ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 24, 1984 № 9

УДК 519.652

# ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ УЗЛОВ ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ

*ЛИГУН А. А., ШУМЕЙКО А. А.*

*(Днепродзержинск—Днепропетровск)*

Решается задача асимптотически оптимального выбора узлов при приближении конкретных функций и их производных параболическими интерполяционными сплайнами минимального дефекта и производных функций кубическими интерполяционными сплайнами.

## Введение

Пусть $\Delta_n[a, b]=\{a=t_{0n}<\ldots<t_{nn}=b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и $S_{rk}(\Delta_n[a, b])$ — множество всех сплайнов порядка $r$ дефекта $k$ по разбиению $\Delta_n[a, b]$, т. е. множество функций, имеющих непрерывную $(r-k)$-ю производную на $[a, b]$ и совпадающих на каждом промежутке $(t_{in}, t_{i+1, n})$, $i=0, 1, \ldots, n-1$, с алгебраическим полиномом степени не выше $r$.

Пусть оператор $P(\Delta_n[a, b])$ отображает $C^\rho[a, b]$ в $S_{rk}(\Delta_n[a, b])$, $\rho\geqslant r-k$. В частности, $P(x, \Delta_n[a, b])$ может быть эрмитовым сплайном (см., например, [1]), сплайном наилучшего приближения (см., например, [2]), интерполяционным сплайном и др.

При фиксированных $\nu$, $r$, $p$ и $[a, b]$ последовательность разбиений $\{\Delta_n{}^*[a, b]\}_{n=1}^\infty$ называется асимптотически наилучшей для функции $x(t)$, если при $n\to\infty$

$$\|x^{(\nu)}-P^{(\nu)}(x, \Delta_n{}^*[a, b])\|_{p[a, b]}=$$
$$=\inf\{\|x^{(\nu)}-P^{(\nu)}(x, \Delta_n[a, b])\|_{p[a, b]}|\Delta_n[a, b]\}[1+o(1)].$$

В [3] рассматривалась задача минимизации по разбиениям $\Delta_n[a, b]$ функционалов вида

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(f(\xi_{in})(t_{i+1,n}-t_{in})),$$

где $\xi_{in}\in[t_{i+1,n}, t_{in}]$, $f(t)$ — положительная функция и $\varphi(t)$ — выпуклая функция.

Эта задача тесно связана с задачей выбора последовательности асимптотически оптимальных разбиений при приближении функций $x\in C^{r+1}$ таких, что $x^{(r+1)}(t)>0$, $t\in[a, b]$, локальными сплайнами.

В [1] найден асимптотически наилучший набор узлов при приближении функций эрмитовыми сплайнами для $p\in[1, \infty]$; одновременно в [4] получен асимптотически оптимальный набор узлов для эрмитовых сплайнов в $p=\infty$ и для ломаных при $p=2$ эта задача решена в [5]. Для различных обобщений локальных сплайнов эта задача решалась в [6]—[8]. Для случая, когда $P(x, \Delta_n[a, b])$ — оператор наилучшего приближения, решение было опубликовано в [2]. В силу того, что сплайны наилучшего приближения и интерполяционные сплайны минимального дефекта не являются локальными, решение этой задачи для них сложнее, чем в предыдущих случаях. В несколько иной постановке задача оптимизации узлов при интерполировании кубическими сплайнами рассматривалась в [9]. Оптимальными алгоритмами в [9] считались алгоритмы, обеспечивающие равенство главных членов асимптотики погрешности приближения на каждом промежутке.

Хорошо известно, что при приближении сплайнами узлы сетки нужно брать гуще там, где больше $(r+1)$-я производная приближаемой функции. Для всех перечисленных выше задач асимптотически оптимальный набор узлов $\Delta_n^*[a, b]=\{t_{in}^*\}_{i=0}^n$ определялся из равенств

$$(1)\qquad \int\limits_a^{t_{in}^*} |x^{(r+1)}(t)|^{1/(r+1-\nu+p^{-1})}\,dt=\frac{i}{n}\int\limits_a^b |x^{(r+1)}(t)|^{1/(r+1-\nu+p^{-1})}\,dt.$$

В настоящей работе будет доказано, что это справедливо для сплайнов минимального дефекта порядка 2 и 3. При оценке сверху сначала эта задача решена для определенного вида локальных сплайнов, затем показано, что для тех узлов, которые предполагаются наилучшими, локальные и интерполяционные сплайны дают асимптотически совпадающую погрешность. Оценка снизу проведена методами, разработанными в теории квадратурных формул.

В конце работы приведен алгоритм асимптотически оптимального выбора узлов, использующий только значения функции в некоторых точках, а также расчеты, позволяющие сравнить погрешности уклонения сплайнов при равноотстоящих узлах и при асимптотически оптимальных узлах.

## § 1. Определения

Пусть $C_*^r[a, b]$ — пространство функций $x\in C^r[a, b]$ таких, что $|x^{(r)}(t)|>0$, $t\in[a, b]$.

Сплайн минимального дефекта $s_r(x, \Delta_n[a, b])\in S_{r1}(\Delta_n[a, b])$ называется интерполяционным для функции $x$, если для $r=1, 3, \ldots$

$$s_r(x, \Delta_n[a, b], t_{in})=x(t_{in}),\qquad i=1, 2, \ldots, n-1,$$

$$s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n[a,b], i)=x^{(\nu)}(i),\qquad \nu\in I_i,\quad i=a, b,$$

и для $r=2, 4, \ldots$

$$s_r(x, \Delta_n[a, b], \bar t_{in})=x(\bar t_{in}),\qquad i=0, 1, \ldots, n-1,$$

$$s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n[a,b], i)=x^{(\nu)}(i),\qquad i=a, b,\quad \nu\in I_i^*,$$

где $\bar t_{in}=t_{in}+h_{in}/2$, $h_{in}=t_{i+1,n}-t_{in}$, $i=0, 1, \ldots, n-1$, $\bar h_n=\max\{h_{in}|i=0, 1, \ldots, n-1\}$ и $I_i$, $I_i^*$ — произвольные подмножества множества $J=\{0, 1, \ldots, r\}$ такие, что число элементов $I_a\cup I_b$ равно $r+1$ и число элементов $I_a^*\cup I_b^*$ равно $r$, причем под $s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n[a, b], a)$ и $s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n[a, b], b)$ понимаем $s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n[a, b], a+0)$ и $s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n[a, b], b-0)$ соответственно.

В дальнейшем для сокращения записи будем писать $\Delta_n$, $C^r, \ldots$ вместо $\Delta_n[0, 1]$, $C^r[0, 1], \ldots$ и обозначим

$$\varepsilon_{nr\nu}(x)_p=\inf\{\|x^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n)\|_p|\Delta_n|\}.$$

Пусть $s_2(x, \Delta_n)$ — параболический интерполяционный сплайн с граничными условиями

$$(2)\qquad s_2(x, \Delta_n, i)=x(i),\qquad i=0, 1,$$

или

(3) $$s_2^{(\nu)}(x,\Delta_n,0)=s_2^{(\nu)}(x,\Delta_n,1),\qquad \nu=0,1,$$

и $s_3(x, \Delta_n)$ — интерполяционный кубический сплайн с граничными условиями

(4) $$s_3^{(\nu)}(x,\Delta_n,i)=x^{(\nu)}(i),\qquad i,\nu=0,1,$$

или

(5) $$s_3^{(\nu)}(x,\Delta_n,0)=s_3^{(\nu)}(x,\Delta_n,1),\quad \nu=0,1,2.$$

## § 2. Формулировки основных теорем

Теорема 1. *Пусть $r=2, 3$, $x\in C_*^{r+1}$, $p\in[1, \infty]$; тогда при $n\to\infty$ для $\nu=0, 1, 2$ при $r=2$ и для $\nu=1, 2, 3$ при $r=3$ последовательность разбиений $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}=\{\{t_{in}^*\}_{i=0}^{n}\}_{n=1}^{\infty}$, определяемая из равенств*

(6) $$\int_0^{t_{in}^*}|z_n(t)|^\alpha\,dt=\frac{i}{n}\int_0^1|z_n(t)|^\alpha\,dt,\qquad i=0,1,\ldots,n,$$

*где $z_n(t)$ — любая последовательность функций такая, что*

$$|z_n-x^{(r+1)}|_\infty\to 0,$$

*будет асимптотически оптимальной и будет верно соотношение*

$$\varepsilon_{nr\nu}(x)_p=\frac{\|D_{r+1-\nu}\|_p}{n^{r+1-\nu}}\|x^{(r+1)}\|_\alpha+o\left(\frac{1}{n^{r+1-\nu}}\right),$$

*где $\alpha=(r+1-\nu+p^{-1})^{-1}$ и $D_{r+1}(t)$ есть $r$-й 1-периодический интеграл, в среднем равный нулю на $[0, 1]$, от функции $D_1(t)=t-0.5$.*

Теорема 1 немедленно вытекает из следующих утверждений.

Теорема 2. *Пусть $r=1, 2,\ldots$, $p\in[1, \infty]$, $\nu=1, 2,\ldots, r$ при $r$ нечетном и $\nu=0, 1,\ldots, r$ при $r$ четном; тогда для любой функции $x\in C^{r+1}$ при $n\to\infty$*

$$\varepsilon_{nr\nu}(x)_p\geqslant\frac{\|D_{r+1-\nu}\|_p}{n^{r+1-\nu}}\|x^{(r+1)}\|_\alpha+o\left(\frac{1}{n^{r+1-\nu}}\right).$$

Теорема 3. *Пусть $r=2, 3$, $p\in[1, \infty]$, $x\in C_*^{r+1}$, а $\nu=1, 2, 3$ при $r=3$ и $\nu=0, 1, 2$ при $r=2$, причем узлы $\{t_{in}^*\}_{i=0}^n$ выбраны из условий (6); тогда при $n\to\infty$*

(7) $$\|x^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x,\Delta_n^*)\|_p=\frac{\|D_{r+1-\nu}\|_p}{n^{r+1-\nu}}\|x^{(r+1)}\|_\alpha+o\left(\frac{1}{n^{r+1-\nu}}\right).$$

Замечание. Можно показать, что если узлы $\{t_{in}^*\}_{i+0}^n$ выбраны из условия

$$\int_0^{t_{in}^*}[|x^{(r+1)}(t)|+\omega^\gamma(x^{(r+1)},n^{-1})]^\alpha\,dt=\frac{i}{n}\int_0^1[|x^{(r+1)}(t)|+\omega^\gamma(x^{(r+1)},n^{-1})]^\alpha\,dt,$$

где $\gamma=[\alpha(r+2)+2]^{-1}$, то равенство (7) будет верно для любой функции $x\in C^{r+1}$, однако доказательство при этом несколько усложняется.

## § 3. Вспомогательные утверждения

Через $M_{nr}$ обозначим множество всех функций (моносплайнов) вида

$$x(t)=t^r+\sum_{i=1}^{n}a_i(t-t_{in})_+^{r-1}+\sum_{i=0}^{r-1}c_it^i,$$

где $u_+{}^m=\{\max\{u, 0\}\}^m$ и $\mu_{nr}=\{x|x\in M_{nr}: x^{(\nu)}(0)=x^{(\nu)}(1), \nu=0, 1, \ldots, r-1\}$, $m_{nr}=\{x|x\in M_{nr}: x^{(\nu)}(i)=0, \nu=0, 1, \ldots, r-1, i=0, 1\}$, $M_{nr}{}^0=\{x|x\in M_{nr}: x\perp 1\}$, $\mu_{nr}{}^0=\{x|x\in\mu_{nr}: x\perp 1\}$, $m_{nr}{}^0=\{x|x\in m_{nr}: x\perp 1\}$.

В [10], [11] доказана

Теорема А. *Пусть $n$, $r=1, 2, \ldots$ и $p\in[1, \infty]$; тогда существует единственный с точностью до сдвига 1-периодический моносплайн, наименее отклоняющийся от нуля в метрике $L_p$, причем*

$$\inf\{\|x\|_p|x\in\mu_{nr}\}=n^{-r}\inf\{\|D_r-\lambda\|_p|\lambda\in R^1\}.$$

Лемма 1. *Пусть $n$, $r=1, 2, \ldots$ и $p\in[1, \infty]$; тогда существует единственный с точностью до сдвига 1-периодический моносплайн $x^*(t)=$ $=n^{-r}D_r(nt)$ такой, что*

$$\inf\{\|x\|_p|x\in\mu_{nr}{}^0\}=\|x^*\|_p=n^{-r}\|D_r\|_p.$$

При $r$ нечетном лемма 1 сразу следует из теоремы А. При $r$ четном доказательство леммы проводится аналогично доказательству А, только при доказательстве существования необходимо проследить, чтобы при всех предельных переходах моносплайнов, в среднем равных нулю, получались опять моносплайны, в среднем равные нулю, а при доказательстве единственности вместо количества перемен знака рассмотреть количество чередований подъемов и спусков (т. е. перемен знака производной) и вместо функций $G(t)$ и $G^*(t)$, фигурирующих в [11], взять

$$G(t)=\sum_{i=1}^{n}a_iD_r(t-t_i),\qquad G^*(t)=n^{-r}D_r(nt).$$

Введем обозначения

$$E^0(x, S_{r1}(\Delta_n[a, b]))_{p[a,b]}=\inf\{\|x-s\|_{p[a,b]}|s\in S_{r1}(\Delta_n[a, b]), x-s\perp 1\},$$

$$\varepsilon^0(x, S_{r1}(\Delta_n[a, b]))_{p[a,b]}=\inf\{\|x-s\|_{p[a,b]}|s\in S_{r1}(\Delta_n[a, b]),$$
$$x-s\perp 1, s^{(\nu)}(a)-x^{(\nu)}(a)=s^{(\nu)}(b)-x^{(\nu)}(b), \nu=0, 1, \ldots, r-1\},$$

$$e^0(x, S_{r1}(\Delta_n[a, b]))_{p[a,b]}=\inf\{\|x-s\|_{p[a,b]}|s\in S_{r1}(\Delta_n[a, b]),$$
$$x-s\perp 1, s^{(\nu)}(i)=x^{(\nu)}(i), \nu=0, 1, \ldots, r, i=a, b\}$$

и

$$E_{nr}{}^0(x)_{p[a,b]}=\inf\{E^0(x, S_{r1}(\Delta_n[a, b]))_{p[a,b]}|\Delta_n[a, b]\};$$

величины $\varepsilon_{nr}{}^0(x)_{p[a,b]}$ и $e_{nr}{}^0(x)_{p[a,b]}$ определяются аналогично.

Лемма 2. *При всех $r=0, 1, \ldots$, $n=1, 2, \ldots$, $p\in[1, \infty]$ и $x\in C^r[a, b]$ выполняются неравенства*

$$e^0_{n+3(r+1),r}(x)_{p[a,b]}\leqslant E_{nr}{}^0(x)_{p[a,b]}\leqslant\varepsilon_{nr}{}^0(x)_{p[a,b]}\leqslant e_{nr}{}^0(x)_{p[a,b]}.$$

Доказательство. Два последних неравенства очевидны, поэтому остановимся на доказательстве первого.

Пусть $s(t)\in S_{r,1}(\Delta_n[a, b])$ — произвольный сплайн такой, что $x-s\perp 1$. Тогда для каждой функции $x\in C^r[a, b]$ найдутся разбиения $\Delta_{r+1}[a, a+\varepsilon]$, $\Delta_{r+1}[b-\varepsilon, b]$, $\Delta_{r+1}[\beta, \gamma]$, $[\beta, \gamma]\subset(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, и определенные на них, соответственно, сплайны $s_*(t)$, $s_{**}(t)$, $s_{***}(t)$ такие, что $x-\bar{s}\perp 1$ и $|x(t)-\bar{s}(t)|\leqslant \leqslant|x(t)-s(t)|$, $t\in[a, b]$, где $\bar{s}(t)=s(t)+s_*(t)+s_{**}(t)+s_{***}(t)$, и $\bar{s}(t)\in \in S_{r,1}(\Delta_{n+3(r+1)}[a, b])$; здесь $\Delta_{n+3(r+1)}[a, b]=\Delta_{r+1}[a, a+\varepsilon]\cup\Delta_n[a, b]\cup \cup\Delta_{r+1}[\beta, \gamma]\cup\Delta_{r+1}[b-\varepsilon, b]$. Поэтому для любого $s\in S_{r1}(\Delta_n[a, b])$ такого, что $x-s\perp 1$, имеем

$$\|x-s\|_{p[a,b]}\geqslant\|x-\bar{s}\|_{p[a,b]}\geqslant \overset{0}{e}_{n+3(r+1),r}(x)_{p[a,b]}.$$

Отсюда и из произвольности разбиения $\Delta_n[a, b]$ получаем утверждение леммы.

## § 4. Доказательства основных теорем

Теорема 2. Для любого $N>1$ обозначим через $\delta_N$ разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $i/N$, $i=0, 1,\ldots, N$, а через $x_N$ — сплайн из $S_{r+1,1}(\delta_N)$ такой, что для нечетных $r$

$$x_N\left(\frac{i-0.5}{N}\right)=x\left(\frac{i-0.5}{N}\right),\quad i=1, 2,\ldots, N,$$

$$x_N^{(\nu)}(i)=x^{(\nu)}(i),\quad \nu=0, 1,\ldots, \frac{r-1}{2},\quad i=0, 1,$$

и для четных $r$

$$x_N\left(\frac{i}{N}\right)=x\left(\frac{i}{N}\right),\quad i=0, 1,\ldots, N,$$

$$x_N^{(\nu)}(i)=x^{(\nu)}(i),\quad \nu=0, 1,\ldots, \frac{r}{2},\quad i=0, 1.$$

Тогда (см., например, [12, с. 132]) при $N\to\infty$

$$\|x^{(\nu)}-x_N^{(\nu)}\|_\infty=O(N^{\nu-r-1}\omega(x^{(r+1)}, N^{-1})),\quad \nu=0, 1,\ldots, r+1,$$

где $\omega(x, t)$ — модуль непрерывности функции $x$.

Выберем $N=N(x, r, n)$ как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$N^{\nu-r-1}\omega(x^{(r+1)}, N^{-1})\leqslant n^{\nu-r-1}\omega^{1/2}(x^{(r+1)}, n^{-1}).$$

Отсюда и из предыдущего следует, что при $n\to\infty$

$$\|x-x_N\|_\infty=o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),\qquad \|x^{(r+1)}-x_N^{(r+1)}\|_\infty=o(1).$$

Из [13], в частности, следует, что для любых $x\in C^r\backslash S_{r,r+1}(\Delta_n)$

$$\exists M>0{:}\,\forall\Delta_n,\ \forall s\in S_{r,r+1}(\Delta_n)\quad \|x^{(\nu)}-s^{(\nu)}\|_p\geqslant\frac{M}{n^{r+1-\nu}}. \tag{8}$$

Отсюда и из предыдущего получаем

$$\|x^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n)\|_p=\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N, \Delta_n)\|_p+o\left(\frac{1}{n^{r+1-\nu}}\right),$$

и, следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что при $n\to\infty$

$$\varepsilon_{n,r,\nu}(x_N)_p\geqslant\frac{\|D_{r+1-\nu}\|_p}{n^{r+1-\nu}}\|x_N^{(r+1)}\|_\alpha+o\left(\frac{1}{n^{r+1-\nu}}\right). \tag{9}$$

Зафиксируем $\nu$, $\nu=1, 2, \dots, r$, и для каждого $i=1, 2, \dots, N$ выберем промежуток $[a_i, b_i]\subset[(i-1)/N, i/N]$ такой, что на нем $x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N, \Delta_n)\perp 1$. Пусть $\gamma_i=b_i-a_i$ и $\delta_{n_i}=\Delta_n\cap[a_i, b_i]=\{\tau_{j,n_i}\}_{j=0}^{n_i}$. Учитывая, что $x_N^{(r+1)}(t)\equiv\mathrm{const}$, $t\in[(i-1)/N, i/N]$, $i=1, 2, \dots, N$, и полагая $c_i=x_N^{(r+1)}(i/N-0)$, $i=1, 2, \dots, N$, для $p\in[1, \infty)$ получаем

$$\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N, \Delta_n)\|_p^p\geqslant\sum_{i=1}^N\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N, \Delta_n)\|_{p[a_i,b_i]}^p\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^N|c_i|^pE^0\left(\frac{(\cdot)^{r+1-\nu}}{(r+1-\nu)!}, S_{r1}^{(\nu)}(\delta_{n_i})\right)_{p[a_i,b_i]}^p=$$

$$=\sum_{i=1}^N\gamma_i^{p/\alpha}|c_i|^pE^0\left(\frac{(\cdot)^{r+1-\nu}}{(r+1-\nu)!}, S_{r1}^{(\nu)}(\delta_{n_i})\right)_p^p\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^N\gamma_i^{p/\alpha}|c_i|^pE_{n_ir}^0\left(\frac{(\cdot)^{r+1-\nu}}{(r+1-\nu)!}\right)_p^p,$$

где $\alpha=(r+1-\nu+p^{-1})^{-1}$.

Используя леммы 1 и 2, получаем

$$\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N, \Delta_n)\|_p^p\geqslant\|D_{r+1-\nu}\|_p^p\sum_{i=1}^N\frac{\gamma_i^{p/\alpha}|c_i|^p}{[n_i+3(r+1)]^{p/\alpha-1}}.$$

Поэтому

$$\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N, \Delta_n)\|_p^p\geqslant\|D_{r+1-\nu}\|_p^p\times \tag{10}$$

$$\times\inf\left\{\sum_{i=1}^N\frac{|c_i|^p\gamma_i^{p/\alpha}}{\beta_i^{(r+1-\nu)p}}\;\Big|\;\sum_{i=1}^N\beta_i\leqslant n+(2r+3)N\right\}$$

Задача

$$\sum_{i=1}^N\frac{A_i}{\beta_i^k}-\inf,\qquad A_i>0,\quad i=1, 2, \dots, N,$$

при условиях

$$\beta_i\geqslant0,\qquad\sum_{i=1}^N\beta_i=B$$

имеет единственное решение, и ее экстремальное значение равно

$$B^{-k}\left(\sum_{i=1}^NA_i^{1/(k+1)}\right)^{k+1}.$$

Отсюда и из (10) получаем

$$\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N, \Delta_n)\|_p^p\geqslant\frac{\|D_{r+1-\nu}\|_p^p}{[n+(2r+3)N]^{(r+1-\nu)p}}\left(\sum_{i=1}^N\gamma_i|c_i|^\alpha\right)^{p/\alpha}.$$

Ясно, что

$$\sum_{i=1}^N\gamma_i|c_i|^\alpha=\int_{T_N}|x_N^{(r+1)}(t)|^\alpha\,dt,\qquad T_N=\bigcup_{i=1}^N[a_i, b_i].$$

Тогда

$$\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N,\Delta_n)\|_p^p \geqslant \frac{\|D_{r+1-\nu}\|_p^p}{[n+(2r+3)N]^{(r+1-\nu)p}} \times$$
$$\times\left[\int\limits_{T_N} |x_N^{(r+1)}(t)|^\alpha\,dt\right]^{p/\alpha}.$$

Точки $a_i$ и $b_i$ можно выбрать так, чтобы промежутки $[(i-1)/N,\ a_i]$ и $[b_i,\ i/N]$ содержали не более чем по $r$ узлов разбиения $\Delta_n$; кроме того, из [13] вытекает

$$\varepsilon_{nr\nu}(x_N)_p^p \geqslant \frac{M^p}{(2Nr)^{(r+1-\nu)p}}\left[\int\limits_{[0,1]\setminus T_N} |x_N^{(r+1)}(t)|^\alpha\,dt\right]^{p/\alpha}.$$

С другой стороны (см., например, [12, с. 132]), всегда найдется разбиение $\Delta_n$, для которого имеется $L\in R^1$ такое, что

$$\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N,\Delta_n)\|_p^p \leqslant L/n^{(r+1-\nu)p},$$

а значит,

$$\frac{M}{(2Nr)^{r+1-\nu}}\left[\int\limits_{[0,1]\setminus T_N} |x_N^{(r+1)}(t)|^\alpha\,dt\right]^{1/\alpha} = O\left(\frac{1}{n^{r+1-\nu}}\right),$$

а так как $a_i\in[(i-1)/N,\tau_{r,n_i}]$, $b_i\in[\tau_{n_i-r,n_i},\ i/N]$, $N=o(n)$, то отсюда следует, что

$$\left[\int\limits_{[0,1]\setminus T_N} |x_N^{(r+1)}(t)|^\alpha\,dt\right]^{1/\alpha} = o(1).$$

При $\nu=0$ и $r$ четном, учитывая теорему А и предыдущие рассуждения, получаем

$$\|x_N-s_r(x_N,\Delta_n)\|_p^p \geqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{|c_i|^p}{N^{p/\alpha}} E_{n_i r}\left(\frac{(\cdot)^{r+1}}{(r+1)!}\right)_p^p \geqslant$$
$$\geqslant \|D_{r+1}\|_p^p \sum_{i=1}^{N} \frac{|c_i|^p}{N^{p/\alpha}[n_i+3(r+1)]^{p(r+1)}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\|D_{r+1}\|_p^p}{[n+3(r+1)N]^{p(r+1)}}\left[\int\limits_0^1 |x_N^{(r+1)}(t)|^\alpha\,dt\right]^{p/\alpha}.$$

Аналогично (10) устанавливается неравенство

$$\|x_N^{(\nu)}-s_r^{(\nu)}(x_N,\Delta_n)\|_\infty \geqslant \|D_{r+1-\nu}\|_\infty \times$$
$$\times \inf\left\{\max\left\{\frac{|c_i|\gamma_i^{1/\alpha}}{\beta_i^{1/\alpha}}\,\middle|\, i=1,2,\ldots,N\right\}\,\middle|\, \sum_{i=1}^{N}\beta_i\leqslant n+(2r+3)N\right\}$$

Учитывая, что задача

$$\max\left\{\frac{A_i}{\beta_i^k}\,\middle|\, i=1,2,\ldots,N\right\} - \inf, \qquad A_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots,N,$$

при условиях

$$\beta_i\geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{N}\beta_i=B$$

имеет единственное решение и что ее экстремальное значение равно

$$B^{-k}\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^{1/k}\right)^k,$$

и почти дословно повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что соотношение (9) верно для $p\in[1, \infty]$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Теорема 3. Рассмотрим интерполяционный параболический сплайн $s_2(x, \Delta_n)$ с граничными условиями (2). Тогда для $t\in[t_{in}, t_{i+1,n}]$, $i=0, 1, \ldots, n-1$,

$$s_2(x, \Delta_n, t)=2m_{in}(\tau^2-0.5\tau)-4\bar{x}_{in}(\tau^2-0.25)+2m_{i+1,n}(\tau^2+0.5\tau),$$

где $\bar{x}_{in}=x(\bar{t}_{in})$, $i=1, 2, \ldots, n$, $m_{in}=s_2(x, \Delta_n, t_{in})$, $i=0, 1, \ldots, n$, $\tau=(t-\bar{t}_{in})h_{in}^{-1}$, и числа $m_{in}$ определяются из условий непрерывности производной интерполяционного параболического сплайна. Если обозначить $c_{in}=m_{in}-x_{in}$, $i=0, 1, \ldots, n$, то система, из которой определяются числа $m_{in}$, может быть записана в виде

$$c_{0n}=0,$$
$$\lambda_{in}c_{i-1,n}+3c_{in}+\mu_{in}c_{i+1,n}=d_{in}, \qquad i=1, 2, \ldots, n-1,$$
$$c_{nn}=0,$$

где $x_{in}=x(t_{in})$, $i=0, 1, \ldots, n$, $\lambda_{in}=h_{in}(h_{i-1,n}+h_{in})^{-1}$, $\mu_{in}=1-\lambda_{in}$, $d_{in}=4\bar{x}_{in}\lambda_{in}+4\bar{x}_{i+1,n}\mu_{in}-\lambda_{in}x_{i-1,n}-3x_{in}-\mu_{in}x_{i+1,n}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$.

Известно (см., например, [9, с. 334]) следующее

Утверждение. *Если матрица системы $Az=d$ имеет диагональное преобладание, т. е.*

$$|a_{ii}|-\sum_{i\neq j}|a_{ij}|=r_i>0, \qquad i, j=1, 2, \ldots, n,$$

*то*

$$\max_i|z_i|\leqslant\max_i|d_i|r_i^{-1}.$$

Отсюда и из предыдущего получаем

$$|c_{in}|\leqslant\frac{1}{2}\max_i|d_{in}|.$$

Нетрудно видеть, что

$$d_{in}=\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i+1,n}} D(u)x'''(u)\,du,$$

где

$$D(u)=\begin{cases} -\dfrac{\lambda_{in}}{2}(u-t_{i-1,n})^2, & u\in[t_{i-1,n}, \bar{t}_{i-1,n}],\\ \dfrac{3}{2}\lambda_{in}\left(u-t_{i-1,n}-\dfrac{2}{3}h_{i-1,n}\right)^2-\dfrac{\lambda_{in}h_{i-1,n}^2}{6}, & u\in[\bar{t}_{i-1,n}, t_{in}],\\ -\dfrac{3}{2}\mu_{in}\left(u-t_{in}-\dfrac{h_{in}}{3}\right)^2+\dfrac{\mu_{in}h_{in}^2}{6}, & u\in[t_{in}, \bar{t}_{in}],\\ \dfrac{\mu_{in}}{2}(u-t_{i+1,n})^2, & u\in[\bar{t}_{in}, t_{i+1,n}]. \end{cases}$$

Так как $\operatorname{sgn} D(u) = \operatorname{sgn}(u - t_{in})$ для любых $u \in [t_{i-1,n}, t_{i+1,n}]$, то найдутся точки $\xi_{in} \in [t_{i-1,n}, t_{in}]$, $\eta_{in} \in [t_{in}, t_{i+1,n}]$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, такие, что

$$d_{in} = x'''(\xi_{in}) \int\limits_{t_{i-1,n}}^{t_{in}} D(u)\,du + x'''(\eta_{in}) \int\limits_{t_{in}}^{t_{i+1,n}} D(u)\,du =$$

$$= -\lambda_{in} \frac{h_{i-1,n}^3}{12} x'''(\xi_{in}) + \mu_{in} \frac{h_{in}^3}{12} x'''(\eta_{in}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h_{i-1,n} h_{in}}{12(h_{i-1,n} + h_{in})} [x_{in}'''(h_{in}^2 - h_{i-1,n}^2) + (h_{in}^2 + h_{i-1,n}^2)\,\omega(x''', h_n)].$$

Аналогично рассматривается случай периодических граничных условий.

Пусть $p_2(x, \Delta_n)$ — параболический сплайн дефекта 2 с узлами из разбиения $\Delta_n$, интерполирующий функцию $x$ в узлах $t_{in}$ и $\bar{t}_{in}$. Тогда для $t \in [t_{in}, t_{i+1,n}]$

$$p_2(x, \Delta_n, t) = 2x_{in}(\tau^2 - 0.5\tau) - 4\bar{x}_{in}(\tau^2 - 0.25) + 2x_{i+1,n}(\tau^2 + 0.5\tau).$$

Справедлива

Лемма 3. *Пусть $\nu = 0, 1, 2$ и разбиение $\Delta_n$ таково, что $|h_{in} - h_{i-1,n}| < \alpha_n h_{in}$, $|\alpha_n| < 1$ и $\beta_n = (1+\alpha_n)(\alpha_n \|x'''\|_C + (2+\alpha_n)\,\omega(x''', h_n))$; тогда для сплайна $s_2(x, \Delta_n)$ с граничными условиями (2) и (3) будет справедливо соотношение*

$$\|s_2^{(\nu)}(x, \Delta_n) - p_2^{(\nu)}(x, \Delta_n)\|_{C(t_{i-1,n}, t_{in})} \leqslant C_\nu h_{in}^{3-\nu} \beta_n,$$

*где $C_0 = 1/192$, $C_1 = 1/6$, $C_2 = 1/3$.*

Рассмотрим кубические интерполяционные сплайны с граничными условиями (4) (здесь мы следуем рассуждениям из [9, с. 97]). Тогда для $t \in [t_{in}, t_{i+1,n}]$

$$s_3(x, \Delta_n, t) = x_{in}(1-\tau)^2(1+2\tau) + x_{i+1,n}\tau^2(3-2\tau) +$$
$$+ m_{in} h_{in}(1-\tau)^2\tau - m_{i+1,n} h_{in}\tau^2(1-\tau),$$

где $\tau = (t - t_{in})/h_{in}$, $m_{in} = s_3'(x, \Delta_n, t_{in})$, $i=0, 1, \ldots, n$. Числа $m_{in}$ определяются из условий непрерывности второй производной сплайна; если обозначить $c_{in} = m_{in} - x_{in}'$, $i = 0, 1, \ldots, n$, то система, из которой определяются числа $m_{in}$, может быть записана в виде

$$c_{0n} = 0,$$
$$\lambda_{in} c_{i-1,n} + 2c_{in} + \mu_{in} c_{i+1,n} = d_{in}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$c_{nn} = 0,$$

где $d_{in} = 3(\mu_{in}(x_{i+1,n} - x_{in}) h_{in}^{-1} + \lambda_{in}(x_{in} - x_{i-1,n}) h_{i-1,n}^{-1}) - \lambda_{in} x_{i-1,n}' - 2x_{in}' - \mu_{in} x_{i+1,n}'$ и $x_{in}' = x'(t_{in})$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Рассуждая далее аналогично предыдущему, получаем

$$d_{in} = \frac{1}{24} h_{in} h_{i-1,n} (h_{i-1,n} + h_{in})^{-1} [h_{i-1,n}^2 x^{(4)}(\xi_{in}) - h_{in}^2 x^{(4)}(\eta_{in})] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{24} h_{i-1,n} h_{in} [\,|h_{i-1,n} - h_{in}|\,|x^{(4)}(t_{in})| +$$
$$+ (h_{i-1,n} + h_{in})\,\omega(x^{(4)}, \max\{h_{i-1,n}, h_{in}\})\,].$$

Случай периодических граничных условий рассматривается аналогично.

Если $p_3(x, \Delta_n) \in S_{32}(\Delta_n)$ — эрмитов кубический сплайн, т. е. $p_3^{(\nu)}(x, \Delta_n, t_{in}) = x^{(\nu)}(t_{in})$, $i=0, 1, \ldots, n$, $\nu=0, 1$, то справедлива

Лемма 4. *Пусть разбиение* $\Delta_n$ *таково, что* $|h_{in} - h_{i-1,n}| < \alpha_n h_{in}$, $|\alpha_n| < 1$, $\beta_n = (1+\alpha_n)(\alpha_n \|x^{(4)}\|_C + (2+\alpha_n)\omega(x^{(4)}, h_n))$ *и* $\nu=0, 1, 2, 3$. *Тогда для сплайна* $s_3(x, \Delta_n)$ *с граничными условиями* (4), (5) *имеем*

$$\|s_3^{(\nu)}(x, \Delta_n) - p_3^{(\nu)}(x, \Delta_n)\|_{C(t_{i-1,n}, t_{in})} \leqslant C_\nu h_{in}^{4-\nu} \beta_n,$$

*где* $C_0 = {}^1/_{324}$, $C_1 = {}^1/_{72}$, $C_2 = {}^1/_{12}$, $C_3 = {}^1/_4$.

Ясно, что при $r=2, 3$

$$\|x^{(\nu)} - s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n)\|_p \leqslant \|x^{(\nu)} - p_r^{(\nu)}(x, \Delta_n)\|_p +$$

$$+ \|p_r^{(\nu)}(x, \Delta_n) - s_r^{(\nu)}(x, \Delta_n)\|_p.$$

В [6], в частности, показано, что в случае приближения $x^{(\nu)}$ сплайном $p_r^{(\nu)}(x, \Delta_n)$ при $r=2$, $\nu=0$ и $r=3$, $\nu=1$ асимптотически оптимальный набор узлов определяется из равенств (1) и

$$\|x^{(\nu)} - p_r^{(\nu)}(x, \Delta_n^*)\|_p = \frac{\|D_{r+1-\nu}\|_p}{n^{r+1-\nu}} \|x^{(r+1)}\|_\alpha + o(n^{\nu-r-1}).$$

Почти дословно повторяя рассуждения [6], можно показать, что это соотношение будет верно и для узлов, определяемых из (6), причем для всех $\nu \leqslant r$, если вместо $p_r^{(\nu)}(x, \Delta_n)$ рассматривать $p_r^{((\nu))}(x, \Delta_n)$, где $x^{((\nu))}(t) = [x^{(\nu)}(t-0) + x^{(\nu)}(t+0)]/2$.

Отсюда и из лемм 3 и 4 следует, что для доказательства теоремы 3 необходимо показать, что если узлы $\{t_{in}^*\}_{i=1}^n$ выбраны из условий (6), то $|h_{in}^* - h_{i-1}^*| < \alpha_n h_{in}^*$ и $\alpha_n \to 0$.

Действительно, если узлы выбираются из условий (6), то

$$h_{in}^* = \frac{A}{nA_i}, \qquad A = \int_0^1 |z_n(t)|^\alpha dt, \quad A_i = |z_n(\xi_{in})|^\alpha.$$

Следовательно,

$$|h_{in}^* - h_{i-1,n}^*| = \frac{A}{nA_i A_{i-1}} |A_i - A_{i-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{nA_i A_{i-1}} \omega(z_n^\alpha, h_n^*) \leqslant C h_{in}^* \omega(z_n^\alpha, h_n^*).$$

где $C$ — некоторая постоянная, зависящая от $z_n$.

## *ПРИЛОЖЕНИЕ*

Приведем один алгоритм асимптотически оптимального выбора узлов для интерполяционных сплайнов.

Пусть $\Delta_{n0} = \{t_{i0}\}_{i=0}^n$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$ и $\Delta^2 x_i$ — вторая разделенная разность от $x_i$ в точке $t_{i0}$. Через $y_r(x, \Delta_{n0}, t)$ обозначим кусочно-постоянную функцию, определенную следующим образом:

$$y_r(x, \Delta_{n0}, t) = \begin{cases} \Delta^2 s_r^{(r-1)}(x, \Delta_{n0}, t_{10}), & t \in [0, \bar t_{10}], \\ \Delta^2 s_r^{(r-1)}(x, \Delta_{n0}, t_{i0}), & t \in [\bar t_{i-1,0}, \bar t_{in}], \quad i=2, \ldots, n-2, \\ \Delta^2 s_r^{(r-1)}(x, \Delta_{n0}, t_{n-1,0}), & t \in [\bar t_{n-2,0}, 1]. \end{cases}$$

Тогда (см., например, [9]) при $n\to\infty$

$$\|x^{(r+1)}-y_r(x, \Delta_{n0})\|_\infty\to 0.$$

Выберем узлы разбиения $\Delta_{n1}$ из условия (6) при $z_n(t)=y_r(x, \Delta_{n0}, t)$ и узлы $\Delta_{n2}$ — из (6) при $z_n(t)=y_r(x, \Delta_{n2}, t)$, и т. д.; тогда при $n\to\infty$ узлы разбиений $\Delta_{n\nu}$, $\nu=1, 2, \ldots$, будут асимптотически оптимальными.

Результаты просчетов на ЭВМ ЕС-1022 погрешности сплайн-интерполяции в равномерной метрике для кубических сплайнов $s_3(x, \Delta_{50,\nu}, t)$ сведены в таблицу, где в качестве $\Delta_{50,\,0}$ бралось равномерное разбиение с 50 узлами.

| $\nu$ | $\exp(10t)$ | $(t+0.001)^{1/2}$ | $[1+100(t-0.5)^2]^{-1}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $8.1728\cdot10^{-2}$ | $1.8453\cdot10^{-2}$ | $1.2359\cdot10^{-4}$ |
| 1 | $1.8316\cdot10^{-3}$ | $2.0729\cdot10^{-4}$ | $5.4431\cdot10^{-6}$ |
| 2 | $1.6403\cdot10^{-3}$ | $2.4942\cdot10^{-6}$ | $2.3473\cdot10^{-6}$ |

## Литература


1. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами.– Analys. math., 1976, т. 2, № 4, с. 267–275.
2. *Лигун А. А.* Некоторые экстремальные задачи приближения функций.– In: Proc. Conf. Approximation and Function Spaces 79, Gdansk, 1981, p. 218–225.
3. *Стечкин С. Б.* Одна оптимизационная задача.– Numer. Methoden Approximations Theorie. Bd 1. Numer. Math., 1972, v. 16, p. 205–208.
4. *Гребенников А. И.* О выборе узлов при аппроксимации функций сплайнами.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 1, с. 219–223.
5. *Азарин В. С., Бармин В. И.* Аппроксимация кусочно-линейными функциями.– В кн.: Матем. сб. Киев: Наукова думка, 1976, с. 25–26.
6. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами.– Укр. матем. ж., 1980, т. 32, № 6, с. 824–830.
7. *Гребенников А. И.* О выборе узлов при интерполировании функций $L$-сплайнами.– В кн.: Вычисл. методы и программирование. Вып. XXVI. Изд-во МГУ, 1977, с. 168–175.
8. *Шумейко А. А.* Интерполирование функций эрмитовыми $L$-сплайнами.– В кн.: Иссл. по соврем. пробл. суммирования и приближения ф-ций и их прилож. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, с. 126–131.
9. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
10. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы.– Успехи матем. наук, 1980, т. 36, вып. 4(220), с. 107–159.
11. *Женсыкбаев А. А.* Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций.– Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, т. 41, № 5, с. 1110–1124.
12. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
13. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при приближении сплайнами в метрике $L_p$.– Матем. заметки, 1976, т. 20, № 4, с. 611–618.



Поступила в редакцию 19.X.1982

Переработанный вариант 11.VI.1984