

ПРО ПОБУДОВУ МАЙЖЕ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ БЕЗ'Є

Запропонована одна конструкція параболічних сплайнів Без'є, що співпадають з майже інтерполяційними сплайнами мінімального дефекту.

Постановка проблеми. Останнім часом намітився розрив між інструментальними засобами інженерно-конструкторських САД-систем та існуючим математичним апаратом, розробленими в рамках теорії апроксимації (напр. [1, 2]). Зокрема, це відноситься до опису кривих. Протягом останніх 20 – 30 років отримані численні методи опису кривих, зокрема сплайн-функціями. У той час, як у САД/САМ-системах, в основному, для рішення траєкторних задач використовуються параболічні сплайни Без'є. У зв'язку із цим, виникає проблема коректування алгоритмів, вбудованих у САД/САМ-системи для з метою підвищення їхньої ефективності.

Аналіз відомих результатів і публікацій. Популярності сплайнів Без'є сприяє простота їхньої реалізації [1; 3]. До негативних сторін варто віднести їхню негладкість і погану якість наближення. У [4] була почата спроба поліпшити якість наближення за рахунок адаптивного-оптимального вибору вузлів сплайна. Було показано, що для асимптотично оптимального розбиття отриманий сплайн Без'є має кращі аппроксимативні властивості і є «майже» гладким. У даній роботі запропонована конструкція сплайнів Без'є, що, не змінюючи локальних властивостей апроксимації Без'є, для рівномірного розбиття дозволяє одержати інструмент наближення, що асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном мінімального дефекту.

Постановка задачі. У [1] показано, що для $t \in [ih, (i+1)h]$ будь-який параболічний сплайн мінімального дефекту по розбиттю ih ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) можна записати у вигляді

$$s_2(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_{2,h}(t - (2i+1)h/2) = c_{i-1} B_{2,h}(t - (2i-1)h/2) + c_i B_{2,h}(t - (2i+1)h/2) + c_{i+1} B_{2,h}(t - (2i+3)h/2), \quad (1)$$

де $B_{2,h}(t)$ – В-параболічний сплайн по решітці із кроком h .

Покладемо $f_{i+1/2} = f((i+0.5)h)$ й $f_i = f(ih)$. У показано, що якщо

$$\tilde{c}_i = f_{i+1/2} - \frac{1}{8} \Delta^2 f_{i+1/2},$$

то сплайн

$$\tilde{s}_2(f, t) = \sum_{i=-1}^n \tilde{c}_i B_{2,h}(t - (2i+1)h/2) \quad (2)$$

асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном, тобто

$$\tilde{s}_2(f, (i+0.5)h) = f_{i+1/2} - \frac{1}{64} \Delta^4 f_{i+1/2},$$

і при цьому, якщо $f \in C^3$, то для $t \in [ih, (i+1)h]$

$$f(t) - \tilde{s}_2(f, t) = \frac{h^3}{3} \tau(1-\tau)(\tau-0.5) f^{(3)}(t) + o(h^3), \quad (3)$$

де $\tau = \frac{t-ih}{h}$.

Сплайни виду (1) досить зручні й прості, однак у ряді програмних засобів для графічного відображення використовуються параболічні сплайни Без'є. Метою даної роботи є побудова такої конструкції сплайнів Без'є, які будуть співпадати з майже інтерполяційними сплайнами (2). Одержання такої конструкції дозволяє підвищити ефективність вбудованих графічних функцій.

Основні результати. Для $t \in [ih, (i+1)h]$ й точок $M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}$ сплайн Без'є має вигляд

$$sb(\{M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}\}, t) =$$

$$= M_i(1-\tau)^2 + 2M_{i+1/2}\tau(1-\tau) + M_{i+1}\tau^2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & sb'(\{M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}\}, t) = \\ &= \frac{2}{h}(-M_i(1-\tau) + M_{i+1/2}\tau(1-2\tau) + M_{i+1}\tau) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} sb'(\{M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}\}, ih) &= \frac{2}{h}(-M_i + M_{i+1/2}), \\ sb'(\{M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}\}, (i+1)h) &= \frac{2}{h}(-M_{i+1/2} + M_{i+1}). \end{aligned}$$

Крім того,

$$sb(\{M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}\}, (i+0.5)h) = \frac{1}{4}(M_i + 2M_{i+1/2} + M_{i+1}).$$

Зауважуючи, що

$$\tilde{s}'_2(f, ih) = \frac{11f_{i+1/2} - f_{i+3/2} - 11f_{i-1/2} + f_{i+3/2}}{8h},$$

$$\tilde{s}'_2(f, (i+1)h) = \frac{11f_{i+3/2} - f_{i+5/2} - 11f_{i+1/2} + f_{i-1/2}}{8h},$$

та

$$\begin{aligned} \tilde{s}_2(f, (i+0.5)h) &= \frac{1}{16}f_{i+3/2} - \frac{1}{64}f_{i+5/2} + \\ &+ \frac{29}{32}f_{i+1/2} + \frac{1}{16}f_{i-1/2} - \frac{1}{64}f_{i-3/2}, \end{aligned}$$

випишемо систему

$$\begin{cases} sb'(\{M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}\}, ih) = \tilde{s}'_2(f, ih); \\ sb'(\{M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}\}, (i+1)h) = \tilde{s}'_2(f, (i+1)h); \\ sb(\{M_i, M_{i+1/2}, M_{i+1}\}, (i+0.5)h) = \tilde{s}_2(f, (i+0.5)h). \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему, одержуємо

$$\begin{aligned}\tilde{M}_i &= -\frac{1}{16}f_{i-3/2} + \frac{9}{16}f_{i-1/2} + \frac{9}{16}f_{i+1/2} - \frac{1}{16}f_{i+3/2}, \\ \tilde{M}_{i+1/2} &= -\frac{1}{8}f_{i+3/2} + \frac{5}{4}f_{i+1/2} - \frac{1}{8}f_{i-1/2}, \\ \tilde{M}_{i+1} &= -\frac{1}{16}f_{i-1/2} + \frac{9}{16}f_{i+1/2} + \frac{9}{16}f_{i+3/2} - \frac{1}{16}f_{i+5/2}.\end{aligned}$$

Таким чином, сплайн Без'є $sb(\{\tilde{M}_i, \tilde{M}_{i+1/2}, \tilde{M}_{i+1}\}, t)$ буде співпадати з майже інтерполяційним параболічним сплайном мінімального дефекту.

Як відзначалося вище, апарат сплайнів Без'є активно використовується для опису кривих, тому наші подальші міркування присвячені обчисленню похибки між кривою, що має бути наближеною, і побудованим аппроксимаційним апаратом.

Теорема 1. Нехай параметрична замкнута крива $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, ($t \in [0, T]$) така, що функції $x(t)$ й $y(t)$ мають на інтервалі зміни параметра $[0, T]$ три безперервні похідні.

Тоді, якщо $h = T/n$, то при $n \rightarrow \infty$ буде виконуватися нерівність

$$R(\Gamma, \tilde{s}_2(\Gamma)) \leq \frac{h^3}{36\sqrt{3}} \|F\|_C (1 + o(1)),$$

де

$$F(t) = \frac{|x'(t)y^{(3)}(t) - y'(t)x^{(3)}(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}},$$

тут $R(\Gamma, \gamma)$ – хаусдорфова відстань між кривими $\Gamma(t)$ й $\gamma(t)$, тобто найменше з ε , при якому крива $\Gamma(t)$ лежить в ε – коридорі кривої $\gamma(t)$ (наприклад. [6]).

Доведення. Для $\xi \in [ih, (i+1)h]$ позначимо через $\zeta = \frac{\xi - ih}{h}$.

Тоді з

$$\Gamma(\xi) - \tilde{s}_2(\Gamma, t) = \Gamma(\xi) - \tilde{s}_2(\Gamma, t) + \Gamma(t) - \Gamma(t)$$

і того, що

$$\Gamma(\xi) - \Gamma(t) = \Gamma'_i h(\zeta - \tau) + O(h^2(\zeta - \tau)),$$

одержуємо

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi) - \tilde{s}_2(\Gamma, t) &\leq \frac{1}{3} h^3 \Gamma_i^{(3)} (1 - \tau) \tau (\tau - 0.5) - \Gamma'_i h(\tau - \zeta) + \\ &\quad + O(h^2(\tau - \zeta)) + o(h^3), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\Gamma_i = \Gamma(ih) = (x_i, y_i)$.

З іншого боку, з (3) маємо

$$\begin{aligned} R(\Gamma, \tilde{s}_2(\Gamma)) &\leq \\ &\leq \sqrt{\|x - \tilde{s}_2(x)\|_C^2 + \|y - \tilde{s}_2(y)\|_C^2} \leq \frac{1}{36\sqrt{3}} h^3 \sqrt{\|x^{(3)}\|_C^2 + \|y^{(3)}\|_C^2}. \end{aligned}$$

Звідси й з (4) одержуємо

$$(\tau - \zeta) = O(h^2),$$

і, отже,

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi) - \tilde{s}_2(\Gamma, t) &\leq \\ &\leq \frac{1}{3} h^3 \Gamma_i^{(3)} (1 - \tau) \tau (\tau - 0.5) - \Gamma'_i h(\tau - \zeta) + o(h^3). \end{aligned}$$

Таким чином, якщо при $n \rightarrow \infty$ буде $h \rightarrow 0$, то при досить великих n для $t \in [ih, (i+1)h]$ буде виконуватися співвідношення

$$\begin{aligned} \min_{\xi} |\Gamma(\xi) - \tilde{s}_2(\Gamma, t)|^2 &\leq \\ &\leq \min_{\zeta} \left| \frac{1}{3} h^3 \Gamma_i^{(3)} (1 - \tau) \tau (\tau - 0.5) - \Gamma'_i h(\tau - \zeta) \right|^2 (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (5)$$

Щоб вирішити задачу знаходження мінімуму спочатку приведемо допоміжне твердження.

Лема 1. Якщо $(a \cdot b)$ – скалярний добуток векторів a й b й $a \times b$ – їхній векторний добуток, то

$$\min_{\tau \in [0,1]} (a - \tau b)^2 = \frac{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}{|b|^2} = \frac{|a \times b|^2}{|b|^2}.$$

Доведення. Функція $\psi(\tau) = (a - \tau b)^2$ – гладка й опукла вниз. Її єдиний екстремум – мінімум. Причому, необхідна умова екстремуму співпадає з достатнім і має вигляд

$$\begin{aligned} \psi'(\tau) &= ((a - \tau b)^2)' = (|a|^2 - 2\tau(a \cdot b) + \tau^2 |b|^2)' = \\ &= 2\tau |b|^2 - 2(a \cdot b) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, екстремальне значення аргументу τ буде обчислюватися за формулою

$$\tau_0 = (a \cdot b) / |b|^2.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \min_{\tau \in [0,1]} (a - \tau b)^2 &= \psi(\tau_0) = \left| a - \frac{(a \cdot b)}{|b|^2} b \right|^2 = \\ &= |a|^2 - 2 \frac{(a \cdot b)^2}{|b|^2} + \frac{(a \cdot b)^2}{|b|^4} |b|^2 = \frac{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}{|b|^2}. \end{aligned}$$

Тепер, з визначення векторного й скалярного добутоків маємо

$$\begin{aligned} \frac{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}{|b|^2} &= \frac{|a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \varphi}{|b|^2} = \\ &= \frac{|a|^2 |b|^2 \sin^2 \varphi}{|b|^2} = \frac{|a \times b|^2}{|b|^2}, \end{aligned}$$

де $\varphi = (a \hat{ } b)$.

Із цієї леми випливає, що вираз, який стоїть у правій частині рівності (5) досягає свого мінімуму по ζ при

$$\tau - \zeta = \frac{1}{3} h^3 (1 - \tau) \tau (\tau - 0.5) \frac{(\Gamma'_i \cdot \Gamma_i^{(3)})}{|\Gamma'_i|^2},$$

тобто при

$$\zeta = \tau - \frac{1}{3} h^3 (1 - \tau) \tau (\tau - 0.5) \frac{(\Gamma'_i \cdot \Gamma_i^{(3)})}{|\Gamma'_i|^2}.$$

Підставляючи отриманий вираз в (5) і використовуючи лему 1, а так само те, що

$$\begin{aligned} & |\Gamma^{(3)}(t)|^2 |\Gamma'(t)|^2 - (\Gamma^{(3)}(t) \cdot \Gamma'(t))^2 = \\ & = ((x^{(3)}(t))^2 + (y^{(3)}(t))^2) \cdot ((x'(t))^2 + \\ & + (y'(t))^2) - (x'(t)x^{(3)}(t) + y'(t)y^{(3)}(t))^2 = \\ & = (x'(t))^2 (x^{(3)}(t))^2 + (y'(t))^2 (x^{(3)}(t))^2 + \\ & + (x'(t))^2 (y^{(3)}(t))^2 + (y'(t))^2 (y^{(3)}(t))^2 - (x'(t))^2 (x^{(3)}(t))^2 - \\ & - 2x'(t)y'(t)x^{(3)}(t)y^{(3)}(t) - (y'(t))^2 (y^{(3)}(t))^2 = \\ & = (y'(t))^2 (x^{(3)}(t))^2 - 2x'(t)y'(t)x^{(3)}(t)y^{(3)}(t) + (x'(t))^2 (y^{(3)}(t))^2 = \\ & = (x'(t)y^{(3)}(t) - y'(t)x^{(3)}(t))^2, \end{aligned}$$

одержуємо

$$\min_{t \in [ih, (i+1)h]} |\Gamma(\xi) - \tilde{s}_2(\Gamma, t)| \leq \frac{1}{3} h^3 (1 - \tau) \tau (\tau - 0.5) F_i (1 + o(1)).$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} & \max_{\xi \in [ih, (i+1)h]} \min_{t \in [ih, (i+1)h]} |\Gamma(\xi) - \tilde{s}_2(\Gamma, t)| \leq \\ & \leq \frac{1}{3} h^3 \frac{\sqrt{3}}{36} |F_i| (1 + o(1)) = \frac{h^3}{36\sqrt{3}} |F_i| + o(h^3). \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\max_{t \in [ih, (i+1)h]} \min_{\xi \in [ih, (i+1)h]} |\Gamma(\xi) - \tilde{s}_2(\Gamma, t)| \leq \frac{h^3}{36\sqrt{3}} |F_i| + o(h^3).$$

Звідси й з визначення хаусдорфової відстані, маємо

$$R(\Gamma, \tilde{s}_2(\Gamma)) \leq \frac{h^3}{36\sqrt{3}} \|F\|_C (1 + o(1)),$$

що й завершує доказ теореми.

Помітимо, тому що отримані сплайни Без'є співпадають зі сплайнами \tilde{s}_2 , то теорема вірна й для сплайнів Без'є.

Приклад наближення контуру за допомогою Без'є сплайнів другого порядку

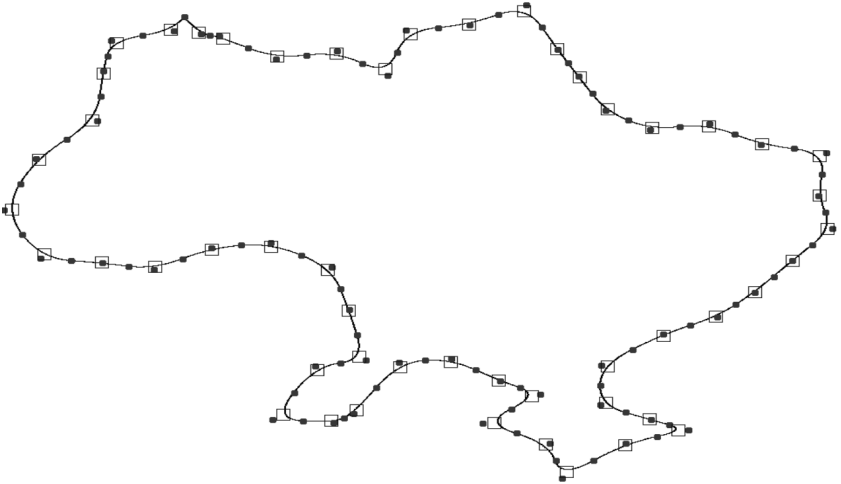


Рис 1. Приклад реконструкції контуру України на базі 50 опорних точок:

- – точки, в яких сплайн майже інтерполує контур. Ці точки необхідно зберігати для проведення реконструкції,
- – точки для побудови Без'є кривої. Зберігати не потрібно – будуються динамічно

Висновки. У даній статті запропонована схема побудови параболічних сплайнів Без'є, що співпадають з майже інтерполяційними параболічними сплайнами мінімального дефекту, що дозволяє підвищити ефективність існуючих програмних засобів для рішення траєкторних задач.

Бібліографічні посилання

1. **Farin G.E.** Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A Practical Guide. Academic Press, – 1990. – 444 p.
2. **Boehm W.** A survey of curve and surface methods / Boehm W., Farin G.E. and Kahman J.// Computer-Aided Geometric Design. – 1989. – №1. – P. 1 – 60.
3. **Barry P.** De Casteljau-type subdivision in peculiar to Bezier curves/ Barry P., Goldman R.// Computer-Aided Design. – 1988. – 20(3). – P. 144 – 116.
4. **Ligun A.A.** Asymptotically Optimum Recovery of Smooth Contours by Bezier Curve/ A.A. Ligun, A.A. Shumeiko, S.P. Radzevitch, E.D. Goodman // Computer Aided Geometric Design. – 1998. – 15. – P. 495 – 506.
5. **Лигун А.А.** Асимптотичні методи відновлення кривих / А.А. Лигун, А.А. Шумейко. – К; 1997. – 358 с.
6. **Sendov Bl.** Hausdorff Approximations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht /Boston/London. – 1990. – 352 p.

Надійшла до редколегії 11.09.08.