.1.1 (см. рис. 3.1б) необходимо установить зависимость ошибки фильтрации от величины λ пороговых алгоритмов оценивания коэффициентов разложения (см. (3.3.1),(3.3.2)). Относительная ошибка исходных данных $\delta_\eta = 0.12$.

Решение. В качестве меры точности фильтрации примем относительную ошибку $\delta_f(\lambda) = \frac{\|\hat{f}_\lambda - f\|}{\|f\|}$, где \hat{f}_λ – вектор, составленный из значений отфильтрованной функции; f – вектор значений точной функции (размерность $N = 2048$). На рис. 3.7

приведены графики функции $\delta_f(\lambda)$ для жесткой пороговой функции (сплошная кривая) и мягкой (точечная кривая). По оси абсцисс откладывалась величина λ/σ . Видно наличие минимума у этих двух зависимостей, но точки минимума не совпадают. Левая ветвь (от точки минимума) обусловлена преобладанием случайной ошибки фильтрация (функция недоглажена), правая ветвь – систематической ошибкой (функция переглажена). ☹

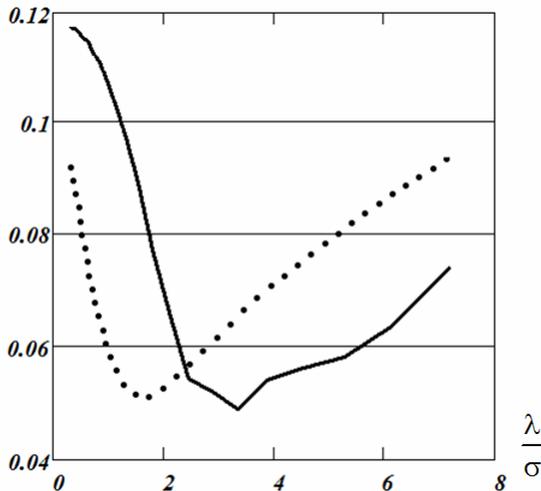


Рис. 3.7. Зависимость ошибки фильтрации от параметра λ

Возникает вопрос: какая пороговая функция предпочтительнее для фильтрации шумов? Однозначный ответ дать затруднительно, но проведенный вычислительный эксперимент позволяет отметить следующие особенности пороговых функций *hard* и *soft*:

- функция *hard* приемлемо работает при низком уровне шума, когда все шумовые коэффициенты разложения по модулю меньше порога λ и они соответственно зануляются, а все информативные превосходят по модулю порог λ и сохраняются;

- из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину λ в функции *soft* возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала;

- отсутствие в функции *soft* разрыва в окрестности точки λ (см. рис. 3.6) в определенной степени предотвращает появление осцилляций (эффекта Гиббса) в особых точках сигнала. Этот эффект может проявиться при использовании пороговой функции *hard*;

- функция *soft* используется при оценивании коэффициента разложения методом максимума апостериорной вероятности при предположениях: а) ошибка вычисления коэффициента разложения подчиняется нормальному распределению; б) точный коэффициент разложения имеет распределение Лапласа (априорное распределение).

Однако заметим, что все-таки решающее влияние на величину ошибки фильтрации оказывает величина порога λ этих пороговых функций (это хорошо иллюстрирует рис. 3.7).

По-видимому, выбор λ должен быть согласован с дисперсией ошибки вычисления коэффициентов разложения. При этом величина λ может быть одинаковой для всех уровней разложения или определяется для каждого уровня. При фильтрации изображений пороговые значения могут быть различными даже для каждой из матриц H_j, V_j, D_j j -го уровня разложения. В подпрограммах-функциях *D1_Filter_H*, *D1_Filter_S*, приведенных в *Приложении 1*, порог λ одинаков для всех уровней разложения.

Более того, некоторые пороговые величины λ рекомендуется использовать только с определенными пороговыми функциями (с *hard*, но более всего с *soft*).

Для выбора порога λ в литературе предложено несколько методов, часть из которых, рассматривается далее.

3.3.2. Универсальный порог (UNIV-порог)

Этот порог предложен в работах [32, 34] и определяется для каждого j -го уровня разложения следующим выражением:

$$\lambda_j^{UNIV} = \sigma \sqrt{2 \ln N_j}, \quad (3.3.4)$$

где N_j – число детализирующих коэффициентов на j -м уровне разложения. Таким образом, чем выше уровень разложения, тем меньше величина порога. Теоретическим обоснованием такого выбора может служить

Утверждение 3.3.1. [32, 33] Предположим, что $f(x)$ является кусочным полиномом на интервале $[0, 1]$. Тогда оптимальная величина порога λ_{opt} функции *soft*, минимизирующая СКО фильтрации

$$\Delta(\lambda) = M \left[\left\| \hat{f}_\lambda - f \right\|^2 \right] \quad (3.3.5)$$

при $N \rightarrow \infty$ имеет порядок

$$\lambda_{opt} \approx \sigma \sqrt{2 \ln N}. \quad \clubsuit \quad (3.3.6)$$

В *Приложении 2* приведен фрагмент документа Mathcad, содержащий текст подпрограммы-функции *D1_Filter_Univ*, которая осуществляет вейвлет-фильтрацию одномерного сигнала с универсальным порогом λ_j (3.3.4). Обращение имеет вид:

$$D1_Filter_Univ(f_\eta, J_{fil}, J_{wav}, wavelet, Num).$$

Формальные параметры:

f_η – одномерный массив длины $N = 2^{j_0}$, содержащий зашумленные значения функции;

J_{fil} – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

J_{wav} – уровень разложения в базисе вейвлет-функций (необходимо выполнения условия $J_{fil} \leq J_{wav} < j_0$);

wavelet – задает имя семейства вейвлетов. Например, задав *daublet(8)*, получаем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8;

Num – задает вид пороговой функции: если $Num = 1$, то функция *hard*; если $Num > 1$, то функция *soft*.

Результатом работы является массив данной N , содержащий отфильтрованные значения функции.

Внимание! Значение среднеквадратического отклонения σ , входящего в (3.3.4), оценивается внутри подпрограммы функции (см. (3.2.26)).

Вернемся к формуле (3.3.4), которая получена из условия минимума СКО (3.3.5) при $N \rightarrow \infty$, т.е. носит асимптотический характер. На практике величина N конечна и во многих случаях не превосходит несколько сотен. Поэтому возникает вопрос: на сколько оптимален универсальный порог λ_j^{UNIV} ? Для ответа на этот вопрос был проведен вычислительный эксперимент, описанный в следующем примере.

Пример 3.3.2. Для зашумленной функции примера 3.1.1 (см. рис 3.1 б с относительными ошибками $\delta_\eta = 0.12$ и $\delta_\eta = 0.025$ установить значение β_{opt} величины β , входящей в выражение

$$\lambda_j^\beta = \beta \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \ln N_j}, \quad (3.3.7)$$

при котором достигается минимум относительной ошибки

фильтрации $\delta_f(\beta) = \frac{\|\hat{f}_\beta - f\|}{\|f\|}$, где \hat{f}_β – значение сглаженной

функции при заданном значении β в формуле (3.3.7).

Решение. Для вычисления β_{opt} были заданы 20 значений β из интервала $[0.1, 2]$ и при этих значениях вычислялись относительные ошибки фильтрации. На рис. 3.8 а приведены значения этих ошибок при использовании пороговой функции *soft*: сплошная кривая – $\delta_\eta = 0.12$; точечная кривая – $\delta_\eta = 0.023$.

На рис. 3.8 б приведены ошибки для пороговой функции *hard* с сохранением тех же обозначений. Значения координат экстремальных точек приведены в табл. 3.2. Анализ таблицы показывает, что для функции *soft* необходимо более чем в два раза уменьшить получаемые по формуле (3.3.4) значения λ_j^{UNIV} , что-

бы получить минимальные ошибки. Для функции *hard* уменьшение значения λ_j^{UNIV} незначительно.

Это хорошо иллюстрирует рис. 3.9, на котором приведены значения отфильтрованных функций ($\delta_\eta = 0.12$): рис. 3.9 а – с использованием функции *soft*; рис. 3.9 б – с использованием функции *hard*. Для обеих функций $\beta = 1$, т.е. использовались пороговые значения λ_j^{UNIV} . Завышенные значения λ_j^{UNIV} функции *soft* (по сравнению с оптимальными) обусловили сохранение части шумовых коэффициентов разложения, а это в свою очередь увеличило уровень случайной ошибки отфильтрованного сигнала (см. рис. 3.9 а). ●

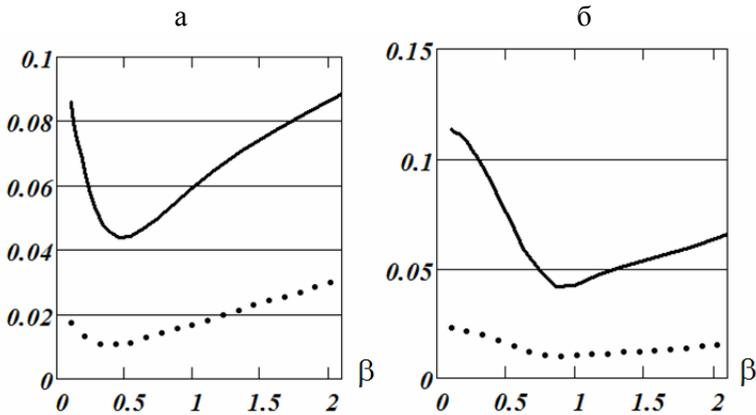


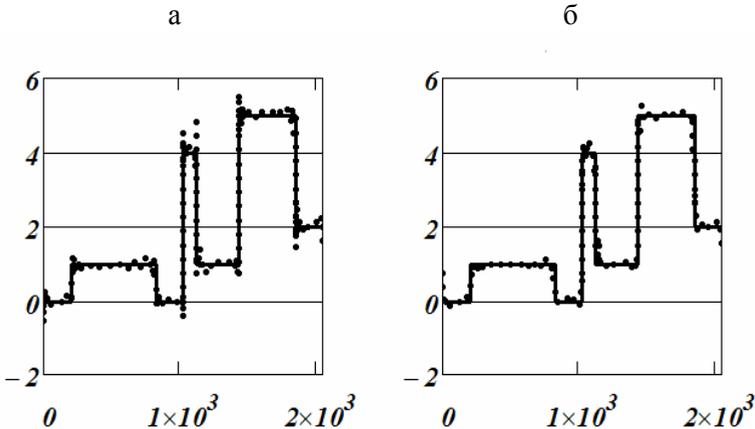
Рис. 3.8. Графики относительной ошибки фильтрации

Таблица 3.2

	Функция <i>soft</i>		Функция <i>hard</i>	
	$\delta_\eta = 0.025$	$\delta_\eta = 0.12$	$\delta_\eta = 0.025$	$\delta_\eta = 0.12$
β_{opt}	0.40	0.46	0.857	0.851
$\delta_f(\beta_{opt})$	0.01	0.043	0.01	0.041

Заметим, что порог λ_j^{UNIV} можно использовать и с функцией *hard*, и с функцией *soft*. По-видимому, это обстоятельство и определила название порога – *универсальный*. Хотя проведенный вычислительный эксперимент примера 3.3.2 показал предпочтительность функции *hard*.

Если *UNIV*-порог функции *soft* одинаков для всех уровней разложения, то такая модификация в англоязычной литературе получила название *VisuShrink*. При фильтрации некоторых одномерных сигналов этот порог дает меньшую ошибку фильтрации по сравнению с порогами λ_j^{UNIV} , вычисляемыми для каждого уровня разложения.

Рис. 3.9. Фильтрация сигнала при $\lambda_j = \lambda_j^{UNIV}$

3.3.3. SURE-порог

Это пороговое значение было предложено в работах [33, 54]. Идея заключается в нахождении величины λ , минимизирующей несмещенную оценку риска Стейна (SURE – *Stein's Unbiased Risk Estimation*). Оценка риска для j -го уровня разложения в случае $\sigma^2 = 1$ определяется выражением:

$$SURE_j(\mu) = N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \left[\min\left(|\tilde{d}_{j,k}|, \mu\right) \right]^2 - 2 \sum_{k=1}^{N_j} If\left(|\tilde{d}_{j,k}| \leq \mu\right), \quad (3.3.8)$$

где If (условие) – условная функция, принимающая значение 1, если условие выполняется, и значение 0 – в противном случае; N_j – число коэффициентов j -го уровня разложения. Если $\sigma^2 \neq 1$, то оценка риска имеет вид:

$$SURE_j(\mu) = N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \left[\min\left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma}, \mu\right) \right]^2 - 2 \sum_{k=1}^{N_j} If\left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \leq \mu\right). \quad (3.3.9)$$

Пороговое значение на j -м уровне разложения определяется выражением:

$$\lambda_j^{SURE} = \sigma \cdot \mu_j^{SURE}, \quad (3.3.10)$$

где μ_j^{SURE} – значение μ , доставляющее минимум функционалу (3.3.9). Рекомендуется пороговую величину λ_j^{SURE} использовать для функции *soft*.

В работе [33] для пороговой функции *soft* показано, что при выполнении условия

$$\frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \left[\left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \leq \frac{(\log_2 N_j)^{3/2}}{\sqrt{N_j}} \quad (3.3.11)$$

предпочтительнее вместо λ_j^{SURE} использовать универсальный порог λ_j^{UNIV} . Такое объединение двух пороговых величин в одну процедуру оценивания коэффициентов j -го уровня разложения получило в зарубежной литературе обозначение *SureShring*.

3.3.4. FDR-порог

Применимо к задаче вычисления пороговой величины метод FDR (*False Discovery Rate*) был рассмотрен в работах [29, 45]. Пусть даны N_j коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$ на j -м уровне разложения. Первоначально вычислим p -величины для каждого коэффициента $\tilde{d}_{j,k}$:

$$p_k = 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \right) \right], \quad (3.3.12)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения нормированной нормально распределенной случайной величины $N(0, 1)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt. \quad (3.3.13)$$

Величину p_k можно трактовать как вероятность попадания случайной величины $x \square N(0, 1)$ в интервал $\left[\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma}, \infty \right)$. Далее из величин p_k формируем вариационный ряд:

$$p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(N_j-1)} \leq p_{(N_j)}. \quad (3.3.14)$$

Затем, начиная с $k=1$, находим индекс m , как наибольшее из тех значений k , для которых выполняется неравенство:

$$p_{(k)} \leq \frac{k}{N_j} \cdot q, \quad (3.3.15)$$

где величина q задается, как правило, равной 0.2, и ее можно трактовать как среднее значение доли коэффициентов разложения, ошибочно используемых в обратном вейвлет-преобразовании (т.е. при построении отфильтрованной функции). Тогда порог, который будем обозначать как λ_j^{FDR} , определяется выражением:

$$\lambda_j^{FDR} = \sigma \Phi^{-1} \left(1 - \frac{P_{(m)}}{2} \right). \quad (3.3.16)$$

Пороговую величину λ_j^{FDR} можно использовать для функций *hard*, *soft*.

3.3.5. Bayes-порог

Этот порог рекомендуется использовать с пороговой функцией *soft*. Он определяется выражением [27]:

$$\lambda_j^B = \frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}_{d_j}}, \quad (3.3.17)$$

где $\hat{\sigma}_{d_j}$ – оценка среднеквадратическое отклонение точных детализирующих коэффициентов j -го уровня разложения, вычисляемая по формуле:

$$\hat{\sigma}_{d_j} = \left[\max \left(\sigma_{\tilde{d}_j}^2 - \sigma^2, 0 \right) \right]^{1/2}. \quad (3.3.18)$$

Дисперсия $\sigma_{\tilde{d}_j}^2$ зашумленных коэффициентов разложения j -го уровня, определяется по формуле:

$$\sigma_{\tilde{d}_j}^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.3.19)$$

В ситуации, когда $\sigma_{\tilde{d}_j}^2 \leq \sigma^2$, имеем $\lambda_j^B = \infty$ и все байесовские оценки

$$\hat{d}_{j,k}^B = \text{soft}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j^B) \quad (3.3.20)$$

на j -м уровне разложения равны нулю.

Замечание 3.3.1. Строго говоря, байесовская пороговая величина была получена для пороговой функции *soft*, но может использоваться и для функции *hard*. ♦

3.3.6. GVC-порог

На протяжении трех десятилетий для выбора параметра регуляризации при построении регуляризованных решений некорректных задач широко используется метод перекрестной значимости (*cross validation method*) [2, 10, 12, 15, 36]. Этот метод применяется для выбора параметра сглаживания при построении сглаживающих сплайнов [2, 37] и для определения параметра сглаживания в алгоритмах Фурье-фильтрации, изложенных в главе 1 (см. п. 1.4). Вариации этого метода для выбора порога в алгоритмах вейвлет-фильтрации были предложены в работах [42, 43].

Величина порога λ^{GCV} является одинаковой для всех уровней разложения и определяется из условия минимума функционала:

$$GCV(\lambda) = \frac{\frac{1}{N} \|\tilde{f} - \hat{f}_\lambda\|^2}{\left[\frac{N_0(\lambda)}{N} \right]^2}, \quad (3.3.21)$$

где $N_0(\lambda)$ – число коэффициентов разложения $\tilde{d}_{j,k}$, которые меньше порога λ , т.е. эти значения при обработке пороговыми функциями зануляются.

Для параметра λ^{GCV} при $N \rightarrow \infty$ имеет место следующее предельное отношение [42]:

$$\frac{M \left[\left\| \hat{f}_{\lambda^{GCV}} - f \right\|^2 \right]}{M \left[\left\| \hat{f}_{\lambda_{opt}} - f \right\|^2 \right]} \downarrow 1.$$

Это означает, что при $N \rightarrow \infty$ СКО фильтрации с порогом $\lambda = \lambda^{GCV}$ приближается к ошибке фильтрации при значении порога $\lambda = \lambda_{opt}$, которое минимизирует ошибку вейвлет-фильтрации с использованием одного порога для всех уровней разложения.

Вычисление функционала (3.3.21) можно полностью осуществить в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения зашумленного сигнала, а именно:

- для пороговой функции *soft*:

$$GCV(\lambda) = \frac{N}{N_0^2(\lambda)} \left[\sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,k}^2 + (N - N_0(\lambda))\lambda^2 \right]; \quad (3.3.22)$$

- для пороговой функции *hard*:

$$GCV(\lambda) = \frac{N}{N_0^2(\lambda)} \sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.3.23)$$

Запись $\sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,r}^2$ обозначает суммирование только тех коэффициентов

$\tilde{d}_{j,k}$, которые по модулю меньше λ . Как правило, порог λ^{GCV} используется для функции *soft* и поэтому в дальнейшем будем пользоваться выражением (3.3.22).

Заметим, что при $\lambda > 0$ функционал $GCV(\lambda)$ является непрерывным (по аргументу λ) и для нахождения точки минимума λ^{GCV} функционала (3.3.22) можно использовать известные методы минимизации нулевого порядка (например процедуру Фибоначчи).

Пример 3.3.3. Для сигнала, точные значения которого изображены на рис. 3.1 а вычислить зависимости $GCV(\lambda)$ и $\delta_f(\lambda)$ для двух уровней шума 0.023 и 0.12.

Решение. Для 60 значений λ из интервала $[0.001, 60]$ вычислим сглаженную функцию (пороговая функция *soft*), найдем относительную ошибку фильтрации и определим значение функционала $GCV(\lambda)$. На рис. 3.10 а показаны графики $GCV(\lambda)$ (точечная кривая) для относительного уровня шума $\delta_\eta = 0.023$, а на рис. 3.10 б – $\delta_\eta = 0.12$. Видно, что точка минимума $GCV(\lambda)$ находится в области минимума относительной ошибки фильтрации (на рисунках сплошная кривая). Аналогичная картина наблюдается и для *hard* (см. рис. 3.11). Таким образом, пороговые значения λ^{GCV} можно использовать в алгоритмах вейвлет-фильтрации. ☺

К преимуществам метода перекрестной значимости следует отнести отсутствие задания дисперсии σ^2 . Недостатками являются:

- пологая левая ветвь графика функционала $GCV(\lambda)$ и наличие нескольких локальных минимумов существенно усложняют вычисление λ^{GCV} численными методами;
- даже небольшая корреляция соседних проекций вектора шума η (коэффициент корреляции по модулю 0.2 и выше) приводит к существенному уменьшению пороговых величин λ_j^{GCV} , что вызывает неполное сглаживание шума алгоритмами вейвлет-фильтрации.

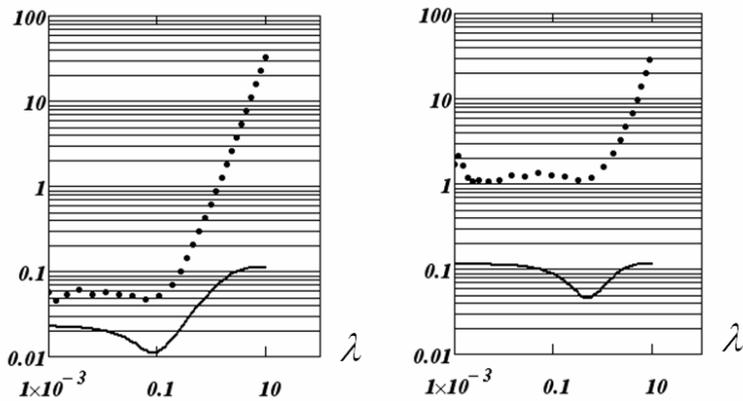


Рис. 3.10. Графики функционала $GCV(\lambda)$ для функции *soft*

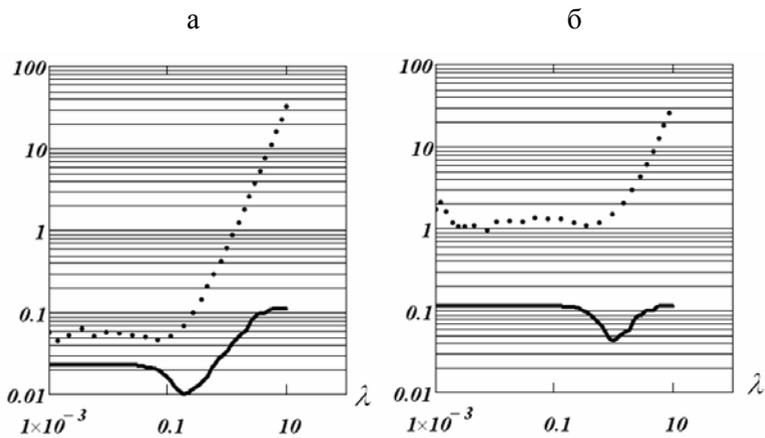


Рис. 3.11. Графики функционала $GCV(\lambda)$ для функции *hard*

Отмеченные недостатки не лишают метод перекрестной значимости права использовать его для вычисления пороговых значений как основного, так и альтернативного метода в алгоритмах вейвлет-фильтрации.

3.3.7. Выбор пороговых значений на основе критерия оптимальности

Критерий оптимальности линейного алгоритма фильтрации был получен в п. 1.4 и использован для выбора параметра сглаживания в линейных алгоритмах Фурье-фильтрации (см. п. 1.4.3). Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации в общем случае не являются линейными. Однако попытаемся использовать этот критерий для нахождения пороговой величины λ .

Напомним (подробнее см. п. 1.4.2), что в качестве оценки для оптимального параметра сглаживания α_{opt} принимается значение α_w , при котором случайная величина

$$\rho_w(\alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{f}_i e_{\alpha_i}}{\sigma^2} \quad (3.3.24)$$

попадает в интервал

$$\left[\mathcal{G}_{\frac{\beta}{2}, N}, \mathcal{G}_{1-\frac{\beta}{2}, N} \right], \quad (3.3.25)$$

где $e_{\alpha_i} = \tilde{f}_i - \hat{f}_{\alpha_i}$, $\mathcal{G}_{\frac{\beta}{2}, N}, \mathcal{G}_{1-\frac{\beta}{2}, N}$ – квантили χ^2 -распределения с числом степеней свободы N уровней $\frac{\beta}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}$ соответственно (обычно вероятность ошибки первого рода $\beta = 0.05$); N – число измеренных значений \tilde{f}_i .

Для пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации порог λ играет роль параметра сглаживания. Поэтому его выбор осуще-

ствим по критерию оптимальности. Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлет-функций статистика $\rho_W(\lambda)$ вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложений:

- для функции *soft*:

$$\rho_W(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - \text{soft}(\tilde{d}_{j,k}; \lambda))}{\sigma^2}; \quad (3.3.26)$$

- для функции *hard*:

$$\rho_W(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - \text{hard}(\tilde{d}_{j,k}; \lambda))}{\sigma^2}. \quad (3.3.27)$$

В качестве оценки для оптимальной величины λ_{opt} (при которой СКО фильтрации пороговыми алгоритмами минимальна) примем значение λ_W , при котором $\rho_W(\lambda)$ попадает в интервал (3.3.25).

Замечание 3.3.2. Если $N > 30$, то границы интервала (3.3.25) при $\beta = 0.05$ можно вычислить по формулам:

$$\mathcal{G}_{0.25,N} = N - 1.96\sqrt{2N}, \quad \mathcal{G}_{0.975,N} = N + 1.96\sqrt{2N}. \quad \blacklozenge \quad (3.3.28)$$

Пример 3.3.4. Для сигнала, точные значения которого изображены на рис. 3.1 а, вычислить зависимости $\rho_W(\lambda)$ и $\delta_f(\lambda)$ для двух уровней шума 0.023 и 0.12 и пороговой функции *soft*.

Решение. Для 60 значений λ из интервала [0.001, 60] вычислим сглаженную функцию (пороговая функция *soft*), найдем относительную ошибку фильтрации $\delta_f(\lambda) = \|\hat{f}_\lambda - f\| / \|f\|$ и оп-

ределим значение $\rho_W(\lambda)$. На рис. 3.12 а показаны графики $\rho_W(\lambda)$ (точечная кривая) для относительного уровня шума $\delta_\eta = 0.023$, а на рис. 3.12 б – $\delta_\eta = 0.12$. Здесь же показаны (штриховыми линиями) границы интервала (3.3.25), которые вычислялись по формулам (3.3.28). Видно, что значения λ , при которых $\rho_W(\lambda)$ попадает в интервал (3.3.25) (т.е. значения λ_W) соответствуют минимуму относительной ошибки фильтрации (на рисунках сплошная кривая). Таким образом, пороговые значения λ_W являются хорошими оценками для λ_{opt} . ☺

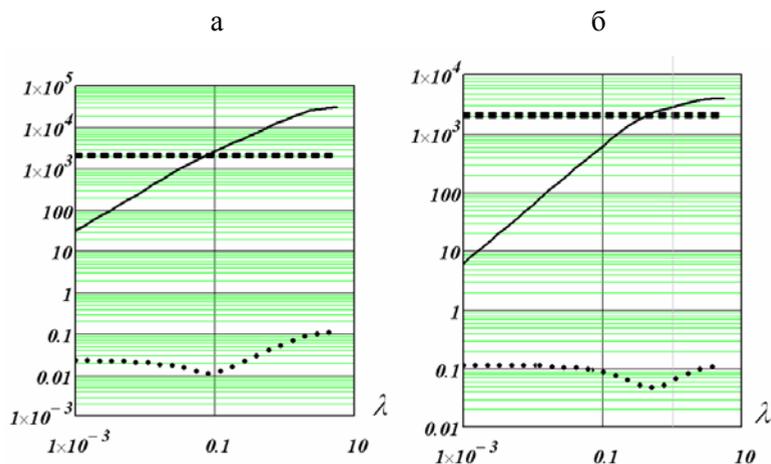


Рис. 3.12. Графики функционала $\rho_W(\lambda)$ для функции *soft*

Заметим, что вычисление λ_W сводится к решению нелинейного уравнения

$$\rho_W(\lambda) = N. \quad (3.3.29)$$

Однако итерационный процесс прекращается, как только $\rho_W(\lambda^{(n)})$ попадает в интервал (3.3.25). Число итераций, необходимых для этого гораздо меньше, чем при поиске корня нелинейного уравнения с заданной точностью $\varepsilon \in [10^{-8}, 10^{-6}]$. Это обуславливает возможность эффективно использовать «медленные» итерационные алгоритмы (например, метод дихотомии – деление отрезка пополам).

Рассмотрим свойства статистики $\rho_W(\lambda)$. Выполнив несложные преобразования, можно $\rho_W(\lambda)$ переписать в виде:

- для функции *soft*:

$$\rho_W(\lambda) = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \lambda} \tilde{d}_{j,k}^2 + \lambda \sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| > \lambda} \tilde{d}_{j,k} \right]; \quad (3.3.30)$$

- для функции *hard*:

$$\rho_W(\lambda) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \lambda} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.3.31)$$

Видно, что статистика $\rho_W(\lambda)$ для функции *soft* является непрерывной функцией параметра λ , в то же время $\rho_W(\lambda)$ для функции *hard* может иметь разрывы первого рода при небольшом числе измерений N и небольшом уровне шума. Поэтому желательно использовать пороговую функцию *soft*.

3.3.8. Реализация алгоритмов вейвлет-фильтрации в Mathcad

В Приложении 2 приведен текст подпрограммы-функции $D1_Filter_λ_{all}$, которая реализует алгоритм вейвлет-фильтрации одномерных сигналов с порогом $λ_w$, а также тексты программных модулей, используемых $D1_Filter_λ_{all}$.

Обращение к подпрограмме-функции $D1_Filter_λ_{all}$ имеет вид:

$$D1_Filter_λ_{all}(f_η, J_{fil}, J_{wav}, wav, Num) .$$

Формальные параметры:

$f_η$ – одномерный массив длиной $N = 2^{j_0}$, содержащий зашумленные значения функции;

J_{fil} – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

J_{wav} – уровень разложения в базисе вейвлет-функций (необходимо выполнение условия $J_{fil} ≤ J_{wav} < j_0$);

wav – задает имя семейства вейвлетов. Например, задав $daublet(8)$, получаем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8;

Num – задает вид пороговой функции: если $Num = 1$, то функция *hard*; если $Num > 1$, то функция *soft*.

Результатом работы является массив данной N , содержащий отфильтрованные значения функции.

Внимание! Значение дисперсии $σ^2$, входящего в (3.3.26), (3.3.27), оценивается внутри описываемой подпрограммы-функции (см. (3.2.26)).

Изложенные алгоритмы вычисления пороговых значений достаточно просто обобщаются для выбора порогов в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные и рассмотренные в монографии частотные алгоритмы фильтрации являются только одним (но весьма востребованным на практике) семейством в большом множестве разнообразных алгоритмов фильтрации.

Одним из серьезных конкурентов являются алгоритмы пространственной фильтрации [3, 26], среди которых выделяются *адаптивные алгоритмы* [5, 6, 11, 38], где за счет изменения размеров апертуры удается уменьшить (в ряде случаев существенно) ошибку фильтрации. Пространственные алгоритмы легко обобщаются для фильтрации многомерных сигналов (размерности 3,4 и выше), а также для обработки векторных полей [7, 9, 11, 48, 50, 51], где каждый отсчет является не скалярной величиной, а вектором.

В работе [17] был выполнен обширный вычислительный эксперимент по фильтрации частотными и пространственными алгоритмами «гладких» и «негладких» изображений, искаженных шумами разной статистической природы (включая импульсные шумы). Анализ результатов этого эксперимента позволяет сделать следующие выводы:

- алгоритмы вейвлет-фильтрации можно использовать для фильтрации однородного шума небольшого уровня, при сжатии изображений или построении параметрического представления для последующего применения (например, в задачах распознавания образов, регрессионном анализе и т.д.);
- алгоритмы пространственной фильтрации следует использовать для фильтрации больших уровней шума, в особенности, изображений, искаженных импульсными шумами.

Эти выводы еще раз подчеркивают возможность и необходимость использования в задачах фильтрации различных алгоритмов. Выбор конкретного алгоритма зависит от модели сигнала и объема имеющейся априорной информации, а также от «алгоритмических вкусов» пользователя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Астафьева Н. М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. М. Астафьева // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166. – № 11. – С. 1145–1170.
2. **Воскобойников Ю. Е.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике / Ю. Е. Воскобойников, Н. Г. Преображенский, А. И. Седельников. – Новосибирск : Наука, 1984. – 238 с.
3. **Бронников А. В.** Нелинейные комбинированные алгоритмы фильтрации зашумленных сигналов и изображения / А. В. Бронников, Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 1990. – № 1. – С. 21–28.
4. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующего алгоритма восстановления изображений / Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 1995. – № 3. – С. 64–72.
5. **Воскобойников Ю. Е.** Локальные адаптивные алгоритмы фильтрации цифровых изображений / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Научный вестник НГТУ. – 1997. – № 3. – С. 21–32.
6. **Воскобойников Ю. Е.** Алгоритмы фильтрации изображений с адаптацией размеров апертуры / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Автометрия. – 1998. – № 3. – С. 18–25.
7. **Воскобойников Ю. Е.** Нелинейные алгоритмы фильтрации векторных сигналов / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Автометрия. – 1999. – № 5. – С. 97–106.
8. **Воскобойников Ю. Е.** Регуляризирующий алгоритм восстановления изображений с уточнением локальных отношений «шум/сигнал» / Ю. Е. Воскобойников, И. Н. Мухина // Автометрия. – 1999. – № 4. – С. 71–83.
9. **Воскобойников Ю. Е.** Векторные локальные фильтры с адаптацией размера апертуры / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Автометрия. – 2001. – № 6. – С. 32–42.
10. **Воскобойников Ю. Е.** Численная реализация и сравнение четырех способов выбора параметра регуляризации в устойчивых алгоритмах деконволюции / Ю. Е. Воскобойников // Научный вестник НГТУ. – 2004. – № 2 (17). – С. 27–44. (www.ngasu.nsk.su/prikl/deconv04.html)
11. **Воскобойников Ю. Е.** Новый алгоритм адаптации апертуры векторных локальных фильтров / Ю. Е. Воскобойников,

- А. М. Кузнецов // Автометрия. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 3–10.
12. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации : монография / Ю. Е. Воскобойников. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2006. – 86 с. (www.sibstrin.ru/prikl/monogr07.html)
 13. **Воскобойников Ю. Е.** Частотно-пространственный устойчивый алгоритм восстановления контрастных изображений / Ю. Е. Воскобойников, В. А. Литасов // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 1 (22). – С. 3–14.
 14. **Воскобойников Ю. Е.** Комбинированный нелинейный алгоритм восстановления контрастных изображений при не точно заданной аппаратной функции / Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 3–14.
 15. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач : монография / Ю. Е. Воскобойников. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2007. – 184 с.
 16. **Воскобойников Ю. Е.** Алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложений при фильтрации сигналов и изображений / Ю. Е. Воскобойников, А. В. Гочаков // Автометрия. – 2010. – Т. 46, № 1. – С. 24–45.
 17. **Воскобойников Ю. Е.** Два класса алгоритмов фильтрации и их сравнение / Ю. Е. Воскобойников, А. В. Гочаков // Автометрия. – 2011. – Т. 47, № 1.
 18. **Гочаков А. В.** Квазиоптимальный алгоритм фильтрации коэффициентов вейвлет-разложения при сжатии сигнала / А. В. Гочаков // Труды НГАСУ. – 2009. – № 2(45). – С. 77–83.
 19. Цифровая обработка изображений в информационных системах / И. С. Грузман [и др.]. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. – 352 с.
 20. **Даджион Д.** Цифровая обработка многомерных сигналов / Д. Даджион, Р. Мерсеро. – М. : Мир, 1988. – 463 с.
 21. **Дремин И. Л.** Вейвлеты и их использование / И. Л. Дремин, О. А. Иванов, В. А. Нечитайло // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171, № 5. – С. 465–501.

22. **Дьяконов В. П.** Вейвлеты. От теории к практике / В. П. Дьяконов. – М. : СОЛОМОН-Р. – 2002. – 448 с.
23. **Новиков Л. В.** Основы вейвлет-анализа сигналов / Л. В. Новиков. – СПб. : Изд-во ООО «Модус+», 1999. – 262 с.
24. **Рабинер Л.** Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978. – 847 с.
25. **Смоленцев Н. К.** Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в Matlab / Н. К. Смоленцев. – М. : Изд-во ДМК, 2005. – 304 с.
26. **Хуанг Т. С.** Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т. С. Хуанг. – М. : Радио и связь, 1984. – 340 с.
27. **Abramovitch F.** Wavelet thresholding via a Bayesian approach / F. Abramovitch, T. Sapatinas, B. W. Silverman // Journal of the Roy Statist. Soc. Ser. B. – 1998. – № 60. – P. 725–749.
28. **Abramovitch F.** Adaptive thresholding of wavelet coefficients F. Abramovitch, Y. Benjamini // Computational Statistics and Data Analyses. 1996. – V. 222, № 2. – P. 351–361.
29. **Benjamini Y.** Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing / Y. Benjamini, Y. Hochberg // Journal of the Roy Statist. Soc. Ser. B. – 1995. – № 57. – P. 289–300.
30. **Bruce A. G.** Waveshrink with firm shrinkage / A. G. Bruce, H.-Y. Gao // Statistica Sinica. – 1997. – V. 4, № 6. – P. 855–874.
31. **Chang S. G.** Adaptive wavelet thresholding for image denoised and compression / S. G. Chang, B. Yu, M. Vetterli // IEEE Transactions on Image Processing. – 2000. – V. 9, № 8. – P. 1532–1546.
32. **Donoho D. L.** Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage / D. L. Donoho, I. M. Johnstone // Biometrika. – 1994. – V. 81, № 3. – P. 425–455.
33. **Donoho D. L.** Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage / D. L. Donoho, I. M. Johnstone // Journal of the American Statistical Association. – 1995. – V. 90, № 432. – P. 1200–1224.
34. **Donoho D. L.** De-noised by soft-thresholding / D. L. Donoho // IEEE Trans. Information Theory. 1995. – V. 41, № 3. – P. 613–627.

35. **Gao H.-Y.** Wavelet shrinkage denoising the non-negative garrote / H.-Y. Gao // Journal of Computational and Graphical Statistics. – 1998. – V. 7, № 4. – P. 469–488.
36. **Golub G. H.** Generalized cross validation as a method for choosing a good ridge parameter / G. H. Golub, M. Heath, G. Wahba // Technometrics. – 1979. – V. 21. – P. 215–222.
37. **Graven C.** Smoothing noisy data with spline functions: estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross validation / C. Graven, G. Wahba // Numer. Math. – 1979. – V. 31, № 3. – P. 377–403.
38. **Katkovnik V.** Weighted median filter with varying adaptive windows size / V. Katkovnik, K. Egiastian, J. Astova // Proceedings of the IASTED Intern Conf. on Signal Processing and Communications, Spain 2000. – P. 329–333, 2000.
39. **Mallat S.** Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ / S. Mallat // Trans. AMS. – 1989. – V. 315, № 1. – P. 69–87.
40. **Mallat S.** A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation / S. Mallat // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. – 1989. – V. 11, № 9. – P. 674–693.
41. **Mahesh B.** Adaptive estimators for filtering noisy images / B. Mahesh, W.-J. Song, W. A. Pearlman // Opt. Eng. 1990. – V. 29, № 5. – P. 488.
42. **Nason G. P.** Wavelet shrinkage using cross validation / G. P. Nason // Journal of the Roy Statist. Soc. Ser. B. – 1998. – № 60. – P. 463–479.
43. **Nason G. P.** Choice of wavelet smoothness, primary resolution and threshold in wavelet shrinkage / G. P. Nason // Statistics and Computing. – 2002. – V. 12, № 2. – P. 219–227.
44. **Neelamani R.** ForWaRD: Fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned systems / R. Neelamani, H. Choi, R. Baraniuk // IEEE Transactions on signal processing. – 2004. – V. 52, № 2. – P. 418–426.
45. **Vidakovic B.** Statistical modeling by wavelets. Wiley series in probability and statistics / B. Vidakovic // John Wiley & Sons Inc., 1999. – 365 p.
46. **Voskoboinikov Yu. E.** Estimating the optimal parameter of regularizing algorithms for image restoration / Yu. E. Voskobo-

- inikov // Optoelectronics, Instrumentations and Data Processing. – 1995. – № 3. – P. 64.
47. **Voskoboynikov Yu. E.** Regularizing algorithm of signals and images restoration with specification of the local relations noise/signal / Yu. E. Voskoboynikov, I. N. Mukhina // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 1999. – № 4. – P. 71–82.
 48. **Voskoboynikov Yu. E.** Nonlinear algorithms for vector signal filtering / Yu. E. Voskoboynikov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 1999. – № 5. – P. 96–103.
 49. **Voskoboynikov Yu. E.** Local regularizing algorithm for high-contrast image and signal restoration / Yu. E. Voskoboynikov, I. N. Mukhina // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2000. – № 3. – P. 41–48.
 50. **Voskoboynikov Yu. E.** Vector local filters with an adaptive aperture size / Yu. E. Voskoboynikov, V. G. Belyavtsev // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2001. – № 6. – P. 34–42.
 51. **Voskoboynikov Yu. E.** A new adaptive aperture algorithm for local vector filters / Yu. E. Voskoboynikov, A. M. Kuznetsov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2005. – V. 41, № 5. – P. 14–26.
 52. **Voskoboynikov Yu. E.** Quasi-optimal estimation algorithm of wavelet-decomposition coefficients at a signals filtration / Yu. E. Voskoboynikov, A. V. Gochakov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2010. – V. 46, № 1. – P. 34–45.
 53. **Weyrich N.** Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denoising / N. Weyrich, G. T. Warhola // IEEE Trans. Image Processing. – 1998. – V. 7, № 1. – P. 82–90.
 54. **Zhang X.-P.** Adaptive denoising based on SURE risk / X.-P. Zhang, M. D. Desai // IEEE Signal Process. Lett. – 1998. – V. 5, № 10. – P. 265–267.

Модули 1D алгоритмов Фурье-фильтрации

$$\begin{aligned}
 Q(w) &:= w^2 \\
 \\
 \text{Form}_{f_p}(f) &:= \left| \begin{array}{l} N_f \leftarrow \text{length}(f) \\ \text{for } m \in 3..14 \\ \quad \left| \begin{array}{l} N \leftarrow 2^m \\ \text{break if } N \geq N_f \end{array} \right. \\ \text{for } j \in 0..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} f_{p_j} \leftarrow f_j \text{ if } j \leq N_f - 1 \\ f_{p_j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ f_p \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Calc}_{N_p}(f) &:= \left| \begin{array}{l} N_f \leftarrow \text{length}(f) \\ \text{for } m \in 3..14 \\ \quad \left| \begin{array}{l} N \leftarrow 2^m \\ \text{break if } N \geq N_f \end{array} \right. \\ N \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Form}_f(f_p, N_f) &:= \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..N_f - 1 \\ \quad f_j \leftarrow f_{p_j} \\ f \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Calc}_{D_\eta}(f_\eta, L) &:= \left| \begin{array}{l} N_x \leftarrow \text{length}(f_\eta) \\ f_p \leftarrow \text{Form}_{f_p}(f_\eta) \\ N_p \leftarrow \text{length}(f_p) \\ F_p \leftarrow \text{CFFT}(f_p) \\ D \leftarrow \frac{1}{2 \cdot L} \sum_{l=-L}^L \left[\left| F_p \left(\frac{N_p+l}{2} \right) \right|^2 \right] \\ \frac{N_p^2}{N_x} \cdot D \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$\text{Calc_}Q_p(Q, N, \Delta_\omega) :=$	$\text{for } l \in 0..N-1$ $\left \begin{array}{l} Q_{p_l} \leftarrow Q(l \cdot \Delta_\omega) \text{ if } l \leq \frac{N}{2} \\ Q_{p_l} \leftarrow Q[(N-l) \cdot \Delta_\omega] \text{ otherwise} \end{array} \right.$ Q_p
$\text{Calc_}\alpha_W(F_\eta, Q, \sigma^2, N_x, \Delta_t) :=$	$N \leftarrow \text{length}(F_\eta)$ $\Delta_\omega \leftarrow \frac{1}{N \cdot \Delta_t}$ $\theta_1 \leftarrow N - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot N}$ $\theta_2 \leftarrow N + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot N}$ $Q_p \leftarrow \text{Calc_}Q_p(Q, N, \Delta_\omega)$ $\gamma \leftarrow 10^{-10}$ $\text{for } m \in 1..30$ $\left \begin{array}{l} R_W \leftarrow \frac{N}{\sigma^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{Q_{p_l}}{\gamma + Q_{p_l}} \cdot (F_\eta _l)^2 \right] \\ dR_W \leftarrow -\frac{N}{\sigma^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{Q_{p_l}}{(\gamma + Q_{p_l})^2} \cdot (F_\eta _l)^2 \right] \\ \text{break if } \theta_1 \leq R_W \leq \theta_2 \\ \gamma \leftarrow \gamma - \frac{R_W - N}{dR_W} \end{array} \right.$ $\alpha \leftarrow \frac{1}{\gamma}$

Окончание прил. 1

Подпрограмма-функция $D1_filter_alpha_W$

$$\begin{aligned}
 D1_filter_alpha_W(f, Q, \Delta_x, \sigma^2) := & \left| \begin{array}{l}
 N_x \leftarrow length(f) \\
 f_p \leftarrow Form_f_p(f) \\
 N \leftarrow length(f_p) \\
 F_\eta \leftarrow CFFT(f_p) \\
 \Delta_\omega \leftarrow \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \\
 Q_p \leftarrow Calc_Q_p(Q, N, \Delta_\omega) \\
 \alpha_W \leftarrow Calc_alpha_W(F_\eta, Q_p, \sigma^2) \\
 \text{for } l \in 0..N-1 \\
 F_l \leftarrow \frac{1}{1 + \alpha_W \cdot Q_{p_l}} \cdot F_{\eta_l} \\
 f_p \leftarrow Re(ICFFT(F)) \\
 f \leftarrow Form_f(f_p, N_x)
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Подпрограмма-функция $D1_filter_alpha_ZAD$

$$\begin{aligned}
 D1_filter_alpha_ZAD(f, Q, \alpha, \Delta_x, \sigma^2) := & \left| \begin{array}{l}
 N_x \leftarrow length(f) \\
 f_p \leftarrow Form_f_p(f) \\
 N \leftarrow length(f_p) \\
 F_\eta \leftarrow CFFT(f_p) \\
 \Delta_\omega \leftarrow \frac{1}{N \cdot \Delta_x} \\
 Q_p \leftarrow Calc_Q_p(Q, N, \Delta_\omega) \\
 \text{for } l \in 0..N-1 \\
 F_l \leftarrow \frac{1}{1 + \alpha \cdot Q_{p_l}} \cdot F_{\eta_l} \\
 f_p \leftarrow Re(ICFFT(F)) \\
 f \leftarrow Form_f(f_p, N_x)
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

МОДУЛИ 1D АЛГОРИТМОВ
ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

```

ORIGIN = 0
Hard(w, λ) :=
    N ← length(w)
    for j ∈ 0..N - 1
        wfj ← if (|wj ≥ λ, wj, 0)
    wf

Soft(w, λ) :=
    N ← length(w)
    for j ∈ 0..N - 1
        wfj ← sign(wj) · if [(|wj - λ) > 0, |wj - λ, 0]
    wf

```

```

D1_Filter_H(fη, λ, Jfη, Jwav, wavelet) :=
    com ← "функция Hard"
    com ← "порог λ задан"
    Jmax ← MaxDWTLevel(fη)
    if (Jwav > Jmax) ∨ (Jfη > Jwav)
        error("error J.wav>Jmax")
        return Jmax
    w ← dwt(fη, Jwav, wavelet)
    wf ← w
    for l ∈ 1..Jfη
        wm ← get_detail(w, l)
        wmf ← Hard(wm, λ)
        wf ← put_detail(wf, l, wmf)
    fλ ← idwt(wf, Jwav, wavelet)
    fλ

```

$DI_Filter_S(f_\eta, \lambda, J_{fil}, J_{wav}, wavelet) :=$	<pre> com ← "функция Soft " com ← "порог λ задан " J_max ← MaxDWTLevel(f_η) if (J_wav > J_max) ∨ (J_fil > J_wav) error("error J.wav>Jmax") return J_max w ← dwt(f_η, J_wav, wavelet) wf ← w for l ∈ 1.. J_fil wm ← get_detail(w, l) wmf ← Soft(wm, λ) wf ← put_detail(wf, l, wmf) f_λ ← idwt(wf, J_wav, wavelet) f_λ </pre>
--	--

```

D1_Filter_UNIV( $f_{\eta}$ ,  $J_{fil}$ ,  $J_{wav}$ ,  $wavelet$ ,  $Num$ ) :=
  com ← "Универсальный порог"
  com ← "для каждого уровня разложения"
   $J_{max} \leftarrow MaxDWTLevel(f_{\eta})$ 
  if ( $J_{wav} > J_{max}$ )  $\vee$  ( $J_{fil} > J_{wav}$ )
    error("error J>Jmax")
    return  $J_{max}$ 
  w ← dwt( $f_{\eta}$ ,  $J_{wav}$ ,  $wavelet$ )
  wf ← w
  for  $l \in 1 \dots J_{fil}$ 
    wm ← get_detail(w, l)
     $n_l \leftarrow length(wm)$ 
    if  $l = 1$ 
      com ← "вычисление дисперсии"
       $wm1 \leftarrow wm$ 
       $\sigma \leftarrow \frac{median(\overrightarrow{|wm1|})}{0.6547}$ 
       $\lambda \leftarrow \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \ln(n_l)}$ 
       $wmf \leftarrow Hard(wm, \lambda)$  if  $Num = 1$ 
       $wmf \leftarrow Soft(wm, \lambda)$  otherwise
    wf ← put_detail(wf, l, wmf)
  xf ← idwt(wf,  $J_{wav}$ ,  $wavelet$ )
  xf

```

$Calc_FunOPT(wm, wmf, \sigma_2) :=$	$em \leftarrow wm - wmf$ $\rho \leftarrow \frac{1}{\sigma_2} \cdot wm \cdot em$ ρ
$Calc_rhoWSoft(w, \lambda, J_{fII}, \sigma_2) :=$	$\rho \leftarrow 0.0$ <i>for</i> $l \in 1..J_{fII}$ $wm \leftarrow get_detail(w, l)$ $wmf \leftarrow Soft(wm, \lambda)$ $\rho_l \leftarrow Calc_FunOPT(wm, wmf, \sigma_2)$ $\rho \leftarrow \rho + \rho_l$ ρ
$Calc_rhoWHard(w, \lambda, J_{fII}, \sigma_2) :=$	$\rho \leftarrow 0.0$ <i>for</i> $l \in 1..J_{fII}$ $wm \leftarrow get_detail(w, l)$ $wmf \leftarrow Hard(wm, \lambda)$ $\rho_l \leftarrow Calc_FunOPT(wm, wmf, \sigma_2)$ $\rho \leftarrow \rho + \rho_l$ ρ

```

Calc_λWS(w, Jfl, σ2, a, b) :=
  a ← log(a)
  b ← log(b)
  N ← length(w)
  θ1 ← N - 2·√2·N
  θ2 ← N + 2·√2·N
  ρa ← Calc_ρWHard(w, 10a, Jfl, σ2) - N
  for i ∈ 1..100
    | x ←  $\frac{a+b}{2}$ 
    | ρx ← Calc_ρWSoft(w, 10x, Jfl, σ2) - N
    | if θ1 ≤ ρx + N ≤ θ2
      | | λw ← 10x
      | | break
    | if ρx·ρa > 0
      | | a ← x
      | | ρa ← ρx
    | b ← x if ρx·ρa ≤ 0
  λw

```

$Calc_λ_{WH}(w, J_{fll}, σ2, a, b) :=$	$a \leftarrow \log(a)$ $b \leftarrow \log(b)$ $N \leftarrow \text{length}(w)$ $\theta_1 \leftarrow N - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot N}$ $\theta_2 \leftarrow N + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot N}$ $\rho_a \leftarrow Calc_ρ_{WHard}(w, 10^a, J_{fll}, σ2) - N$ for $i \in 1..100$ $x \leftarrow \frac{a+b}{2}$ $\rho_x \leftarrow Calc_ρ_{WHard}(w, 10^x, J_{fll}, σ2) - N$ if $\theta_1 \leq \rho_x + N \leq \theta_2$ $\lambda_w \leftarrow 10^x$ break if $\rho_x \cdot \rho_a > 0$ $a \leftarrow x$ $\rho_a \leftarrow \rho_x$ $b \leftarrow x$ if $\rho_x \cdot \rho_a \leq 0$ λ_w
---	--

Подпрограмма-функция $D1_Filter_λ_{all}$

```

D1_Filter_λall( $f_{\eta}, J_{fil}, J_{wav}, wav, Num$ ) :=
  com ← "Фильтрация одномерного сигнала"
  com ← "порог λ один для всех уровней"
  Jmax ← MaxDWTLevel( $f_{\eta}$ )
  if ( $J_{wav} > J_{max}$ ) ∨ ( $J_{fil} > J_{wav}$ )
    error("error J.wav > Jmax")
  return Jmax
  w ← dwt( $f_{\eta}, J_{wav}, wav$ )
  wr ← w
  wm ← get_detail(wr, 1)
  σ ←  $\frac{\text{median}(\overline{|wm|})}{0.6547}$ 
  a ← 0.001 · σ
  b ← 1000 · σ
  wr ← w
  λW ← Calc_λWH(wr, Jfil, σ2, a, b) if Num = 1
  λW ← Calc_λWS(wr, Jfil, σ2, a, b) otherwise
  wr ← w
  for l ∈ 1 .. Jfil
    wm ← get_detail(w, l)
    wmf ← Hard(wm, λW) if Num = 1
    wmf ← Soft(wm, λW) otherwise
    wr ← put_detail(wr, l, wmf)
  fλ ← idwt(wr, Jwav, wav)
  fλ

```

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Воскобойников Юрий Евгеньевич. Заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин), доктор физико-математических наук, профессор, Соросовский профессор, Заслуженный работник Высшей школы РФ, член ряда Международных и Российских академий. Автор 18 учебных пособий и более 280 научных работ по методам и алгоритмам решения некорректных задач интерпретации экспериментальных данных, вычислительной томографии, фильтрации сигналов и изображений, в том числе трех монографий по решению некорректно поставленных задач. Член двух специализированных советов по защите диссертаций на соискание степени доктора наук.

Колкер Алексей Борисович. Доцент кафедры автоматки Новосибирского государственного технического университета. кандидат технических наук, автор более 20 работ в области систем цифровой обработки изображений, систем визуализации и компьютерного зрения. Автор 3 учебных пособий в области информационных технологий.

Гочаков Александр Владимирович. Аспирант кафедры прикладной математики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). Автор нескольких работ в области фильтрации сигналов и изображений, систем визуализации.

Научное издание

Воскобойников Юрий Евгеньевич
Гочаков Александр Владимирович
Колкер Алексей Борисович

**ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ
И ИЗОБРАЖЕНИЙ:
ФУРЬЕ И ВЕЙВЛЕТ АЛГОРИТМЫ
(с примерами в Mathcad)**

Монография



Темплан 2010 г.

Редактор Г.К. Найденова

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.

Подписано к печати 14.12.2010. Формат 60x84 1/16 д.л.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.

Объём 10,9 уч.-изд.л.; 12,0 п.л. Тираж 50 экз. Заказ №

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)

630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии
НГАСУ (Сибстрин)