Украинский математический журнал, 1999,51,N 12, с.1628-1637
УДК 517.5

А.А.Лигун, А.А. Шумейко
(Днепродзержинский гос. техн. ун-т)

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛОКАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ С НЕФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

Пусть $\{\Delta_{n\,[a,b]}\}_{n=1}^{\infty}$ произвольная последовательность разбиений отрезка $[a,b]$

$$\Delta_{n\,[a,b]} = \{a = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{n,n} = b\}.$$

Через $h_{i+1/2,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n}$ $(i = 0,\ldots,n-1)$ обозначим переменный шаг разбиения $\Delta_{n\,[a,b]}$ с наибольшим значением $h_n = \max\{h_{i+1/2,n} \mid i = 0,\ldots,n-1\}$.

Функцию $s(t)$, имеющую $r-k$ непрерывных производных на отрезке $[a,b]$ и совпадающую на каждом из интервалов $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ с алгебраическим многочленом степени не выше r будем называть сплайн - функцией порядка r дефекта k по разбиению $\Delta_{n\,[a,b]}$.

При фиксированных r, k и $\Delta_{n\,[a,b]}$ множество таких сплайнов будем обозначать через $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n\,[a,b]})$.

Как обычно, через $L_{p[a,b]}$ $(p \in (0,\infty))$ обозначим множество всех измеримых суммируемых в p-й степени на отрезке $[a,b]$ и положим

$$\|f\|_{p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

а через $L_{\infty\,[a,b]}$ пространство всех существенно ограниченных на $[a,b]$ функций с конечной нормой $\|f\|_{\infty[a,b]} = \operatorname{supvrai}\{|f(t)| \mid t \in [a,b]\}$. Кроме того, через $V^r_{[a,b]}$ обозначим множество функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и полная вариация r-й производной ограничена, т.е. $V_a^b(f^{(r)}) < \infty$.

Пусть $\left\{P_{r,k}(\cdot,\Delta_{n\,[a,b]})\right\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность операторов, отображающих множество $C^k_{[a,b]}$ в пространство $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n\,[a,b]})$. В частности, $P_{r,k}(f,\Delta_{n\,[a,b]})$ может быть интерполяционным сплайном, сплайном, интерполирующим $f(t)$ в среднем, сплайном наилучшего приближения и пр.

При фиксированных r,k и p последовательность разбиений $\{\Delta^*_{n\,[a,b]}\}_{n=1}^{\infty}$ назовем асимптотически оптимальной для функции $f \in C^{r+1}_{[a,b]}$ и последовательности операторов $\left\{P_{r,k}(f,\Delta_{n\,[a,b]})\right\}_{n=1}^{\infty}$, если при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$\|f - P_{r,k}(f,\Delta^*_{n\,[a,b]})\|_{p\,[a,b]} = \inf_{\Delta_{n\,[a,b]}} \|f - P_{r,k}(f,\Delta_{n\,[a,b]})\|_{p\,[a,b]}(1+o(1)).$$

Рассмотрим один вид широко используемых интерполяционных сплайнов – локальных эрмитовых сплайнов с дополнительными узлами.

Пусть $\delta_\mu = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_\mu = 1\}$ фиксированное разбиение отрезка $[0,1]$ такое, что $\tau_j = 1 - \tau_{\mu-j}$ $(j = 0,1,\ldots,\mu)$, и $\Delta_{n,\mu\,[a,b]})$ есть разбиение отрезка $[a,b]$ точками $t_{i,j,n} = t_{i-1,n} + h_{i-1/2,n}\tau_j$ $(i = 1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,\mu)$. Положим $\mu = |r+1-2k|+1$.

Пусть $k \geq (r+1)/2$ и функция $f \in C^{r-k}_{[a,b]}$. Интерполяционным локальным эрмитовым сплайном назовем сплайн $s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]}) \in \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n\,[a,b]})$ однозначно определяющийся интерполяционными условиями:

$$s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},t_{i,j,n}) = f(t_{i,j,n}) \quad (i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,\mu),$$

и

$$s^{(\nu)}_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},t_{i,n}) = f^{(\nu)}(t_{i,n}) \quad (\nu = 0,1,\ldots,r-k).$$

Если r нечетно и $k = (r-1)/2$, такие сплайны называют просто эрмитовыми сплайнами. В случае если $k = 1$ описанные сплайны называют сплайнами Субботина – Черных.

Пусть $k \leq (r+1)/2$ и функция f лежит в $C^{r-k}_{[a,b]}$. Интерполяционным локальным эрмитовым сплайном назовем функцию $s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]}) \in C^{r-k}_{[a,b]}$, однозначно определяющийся условиями:

(1) На каждом из интервалов $(t_{i,j-1,n}, t_{i,j,n})$ это алгебраический многочлен степени не выше r;
(2) На каждом из интервалов $(t_{i-1,n}, t_{i,n})$ $(i = 1,\ldots,n)$ функция $s_{r,k}(f,\,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},t)$ имеет $r-1$ непрерывную производную;
(3) В узлах разбиения $\Delta_{n\,[a,b]}$ выполняются интерполяционные условия:

$$s^{(\nu)}_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},t_{i,n}) = f^{(\nu)}(t_{i,n}) \quad (\nu = 0,1,\ldots,r-k).$$

В работе [1] установлено, что любых для функций $f, z \in V^r_{[a,b]}$ имеет место равенство

$$\int_a^b \left(f(u) - s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},u)\right) d\left(z^{(r)}(u)\right) = \tag{1}$$

$$= (-1)^{r+1}\int_a^b \left(z(u) - s_{r,r-k+1}(z,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},u)\right) d\left(f^{(r)}(u)\right).$$

Сплайны $s_{r,r-k+1}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]})$ и $s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]})$ называются двойственными.

Полагая в равенстве (1)

$$z(u) = (-1)^r\frac{(u-t)^r_+}{r!},$$

получаем для любой функции $f \in V^r_{[a,b]}$

$$f(t) - s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},t) = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{r!}\int_0^1 \left((u-t)^r_+ - s_{r,r-k+1}((\cdot-t)^r_+,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},u)\right) d\left(f^{(r)}(u)\right).$$

Таким образом, если $t, u \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ и

$$\mathbf{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu\,[a,b]}) = -\frac{1}{r!}\left((u-t)_+^r - s_{r,r-k+1}((\cdot - t)_+^r, \Delta_{n,\mu\,[a,b]}, u)\right), \tag{3}$$

то для $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ получаем равенство

$$f(t) - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[a,b]}, t) = \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathbf{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu\,[a,b]}) d\left(f^{(r)}(u)\right). \tag{4}$$

Пусть

$$\mathbf{K}_{r,k,i}(t, \Delta_{n,\mu\,[0,1]}) = \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathbf{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu\,[a,b]}) du$$

и

$$\mathbb{K}_{r,k,p} = \|\mathbf{K}_{r,k,1}(\Delta_{1,\mu\,[0,1]})\|_{p[0,1]}.$$

В работе [2] установлен следующий результат

Теорема А.*Пусть* $r = 1, 2, \dots,$ $p \in [1, \infty]$, $\beta = (r + 1 + 1/p)^{-1}$, $\gamma \in (0, 1/(r+1))$, *функция* $f \in C^{r+1}_{[0,1]}$ *и* $\{\Phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольная последовательность неотрицательных кусочно - непрерывных функций такая, что*

$$\|\Phi_n - |f^{(r+1)}|\|_{\infty\,[0,1]} \le \omega_n^{\gamma}, \tag{5}$$

где $\omega_n = \omega(\Phi, 1/n)$ $(\omega(z, t)$ *– равномерный модуль непрерывности функции* $z)$.

Тогда последовательность разбиений $\{\Delta^*_{n\,[0,1]}\}_{n=1}^{\infty}$ *определяемая равенствами*

$$\int_0^{t^*_{k,n}} (\Phi_n(t) + \omega_n^{\gamma})^{\beta} dt = \frac{k}{n} \int_0^1 (\Phi_n(t) + \omega_n^{\gamma})^{\beta} dt, \quad (k = 0, 1, \dots, n). \tag{6}$$

будет асимптотически оптимальной для функции $f(t)$ *и при* $n \to \infty$ *будут выполняться соотношения*

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta^*_{n,\mu\,[0,1]})\|_{p\,[0,1]} = \inf_{\Delta_{n\,[0,1]}} \|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|_{p\,[0,1]}(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{\mathbb{K}_{r,k,p}}{n^{r+1}} \|f^{(r+1)}\|_{\beta[0,1]}(1 + o(1)). \tag{7}$$

Для нечетных r, $k = (r+1)/2$ и функций $f \in C^{r+2}_{[0,1]}$ таких, что $|f^{(r+1)}(t)| > 0$ $(t \in [0,1])$ этот результат получен в работах [3], [4],[5].

Потом условие непрерывности $(r+2)$- й производной удалось снять и получить результат для всех k и r (см. [6]), а в работе ([2]) снято условие на знакопостоянство $(r+1)$ - й производной (за счет этого и появилась добавка ω_n^{γ}).

В данной работе мы покажем, что оценка снизу (7) верна для функций не только таких, у которых $(r+1)$ - я производная непрерывная, но и для функций из гораздо более широкого класса.

Перейдем к точным формулировкам.

Для функции, ν-я производная которой в каждой точке $t \in (a,b)$ имеет односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$, положим

$$f^{((\nu))}(t) = \frac{1}{2}\left(f^{(\nu)}(t+0) + f^{(\nu)}(t-0)\right)$$

и функцию $f^{((\nu))}(t)$ будем называть ν–й "формальной производной"от $f(t)$. Ясно, что если в точке t функция $f^{(\nu-1)}(t)$ дифференцируема, то $f^{((\nu))}(t) = f^{(\nu)}(t)$.

Пусть $L^{r,k}_{p[a,b]}$ ($p \in (0,\infty]$, $k = 1,2,\ldots,r+1$) – множество всех функций $f \in C^{r-k}_{[a,b]}$ таких, что в каждой точке $t \in (a,b)$ существуют односторонние производные $f^{(\nu)}(t\pm0)$ ($\nu = r-k+1,\ldots,r+1$), производная $f^{((r-1))}(t)$ кусочно абсолютно непрерывная на отрезке $[a,b]$, множество точек разрывов $f^{((r))}(t)$ имеет конечное число предельных точек и $f^{((r))} \in L_{p[a,b]}$.

Теорема. *Пусть $r = 1,2,\ldots$, $\beta = (r+1+p^{-1})^{-1}$, $p \in (0,\infty]$ при $k = [(r+1)/2],\ldots,r+1$ ($[\cdot]$ – целая часть числа) и $p \in [1,\infty]$ при четных r и $k = r/2$. Тогда для любой функции $f \in L^{r+1,k}_{\beta\,[0,1]}$ и любой последовательности разбиений $\{\Delta_{n\,[0,1]}\}_{n=1}^{\infty}$ при $n \to \infty$ будет справедливо соотношение*

$$\|f - s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|_{p\,[0,1]} \geq \frac{\mathbb{K}_{r,k,p}}{n^{r+1}}\|f^{((r+1))}\|_{\beta\,[0,1]}(1+o(1)). \tag{8}$$

Доказательству теоремы предпошлем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $r = 1,2,\ldots$, $k = [(r+1)/2],\ldots,r+1$. Тогда для любого $t \in (t_{i,n},t_{i+1,n})$ ($i = 0,1,\ldots,n-1$) функция $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ (как функция от* u*) на интервале $(t_{i,n},t_{i+1,n})$ не имеет нулей.*

Для $k = 1,2,\ldots,[r/2]$ и для $t \in (t_{i,n},t_{i+1,n})$ ($i = 0,1,\ldots,n-1$) функция $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ (как функция от u*) на интервале $(t_{i,n},t_{i+1,n})$ имеет простые нули в точках $t_{i,j,n}$ ($j = 1,2,\ldots,\mu-1$) и только в них.*

Доказательство леммы. Пусть, вначале $k = [(r+1)/2],\ldots,r+1$. Покажем, что ядро $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ при любом $t \in [t_{i,n},t_{i+1,n}]$ не меняет знак. По построению, при каждом $i = 1,\ldots,n$ на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ функция $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ является сплайном минимального дефекта порядка r с узлами в точках t и $t_{i,j,n}$ ($j = 0,\ldots,\mu$), который удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})\Big|_{u=t_{i,n}} = \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})\Big|_{u=t_{i+1,n}} = 0 \tag{9}$$

$$(\nu = 0,1,\ldots,r-k.)$$

Таким образом, функция $\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ будет кусочно-постоянной и имеет на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ не более $\mu = r-2k+2$ перемен знака.

Если ядро $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ меняет знак на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$, то ядро имеет хотя бы один ноль на интервале $(t_{i,n},t_{i+1,n})$ и на концах промежутка имеет нули кратности не менее $r-k$.

По теореме Ролля $(r-k+1)$-я производная по переменной u функции $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ будет иметь на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ не менее чем $r-k+2$ различных нуля, и, следовательно, $\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ будет иметь не менее чем $r-2k+3$ перемены знака на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$, что противоречит предыдущему.

Пусть, теперь, $k=1,2,\ldots,[r/2]$, тогда на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ функция $s_{r,r-k+1}(f,\Delta_{n,\mu\,[a,b]},u)$ представляет собой алгебраический полином степени r, совпадающей со значениями функции $f(t)$ в точках $t_{i,j,n}$ и $r-k$ кратно интерполирующий ее на концах промежутка. Следовательно, в силу (3) при каждом $i=1,\ldots,n$ на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ ядро $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ (как функция от u) является сплайном минимального дефекта порядка r с одним узлом в точке t. При этом ядро обращается в ноль в точках $t_{i,j,n}$ $(j=1,2,\ldots,\mu-1)$ и имеет нули кратности не менее $r-k$ на концах промежутка.

Следовательно, $\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ является кусочно-постоянной функцией и имеет на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ не более одной перемены знака.

Пусть ядро $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ хотя бы в одной точке $t_{i,j,n}$ $(j=1,2,\ldots,\mu-1)$ имеет ноль кратности больше, чем единица или на интервале $(t_{i,n},t_{i+1,n})$ имеет хотя бы один ноль в точке отличной от $t_{i,j,n}$, тогда производная по u функции $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ имеет на интервале $(t_{i,n},t_{i+1,n})$ не менее чем $\mu+1$ различных нуля, и, по теореме Ролля $(r-k+1)$-я производная по u функции $\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ будет иметь на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ не менее чем $r-k+\mu$ различных нуля, и, следовательно, $\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})$ будет иметь не менее чем $r-2k+2+\mu=2$ перемены знака на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$, что противоречит предыдущему.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $\mathbb{E}$ – множество всех точек из $[0,1]$, в которых функция $f^{(r+1)}(t)$ непрерывна и не обращается в ноль. Меру этого множества обозначим $\operatorname{mes}\mathbb{E}$. Ясно, что множество $\mathbb{E}$ открыто и, следовательно, состоит из не более счетного числа открытых интервалов. Для любого $\delta>0$ найдется множество $\mathbb{E}\subset\mathbb{E}_\delta$, состоящее из конечного числа открытых интервалов с мерой

$$\operatorname{mes}\mathbb{E}\le\operatorname{mes}\mathbb{E}_\delta-\delta/2.$$

Положим

$$\mathbb{E}^*_\delta=\bigcup_{i=0}^{n-1}\left\{\overline{\mathbb{E}}_\delta\bigcap[t_{i,n},t_{i+1,n}]\right\}$$

где $\overline{\mathbb{E}}_\delta$ – замыкание множества $\mathbb{E}_\delta$. Понятно, что множество $\mathbb{E}^*_\delta$ состоит из конечного числа замкнутых непересекающихся интервалов. Длину наибольшего из этих интервалов обозначим через $h^\delta_n=h^\delta_n(f,\Delta_n)$.

Кроме того, пусть
$$\mathbb{E}_\delta^n = \bigcup_{i:[t_{i,n},t_{i+1,n}]\subset\mathbb{E}_\delta^*} [t_{i,n}, t_{i+1,n}].$$

Ясно, что если последовательность разбиений $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ такова, что $\lim_{n\to\infty} h_n^\delta \neq 0$, то при $n\to\infty$
$$\|f - s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu})\|_{p\,[0,1]} \not\to 0.$$
Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность разбиений такова, что $h_n^\delta \to 0$ при $n\to\infty$. Но тогда для любого $\delta>0$ найдется $N=N(\delta)>0$ такое, что при $n>N$ будет выполняться условие
$$\operatorname{mes}\mathbb{E} \le \operatorname{mes}\mathbb{E}_\delta^{\mathrm{n}} - \delta.$$

Рассмотрим фиксированный промежуток $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ из множества $\mathbb{E}_\delta^n$. По предположению, функция $f^{(r+1)}(t)$ непрерывна и не имеет нулей на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$.

Из (4) для $t\in[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ имеет место равенство
$$\sigma_{i+1/2,n}(f,t) = f(t) - s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[0,1]},t) = \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathbf{K}_{r,k,i}(t,u,\Delta_{n,\mu\,[0,1]}) f^{(r+1)}(u)du. \tag{10}$$
Пусть вначале $k=[(r+1)/2],\dots,r+1$. Из (10) и из леммы следует, что для $t\in[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ выполняется неравенство
$$m^-_{i+1/2,n}|\mathbf{K}_{r,k,i}(t,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})| \le |\sigma_{i+1/2,n}(f,t)| \le m^+_{i+1/2,n}|\mathbf{K}_{r,k,i}(t,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})|, \tag{11}$$
где
$$m^+_{i+1/2,n} = \max_{t\in[t_{i,n},t_{i+1,n}]}|f^{(r+1)}(t)| \qquad m^-_{i+1/2,n} = \min_{t\in[t_{i,n},t_{i+1,n}]}|f^{(r+1)}(t)|.$$

Используя замену переменных $z=t-t_{i,n}$, получаем
$$\|\mathbf{K}_{r,k,i}(t,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|_{p\,[t_{i,n},t_{i+1,n}]} = h_{i+1/2,n}^{(r+1)+p^{-1}}\mathbb{K}_{r,k,p} = h_{i+1/2,n}^{1/\beta}\mathbb{K}_{r,k,p}.$$

Таким образом, для $p\in(0,\infty]$ будут выполняться неравенства
$$m^-_{i+1/2,n}\mathbb{K}_{r,k,p}h^{1/\beta}_{i+1/2,n} \le \|\sigma_{i+1/2,n}(f)\|_{p\,[t_{i,n},t_{i+1,n}]} \le m^+_{i+1/2,n}\mathbb{K}_{r,k,p}h^{1/\beta}_{i+1/2,n}. \tag{12}$$

Пусть, в начале, $p<\infty$, тогда
$$\|f - s_{r,k}(f,\Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|^p_{p\;\mathbb{E}_\delta^n} = \sum_{i:[t_{i,n},t_{i+1,n}]\in\mathbb{E}_\delta^n}\|\sigma_{i+1/2,n}(f)\|_{p\,[t_{i,n},t_{i+1,n}]} \ge$$
$$\ge \mathbb{K}^p_{r,k,p}\sum_{i:[t_{i,n},t_{i+1,n}]\in\mathbb{E}_\delta^n}|m^-_{i+1/2,n}|^p h^{p/\beta}_{i+1/2,n} =$$
$$= \mathbb{K}^p_{r,k,p}\sum_{i:[t_{i,n},t_{i+1,n}]\in\mathbb{E}_\delta^n}\left(\int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}}|m^-_{i+1/2,n}|^\beta dt\right)^{p/\beta}.$$

Из неравенства Йенсена следует, что для любого $\gamma > 0$

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} C_i^\gamma \;\middle|\; C_i \geq 0; \sum_{i=1}^{n} C_i = \mathbf{C}\right\} = \mathbf{C}^\gamma n^{1-\gamma}$$

и минимум достигается тогда и только тогда, когда $C_i = C/n$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Отсюда и из предыдущего сразу получаем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|^p_{p\mathbb{E}^n_\delta} \geq \frac{\mathbb{K}^p_{r,k,p}}{M^{p(r+1)}} \left(\int_{\mathbb{E}^n_\delta} |f_{n,\delta}(t)|^\beta dt\right)^{p/\beta}, \tag{13}$$

где

$$f_{n,\delta}(t) = \{m^-_{i+1/2,n} \mid t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}] : [t_{i,n}, t_{i+1,n}] \in \mathbb{E}^n\}$$

и M – число составных промежутков множества $\mathbb{E}^n_\delta$.

Множество $\mathbb{E}^n_\delta$ замкнуто и состоит из конечного числа интервалов, максимальная длина которых стремится к нулю при $n \to \infty$. Учитывая этот факт и конструкцию функции $f_{n,\delta}$, заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{E}^n_\delta} |f_{n,\delta}(t)|^\beta dt - \int_{\mathbb{E}^*_\delta} |f^{(r+1)}(t)|^\beta dt \right| = 0.$$

Отсюда и из очевидного неравенства $M < n$, получаем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|^p_{p\mathbb{E}^n_\delta} \geq \frac{\mathbb{K}^p_{r,k,p}}{n^{p(r+1)}} \left(\int_{\mathbb{E}^*_\delta} |f^{(r+1)}(t)|^\beta dt\right)^{p/\beta} + o\left(\frac{1}{n^{p(r+1)}}\right)$$

и поскольку

$$\lim_{n\to\infty,\delta\to 0} \operatorname{mes} \mathbb{E}^*_\delta = \operatorname{mes} \mathbb{E}$$

и

$$\int_{\mathbb{E}} |f^{(r+1)}(t)|^\beta dt = \int_{\mathbb{E}} |f^{((r+1))}(t)|^\beta dt = \int_{[0,1]} |f^{((r+1))}(t)|^\beta dt,$$

то

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|^p_p \geq \frac{\mathbb{K}^p_{r,k,p}}{n^{p(r+1)}} \left(\int_{[0,1]} |f^{((r+1))}(t)|^\beta dt\right)^{p/\beta} + o\left(\frac{1}{n^{p(r+1)}}\right), \tag{14}$$

что и завершает доказательство теоремы при $p < \infty$.

Пусть, теперь, $p = \infty$. Тогда из (12) имеем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|_{\infty\;\mathbb{E}^n_\delta} = \max_{i:[t_{i,n},t_{i+1,n}]\in\mathbb{E}^n_\delta} \|\sigma_{i+1/2,n}(f)\|_{\infty\,[t_{i,n},t_{i+1,n}]} \geq$$

$$\geq \mathbb{K}_{r,k,\infty} \max_{i:[t_{i,n},t_{i+1,n}]\in\mathbb{E}^n_\delta} |m^-_{i+1/2,n}| h^{r+1}_{i+1/2,n} =$$

$$= \mathbb{K}_{r,k,\infty} \max_{i:[t_{i,n},t_{i+1,n}]\in\mathbb{E}^n_\delta} \left(\int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} |m^-_{i+1/2,n}|^\beta dt\right)^{1/\beta}.$$

Для любого $\gamma > 0$

$$\min\left\{\max_{i=1,\ldots,n} C_i^\gamma \;\middle|\; C_i \ge 0; \sum_{i=1}^n C_i = \mathbf{C}\right\} = \mathbf{C}^\gamma n^{-\gamma},$$

причем минимум достигается тогда и только тогда, когда $C_i = C/n$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Таким образом имеем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|_{\infty \mathbb{E}_\delta^n} \ge \frac{\mathbb{K}_{r,k,\infty}^p}{M^{r+1}} \left(\int_{\mathbb{E}_\delta^n} |f_{n,\delta}(t)|^\beta dt\right)^{1/\beta}.$$

Отсюда таким же образом, как и ранее, получаем

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|_\infty \ge \frac{\mathbb{K}_{r,k,\infty}}{n^{r+1}} \left(\int_{[0,1]} |f^{((r+1))}(t)|^\beta dt - \varepsilon\right)^{1/\beta}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Это и завершает доказательство первой части теоремы.

Пусть, теперь, r четное и $k = r/2$. Рассмотрим фиксированный промежуток $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ из множества $\mathbb{E}_\delta^n$. Функция $f^{(r+1)}(t)$ на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ непрерывна и не имеет нулей. Пусть, для определенности, на этом промежутке она положительна.

Как следует из леммы, на интервале $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ ядро $\mathbf{K}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2\,[0,1]})$ как функция от u, имеет только одну перемену знака – в точке $t_{i+1/2,n}$. Для определенности будем считать, что ядро положительно при $u \in (t_{i+1/2,n}, t_{i+1,n})$ и отрицательно для $u \in (t_{i,n}, t_{i+1/2,n})$.

Пусть

$$M_{i+1/2,n}^- = \min_{u \in [t_{i,n}, t_{i+1/2,n}]} f^{(r+1)}(u)$$

и

$$M_{i+1/2,n}^+ = \max_{u \in [t_{i+1/2,n}, t_{i+1,n}]} f^{(r+1)}(u).$$

Тогда, как видно из (10)

$$\sigma_{i+1/2,n}(f, t) = \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathbf{K}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2\,[0,1]}) f^{(r+1)}(u) du \ge$$

$$\ge \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1/2,n}} \mathbf{K}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2\,[0,1]}) M_{i+1/2,n}^- du + \int_{t_{i+1/2,n}}^{t_{i+1,n}} \mathbf{K}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2\,[0,1]}) M_{i+1/2,n}^+ du =$$

$$= \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \left(A_{i+1/2,n} + B_{i+1/2,n}\,\mathrm{sign\,(u - t_{i+1/2,n})}\right) \mathbf{K}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2\,[0,1]}) du,$$

где

$$A_{i+1/2,n} = \frac{1}{2}\left(M_{i+1/2,n}^+ + M_{i+1/2,n}^-\right) \qquad B_{i+1/2,n} = \frac{1}{2}\left(M_{i+1/2,n}^+ - M_{i+1/2,n}^-\right).$$

Следовательно,

$$\sigma_{i+1/2,n}(f, t) \ge A_{i+1/2,n} \mathbf{K}_{r,r/2,i}(t, \Delta_{n,2\,[0,1]}) + B_{i+1/2,n} \mathbf{P}_{r,r/2,i}(t, u, \Delta_{n,2\,[0,1]}), \tag{15}$$

где

$$\mathbf{K}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2\,[0,1]})=\int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}}\mathbf{K}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2\,[0,1]})du$$

и

$$\mathbf{P}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2\,[0,1]})=\int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}}\left|\mathbf{K}_{r,r/2,i}(t,u,\Delta_{n,2\,[0,1]})\right|du.$$

Полагая в равенстве (4) в качестве функции $f(t)=(t-t_{i+1/2,n})^{r+1}/(r+1)!$, получаем

$$\frac{(t-t_{i+1/2,n})^{r+1}}{(r+1)!}-s_{r,r/2}\left(\frac{(\cdot-t_{i+1/2,n})^{r+1}}{(r+1)!},\Delta_{n,2\,[0,1]},t\right)=\mathbf{K}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2\,[0,1]}).$$

Отсюда и из четности r сразу следует, что функция $\mathbf{K}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2\,[0,1]})$ нечетная относительно точки $t_{i+1/2,n}$, а $\mathbf{P}_{r,r/2,i}(t,\Delta_{n,2\,[0,1]})$ – четная относительно прямой $t=t_{i+1/2,n}$.

Нетрудно видеть, что если функция φ нечетная, а ψ четная на промежутке $[-a,a]$, то для $p\geq 1$

$$\|\varphi+\psi\|_{p\,[-a,a]}\geq\min\{\|\varphi\|_{p\,[-a,a]},\|\psi\|_{p\,[-a,a]}\}. \tag{16}$$

Действительно,

$$\|\varphi+\psi\|_{p\,[-a,a]}=\|\varphi(-\cdot)+\psi(-\cdot)\|_{p\,[-a,a]}=\|-\varphi+\psi\|_{p\,[-a,a]}=\|\varphi-\psi\|_{p\,[-a,a]}.$$

Таким образом имеем

$$\|\varphi+\psi\|_{p\,[-a,a]}=\frac{1}{2}\left(\|\varphi+\psi\|_{p\,[-a,a]}+\|\varphi-\psi\|_{p\,[-a,a]}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\|\varphi+\psi\|_{p\,[-a,a]}+\|\varphi-\psi\|_{p\,[-a,a]}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\|\varphi+\psi+\varphi-\psi\|_{p\,[-a,a]}\right)=\|\varphi\|_{p\,[-a,a]}.$$

Аналогично получаем неравенство

$$\|\varphi+\psi\|_{p\,[-a,a]}\geq\|\psi\|_{p\,[-a,a]}.$$

Из (15) и (16) следует, что

$$\|\sigma_{i+1/2,n}(f)\|_{p\,[t_{i,n},t_{i+1,n}]}\geq A_{i+1/2,n}\mathbb{K}_{r,r/2,p}h_{i+1/2,n}^{1/\beta}\geq$$

$$\geq m_{i+1/2,n}^{-}\mathbb{K}_{r,r/2,p}h_{i+1/2,n}^{1/\beta}=\mathbb{K}_{r,k,p}\left(\int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}}|m_{i+1/2,n}^{-}|^{\beta}dt\right)^{1/\beta}.$$

Дальнейшее доказательство повторяет ход рассуждений приведенный выше.

Замечание. *Доказательство первой части теоремы существенно опирается на тот факт, что ядро (3) не меняет знак на промежутке $[t_{i,n},t_{i+1,n}]$, а доказательство второй части, использует то, что ядро имеет ровно одну перемену знака на этом промежутке. Поэтому, предложенное доказательство к сплайнам дефекта $k<r/2$ не применимо.*

Как следует из теоремы A, для многих функций, к примеру, имеющих непрерывную $(r+1)$-ю производную существует набор узлов, дающий ту же оценку приближения (асимптотически), что и в теореме. Мы предполагаем, что на самом деле выбор узлов (6) является асимптотически оптимальным для более широкого класса функций, а может быть и для всех функций, фигурирующих в теореме. Однако доказательство этого факта, на наш взгляд, является довольно трудным. Даже доказательство неравенства

$$\|f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu\,[0,1]})\|_p \leq \frac{\mathbf{C}_{r,k,p}}{n^{r+1}} \|f^{((r+1))}\|_{\beta\,[0,1]}(1 + o(1))$$

с некоторой константой $\mathbf{C}_{r,k,p}$, зависящей лишь от r, k и p является не тривиальным.

Список литературы

[1] *Лигун А.А.* Об одном свойстве интерполяционных сплайн - функций. Украинский математический журнал, 1980, т.32, N 4, с. 507 – 514.

[2] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами.- Докл. АН УССР, сер.A,N 6, 1984, с. 18 – 22.

[3] *Азарин И.С., Бармин В.И.* Аппроксимация кусочно – линейными функциями. В кн.: Матем. сборник, Киев, 1976, с.25–26.

[4] *Гребенников А.И.* О выборе узлов при аппроксимации функций сплайнами. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1976, 16, N 1, с.219–223.

[5] *Лигун А.А., Сторчай В.Ф.* О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами.Anal. math., 1976, 2, с. 267 – 275.

[6] *Лигун А.А., Сторчай В.Ф.* О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами. Украинский математический журнал, 1980, т.32, N 6, с. 824 – 830.

On lower bound of approximation of individual function by locally splines with free knodes.

A.A.Ligun, A.A.Shumeiko

Abstract

For the functions integrable in degree $\beta = (r + 1 + 1/p)^{-1}$ the asymptotically exactly evaluation from below on approximations by the local spline-functions of degree r, defect $k \geq r/2$ in the metric L_p is obtained.

Для функций, интегрируемых в степени $\beta = (r+1+1/p)^{-1}$ получена асимптотически точная оценка снизу приближения локальными сплайнами степени r дефекта $k \geq r/2$ в метрике L_p.