УМЖ, 2000, т.52, N 4, с.1512-1523
УДК 517.5

А.А. Шумейко (Днепродзержинский гос. техн. ун-т)

О ПРИБЛИЖЕНИИ СНИЗУ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СО СВОБОДНЫМИ УЗЛАМИ

Пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ произвольная последовательность разбиений отрезка $[0,1]$
$$\Delta_n = \{0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{n,n} = 1\}.$$

Через $h_{i+1/2,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ обозначим шаг разбиения Δ_n.

Функцию $s(t)$, имеющую $r-k$ непрерывных производных на отрезке $[0,1]$ и совпадающую на каждом из интервалов $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ с алгебраическим многочленом степени не выше r будем называть сплайн - функцией порядка r дефекта k по разбиению Δ_n или просто сплайном. При фиксированных r, k и Δ_n множество таких сплайнов будем обозначать через $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)$.

Как обычно, через L_p $(p \in (0,\infty))$ обозначим множество всех измеримых суммируемых в p-й степени на отрезке $[0,1]$ функций $f(t)$ и положим
$$\|f\|_{p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad (\|f\|_p = \|f\|_{p\,[0,1]}),$$
а через L_∞ пространство всех существенно ограниченных на $[0,1]$ функций $f(t)$ с конечной нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{supvrai}\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$. Кроме того, через V^r обозначим множество функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и полная вариация r-й производной ограничена, т.е. $V_0^1(f^{(r)}) < \infty$.

Введем необходимые в дальнейшем обозначения:
$$\mathbb{E}\left(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)\right)_p = \mathbb{E}\left(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)\right)_{p\,[0,1]} = \inf\left\{\|f-s\|_p \mid s \in \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)\right\}$$
и
$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p = \mathbb{E}_{r,k,n}(f)_{p\,[0,1]} = \inf_{\Delta_n} \mathbb{E}\left(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)\right)_p.$$

При фиксированных r, k и p последовательность разбиений $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ назовем асимптотически оптимальной для функции $f \in C^{r-k}$, если при $n \to \infty$ выполняется соотношение
$$\mathbb{E}\left(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n^*)\right)_p = \mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p(1 + o(1)).$$

Обозначим через $\mathbf{D}_{r+1}(x)$ r -й 1-периодический интеграл в среднем равный нулю на отрезке $[0,1]$ от функции $\mathbf{D}_1(x) = x - 1/2$ и пусть $\mathbb{D}_{r,k}$ $(r = 1, 2, \ldots, k = 1, 2 \ldots, r)$ множество всех функций $g(x)$ вида
$$g(x) = \mathbf{D}_r(x) - \lambda_0 - \sum_{i=1}^{[(k-1)/2]} \lambda_i\, \mathbf{D}_{r-2i}(x).$$
Здесь $[\cdot]$ – целая часть числа.

Далее, пусть $\mathbf{D}_{r,k,p} \in \mathbb{D}_{r,k}$ такова, что $\|\,\mathbf{D}_{r,k,p}\|_p = \min\left\{\|g\|_p \mid g \in \mathbb{D}_{r,k}\right\}$.

В 1984 году в работе [2] получен следующий результат (в 1987 году этот результат был повторен Д.Пенсе [3])

Теорема A. *Пусть $r = 1, 2, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots, r,$ $p \in [1, \infty]$ и $\beta = (r + 1 + 1/p)^{-1}$. Тогда для любой функции $f \in C^{r+1}$ при $n \to \infty$ выполняется соотношение*

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p = \frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p}{n^{r+1}} \| f^{(r+1)} \|_\beta + o(n^{-r-1}). \tag{1}$$

Указан также метод построения последовательности асимптотически оптимальных разбиений.

В данной работе покажем, что оценка снизу, совпадающая с правой частью (1) верна для функций из более общих чем C^{r+1} классов, в частности, для функций, у которых $r + 1$-я "формальная"производная имеет особенности вида

$$g(t) + \sum_{\nu=0}^{m} \frac{c_\nu}{(t - a_\nu)^{\gamma_\nu}} \qquad (g \in C^{r+1}, \quad \gamma_\nu < r + 1 + 1/p).$$

Перейдем к точным формулировкам.

Пусть функция $f(t)$ имеет односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$ в каждой точке $t \in (a, b)$. Для каждой такой функции положим

$$f^{((\nu))}(t) = \frac{1}{2} \left(f^{(\nu)}(t + 0) + f^{(\nu)}(t - 0) \right)$$

и функцию $f^{((\nu))}(t)$ будем называть ν–й "формальной производной"от $f(t)$ в точке t. Ясно, что если в точке t функция $f^{(\nu-1)}(t)$ дифференцируема, то $f^{((\nu))}(t) = f^{(\nu)}(t)$.

Теорема 1. *Пусть $r = 1, 2, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots, r,$ $p \in [1, \infty]$, $\beta = (r + 1 + p^{-1})^{-1}$, $\alpha \in (-1/\beta, 0)$ и функция $f(t)$ такова, что существует разбиение $\delta_m = \{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ отрезка $[0, 1]$ и постоянные A_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ такие, что на каждом интервале $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ функция $f^{(r+1)}(t)$ абсолютно непрерывна, а функция $f^{(r+2)}(t)$ почти всюду существует на $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ и почти всюду выполняется неравенство*

$$|f^{(r+2)}(t)| \le A_\nu (t - a_{\nu-1})^\alpha (a_\nu - t)^\alpha. \tag{2}$$

Тогда для любой последовательности разбиений $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p \ge \frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p}{n^{r+1}} \| f^{((r+1))} \|_\beta (1 + o(1)). \tag{3}$$

Заметим, что при $\alpha \ge 0$ утверждение теоремы 1 следует из теоремы A.

Доказательство теоремы опирается на несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $\Delta_{n,r}$ есть разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $t_{i,j,n} = t_{i,n} + j\, H_i$ (здесь $H_i = h_{i+1/2,n}/r$) $(i = 0, 1, \ldots, n - 1;\ j = 0, 1, \ldots, r)$. Обозначим через $p_r(f, \Delta_n)$ функцию, которая на каждом из промежутков $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$ совпадает с интерполяционным полиномом Лагранжа, то есть на каждом из промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$ функция $p_r(f, \Delta_n)$ есть алгебраический полином степени не выше r, однозначно определяющийся интерполяционными условиями:

$$p_r(f, \Delta_n, t_{i,j,n}) = f(t_{i,j,n}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n - 1;\ j = 0, 1, \ldots, r).$$

Кроме того, пусть $P_r(f, \Delta_n) \in \mathbb{S}_{r,1}(\Delta_{n,r})$ – сплайн Субботина-Черных (см. [4]), то есть это сплайн минимального дефекта с узлами из $\Delta_{n,r}$), однозначно определяющийся интерполяционными условиями:

$$P_r^{(j)}(f, \Delta_n, t_{i,n}) = f^{(j)}(t_{i,n}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, r - 1).$$

Положим для $t,u\in[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ и

$$\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n)=-\frac{1}{r!}\left((u-t)_+^r-P_r((\cdot-t)_+^r,\Delta_n,u)\right). \tag{4}$$

Лемма 1._Для всех $i=0,1,\dots,n-1$ и $t,u\in[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ имеет место неравенство_

$$|\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n)|\le\frac{1}{r!}\min\{(u-t_{i,n})^r,(t_{i+1,n}-u)^r\}.$$

Доказательство. В работе [1], в частности, установлено, что для любых функций $f,z\in V^r$ имеет место равенство

$$\int_0^1 (f(u)-p_r(f,\Delta_n,u))\,d\left(z^{(r)}(u)\right)=$$

$$=(-1)^{r+1}\int_0^1 (z(u)-P_r(z,\Delta_n,u))\,d\left(f^{(r)}(u)\right). \tag{5}$$

Полагая в равенстве (5)

$$z(u)=(-1)^r\frac{(u-t)_+^r}{r!},$$

получаем для любой функции $f\in V^r$

$$f(t)-p_r(f,\Delta_n,t)= \tag{6}$$

$$=\frac{1}{r!}\int_0^1\left((u-t)_+^r-P_r((\cdot-t)_+^r,\Delta_n,u)\right)d\left(f^{(r)}(u)\right).$$

Таким образом для $t\in[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ справедливо равенство

$$f(t)-p_r(f,\Delta_n,t)=\int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}}\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n)d\left(f^{(r)}(u)\right). \tag{7}$$

По определению, для $t\in[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ при любом $i=0,1,\dots,n-1$ сплайн $p_r(f,\Delta_n)$ является интерполяционным полиномом Лагранжа с узлами интерполяции $t_{i,j,n}$ $(j=0,1,\dots,r)$, то есть имеет вид

$$p_r(f,\Delta_n,t)=\sum_{j=0}^r f(t_{i,j,n})\ell_j(t),$$

где

$$\ell_j(t)=\prod_{\substack{\nu=0,\\ \nu\ne j}}^r(t-t_{i,\nu,n})\left(\prod_{\substack{\nu=0,\\ \nu\ne j}}^r(t_{i,j,n}-t_{i,\nu,n})\right)^{-1}. \tag{8}$$

Для $t\in[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ имеет место равенство

$$f(t)-p_r(f,\Delta_n,t)=\int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}}f'(u)\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n)du,$$

при этом функция $\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n)$ (по переменной u) является кусочно - постоянной с чередующими знак разрывами равными $\ell_j(t)$ в точках $t_{i,j,n}$ $(j=0,\dots,r)$ и 1 в точке t (см., [8]). Для $t\in[t_{i,n},t_{i+1,n}]$ выполняется неравенство

$$|\ell_j(t)|\le 1.$$

Таким образом,

$$-1\le\frac{\partial^r}{\partial u^r}\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n)\le 1.$$

Поэтому

$$\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{t_{i,n}}^{u}(\xi-t_{i,n})^{r-1}\frac{\partial^r}{\partial\xi^r}\mathbf{K}_{r,i}(t,\xi,\Delta_n)d\xi\le$$

$$\le\frac{1}{(r-1)!}\int_{t_{i,n}}^{u}(\xi-t_{i,n})^{r-1}d\xi=\frac{1}{r!}(u-t_{i,n})^r.$$

Аналогично получаем

$$\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n)\le\frac{1}{r!}(t_{i+1,n}-u)^r,$$

что и завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть* $f\in C^{r+1}_{(0,1]}$, $p\in[1,\infty]$, $\vartheta=(r+p^{-1})^{-1}$, $\gamma\in(-1/\vartheta,0)$, $n=1,2,\ldots$ *и существует такая постоянная* $A>0$*:*

$$|f^{(r+1)}(t)|\le At^{\gamma}\qquad(t\in(0,1]).\tag{9}$$

Тогда найдутся такие постоянные $\mathbf{C}_i=\mathbf{C}_i(A,r,p,\gamma)$ $(i=1,2)$ *и последовательность разбиений* $\{\Delta_n^\star\}_{n=1}^\infty$ *такие, что*

$$\|f-p_r(f,\Delta_n^\star)\|_p\le\frac{\mathbf{C}_1}{n^{r+1}}\tag{10}$$

и

$$\|f^{(r)}-p_r^{(r)}(f,\Delta_n^\star)\|_\vartheta\le\frac{\mathbf{C}_2}{n}.\tag{11}$$

Доказательство. Пусть, вначале $p\in[1,\infty)$. Положим $N=[n/2]$ $(n=1,2,\ldots)$ и выберем узлы разбиения $\Delta_n^\star$ из условия

$$t_{i,n}^\star=\left(\frac{i}{N^2}\right)^{\frac{1}{\gamma\eta+1}}\qquad(i=0,1,\ldots,N)\tag{12}$$

и

$$t_{i+N,n}^\star=\left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma\eta+1}}\qquad(i=1,\ldots,N),\tag{13}$$

где $\eta=(r+1+p^{-1})^{-1}$.

На промежутке $(0,1]$ функция $t^{\gamma\eta}$ положительная монотонно убывает, поэтому верно соотношение

$$\int_{t_{i,n}^\star}^{t_{i+1,n}^\star}t^{\gamma\eta}dt\ge(t_{i+1,n}^\star)^{\gamma\eta}\int_{t_{i,n}^\star}^{t_{i+1,n}^\star}dt=(t_{i+1,n}^\star)^{\gamma\eta}h_{i+1/2,n}^\star\qquad(i=1,\ldots,n-1),\tag{14}$$

где $h_{i+1/2,n}^\star=t_{i+1,n}^\star-t_{i,n}^\star$ – шаг разбиения $\Delta_n^\star$.

Используя определение узлов для $i>N$ отсюда имеем

$$h_{i+1/2,n}^\star\le\frac{1}{\gamma\eta+1}\frac{1}{N}\left(\frac{i+1}{N}\right)^{-\frac{\gamma\eta}{\gamma\eta+1}}.\tag{15}$$

Из равенства (7) и условия (9) для $t\in[t_{i,n}^\star,t_{i+1,n}^\star]$ имеем

$$|f(t)-p_r(f,\Delta_n^\star,t)|\le A(t_{i,n}^\star)^{\gamma}\left|\int_{t_{i,n}^\star}^{t_{i+1,n}^\star}\mathbf{K}_{r,i}(t,u,\Delta_n^\star)du\right|.\tag{16}$$

Отсюда, используя замену переменных, получаем

$$\|f-p_r(f,\Delta_n^\star)\|^p_{p\,[t_{i,n}^\star,t_{i+1,n}^\star]}\le A^p(t_{i,n}^\star)^{\gamma p}\mathbb{K}^p_{r,p}(h_{i+1/2,n}^\star)^{p(r+1)+1},\tag{17}$$

где
$$\mathbb{K}_{r,p} = \left\| \int_0^1 \mathbf{K}_{r,1}(\cdot, u, \Delta_1) du \right\|_p .$$

Отсюда и из (15) получаем, что для $i = N, \dots, n-1$
$$\|f - p_r(f, \Delta_n^\star)\|^p_{p\,[t^\star_{i,n}, t^\star_{i+1,n}]} \le \frac{1}{N^{p/\eta}} \frac{A^p \mathbb{K}^p_{r,p}}{(\gamma\eta+1)^{p/\eta}} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}} .$$

Вследствие выбора γ, имеем $\gamma p/(\gamma\eta+1) < 0$ и
$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}} \le 2^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}}.$$

Поэтому
$$\|f - p_r(f, \Delta_n^\star)\|^p_{p\,[t^\star_{i,n}, t^\star_{i+1,n}]} \le \frac{C_0^p}{N^{p/\eta}} \qquad (i = N, \dots, n-1),$$
где
$$C_0 \le \frac{A \mathbb{K}_{r,p}}{(\gamma\eta+1)^{1/\eta}} 2^{-\frac{\gamma}{\gamma\eta+1}}.$$

Таким образом,
$$\|f - p_r(f, \Delta_n^\star)\|^p_{p\,[t^\star_{N,n}, 1]} = \sum_{i=N}^{n-1} \|f - p_r(f, \Delta_n^\star)\|^p_{p\,[t^\star_{i,n}, t^\star_{i+1,n}]} \le$$

$$\le \frac{C_0^p}{N^{p/\eta}} (N-1) \le \frac{C_0^p 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}. \tag{18}$$

Пусть, теперь, $t \in [0, t^\star_{1,n}]$, тогда с учетом леммы 1 из (7) имеем
$$|f(t) - p_r(f, \Delta_n^\star, t)| = \left| \int_0^{t^\star_{1,n}} \mathbf{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n^\star) f^{(r+1)}(u) du \right| \le$$

$$\le \frac{A}{r!} \int_0^{t^\star_{1,n}} u^\gamma \min\{u^r, (t^\star_{1,n} - u)^r\} du \le \frac{A}{r!} \int_0^{t^\star_{1,n}} u^{\gamma+r} du = \frac{A}{r!(\gamma+r+1)} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{2(\gamma+r+1)}{\gamma\eta+1}} . \tag{19}$$

Отсюда сразу получаем
$$\|f - p_r(f, \Delta_n^\star)\|^p_{p\,[0, t^\star_{1,n}]} \le \frac{C_1^p}{N^{(r+1)p}} \le \frac{C_1^p 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}, \tag{20}$$
где
$$C_1 \le \frac{A}{r!(\gamma+r+1)}.$$

Кроме того, из (18) следует, что
$$\|f - p_r(f, \Delta_n^\star)\|^p_{p\,[t^\star_{1,n}, t^\star_{N,n}]} \le \frac{C_0^p 2^{p(r+1)}}{n^{2p(r+1)}} < \frac{C_0^p 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}. \tag{21}$$

Сопоставляя оценки (18) – (21), получаем неравенство (10).

Докажем, теперь, соотношение (11).

Ясно, что для $t \in [t^\star_{i,n}, t^\star_{i+1,n}]$ $(i > N)$ будет выполняться равенство
$$f^{(r)}(t) - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^\star, t) = \int_{t^\star_{i,n}}^{t^\star_{i+1,n}} f^{(r+1)}(u) \frac{\partial^r}{\partial t^r} \mathbf{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n^\star) du$$
и, следовательно, имеет место неравенство
$$\|f^{(r)} - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^\star)\|^\vartheta_{\vartheta\,[t^\star_{i,n}, t^\star_{i+1,n}]} \le A^\vartheta (t^\star_{i,n})^{\gamma\vartheta} \mathbb{K}^\vartheta_{r,\vartheta,r} (h^\star_{i+1/2,n})^{1+\vartheta},$$

где

$$\mathbb{K}_{r,\vartheta,r}=\left\|\int_0^1\frac{\partial^r}{\partial(\cdot)^r}\mathbf{K}_{r,1}(\cdot,u,\Delta_1)du\right\|_{\vartheta}.$$

Используя в этом неравенстве соотношения (13) и (15), сразу получаем для $i>N$

$$\|f^{(r)}-p_r^{(r)}(f,\Delta_n^\star)\|^{\vartheta}_{\vartheta\,[t^\star_{i,n},t^\star_{i+1,n}]}\le\frac{(\mathbb{K}_{r,\vartheta,r}A)^{\vartheta}}{(N(\gamma\eta+1))^{1+\vartheta}}\left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{\gamma\vartheta}{\gamma\eta+1}}\left(\frac{i+1}{N}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}=$$

$$=\frac{(\mathbb{K}_{r,\vartheta,r}A)^{\vartheta}}{(N(\gamma\eta+1))^{1+\vartheta}}\left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{\gamma\vartheta-\gamma\eta-\gamma\vartheta\eta}{\gamma\eta+1}}\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}.$$

Кроме того,

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}\le 2^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}.$$

Следовательно, для всех $i>N$ будет выполняться неравенство

$$\|f^{(r)}-p_r^{(r)}(f,\Delta_n^\star)\|^{\vartheta}_{\vartheta\,[t^\star_{i,n},t^\star_{i+1,n}]}\le\frac{C_2^{\vartheta}}{N^{1+\vartheta}},$$

где

$$C_2\le 2^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}.\frac{\mathbb{K}_{r,\vartheta,r}A}{(\gamma\eta+1)^{1+1/\vartheta}}.$$

Таким образом имеем

$$\|f^{(r)}-p_r^{(r)}(f,\Delta_n^\star)\|^{\vartheta}_{\vartheta\,[t^\star_{N,n},1]}=\sum_{i=N}^{n-1}\|f^{(r)}-p_r^{(r)}(f,\Delta_n^\star)\|^{\vartheta}_{\vartheta\,[t^\star_{i,n},t^\star_{i+1,n}]}\le$$

$$\le\frac{C_2^{\vartheta}}{N^{1+\vartheta}}(N-1)\le\frac{C_2^{\vartheta}2^{\vartheta}}{n^{\vartheta}}.$$

Аналогично (21) и (23) показываем, что

$$\|f^{(r)}-p_r^{(r)}(f,\Delta_n^\star)\|^{\vartheta}_{\vartheta\,[0,t^\star_{N,n}]}\le\frac{C_3^{p}}{n^{\vartheta}},\tag{22}$$

что и завершает доказательство леммы 2 при $p\in[1,\infty)$.

Пусть, теперь $p=\infty$. Из соотношения (16) для $t\in[t^\star_{i,n},t^\star_{i+1,n}]$ имеем

$$|f(t)-p_r(f,\Delta_n^\star,t)|\le A(t^\star_{i,n})^{\gamma}\mathbb{K}_{r,\infty}(h^\star_{i+1/2,n})^{r+1}.$$

Отсюда из (13) и из (15) получаем, что для $i=N,\dots,n-1$

$$\|f-p_r(f,\Delta_n^\star)\|_{\infty\,[t^\star_{i,n},t^\star_{i+1,n}]}\le\frac{C_4}{N^{r+1}},$$

где

$$C_4\le\frac{A\,\mathbb{K}_{r,\infty}}{(\gamma\eta+1)^{r+1}}.$$

Кроме того, из (19) проводя построения аналогичные (20) – (22), легко убедиться в справедливости неравенств (10) – (11) при $p=\infty$, что и завершает доказательство леммы.

Замечание 1. *Нетрудно видеть, что если Δ_M - произвольное разбиение отрезка $[0,1]$ и $\Delta_n^\star$ разбиения, фигурирующие в лемме 2, то для разбиения $\Delta_n^\star\bigcup\Delta_M$ будут выполняться неравенства (10), (11) (с теми же постоянными $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$).*

Лемма 3. *Пусть $r=1,2,\dots$, $p\in[1,\infty]$, $\vartheta=(r+p^{-1})^{-1}$, $\gamma\in(-1/\vartheta,0)$ и функция $f(t)$ такова, что существует разбиение $\delta_m=\{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ отрезка $[0,1]$ и постоянные A_ν $(\nu=0,1,\dots,m)$*

такие, что на каждом интервале $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ функция $f^{(r)}(t)$ абсолютно непрерывна, а функция $f^{(r+1)}(t)$ и почти всюду существует на $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ и

$$|f^{(r+1)}(t)| \leq A_\nu(t-a_{\nu-1})^\gamma(a_\nu - t)^\gamma \quad (t \in (a_{\nu-1}, a_\nu)).$$

Тогда найдутся такие постоянные $\mathbf{C}_{i,n} = \mathbf{C}_{i,n}(\{A_\nu\}_{\nu=0}^m,\ \delta_m, r, p, \gamma)$ $(i = 1, 2)$ и последовательность разбиений $\{\Delta_n^\star\}_{n=1}^\infty$ такие, что для любого разбиения Δ_M отрезка $[0,1]$ будут справедливы соотношения

$$\|f - p_r(f, \Delta_n^\star \bigcup \Delta_M)\|_p \leq \frac{\mathbf{C}_1}{n^{r+1}} \tag{23}$$

и

$$\|f^{((r))} - p_r^{((r))}(f, \Delta_n^\star \bigcup \Delta_M)\|_\vartheta \leq \frac{\mathbf{C}_2}{n}. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $k = n/(2m)$. Применяя для каждого фиксированного ν $(\nu = 1, \ldots, m)$ на множестве $(a_{\nu-1}, (a_{\nu-1}+a_\nu)/2]$ лемму 2, получаем, что найдется разбиение $\Delta^\star_{k\,[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]}$, такое, что будут выполняться неравенства

$$\|f - p_r(f, \Delta^\star_{k\,[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]})\|_{p\,[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]} \leq \frac{\mathbf{C}_1}{k^{r+1}}\left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2}\right)^{r+1+\gamma+1/p}.$$

и

$$\|f^{((r))} - p_r^{((r))}(f, \Delta^\star_{k\,[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]})\|_{\vartheta\,[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]} \leq \frac{\mathbf{C}_2}{k}\left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2}\right)^{1+\gamma+1/\vartheta}.$$

Аналогично получаем, что существует разбиение $\Delta^\star_{k\,[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]}$ такое, что

$$\|f - p_r(f, \Delta^\star_{k\,[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]})\|_{p\,[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]} \leq \frac{\mathbf{C}_1}{k^{r+1}}\left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2}\right)^{r+1+\gamma+1/p}$$

и

$$\|f^{((r))} - p_r^{((r))}(f, \Delta^\star_{k\,[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]})\|_{\vartheta\,[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]} \leq \frac{\mathbf{C}_2}{k}\left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2}\right)^{1+\gamma+1/\vartheta}.$$

Отсюда очевидным образом следует утверждение леммы 3 при $p \in [1, \infty)$. Аналогично доказывается лемма для $p = \infty$.

Замечание 2. Проследив доказательство, легко убедиться а том, что справедливо более общее утверждение. Если $\beta_\nu = (\nu + 1/p)^{-1}$ $(\nu = 0, \ldots, r)$ и почти всюду существует функция $f^{((\nu))}(t)$, то найдутся такие константы $\mathcal{K}_\nu$ $(\mathcal{K}_\nu = \mathcal{K}(\nu, A, p, \beta))$ и последовательность разбиений $\{\Delta_n^\star\}_{n=1}^\infty$, что для любого разбиения Δ_M отрезка $[0,1]$ при $n \to \infty$ будут справедливы соотношения

$$\|f^{((\nu))} - p_r^{((\nu))}(f, \Delta_n^\star \bigcup \Delta_M)\|_{\beta_\nu} \leq \frac{\mathcal{K}_\nu}{n^\nu}.$$

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $\delta_m = \{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ заданное разбиение отрезка $[0,1]$ и постоянные A_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ такие, что на каждом интервале $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ функция $f^{(r+1)}(t)$ абсолютно непрерывна, а функция $f^{(r+2)}(t)$ почти всюду существует на $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ и почти всюду выполняется неравенство

$$|f^{(r+2)}(t)| \leq A_\nu(t - a_{\nu-1})^\alpha(a_\nu - t)^\alpha.$$

Положим

$$N = \left[n^{(r+1)/(r+2)}\right] + 1. \tag{25}$$

В силу леммы 3 найдется последовательность разбиений $\{\sigma_N\}$ такая, что

$$\|f - p_{r+1}(f, \Delta_M^\star)\|_p \le \frac{\mathbf{C}_1}{N^{r+2}}$$

и

$$\|f^{((r+1))} - p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^\star)\|_\beta \le \frac{\mathbf{C}_2}{N},$$

где

$$\Delta_M^\star = \{\theta_{i,n}\}_{i=0}^M = \delta_m \bigcup \sigma_N$$

и постоянные $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ не зависят от N. Тогда $M \le N + m$, таким образом,

$$M = o(n). \tag{26}$$

Пусть, еще

$$\Delta_K^* = \Delta_n \bigcup \Delta_M^*,$$

тогда $K \le n + N + m$ и, следовательно,

$$K = n + o(n). \tag{27}$$

Ясно, что для любой функции $f \in L_p$

$$\mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \ge \mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_K^*))_p. \tag{28}$$

Для каждого $i = 0, 1, \ldots, M$ через ∇_{n_i} обозначим множество всех точек разбиения Δ_K^* лежащих в промежутке $[\theta_{i,n}, \theta_{i+1,n}]$. Количество точек этого разбиения обозначим через n_i. Ясно, что

$$\sum_{i=0}^{M-1} n_i \le K + M.$$

В силу неравенства треугольника

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p \ge \mathbb{E}_{r,k,n}(p_{r+1}(f, \Delta_M^\star))_p - \|f - p_{r+1}(f, \Delta_M^\star)\|_p. \tag{29}$$

Кроме того, по построению, для всех $t \in [\theta_{i,n}, \theta_{i+1,n}]$ функция $p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^\star, t)$ постоянная. Обозначим это значение через $c_{i+1/2,n}$. Отсюда и из (28) следует, что для любого $p \in [1, \infty)$

$$\mathbb{E}(p_{r+1}(f, \Delta_M^\star), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \ge \mathbb{E}(p_{r+1}(f, \Delta_M^\star), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_K^*))_p \ge$$

$$\ge \left(\sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{E}(p_{r+1}(f, \Delta_M^\star), \mathbb{S}_{r,k}(\nabla_{n_i}))_{p\,[\theta_{i,n}, \theta_{i+1,n}]} \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{(r+1)!} \left(\sum_{i=0}^{M-1} (\theta_{i+1,n} - \theta_{i,n})^{p/\beta} |c_{i+1/2,n}|^p \mathbb{E}((\cdot)^{r+1}, \mathbb{S}_{r,k}(\nabla_{n_i}))_{p\,[0,1]} \right)^{1/p} \ge$$

$$\ge \frac{1}{(r+1)!} \left(\sum_{i=0}^{M-1} (\theta_{i+1,n} - \theta_{i,n})^{p/\beta} |c_{i+1/2,n}|^p \mathbb{E}_{r,k,n_i}((\cdot)^{r+1})_p \right)^{1/p}. \tag{30}$$

Известно (см., например, [2]), что

$$\frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p}\|_p}{(n+2r+2)^{r+1}} \le \mathbb{E}_{r,k,n} \left(\frac{(\cdot)^{r+1}}{(r+1)!} \right)_p \le \frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p}\|_p}{n^{r+1}}.$$

Отсюда и из (30) получаем

$$\mathbb{E}(p_{r+1}(f, \Delta_M^\star), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \ge$$

$$\geq \| \mathbf{D}_{r,k,p}\|_p \left(\sum_{i=0}^{M-1} (\theta_{i+1,n} - \theta_{i,n})^{p/\beta} \frac{|c_{i+1/2,n}|^p}{(n_i + 2r + 2)^{p(r+1)}} \right)^{1/p} =$$

$$= \| \mathbf{D}_{r,k,p}\|_p \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{(n_i + 2r + 2)^{p(r+1)}} \left((\theta_{i+1,n} - \theta_{i,n}) |c_{i+1/2,n}|^\beta \right)^{p/\beta} \right)^{1/p} =$$

$$= \| \mathbf{D}_{r,k,p}\|_p \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{(n_i + 2r + 2)^{p(r+1)}} \left(\int_{\theta_{i,n}}^{\theta_{i+1,n}} |c_{i+1/2,n}|^\beta dt \right)^{p/\beta} \right)^{1/p} =$$

$$(31) \qquad = \| \mathbf{D}_{r,k,p}\|_p \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{(n_i + 2r + 2)^{p(r+1)}} \left(\int_{\theta_{i,n}}^{\theta_{i+1,n}} |p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^\star, t)|^\beta dt \right)^{p/\beta} \right)^{1/p}.$$

Из неравенства Йенсена следует, что для любого $\gamma > 0$

$$(32) \qquad \min \left\{ \sum_{i=1}^n A_i C_i^{-\gamma} \,\middle|\, A_i, C_i \geq 0; \sum_{i=1}^n C_i = \mathbf{C} \right\} = \mathbf{C}^{-\gamma} \left(\sum_{i=1}^n A_i^{\frac{1}{\gamma+1}} \right)^{1+\gamma}.$$

Полагая в (31)

$$\gamma = p(r+1); \quad A_i = n_i + 2r + 2; \quad C_i = \int_{\theta_{i,n}}^{\theta_{i+1,n}} |p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^\star, t)|^\beta dt,$$

из (31) и (32) сразу получаем

$$\mathbb{E}^p(p_{r+1}(f, \Delta_M^\star), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \geq \frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p}\|_p^p}{(K + M(2r+3))^{p(r+1)}} \|p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^\star)\|_\beta^p.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что для достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$\mathbb{E}^p(p_{r+1}(f, \Delta_M^\star), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \geq \frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p}\|_p^p}{(K + M(2r+3))^{p(r+1)}} \left(\|f^{((r+1))}\|_\beta - \frac{\mathbf{C}_2}{N} \right)^p,$$

что вместе с (26) и (27) и завершает доказательство теоремы при $p < \infty$.

В случае $p = \infty$ доказательство аналогичное, только вместо (32) нужно использовать соотношение

$$\min \max \left\{ A_i C_i^{-\gamma} \,\middle|\, A_i, C_i \geq 0; \sum_{i=1}^n C_i = \mathbf{C} \right\} = \mathbf{C}^{-\gamma} \left(\sum_{i=1}^n A_i^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{\gamma}.$$

Приведем одно из приложений полученного результата.

Введем в рассмотрение наборы индексов $Q_r = \{0, 1, \ldots, r\}$, $I = (I_0, I_1)$ ($I_i \subset Q_r,\ i = 0, 1$) и наборы коэффициентов $\mathbf{A}_n^\mu = \left\{ \left\{ a_{i,\nu} \right\}_{i=1}^{n-1} \right\}_{\nu=0}^{\mu-1}$ ($1 \leq \mu \leq r$) и $\mathbf{B}_i(I_i) = \left\{ b_{\nu,i} \right\}_{\nu \in I_i}$ ($i = 0, 1$).

Выражение вида

$$(33) \qquad \mathbf{I}(f, \mathbf{A}_n^\mu, \Delta_n) + \mathbf{I}_0(f, \mathbf{B}_0) + \mathbf{I}_1(f, \mathbf{B}_1),$$

где

$$\mathbf{I}(f, \mathbf{A}_n^\mu, \Delta_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\mu-1} a_{i,\nu} f^{(\nu)}(x_{i,n}),$$

и

$$\mathbf{I}_0(f, \mathbf{B}_0) = \sum_{\nu \in I_0} b_{\nu,0} f^{(\nu)}(a), \qquad \mathbf{I}_1(f, \mathbf{B}_1) = \sum_{\nu \in I_1} b_{\nu,1} f^{(\nu)}(b)$$

называется квадратурной формулой или формулой приближенного вычисления интеграла от функции $f(x)$.

Для фиксированного веса $\rho(x)$, через $\mathbf{R}(f,\rho,\mathbf{A}_n^\mu,\mathbf{B}_0(I_0),\mathbf{B}_1(I_1),\Delta_n)$ обозначим погрешность весовой квадратурной формулы (33), т.е.

$$\mathbf{R}(f,\rho,\mathbf{A}_n^\mu,\mathbf{B}_0(I_0),\mathbf{B}_1(I_1),\Delta_n)=$$
$$=\left|\int_0^1\rho(x)f(x)dx-\mathbf{I}(f,\mathbf{A}_n^\mu,\Delta_n)-\mathbf{I}_0(f,\mathbf{B}_0)-\mathbf{I}_1(f,\mathbf{B}_1)\right|,$$

и пусть

$$\mathbf{R}(,\rho,\mathbf{A}_n^\mu,\mathbf{B}_0(I_0),\mathbf{B}_1(I_1),\Delta_n)=\sup_{f\in}\mathbf{R}(f,\rho,\mathbf{A}_n^\mu,\mathbf{B}_0(I_0),\mathbf{B}_1(I_1),\Delta_n)$$

– погрешность квадратурной формулы (33) на классе функций .

Рассмотрим величину

$$\mathbf{R}_{n,\mu}(,\rho,I)=$$
$$=\inf\left\{\mathbf{R}\left(,\rho,\mathbf{A}_n^\mu,\mathbf{B}_0(I_0),\mathbf{B}_1(I_1),\Delta_n\right)\,\Big|\,\mathbf{A}_n^\mu,\mathbf{B}_0(I_0),\mathbf{B}_1(I_1),\Delta_n\right\}.$$

Если существует весовая квадратурная формула, на которой достигается нижняя грань, то такая квадратурная формула называется оптимальной квадратурной формулой для веса $\rho(x)$ на классе функций среди формул вида (33).

Наряду с множествами индексов I_i введем в рассмотрение еще множества индексов $J=(J_0,J_1)$, где $J_i=\{\nu\mid\ r-\nu\in I_i(\nu=0,1,\dots,r)\}$ $(i=0,1)$.

Пусть, еще

$$\mathbb{E}(f,\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n),I)_p=\inf\Big\{\|f-s\|_p\mid s\in\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n);$$
$$f^{(\nu)}(a)=s^{(\nu)}(a)\quad(\nu\in I_0),\qquad f^{(\nu)}(b)=s^{(\nu)}(b)\quad(\nu\in I_1)\Big\},$$

и

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f,I)_p=\inf_{\Delta_n}\mathbb{E}(f,\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n),I)_p.$$

Пусть, как обычно, W_p^r – множество всех функций $x\in L_p^r$ таких, что $\|x^{(r)}\|_p\le 1$.

Следующее утверждение известно в теории квадратурных формул как метод сведения погрешности квадратурной формулы к задаче минимизации нормы моносплайна. При $\rho(x)\equiv 1$ это утверждение содержится, например, в [5]. Для произвольного непрерывного веса доказательство проводится аналогично (см. [7]).

Теорема B. *При всех $n,r=1,2\dots,$ $k=1,2,\dots,r,$ $p\in[1,\infty]$ и любого веса $\rho(x)\in L$ имеет место равенство*

$$\mathbf{R}_{n,k}(W_p^{r+1},\rho,I)=\mathbb{E}_{r,k,n}(\rho_{r+1},J)_q,$$

где $1/p+1/q=1$ и $\rho_r(x)$ – любой r-й интеграл функции $\rho(x)$, к примеру,

$$\rho_r(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_0^x(x-t)_+^{r-1}\rho(t)dt.$$

Из теоремы 1 и теоремы B следует утверждение:

Теорема 2. *Пусть $n,r=1,2,\dots,$ $k=1,2,\dots,r,$ $p\in[1,\infty],$ $1/p+1/q=1,$ $\beta=(r+1+q^{-1})^{-1},$ $\alpha>-2$ и вес $\rho(t)$ таков, что существует разбиение $\delta_m=\{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ отрезка $[0,1]$ и постоянные A_ν $(\nu=0,1,\dots,m)$ такие, что на каждом интервале $(a_{\nu-1},a_\nu)$ функция $\rho(t)$ абсолютно непрерывна, а функция $\rho'(t)$ почти всюду существует на $(a_{\nu-1},a_\nu)$ и почти всюду выполняется неравенство*

$$|\rho'(t)|\le A_\nu(t-a_{\nu-1})^\alpha(a_\nu-t)^\alpha.$$

Для любых $I_i \in \{0, 1, \dots, r\}$, $(i = 0, 1)$ *будет справедливо соотношение*

$$\mathbf{R}_{n,k}(W_p^{r+1}, \rho, I) \geq \| \mathbf{D}_{r+1,k,q} \|_q \frac{\|\rho\|_\beta}{n^{r+1}} (1 + o(1)).$$

Список литературы

[1] *Лигун А.А.* Об одном свойстве интерполяционных сплайн - функций. Украинский математический журнал, 1980, т.32, N 4, с. 507 – 514.

[2] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами. – Докл. АН УССР, сер.А,N 6, 1984, с. 18 – 22.

[3] *Pence D.D.* Further Asymptotic properties of Best Approximation by Splines. – Journal of Approximation Theory, 47, 1987, p 1–17.

[4] *Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Порядок наилучших сплайн - приближений некоторых классов функций. – Матем. заметки, 7, N1, 1970, с. 31 – 42.

[5] *Никольский С.М.* Квадратурные формулы.– М. Наука, 1982, 254 с.

[6] *Моторный В.П.* Исследования днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул. Укр. матем. ж.,1990, т.42, N 1, с. 18 – 33.

[7] *Женсыкбаев А.А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы. – УМН., т.36, 4, 1981, с. 107 – 159.

[8] *Lee D.* A Simple Approach to Cardinal Lagrange and Periodic Lagrange Splines.– Journal of Approximation Theory, 47, 1986, p. 93 – 100.

Дано – некоторое множество функций, интегрируемых в степени $\beta = (r + 1 + 1/p)^{-1}$. Получена асимптотически точная оценка снизу приближения функций из множества сплайнами наилучшего приближения степени r дефекта k в метрике L_p.

Let is the some set of functions integrable in degree $\beta = (r + 1 + 1/p)^{-1}$. The asymptotically exactly evaluation from below on approximations of functions from sets by the spline-functions of the best approximation degree r and defect k in the metric L_p is obtained.