
**А. В. ФЛЕГОНТОВ,
В. Б. ВИЛКОВ,
А. К. ЧЕРНЫХ**



МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕЧЕТКИХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ



Монография



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
МОСКВА
КРАСНОДАР
2020

УДК 681.5(075.8)

ББК 32.81я73

Ф 71 Флегонтов А. В. Моделирование задач принятия решений при нечетких исходных данных : монография / А. В. Флегонтов, В. Б. Вилков, А. К. Черных. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 332 с. : ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-8114-4402-1

Монография имеет целью ознакомление научно-педагогических работников с возможностями применения теории нечетких множеств и нечеткой логики для решения различных задач исследования операций, теории графов и теории игр, реализуемых в процессе принятия решений в организационных и технических системах управления. Работа может оказаться полезной для студентов, аспирантов, научных сотрудников и лиц, принимающих решения, проводящих исследования процессов управления в организационных и технических системах управления с целью выбора оптимальных (рациональных) способов управления.

Предложенные алгоритмы и методы адаптированы для использования их в автоматизированных системах принятия решений, функционирующих в реальном режиме времени.

Монография предназначена для широкого круга научных работников и специалистов в области управления организационными и техническими системами.

УДК 681.5(075.8)

ББК 32.81я73

Рецензенты:

А. И. ПРИМАКИН — доктор технических наук, профессор, полковник полиции, начальник кафедры специальных информационных технологий Санкт-Петербургского университета МВД России;

В. В. ФОМИН — доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена.

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА



© Издательство «Лань», 2020

© Коллектив авторов, 2020

© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представленная монография содержит пять глав. Первая глава вводит в круг понятий теории нечетких множеств и нечеткой логики. В рамках второй главы рассмотрены понятия, методы и задачи исследования операций, имеющие важный прикладной характер для принятия решений в различных областях человеческой деятельности и использующие подходы, изложенные в первой главе. В третьей главе аппарат теории нечетких множеств и нечеткой логики используется применительно к решению задач принятия решений, формулируемых в терминах теории графов. Задачи, постановки которых синтезируют в себе элементы теории игр, а также понятия и методы, приведенные в первой главе, представлены в четвертой главе. Последняя глава посвящена рассмотрению ряда нечетких организационных и технических систем управления.

Приведенные постановки, ряд из которых являются оригинальными, сопровождаются решением содержательных примеров.

В монографии рассматриваются далеко не все изученные в процессе исследования операций, теории графов, теории игр, а также теории управления задачи, исходные данные которых полезно рассматривать как заданные нечетко. Круг рассмотренных в монографии задач определяется научными интересами авторов, а также рамками практических задач, с решением которых авторам приходилось сталкиваться.

Материал монографии в части, касающейся глав 2–5, рекомендуется изучать после освоения понятий и методов, изложенных в первой главе. Кроме того, при рассмотрении материала третьей и четвертой глав полезно предварительно ознакомиться с первыми двумя разделами этих глав.

В заключение отметим, что номера разделов, формул, рисунков, таблиц, теорем, примеров и т. д. состоят из двух чисел — номера главы и порядкового номера внутри главы.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из составных частей современной науки управления является, несомненно, множество количественных методов исследования сложных явлений и процессов, которые в совокупности представляют теорию исследования операций. Эти методы придают процессу управления необходимую обоснованность, минимизируют субъективизм при выборе управленческих решений и дают возможность в определенной мере оптимизировать процессы управления.

В настоящее время в области исследования операций достигнуты весьма ощутимые результаты. Однако большинство из существующих математических методов, разработанных как инструментарий для исследования конкретных процессов и явлений, оказываются эффективными при решении управленческих задач лишь в условиях наличия исчерпывающей информации об исследуемых явлениях и процессах.

В случае если такие условия не соблюдаются, то количественные методы исследования не могут дать один показатель или набор показателей для однозначной характеристики исследуемого явления или процесса либо для принятия однозначного управленческого решения. В этом случае результатом исследования является целый ряд характеристик или решений, определяемых перебором значений тех параметров, о которых информация отсутствовала или была неполной.

В процессе решения различных управленческих задач, в том числе и задач выработки решений на использование материально-технических средств различных структур, необходимым этапом является сбор исходной информации, которая в условиях временных ограничений не является полностью определенной, а носит приближенный, неточный характер.

С учетом вышесказанного предлагаемая монография посвящена теоретическим основам и практическим рекомендациям по решению задач, используемых для принятия решений в ситуациях, когда исходные данные, необходимые для их решения, заданы неоднозначно, носят нечеткий характер.

В настоящее время для решения задач с нечеткими исходными данными весьма успешно применяется теория нечетких множеств и нечеткая логика, основоположником которой является американский ученый азербайджанского происхождения профессор Калифорнийского университета в Беркли Лотфи Заде, который в 1965 г. опубликовал свою основополагающую работу «Fuzzy sets» [1].

В представленной работе внимание авторов сосредоточено на двух классах задач принятия решений: принятие управленческих решений в организационных системах; управление техническими системами. Решение начинается с построения математической модели рассматриваемой задачи. Назначение модели состоит в том, чтобы для каких-то практических потребностей заменить собой реальный объект (явление, процесс). Модели создаются таким образом, чтобы они были значительно проще для исследования, чем моделируемые объекты. С этой целью в модели воспроизводятся не все, а только некоторые наиболее важные и нужные для конкретных условий характеристики.

Следует отметить, что по мере развития науки, модели становятся все более сложными, в них учитывается все большее число реально существующих зависимостей и элементов, модели становятся все более адекватными, а мы при этом все больше узнаем об изучаемом объекте.

Подчеркнем, что процесс построения моделей является творческим и четких рекомендаций здесь ждать не следует. Чтобы научиться строить хорошие модели, необходимо строить модели, другого пути нет. Все развитие науки как раз и состоит в построении все более адекватных моделей и их исследовании.

Вышесказанное в полной мере применимо и к нечетким математическим моделям, рассмотрению которых посвящена монография.

В дополнение к этому обстоятельству отметим, что Бартоломеем Коско [2] была доказана теорема о нечеткой аппроксимации, согласно которой любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике. Другими словами, с помощью естественных языковых высказываний-правил «если — то», с последующей их формализацией средствами теории нечетких множеств, можно сколь угодно точно отразить произвольную взаимосвязь «входы — выход» без использования сложного аппарата дифференциального и интегрального исчислений, традиционно применяемого в управлении.

Поэтому разработка математического аппарата, синтезирующего методы исследования операций, теории графов, теории игр и теории управления, с одной стороны, а также теории нечетких множеств и нечеткой логики, с другой, используемого при выработке решений, представляет, по нашему мнению, актуальную проблему.

В части, касающейся содержания монографии, детализируем указанный математический аппарат.

Первая глава содержит необходимые для дальнейшего изложения материала сведения из теории нечетких множеств и нечеткой логики.

Во второй главе рассматриваются некоторые задачи, которые при четко заданной исходной информации традиционно относятся к исследованию операций: транспортная задача, задача о ранце, задачи управления запасами, задача векторной оптимизации. Разговор о каждом классе задач начинается с введения необходимых определений и методов решения задач этого класса. Затем исследуются аналогичные задачи, но с нечеткими исходными данными. Строятся алгоритмы (как правило, приближенные) решения сформулированных задач. Приводятся содержательные примеры.

Третья глава имеет дело с задачами на графах. Рассматриваются следующие классы задач: задачи сетевого планирования, задачи о кратчайшем маршруте и задачи о кратчайшем соединении, задача о назначении и ее обобщения. Описание проблематики для каждого класса задач начинается с описания соответствующих теоретических положений, необходимых для дальнейшего в предположении, что исходные данные заданы однозначно. Затем рассматриваются аналогичные задачи, но с нечетко заданными исходными данными. Изучаются различные постановки таких задач, строятся алгоритмы их приближенного решения, приводятся содержательные примеры.

Четвертая глава посвящена проблематике теории игр. Рассматриваются матричные, бескоалиционные и кооперативные игры. Глава начинается с изложения основ теории указанных классов игр. Затем обсуждается решение этих игр при условии, что выигрыши игроков (характеристическая функция игры) заданы нечетко. Обсуждаются подходы к решению рассматриваемых игр. Приводятся содержательные примеры.

В последней (пятой) главе речь идет о решении задач управления организационными и техническими системами с использованием нечеткого логического вывода. Рассматриваются несколько примеров управления различными системами.



Глава 1.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

1.1. Историческая справка

Возникновением теории нечетких множеств мы обязаны американскому ученому Лотфи Заде, который в 1965 г. опубликовал свою статью «Fuzzy Sets» [1]. Слово Fuzzy получило в русскоязычной литературе перевод «нечеткий». С выходом этой статьи началось развитие теории нечетких множеств.

В [3] отмечается, что основная идея Заде заключалась в том, что общепринятый способ рассуждений, основанный на естественном языке, не может быть описан в рамках имеющихся математических формализмов. В традиционной математической логике высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Аналогично, в теории множеств, произвольный объект может являться элементом данного множества, либо не быть таковым, и ничего другого. Но все, что связано с естественным языком, имеет многозначную интерпретацию. Использование нечетких множеств, по мнению Заде, может помочь в создании необходимого формального аппарата для моделирования человеческих рассуждений и человеческого способа решения задач.

Программа построения нечеткой математики нашла отклик среди исследователей разных стран мира. Стали созываться многочисленные национальные и международные симпозиумы и конференции, посвященные нечетким множествам и их приложениям в науке и технике.

В 1984 г. была создана международная организация по этим проблемам. В нашей стране также наблюдается большой интерес к работам в этом направлении. В 1990 г. в нашей стране была создана Советская ассоциация нечетких систем. Многие журналы публикуют статьи на эту тему, стали появляться монографии, в которых обсуждаются те или иные аспекты, связанные с построением моделей рассуждений и принятия решений, характерных для людей.

Началом практического применения теории нечетких множеств можно считать 1975 г., когда Мамдани и Ассилиан (Mamdani and Assilian) [4] построили первый нечеткий контроллер для управления паровым двигателем. В 1982 г. Холмблад и Остергад (Holmblad and Osregaad) разработали первый промышленный нечеткий контроллер, который был внедрен в управление процессом обжига цемента на заводе в Дании. Успех первого промышленного контроллера, основанного на нечетких лингвистических правилах «если — то»

привел к всплеску интереса к теории нечетких множеств среди математиков и инженеров. Несколько позже Бартоломеом Коско (Bart Kosko) [2] была доказана теорема о нечеткой аппроксимации, согласно которой любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике. Другими словами, с помощью естественных языковых высказываний-правил «если — то», с последующей их формализацией средствами теории нечетких множеств, можно сколько угодно точно отразить произвольную взаимосвязь «входы — выход» без использования сложного аппарата дифференциального и интегрального исчисления, традиционно применяемого в управлении и идентификации.

Понятие нечеткого множества — это попытка математической формализации нечеткой информации для построения математических моделей. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной мере и, следовательно, принадлежать к данному множеству с различной степенью. При таком подходе, говоря о том, что некоторый элемент принадлежит данному множеству, необходимо указать, с какой степенью этот элемент удовлетворяет свойствам данного множества.

Приводимые далее понятия и результаты теории нечетких множеств и нечеткой логики заимствованы из [5]–[25].

Достаточно точные данные о рассматриваемом процессе (объекте) могут быть получены только с использованием высокоточных измерительных устройств. Человек же часто способен, рассматривая некоторый показатель, например площадь пожара s (в квадратных метрах), оценивать его величину в терминах «малый», «небольшой», «большой». Отнесение конкретного пожара к тому или иному из указанных классов в теории нечетких множеств предлагается осуществлять с помощью функций принадлежности $\mu(s)$ (рис. 1.1). Такие классы [26] называют информационными гранулами.

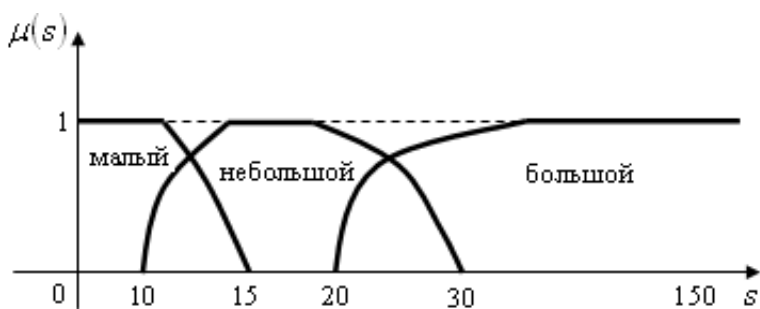


Рис. 1.1. Площадь пожара s , м²

Если для удовлетворения требований по точности оценки трех гранул недостаточно, то можно ввести четыре или больше, например «малый», «небольшой», «средний», «большой», «очень большой», «катастрофический». Если надо, то число гранул можно и уменьшить.

Исследования по психологии, например [27], показывают, что человек в среднем способен одновременно оперировать от пяти до девяти характеристиками, поэтому число гранул следует задавать в этих пределах. Заметим, что даже при управлении сложными системами (самолетами) этого вполне достаточно.

Увеличение числа гранул ведет к повышению точности оценки, но приводит к различного рода затруднениям. Признавая это противоречие, Л. Заде сформулировал **принцип несовместимости** [28]: «По мере возрастания сложности системы наша способность формулировать точные и при этом осмысленные утверждения о ее поведении уменьшается вплоть до некоторого порога, за пределами которого точность и смысл становятся практически взаимоисключающими характеристиками».

Теория нечетких множеств вызывает сегодня большой интерес. В [29] отмечается, что в последнее десятилетие предыдущего века насчитывалось уже от 15 до 16 тыс. публикаций, связанных с этой тематикой. В начале этого века число публикаций превысило 27 тыс. и продолжает интенсивно расти. Заметим, что в [29] содержится достаточно интересный, правда, краткий обзор работ по практическому применению рассматриваемой теории.

1.2. Нечеткие множества и действия с ними

Нечеткие множества задаются на обычных множествах, называемых универсальными. Примерами универсальных множеств могут быть множества чисел, матриц, матричных игр, людей и т. п.

Определение 1.1. *Нечетким множеством* \hat{A} на универсальном множестве U называется совокупность пар $(\mu_{\hat{A}}(u), u)$, где $\mu_{\hat{A}}(u)$ — степень принадлежности элемента $u \in U$ к нечеткому множеству \hat{A} .

Степень принадлежности — это число из отрезка $[0; b]$. Чем выше степень принадлежности, тем в большей мере элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества, тем с большей надежностью мы можем утверждать, что он является элементом этого множества.

Определение 1.2. *Функцией принадлежности* нечеткого множества называется функция, которая позволяет вычислить степень принадлежности произвольного элемента универсального множества этому множеству.

Как правило, предполагается, что функция принадлежности принимает значения из отрезка $[0, 1]$. Вопросы, связанные с определением вида функции принадлежности и их построения, рассматриваются, например, в [3], [5], [8].

В дальнейшем мы часто вместо словосочетания «значение функции принадлежности» будем использовать «*степень принадлежности*», «*надежность*». Также в случаях, когда понятно, о каком универсальном множестве идет речь, говоря о нечетком множестве, будем отождествлять нечеткое множество с его функцией принадлежности.

Если $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ — универсальное множество, состоящее из конечного количества элементов, то нечеткое множество \hat{A} записывается в виде

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n \mu_{\hat{A}}(u) / u_i.$$

В случае непрерывного множества U используют обозначение

$$\hat{A} = \int_U \mu_{\hat{A}}(u) / u.$$

Замечание 1.1. Знаки \sum и \int в этих формулах означают совокупность пар $\mu_{\hat{A}}(u)$ и u .

Пример 1.1. Пусть универсальным множеством для показателя «рост мужчины» является множество

$$U = \{155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190\}.$$

Представить в виде нечеткого множества \hat{A} понятие «мужчина среднего роста».

Решение.

$$\hat{A} = 0/155 + 0,1/160 + 0,3/165 + 0,8/170 + 1/175 + 1/180 + 0,5/185 + 0/190.$$

Эта запись означает, что, например, рост в 165 см мы считаем средним с уверенностью 0,3, рост в 190 см — с уверенностью 0 и т. д.

Пример 1.2. В качестве универсального множества рассмотрим множество возможных значений скорости v автомобиля — интервал от 0 до 150 км/ч. Возможный график функции принадлежности нечеткого множества \hat{A} — «скорость автомобиля около 70 км/ч» представлен на рисунке 1.2.

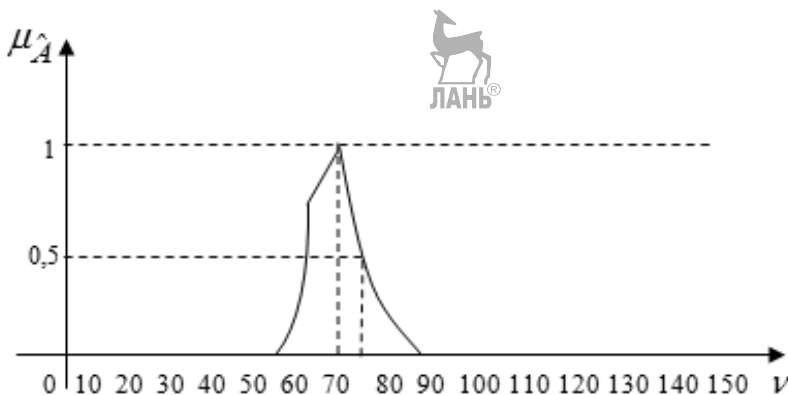


Рис 1.2. График функции принадлежности нечеткого множества из примера 1.2

Из графика на рисунке 1.2 видно, что значение скорости 75 км/ч мы с надежностью 0,5 считаем элементом нечеткого множества \hat{A} .

Пример 1.3. Доход от операции может составить сумму от нуля до 1000 денежных единиц. Характеризовать величину дохода будем терминами: низкий, небольшой, средний, большой. Эти понятия будем формализовать нечеткими множествами «низкий», «небольшой», «средний», «большой», заданными на универсальном множестве возможных значений дохода — на отрезке $[0;1000]$. Будем предполагать, что функции принадлежности перечисленных нечетких множеств представлены графически на рисунке 1.3.

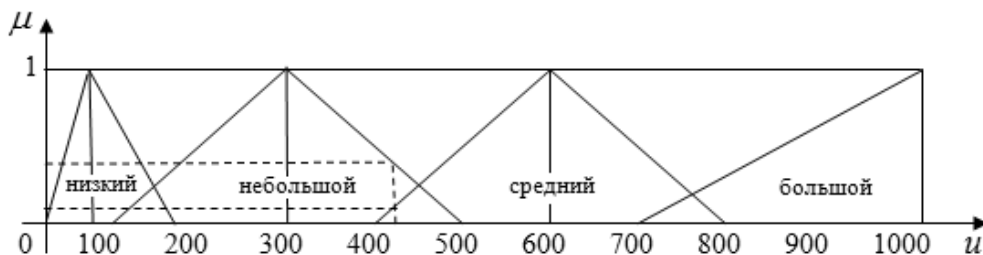


Рис. 1.3. Графики функций принадлежности нечетких множеств, описывающих размеры доходов

Из анализа графиков на рисунке 1.3 видно, что сумму в 420 руб. мы не можем однозначно классифицировать; с уверенностью 0,1 мы относим ее к средней, с уверенностью 0,4 — к небольшой сумме.

Определения нечетких теоретико-множественных операций объединения, пересечения и других могут быть обобщены из обычной теории множеств.

В отличие от обычных множеств, в теории нечетких множеств степень принадлежности не ограничена лишь значениями 0 и 1, она может принимать значения из интервала $[0; 1]$. Поэтому нечеткие теоретико-множественные операции могут быть определены по-разному. Ясно, что выполнение нечетких операций объединения, пересечения и других над обычными четкими множествами должно дать такие же результаты, как и при использовании обычных теоретико-множественных операций.

Ниже приведены определения нечетких теоретико-множественных операций, предложенных Л. Заде.

Определение 1.3. *Дополнением нечеткого множества \hat{A} , заданного на U , называется нечеткое множество $\widehat{\bar{A}}$ с функцией принадлежности*

$$\mu_{\widehat{\bar{A}}}(u) = 1 - \mu_{\hat{A}}(u) \text{ для всех } u \in U.$$

На рисунке 1.4 приведен пример выполнения операции нечеткого дополнения.

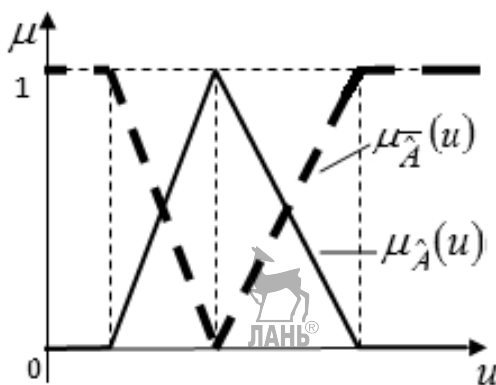


Рис. 1.4. Дополнение нечеткого множества

Определение 1.4. *Пересечением нечетких множеств \hat{A} и \widehat{B} , заданных на универсальном множестве U , называется нечеткое множество $\widehat{C} = \hat{A} \cap \widehat{B}$ с функцией принадлежности*

$$\mu_{\widehat{C}}(u) = \min\{\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\widehat{B}}(u)\} \quad (1.1)$$

для всех $u \in U$.

На рисунке 1.5 жирной линией выделен график функции принадлежности пересечения нечетких множеств \hat{A} и \widehat{B} .

Операция нахождения минимума также обозначается знаком \wedge , т. е.

$$\mu_{\widehat{C}}(u) = \mu_{\hat{A}}(u) \wedge \mu_{\widehat{B}}(u).$$

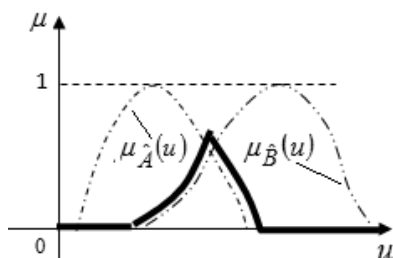


Рис. 1.5. Пересечение нечетких множеств

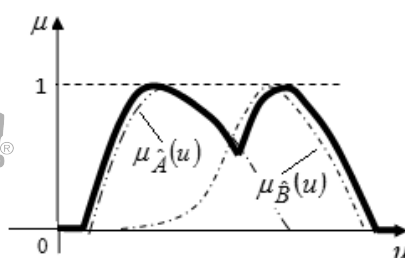


Рис. 1.6. Объединение нечетких множеств

Определение 1.5. Объединением нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} , заданных на универсальном множестве U , называется нечеткое множество $\hat{D} = \hat{A} \cup \hat{B}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{D}}(u) = \max \{ \mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u) \} \quad (1.2)$$

для всех $u \in U$.

На рисунке 1.6 жирной линией выделен график функции принадлежности объединения нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} .

Операция нахождения максимума также обозначается знаком \vee , т. е.

$$\mu_{\hat{D}}(u) = \mu_{\hat{A}}(u) \vee \mu_{\hat{B}}(u).$$

Как уже отмечалось, эти определения являются обобщениями аналогичных понятий для обычных «четких» множеств. Приведем еще некоторые соображения по поводу обоснования введенных операций [30].

Рассмотрим отображение $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u))$, заданное на множестве функций принадлежности и определяющее функцию принадлежности $\mu_{\hat{C}}(u)$ некоторого нечеткого множества \hat{C} :

$$\mu_{\hat{C}}(u) = F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)).$$

Теорема 1.1. Для того чтобы отображение $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u))$ определяло функцию принадлежности $\mu_{\hat{C}}(u)$ нечеткого множества \hat{C} , являющегося пересечением в смысле определения 1.4, нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} , необходимо и достаточно, чтобы это отображение удовлетворяло условиям:

1. $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = F(\mu_{\hat{B}}(u), \mu_{\hat{A}}(u))$.
2. Если $\mu_{\hat{A}}(u) = 0$, то

$$F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = 0.$$

3. Если $0 \leq \mu_{\hat{A}}(u) + \delta \leq 1$ и $0 \leq \mu_{\hat{B}}(u) + \delta \leq 1$, то

$$F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, \mu_{\hat{B}}(u) + \delta) = F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) + \delta.$$

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы очевидна. Докажем его достаточность.

Пусть имеется два нечетких множества \hat{A} и \hat{B} с функциями принадлежности $\mu_{\hat{A}}(u)$ и $\mu_{\hat{B}}(u)$ соответственно. Пусть $u \in U$ и пусть для определенности $\mu_{\hat{A}}(u) \leq \mu_{\hat{B}}(u)$.

По второму условию

$$F(\mu_{\hat{A}}(u) - \mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u) - \mu_{\hat{A}}(u)) = 0.$$

По третьему условию получаем, что

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{C}}(u) &= F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = F(\mu_{\hat{A}}(u) - \mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u) - \mu_{\hat{A}}(u)) + \mu_{\hat{A}}(u) = \\ &= \mu_{\hat{A}}(u) = \min\{\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)\}. \end{aligned}$$

Если $\mu_{\hat{A}}(u) \geq \mu_{\hat{B}}(u)$, то, используя первое условие, получаем уже рассмотренный случай. Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 1.2. Для того чтобы отображение $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u))$ определяло функцию принадлежности $\mu_{\hat{C}}(u)$ нечеткого множества \hat{C} , являющегося объединением в смысле определения 1.5, нечетких множеств \hat{A} и \hat{B} , необходимо и достаточно, чтобы это отображение удовлетворяло условиям:

1. $F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = F(\mu_{\hat{B}}(u), \mu_{\hat{A}}(u)).$

2. Если $\mu_{\hat{A}}(u) = 1$, то

$$F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = 1.$$

3. Если $0 \leq \mu_{\hat{A}}(u) + \delta \leq 1$ и $0 \leq \mu_{\hat{B}}(u) + \delta \leq 1$, то

$$F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, \mu_{\hat{B}}(u) + \delta) = F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) + \delta.$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть имеются два нечетких множества \hat{A} и \hat{B} с функциями принадлежности $\mu_{\hat{A}}(u)$ и $\mu_{\hat{B}}(u)$ соответственно. Пусть $u \in U$ и пусть для определенности $\mu_{\hat{A}}(u) \leq \mu_{\hat{B}}(u)$ и $1 - \mu_{\hat{B}}(u) = \delta$.

С учетом второго условия

$$F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, \mu_{\hat{B}}(u) + \delta) = F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, 1) = 1.$$

По третьему условию и из сказанного получаем, что

$$F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) + \delta = F(\mu_{\hat{A}}(u) + \delta, \mu_{\hat{B}}(u) + \delta) = 1.$$

Тогда

$$\mu_{\hat{C}}(u) = F(\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)) = 1 - \delta = \mu_{\hat{B}}(u) = \max\{\mu_{\hat{A}}(u), \mu_{\hat{B}}(u)\}.$$

Если $\mu_{\hat{A}}(u) \geq \mu_{\hat{B}}(u)$, то, используя первое условие, получаем уже рассмотренный случай. Это завершает доказательство теоремы.

Нечеткие множества в случае, когда универсальным множеством является числовая ось, принято называть *нечеткими величинами*. Нечеткая величина, функция принадлежности которой непрерывна и выпукла, называется *нечетким числом*. Часто при решении практических задач используются трапециевидные и треугольные нечеткие числа, являющиеся, по существу, линейным приближением нечетких чисел более сложного вида. Мы в дальнейшем будем, как правило, использовать такого типа линейные приближения.

Определение 1.6. *Треугольным нечетким числом* \hat{A} называется тройка $\langle a, b, c \rangle$ действительных чисел, где $a \leq b \leq c$, $\mu_{\hat{A}}(a) = 0$, $\mu_{\hat{A}}(b) = 1$, $\mu_{\hat{A}}(c) = 0$.

Если $a < b < c$, то функция принадлежности $\mu_{\hat{A}}$ определяется следующим образом:

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b], \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Если $a = b < c$, то

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in (b, c], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $a < b = c$, то

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $a = b = c$, то

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = b, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Второе число тройки $\langle a, b, c \rangle$ обычно называют *модой* или четким значением нечеткого треугольного числа, $\mu_{\hat{A}}(b)=1$. Числа a и c характеризуют степень размытости (нечеткости) четкого числа b (рис. 1.7).

Например, на рисунке 1.8 изображен график функции принадлежности нечеткого треугольного числа $A=\langle 2, 4, 7 \rangle$, которое лингвистически можно проинтерпретировать как «около 4» или «приблизительно 4».

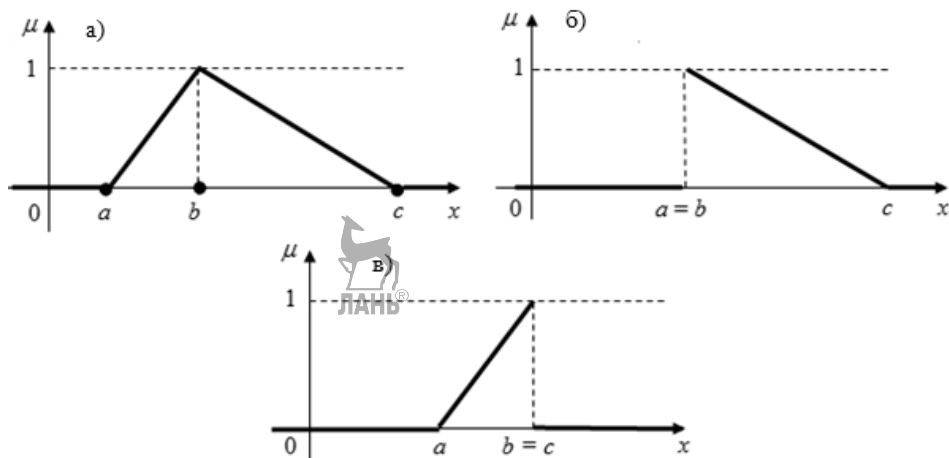


Рис. 1.7. Треугольные числа (здесь универсальное множество — вся числовая ось)

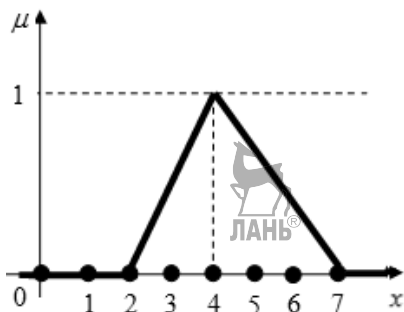


Рис. 1.8. Приблизительно 4 (здесь универсальное множество — вся числовая ось)

Определение 1.7. *Трапецидальным нечетким числом* будем называть четверку действительных чисел $\langle a, b, c, d \rangle$, где $a \leq b \leq c \leq d$, $\mu_{\hat{A}}(a)=0$, $\mu_{\hat{A}}(b)=1$, $\mu_{\hat{A}}(c)=1$, $\mu_{\hat{A}}(d)=0$.

Если $a < b \leq c < d$, то

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b], \\ 1, & \text{если } x \in [b, c], \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{если } x \in [c, d], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что здесь, так же как и с треугольными числами, возможны аналогичные случаи, связанные с нарушением условия $a < b \leq c < d$ (рис. 1.9).

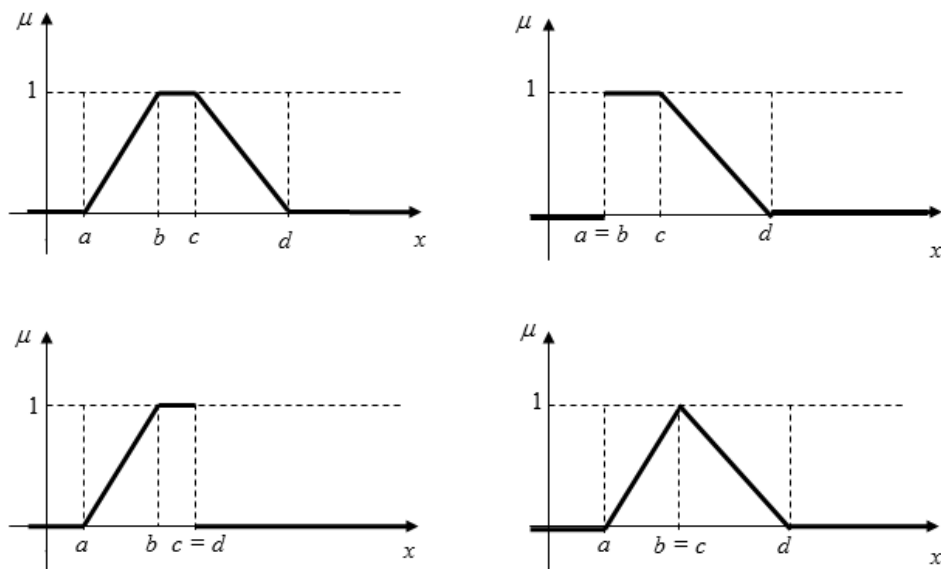


Рис. 1.9. Трапецеидальные числа (здесь универсальное множество — вся числовая ось)

Пример 1.4. Характеризуя скорость v автомобиля, будем использовать нечеткие числа, формализуемые нечеткими множествами «малая», «средняя», «большая», определенными на универсальном множестве от нуля до ста километров в час. Графики их функций принадлежности представлены на рисунке 1.10.

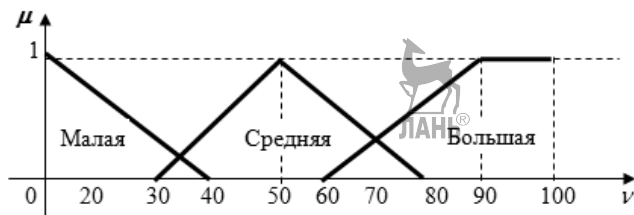


Рис. 1.10. Скорость автомобиля

Принцип обобщения как одна из основных идей теории нечетких множеств позволяет расширить область определения исходного отображения φ на класс нечетких множеств. Пусть φ — заданное отображение из множества V в множество U , и пусть \hat{A} — нечеткое множество, заданное на универсальном множестве V . Тогда образ нечеткого множества \hat{A} при отображении φ есть нечеткое множество \hat{B} , заданное на универсальном множестве U с функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{B}}(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_{\hat{A}}(x).$$

Напомним, что $\varphi^{-1}(y)$ — это множество всех таких $x \in U$, для которых $\varphi(x) = y$.

Пример 1.5. Пусть возможные исходы операции образуют нечеткое множество \hat{W} с функцией принадлежности $\mu_{\hat{W}}(y)$, $y \in Y$, где Y — универсальное множество (например, множество всех вообще мыслимых исходов). Пусть имеется всего три варианта x_1, x_2, x_3 из нечеткого множества \hat{V} решений на развитие операции, приводящих к одному и тому же результату y , т. е. $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(x_3) = y$. Пусть $\mu_{\hat{V}}(x_1) = 0,7$, $\mu_{\hat{V}}(x_2) = 0,4$, $\mu_{\hat{V}}(x_3) = 0,6$. В соответствии с принципом обобщения степень уверенности $\mu_{\hat{W}}(y)$ в том, что результатом операции будет y , равна

$$\mu_{\hat{W}}(y) = \sup_{1 \leq i \leq 3} \mu_{\hat{V}}(x_i) = \max\{0,7, 0,4, 0,6\} = 0,7.$$

1.3. Фаззификация и дефаззификация нечеткого множества

Нам в дальнейшем потребуются операции преобразования четкого множества в нечеткое и преобразование нечеткого множества в четкое число. Эти операции называются соответственно фаззификацией и дефаззификацией.

Определение 1.8. Фаззификация — преобразование некоторого четкого множества в нечеткое.

Применительно к рассматриваемым в данной работе задачам понятие «фаззификация» имеет более узкий смысл, на котором мы остановимся в свое время.

Определение 1.9. Дефаззификацией называется процедура преобразования нечеткого множества в четкое число.

В теории нечетких множеств процедура дефаззификации аналогична нахождению числовых характеристик (математического ожидания, моды,

медианы) случайных величин в теории вероятности. Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности. Однако пригодность этого способа ограничивается лишь одноэкстремальными функциями принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности в Fuzzy Logic Toolbo¹ запрограммированы следующие методы дефаззификации:

- *Centroid* — центр тяжести;
- *Bisector* — медиана;
- *LOM (Largest Of Maximums)* — наибольший из максимумов;
- *SOM (Smallest Of Maximums)* — наименьший из максимумов;
- *Mom (Mean Of Maximums)* — центр максимумов.

Обозначим

$$\bar{u} = \max_{u \in U, \mu(u) > 0} u, \quad \underline{u} = \min_{u \in U, \mu(u) > 0} u.$$

Определение 1.10. *Дефаззификация* нечеткого множества

$$\hat{A} = \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \frac{\mu_{\hat{A}}(u)}{u} du$$

по методу центра тяжести осуществляется по формуле

$$a = \frac{\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} u \cdot \mu_{\hat{A}}(u) \cdot du}{\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \mu_{\hat{A}}(u) \cdot du}.$$

В последнем равенстве интеграл использован в обычном смысле.

Физическим аналогом этой формулы является нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества.

Определение 1.11. В случае дискретного универсального множества

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) u_i$$

¹ Fuzzy Logic Toolbox — это пакет расширения MATLAB, содержащий инструменты для проектирования систем нечеткой логики.

его *дефаззификация по методу центра тяжести* осуществляется по формуле

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k u_i \cdot \mu_{\hat{A}}(u_i)}{\sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i)}.$$

Определение 1.12. *Дефаззификация* нечеткого множества

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) / u_i$$

по методу медианы состоит в нахождении такого числа a , что

$$a = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \sum_{i=j}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) \left| \sum_{i=j}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \mu_{\hat{A}}(u_i) \right. \right\}.$$

Определение 1.13 *Дефаззификация по методу медианы* нечеткого множества

$$\hat{A} = \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \frac{\mu_{\hat{A}}(u)}{u}$$

состоит в нахождении такого числа a , что

$$\int_{\underline{u}}^a \mu_{\hat{A}}(u) du = \int_a^{\bar{u}} \mu_{\hat{A}}(u) du.$$

Геометрической интерпретацией метода медианы является нахождение такой точки на оси абсцисс, что перпендикуляр, восстановленный в этой точке, делит площадь под графиком функции принадлежности на две равные части.

Пример 1.6. Провести дефаззификацию нечеткого множества «мужчина среднего роста» из примера 1.1 по методу центра тяжести (найти четкое значение a для этого нечеткого числа).

Решение. Применяя формулу из определения 1.11, получаем: для числителя этой формулы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^8 u_i \cdot \mu_{\hat{A}}(u_i) &= 0 \cdot 155 + 0,1 \cdot 160 + 0,3 \cdot 165 + 0,8 \cdot 170 + 1 \cdot 175 + \\ &+ 1 \cdot 180 + 0,5 \cdot 185 + 0 \cdot 190 = 649; \end{aligned}$$

для ее знаменателя

$$\sum_{i=1}^8 \mu_{\hat{A}}(u_i) = 0 + 0,1 + 0,3 + 0,8 + 1 + 1 + 0,5 + 0 = 3,7.$$

Окончательно:

$$a = \frac{649}{3,7} = 175,4.$$

1.4. Элементы нечеткой логики

Нечеткая логика — это аппарат, позволяющий в определенной степени формализовать способность человека осуществлять неточные, нечеткие рассуждения.

Следуя [6], [8], [30]–[33], введем некоторые понятия нечеткой логики. В классической математической логике значениями истинности высказываний могут быть только два значения — «истина» и «ложь», при этом значению «истина» соответствует число 1, значению «ложь» — число 0. В нечеткой логике рассматриваются нечеткие высказывания, которые могут быть истинными или ложными в какой-то степени. Степень истинности нечеткого высказывания принимает значения из замкнутого промежутка $[0; 1]$, при этом 0 совпадает со значением «ложь», 1 — со значением «истина».

Определение 1.14. Под *нечетким высказыванием* будем понимать повествовательное предложение, выражающее законченную мысль, относительно которой можно судить о ее истинности или ложности только с некоторой степенью уверенности.

Заметим, что не всякое повествовательное предложение является высказыванием (нечетким высказыванием), например предложение «накормите меня обедом» высказыванием не является.

Рассмотрим некоторое нечеткое высказывание \tilde{A} , степень (значение) его истинности будем обозначать $Tr(\tilde{A})$.

Над нечеткими высказываниями вводятся различные логические операции, остановимся на двух из них — на конъюнкции (И) и дизъюнкции (ИЛИ), необходимых нам для дальнейшего.

Пусть имеются нечеткие высказывания \tilde{A} и \tilde{B} со значениями истинности $Tr(\tilde{A})$ и $Tr(\tilde{B})$ соответственно.

Нечеткие логические операции И (\wedge) и ИЛИ (\vee) по аналогии с теоретико-множественными операциями пересечения и объединения выполняются по правилам:

$$Tr(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = \min \{Tr(\tilde{A}), Tr(\tilde{B})\}, \quad (1.4)$$

$$\text{Tr}(\tilde{A} \vee \tilde{B}) = \max \{ \text{Tr}(\tilde{A}), \text{Tr}(\tilde{B}) \}. \quad (1.5)$$

В нечеткой логике вводится понятие лингвистической переменной.

Определение 1.15. *Лингвистической переменной* называется переменная, значениями которой могут быть слова или словосочетания некоторого естественного или искусственного языка.

Определение 1.16. *Терм-множеством* называется множество всех возможных значений лингвистической переменной. *Термом* называется любой элемент терм-множества. В теории нечетких множеств терм формализуется нечетким множеством с помощью функции принадлежности. В дальнейшем мы часто, если это не приводит к недоразумениям, терм и нечеткое множество, его формализующее, будем обозначать одинаково.

Задание значения переменной словами, без использования чисел, для человека более естественно. Ежедневно мы принимаем решения на основе лингвистической информации типа: «очень плохая погода», «большое расстояние», «отличная оценка», «красивый букет», «вкусный обед» и т. п. Психологи установили, что в человеческом мозге почти вся числовая информация вербально перекодируется и хранится в виде лингвистических термов. Понятие лингвистической переменной играет важную роль в нечетком логическом выводе и в принятии решений на основе приближенных рассуждений.

Отметим, что с лингвистической переменной тесно связана «обычная» переменная, принимающая значения из универсального множества, на котором определены нечеткие множества, формализующие термы рассматриваемой лингвистической переменной.

Вернемся к понятию фаззификация, теперь мы готовы обсудить тот «узкий смысл» этого понятия, который упоминался в определении 1.8.

Определение 1.17. Применительно к рассматриваемым в данной монографии задачам *фаззификация* означает получение для конкретного значения переменной значений функций принадлежности, определенных для нее термов.

1.5. Нечеткая задача математического программирования

Рассмотрим задачу математического программирования, в которой множество допустимых планов и (или) цель являются нечеткими. Будем исходить из того, что универсальным множеством X является n -мерное евклидово пространство R^n , где n — число неизвестных в рассматриваемой задаче.

Нечеткой целью [6], [9], [34] называется некоторое нечеткое множество \tilde{G} с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{G}}(x)$. Скажем, оперативная эффективность характеризуется вероятностью выполнения задачи. Тогда нечеткой целью может быть нечеткое множество «вероятность выполнения задачи должна быть равной примерно 0,9» или «вероятность выполнения задачи должна быть существенно больше 0,7».

Чем больше степень принадлежности $\mu_{\tilde{G}}(x)$ варианта x нечеткой цели, тем больше степень достижения этой цели при выборе альтернативы x . В литературе часто предлагается в качестве функции принадлежности рассматривать нормированный к единице критерий эффективности рассматриваемой задачи.

Нечеткие ограничения также задаются с помощью нечетких множеств на универсальном множестве X , например «потребность в горючем около 10 тонн», «продолжительность выполнения задачи составляет не менее 10 суток» и т. п.

Решить задачу — значит достичь цель и удовлетворить ограничениям задачи. В задаче нечеткого математического программирования следует говорить не просто о достижении цели, а о ее достижении с той или иной степенью, при этом необходимо учитывать и степень выполнения ограничений.

В подходе Беллмана — Заде предлагается считать степенью принадлежности альтернативы x **нечеткому решению** задачи число, равное минимуму из степени принадлежности этой альтернативы нечеткой цели и степеней принадлежности этой альтернативы всем нечетким множествам, задающим ограничения задачи. Этот подход базируется на том соображении, что нечеткое решение задачи является пересечением нечеткой цели и нечетких множеств, задающих ограничения. Функция же принадлежности пересечения рассматриваемых множеств равна минимуму из функций принадлежности рассматриваемых множеств (формула (1.1)).

Пример 1.7. Пусть задача имеет три ограничения. Пусть степень принадлежности плана x нечеткой цели равна 0,6, степень удовлетворения этого плана первому ограничению (степень его принадлежности нечеткому множеству, задающему первое ограничение) равна 0,8, второму — 0,4, третьему — 0,7. Тогда степень принадлежности плана нечеткому решению задачи равна 0,4.

Оптимальным предлагается считать план, для которого степень его принадлежности нечетким множествам, задающим ограничения задачи и нечеткую цель, т. е. нечеткому решению задачи, максимальна.

1.6. Нечеткая задача векторной оптимизации

Рассмотрим задачу по выбору наилучшей альтернативы из заданного нечеткого множества альтернатив \hat{C} с функцией принадлежности $\mu_{\hat{C}}(x)$, которая определена на универсальном множестве X , при этом будем исходить из того, что качество альтернативы оценивается с помощью n частных критериев эффективности: f_1, f_2, \dots, f_n . Цель в этой задаче оказывается определенной нечетко. Для решения этой задачи воспользуемся идеей Заде — Беллмана [6], [34], в соответствии с которой нечетким решением рассматриваемой задачи является пересечение нечеткой цели и нечеткого множества альтернатив \hat{C} .

В случае задачи с n критериями эффективности в качестве нечеткой цели \hat{G} предлагается рассматривать пересечение нечетких множеств $\hat{G}_i, i=1, 2, \dots, n$ — нечетких частных целей, определяемых частными критериями эффективности f_1, f_2, \dots, f_n , т. е. исходить из того, что цель достигается с требуемой надежностью, если с этой надежностью достигается каждая из частных целей. Обозначим функцию принадлежности нечеткого множества \hat{G}_i через μ_i , тогда получим, что

$$\mu_{\hat{G}}(x) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x)\}.$$

Следуя [34], под *нечетким решением* рассматриваемой задачи будем понимать пересечение нечеткой цели и нечеткого множества альтернатив. Тогда функция принадлежности $\mu_{\hat{D}}(x)$ нечеткого решения \hat{D} задачи будет иметь вид:

$$\mu_{\hat{D}}(x) = \min\{\mu_{\hat{G}}(x), \mu_{\hat{C}}(x)\}.$$

В качестве решения задачи предлагается брать альтернативу x , для которой значение функции $\mu_{\hat{D}}(x)$ максимально.

1.7. Нечеткий логический вывод

Важную роль при решении задач управления и не только их играет задача, в которой требуется по заданным значениям факторов x_1, x_2, \dots, x_n (входных переменных) определить значение показателя y (выходной переменной). Для ее решения используется следующий алгоритм нечеткого логического вывода.

1. По заданным значениям факторов определить их степень принадлежности различным термам соответствующих лингвистических переменных, т. е. осуществить фаззификацию исходных значений факторов.

2. Используя базу знаний и определения операций над нечеткими множествами, построить нечеткое множество значений выходного показателя при условии, что входные факторы имеют заданные значения.

3. Используя полученное нечеткое множество, осуществить его дефаззификацию.

Отметим, что в литературе рассматривается несколько алгоритмов нечеткого вывода [5], [8], [31], к основным из них относятся: алгоритм Мамдани, алгоритм Цукамото, алгоритм Ларсена, алгоритм Сугено. Мы в дальнейшем будем опираться на алгоритм Мамдани.

Определение 1.18. Пусть задан набор факторов $x = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$, являющихся лингвистическими переменными, и показатель y , который тоже является лингвистической переменной. *Нечеткой базой знаний* о влиянии этого набора факторов на значение показателя y называется совокупность $l = 1, 2, \dots, m$ логических высказываний типа:

ЕСЛИ

$$(x_1 = a_1^{j_1}) \text{ И } (x_2 = a_2^{j_1}) \text{ И } \dots \text{ И } (x_n = a_n^{j_1})$$

ИЛИ

$$(x_1 = a_1^{j_2}) \text{ И } (x_2 = a_2^{j_2}) \text{ И } \dots \text{ И } (x_n = a_n^{j_2})$$

ИЛИ

...

ИЛИ

$$(x_1 = a_1^{j_{k_l}}) \text{ И } (x_2 = a_2^{j_{k_l}}) \text{ И } \dots \text{ И } (x_n = a_n^{j_{k_l}}),$$

ТО

$$y = d_l,$$

где $a_i^{j_p}$ — терм, которым оценивается переменная x_i в строчке с номером j_p ($p = 1, 2, \dots, k_l$); k_l — количество строчек-конъюнкций, в которых выход y оценивается термом d_l ; m — количество термов, используемых для лингвистической оценки выходного параметра y с помощью операций \vee (ИЛИ) и \wedge (И).

Нечеткую базу знаний из определения 1.18 можно записать в более компактном виде:

$$\bigvee_{p=1}^{k_l} \left[\bigwedge_{i=1}^n (x_i = a_i^{j_p}) \right] \rightarrow y = d_l, l = 1, 2, \dots, m. \quad (1.6)$$

Пример 1.8. Рассмотрим задачу организации подвоза. Будем учитывать три фактора, которым соответствуют лингвистические переменные «объем подвоза», «количество автомобилей», «условия движения».

Термы лингвистической переменной «объем подвоза»: «большой», «средний» и т. д.

Термы лингвистической переменной «количество автомобилей»: «немного не хватает», «почти достаточно», «мало» и т. п.

Термы лингвистической переменной «условия движения»: «плохие», «средние», «хорошие» и т. д.

Показатель (выходная лингвистическая переменная) «возможные мероприятия» имеет термы: «все в порядке», «немного увеличить продолжительность рабочего дня», «серьезно увеличить продолжительность рабочего дня» и т. п.

Комбинация логических высказываний — элемент базы знаний:

ЕСЛИ

«объем подвоза» = «большой» И «количество автомобилей» = «немного не хватает» И «условия движения» = «плохие»

ИЛИ

«объем подвоза» = «большой» И «количество автомобилей» = «почти достаточно» И «условия движения» = «хорошие»

ИЛИ

...

ИЛИ

«объем подвоза» = «средний» И «количество автомобилей» = «мало» И «условия движения» = «средние»,

ТО

«возможные мероприятия» = «немного увеличить продолжительность рабочего дня». (Итоговый терм).

Определение 1.19. *Нечетким логическим выводом* называется аппроксимация зависимости значений показателя y от значений факторов x_1, x_2, \dots, x_n с помощью нечеткой базы знаний и операций над нечеткими множествами. Показатель y часто называют выходной переменной или откликом, факторы x_1, x_2, \dots, x_n — входными переменными.

Пусть $\mu^{j_p}(x_i)$ — функция принадлежности входа x_i терму $a_i^{j_p}$, $i=1,2,\dots,n$, $j_p=1,2,\dots,m_i$, m_i — число разных термов лингвистической переменной x_i , т. е.

$$a_i^{j_p} = \int_{\underline{x}_i}^{\overline{x}_i} \frac{\mu^{j_p}(x_i)}{x_i},$$

здесь \underline{x}_i — минимальное и \overline{x}_i — максимальное значения входной переменной x_i .

Пусть $\mu^{d_l}(y)$ — функция принадлежности выхода y терму d_l , $l=1,2,\dots,m$:

$$\mu^{d_l}(y) = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \frac{\mu^{d_l}(y)}{y},$$

здесь \underline{y} — минимальное и \overline{y} — максимальное значения входной переменной x_i .

Тогда степень уверенности в том, что при векторе значений входных переменных

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

значение выходной переменной будет принадлежать терму d_l , определяется по формуле:

$$\mu_{d_l}(x^*) = \bigvee_{p=1}^{k_l} \bigwedge_{i=1}^n [\mu^{j_p}(x_i^*)] \quad l=1,2,\dots,m, \quad (1.7)$$

где \bigvee (\bigwedge) — операция максимума (минимума).

Нечеткое множество $\hat{y}(x^*)$, получающееся на выходе при входном векторе x^* , определяется следующим образом:

$$\hat{y}(x^*) = \bigcup_{l=1}^m \int_{\underline{y}^*}^{\overline{y}^*} \min\{\mu_{d_l}(x^*), \mu^{d_l}(y)\} / y, \quad (1.8)$$

где \bigcup — операция объединения нечетких множеств; \underline{y}^* и \overline{y}^* — соответственно минимальное и максимальное значения в нечетком множестве $\hat{y}(x^*)$, которое соответствует входному вектору x^* .

Четкое значение выходной переменной y , соответствующее входному вектору x^* , определяется в результате дефаззификации нечеткого множества $\hat{y}(x^*)$.

Пример 1.9. Требуется оценить по 100-балльной системе выступление спортсмена в лыжном двоеборье, учитывая его результаты в лыжной гонке на 15 км — 30 мин и в прыжках с 90-метрового трамплина — 90 баллов.

Итоговую оценку будем рассматривать как параметр, как выходную лингвистическую переменную «сумма» (итоговая оценка — Σ) с терминами «низкая», «средняя», «хорошая», «отличная» и универсальным множеством $[0; 100]$ баллов.

В качестве входных переменных будем рассматривать лингвистические переменные:

— «гонка» (затраченное время t) с терминами «медленно», «средне», «быстро» и универсальным множеством $[24; 36]$ (мин);

— «прыжок» (сумма баллов s) с терминами «слабо», «хорошо», «отлично» и универсальным множеством $[30; 120]$ (баллов).

Предполагается, что все термины формализуются нечеткими числами (треугольными вида $\langle a, b, c \rangle, a \leq b \leq c$, и трапецидальными вида $\langle a, b, c, d \rangle, a \leq b = c \leq d$). Значения параметров a, b, c, d для всех термов указаны в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Значения параметров

Параметры	Термы									
	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	D_1	D_2	D_3	D_4
a	24	25	28	30	60	85	0	20	55	80
b	24	28	33	30	80	110	0	40	70	90
c	27	33	36	75	105	120	35	65	85	100
d	—	—	36	—	—	120	—	—	—	100

Графики функций принадлежности соответствующих термов (нечетких множеств, формализующих соответствующие термы) и база знаний представлены на рисунках 1.11–1.13 и в таблице 1.2 (заметим, что эта информация получена на основе экспертных данных).

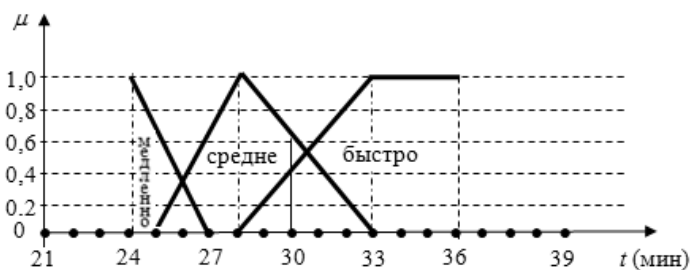


Рис. 1.11. Графики для термов переменной «гонка»

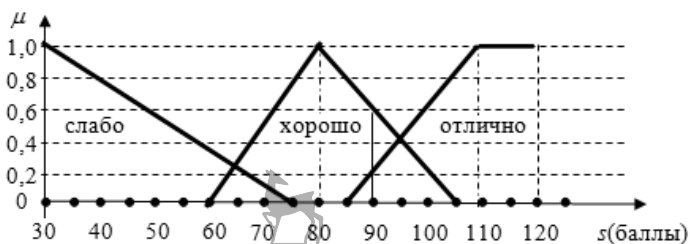


Рис. 1.12. Графики для термов переменной «прыжок»

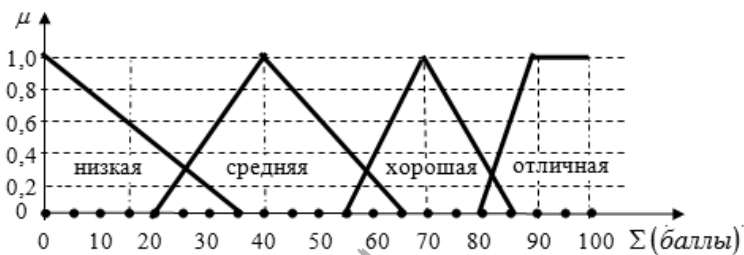


Рис. 1.13. Графики для термов переменной «сумма»

Таблица 1.2. Таблица нечетких правил (база знаний) для примера 1.9

Термы переменной «гонка»	Термы переменной «прыжок»		
	B_1 (слабо)	B_2 (хорошо)	B_3 (отлично)
A_1 (медленно)	D_1 (низкая)	D_2 (средняя)	D_3 (хорошая)
A_2 (средне)	D_2 (средняя)	D_3 (хорошая)	D_4 (высокая)
A_3 (быстро)	D_3 (хорошая)	D_4 (высокая)	D_4 (высокая)

Каждая запись в таблице 1.2 соответствует своему нечеткому правилу, например:

ЕСЛИ «прыжок»=«хорошо» И «гонка»=«медленно», ТО «сумма»=«средняя».

Таким образом, решение задачи осуществляется по следующему принципу: данные о результатах рассматриваемого спортсмена по видам двоеборья (о затраченном времени на дистанции и набранных баллах на трамплине) будут фаззифицированы, обработаны согласно табличным правилам, дефаззифицированы и полученное значение и следует признать итоговой оценкой спортсмена.

Рассматриваемый спортсмен преодолел дистанцию за 30 мин и набрал 90 баллов на трамплине.

Решение. Обозначения:

A — «гонка», B — «прыжок», C — «сумма»;

A_1 — «медленно», A_2 — «средне», A_3 — «быстро»;

B_1 — «слабо», B_2 — «хорошо», B_3 — «отлично»;

D_1 — «низкая», D_2 — «средняя», D_3 — «хорошая», D_4 — «высокая»;

$E_{ij}, i=1,2,3, j=1,2,3$ — нечеткое высказывание (ситуация) «(„гонка“ равна A_i) И („прыжок“ равен B_j)» (табл. 1.3).

Таблица 1.3. Значения функции принадлежности $\mu_{E_{ij}}(30, 90)$

	$\mu_{A_i}(30)$	B_1	B_2	B_3
$\mu_{B_j}(90)$		0	0,6	0,2
A_1	0	0	0	0
A_2	0,6	0	0,6	0,2
A_3	0,4	0	0,4	0,2

Функцию принадлежности этого нечеткого высказывания (нечеткого множества, его формализующего) при значениях входных факторов, равных t и s , обозначим $\mu_{E_{ij}}(t, s)$.

Обозначим $\mu_{A_i}(t)$ — значение функции принадлежности нечеткого множества, формализующего терм A_i лингвистической переменной «гонка» при ее значении, равном t . Аналогично $\mu_{B_j}(s)$.

Имеем (рис. 1.12):

$$\mu_{B_1}(90) = 0,0, \mu_{B_2}(90) = 0,6, \mu_{B_3}(90) = 0,2.$$

Анализируя рисунок 1.11, видим, что

$$\mu_{A_1}(30) = 0,0, \mu_{A_2}(30) = 0,6, \mu_{A_3}(30) = 0,4.$$

Из определения нечеткой логической операции И (формула (1.4)) следует, что

$$\mu_{E_{ij}}(t, s) = \min\{\mu_{A_i}(t), \mu_{B_j}(s)\}.$$

В таблице 1.3 указаны значения функций принадлежности при $t = 30$ мин и $s = 90$ баллов. Из нее следует, что рассматривать можно только четыре ситуации: $A_2 - B_2$, $A_2 - B_3$, $A_3 - B_2$, $A_3 - B_3$. В принятых обозначениях это соответственно $E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33}$ (табл. 1.4). Они означают следующие оценки: «хорошая», «высокая», «высокая», «высокая». Ситуации E_{22} соответствует терм D_3 лингвистической переменной «сумма», ситуации E_{23} соответствует терм D_4 , ситуации E_{32} — терм D_4 , ситуации E_{33} — D_4 .

Таблица 1.4. Таблица нечетких правил в принятых обозначениях

Термы переменной «гонка»	Термы переменной «прыжок»		
	B_1	B_2	B_3
A_1	E_{11}	E_{12}	E_{13}
A_2	E_{21}	E_{22}	E_{23}
A_3	E_{31}	E_{32}	E_{33}

В ситуациях E_{23}, E_{32}, E_{33} выходной терм один и тот же — D_4 . В соответствии с формулой (1.5) степень принадлежности $\mu_{D_4}(30, 90)$ входного вектора $(30, 90)$ выходному терму D_4 равна максимальному из значений функций принадлежности нечетких высказываний E_{23}, E_{32}, E_{33} , т. е. (см. табл. 1.3)

$$\mu_{D_4}(30, 90) = \max\{0, 2, 04, 0, 2\} = 0,4.$$

Этот максимум достигается для ситуации E_{32} , поэтому в дальнейшем из трех ситуаций E_{23}, E_{32}, E_{33} достаточно рассматривать только ситуацию E_{32} . Следовательно, нас интересуют только две ситуации E_{22} и E_{32} , в которых выходными термами являются D_3 и D_4 соответственно.

Осталось определить значение переменной «сумма» (итоговая оценка). Находить это значение будем приближенно. Для этого будем менять величину итоговой оценки от 0 до 100 с шагом 10. Напомним, что итоговую оценку мы обозначили буквой Σ . Обозначим функцию принадлежности терма D_k , $k = 1, 2, 3, 4$, лингвистической переменной «сумма» через $\mu_{D_k}(\Sigma)$.

Результаты вычислений сведены в таблицу 1.5, которая заполнена на основании графиков функций принадлежности термов выходной переменной (рис. 1.13) или данных о параметрах соответствующих нечетких чисел (табл. 1.1).

Таблица 1.5. Значения функций принадлежности $\mu_{D_k}(\Sigma)$

(степень уверенности в том, что, приняв решение D_k , следует дать оценку Σ)

Σ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu_{D_3}(\Sigma)$	0	0	0	0	0	0	0,33	1,00	0,33	0	0
$\mu_{D_4}(\Sigma)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,00	1,00

Через $\mu_{ijk}(t, s, \Sigma)$ обозначим функцию принадлежности нечеткого высказывания «(значение термина A_i равно t) И (значение термина B_j равно s) и (значение термина D_k равно Σ)», тогда

$$\mu_{ijk}(t, s, \Sigma) = \min\{\mu_{A_i}(t), \mu_{B_j}(s), \mu_{D_k}(\Sigma)\};$$

значения функции $\mu_{ijk}(t, s, \Sigma)$ для двух рассматриваемых ситуаций D_3 и D_4 указаны во второй и третьей строках таблицы 1.6.

Таблица 1.6. Значения функции принадлежности $\mu_{ijk}(30, 90, \Sigma)$

Σ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu_{223}(30, 90, \Sigma)$	0	0	0	0	0	0	0,33	0,60	0,33	0,00	0,00
$\mu_{324}(30, 90, \Sigma)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,40	0,40
$\mu_D(30, 90, \Sigma)$	0	0	0	0	0	0	0,33	0,60	0,33	0,40	0,40

Через $\mu_D(t, s, \Sigma)$ обозначим функцию принадлежности лингвистической переменной «сумма» при условии, что значением лингвистической переменной «гонка» является время, равное t , и значением лингвистической переменной «прыжок» является сумма баллов за прыжок с трамплина, равная d :

$$\mu_D(t, s, \Sigma) = \max_{(i,j,k)} \mu_{ijk}(t, s, \Sigma);$$

значения этой функции указаны в нижней строке таблицы 1.6, они равны максимальному числу из чисел соответствующего столбца.

Первая и четвертая строки таблицы 1.6 задают функцию принадлежности нечеткого множества «итоговая оценка („сумма“) при условии, что $t = 30, s = 90$ ».

Осталось осуществить дефаззификацию этого нечеткого множества, т. е. преобразовать его в четкое число (определить то, какую же все-таки оценку надо выставить нашему спортсмену). Дефаззификация по методу «центр тяжести» дает

$$\frac{0+0+0+0+0+0+0,33 \cdot 60+0,60 \cdot 70+0,33 \cdot 80+0,40 \cdot 90+0,40 \cdot 100}{0+0+0+0+0+0+0,33+0,60+0,33+0,40+0,40} \cong 79,7.$$

Следовательно, итоговая оценка рассматриваемого спортсмена равна 79,7 балла.



Глава 2.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

2.1. Вводные замечания

Одной из составных частей современной науки управления, несомненно, является набор количественных методов исследования сложных явлений и процессов, который принято называть теорией исследования операций. Количественные методы придают процессу управления необходимую научную обоснованность, сводят до минимума элемент субъективности при выборе управленческих решений и дают возможность в определенной мере оптимизировать процесс управления. Важной составляющей частью исследования операций является математическое программирование.

Транспортная задача линейного программирования [12], [35]–[39] при управлении материально-техническим обеспечением возникает, например, в случаях, когда снабжение нескольких подразделений осуществляется с нескольких складов, расположенных в разных районах региона, и требуется определить, какой объем материальных средств надо доставить с каждого склада в каждое подразделение.

Задача о ранце [40]–[42] (задачи о загрузке, о рюкзаке) и ее модификации часто возникают в экономике, прикладной математике, криптографии, генетике, военном деле, логистике и т. д. при нахождении оптимальной загрузки транспорта (самолета, поезда, трюма корабля) или склада. В общем виде эту задачу можно сформулировать так: из заданного множества предметов с характеристиками «стоимость» и «вес» требуется отобрать некое число предметов таким образом, чтобы получить максимальную суммарную стоимость при одновременном соблюдении ограничения на суммарный вес. Среди прочих методов для ее решения можно использовать метод ветвей и границ или динамическое программирование [40], [43].

Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой системы необходимо создание запасов. Задача управления

запасами [41], [44]–[46] возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени. Однако часто спрос на предметы снабжения не является полностью определенным. В литературе рассматриваются модели снабжения с вероятностным спросом, в рассматриваемой же монографии спрос предполагается нечетким.

В указанных ранее источниках предполагается, что исходная информация в рассматриваемых задачах однозначно определена или носит вероятностный характер. В реальной же обстановке очень часто исходные данные определены нечетко. Одним из направлений по преодолению таких ситуаций является теория нечетких множеств.

В последних разделах главы рассматриваются задачи из ее первых разделов, но с тем отличием, что исходные данные в них заданы нечетко.

2.2. Задача линейного программирования

Предметом математического программирования являются методы анализа и решения определенных классов задач по выбору наилучшего варианта действий из всех возможных вариантов. Возможный вариант называется **допустимым планом**, план, являющийся решением задачи, — **оптимальным планом**.

Основоположником математической теории, получившей название «математическое программирование», является отечественный математик Л. В. Канторович (1912–1986) [47]–[49]. Его первые результаты, посвященные рассматриваемой проблеме, были опубликованы в 1939 г. С тех пор математическое программирование развивалось весьма бурно и к настоящему времени превратилось в разветвленную математическую дисциплину. Интерес, который проявляется со стороны исследователей, работающих в различных областях, к математическому программированию, объясняется стремлением

найти наилучший вариант использования имеющихся ресурсов, которых всегда не хватает. Естественно, что существенным способом повышения эффективности их применения при выполнении поставленных задач является улучшение использования указанных ресурсов, а в идеале — оптимальное их использование. Помочь в этом могут оптимизационные модели, важную роль в исследовании которых и играет математическое программирование.

Пример 2.1. Требуется спланировать рассредоточение материальных средств в три заранее определенных пункта A , B , C , находящихся от склада на удалении 20, 30 и 12 км соответственно. Для вывоза грузов выделяется 100 однотипных автомобилей. На центральном складе имеется 20 механизированных погрузочных площадок, каждая из которых обеспечивает погрузку одного автомобиля за 18 мин. В пунктах назначения разгрузка производится бригадами грузчиков с применением средств малой механизации. Время разгрузки одного автомобиля бригадой грузчиков составляет 20 мин. В пунктах A и B имеется по 7 бригад, в пункте C — 9 бригад грузчиков.

Целью решения задачи является выбор плана вывоза грузов, обеспечивающий максимум суточного вывоза грузов (максимум суточного числа рейсов).

Средняя скорость автомобиля — 40 км/ч, работы организованы в две смены (смена — 8 ч). Время подачи автомобилей под первую погрузку плюс время на уход в место дислокации составляет 1,3 ч. Следовательно, в течение суток перевозки производятся 14,7 ч, или 882 мин, и число рейсов за сутки в пункт A равно девяти, в пункт B — 7, в пункт C — 12.

Построить математическую модель данной задачи в форме задачи математического программирования.

Решение. Пусть x_1 , x_2 , x_3 — количество автомобилей, осуществляющих перевозки в пункты A , B , C соответственно. Отметим, что эти количества не могут быть меньше нуля и должны быть целыми числами.

Так как за сутки на каждой механизированной погрузочной площадке загружается $882/18 = 49$ автомобилей, то общее число загружаемых за сутки машин не может быть больше 980.

Сведем всю имеющуюся информацию в таблицу 2.1.

Таблица 2.1. Исходные данные для примера 2.1

Наименование ресурса	Пункты выгрузки			Количество ресурса
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
Автомобили	x_1	x_2	x_3	100
Число рейсов	9	7	12	980
Бригады грузчиков	7	7	9	23

Суммарное число рейсов за сутки равно

$$9x_1 + 7x_2 + 12x_3.$$

По условиям погрузки мы получаем ограничение:

$$9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \leq 20 \cdot 49 = 980.$$

По условиям разгрузки получаем условия:

$$9x_1 \leq \frac{882}{20} \cdot 7, \quad 7x_2 \leq \frac{882}{20} \cdot 7, \quad 12x_3 \leq \frac{882}{20} \cdot 9$$

или, с учетом требования целочисленности:

$$x_1 \leq 34, \quad x_2 \leq 44, \quad x_3 \leq 33.$$

Еще одним условием является требование о том, что общее число используемых автомобилей не может превосходить ста единиц:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100.$$

Окончательно получаем математическую модель рассматриваемой задачи, она является задачей математического программирования.

Ввиду условия целочисленности неизвестных она относится к задачам целочисленного программирования.

$$9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \rightarrow \max,$$

ограничения:

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \leq 980, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 100, \\ x_1 \leq 34, \quad x_2 \leq 44, \quad x_3 \leq 33, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 - \text{целые числа.} \end{cases}$$

Если последнее условие не является существенным, то, отбросив его, мы получим задачу линейного программирования.

Частным случаем задач математического программирования являются задачи линейного программирования [35], [50].

Определение 2.1. *Задача линейного программирования* — это такая задача математического программирования, в которой целевая функция и все ограничения задаются с помощью линейных функций.

Задача линейного программирования в общей форме имеет вид:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min), \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq \geq) b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq \geq) b_m \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_k \geq 0. \quad (2.3)$$

Запись $(\leq \geq)$ в системе ограничений (2.2) означает, что в ограничениях возможны любые из этих трех знаков, причем в разных ограничениях знаки могут быть разными; i_1, i_2, \dots, i_k — целые, не равные друг другу числа от 1 до n .

Коэффициенты c_j , a_{ij} и правые части ограничений b_i ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$) — заданные числа.

Пример 2.2. Для проведения аварийно-восстановительных работ возникла необходимость в восстановлении движения транспорта через водную преграду. На работы по подготовке к наведению переправы привлечены два подразделения, которые должны осуществить заготовку трех видов необходимых для строительства ресурсов (r_1, r_2, r_3) в объемах, которые равны соответственно 500, 300 и 450 усл.[®] единиц. Время, необходимое на заготовку первым подразделением единицы ресурса r_1 , составляет 4 ч, единицы ресурса r_2 — 10 ч, ресурса r_3 — 10 ч. Время, необходимое на заготовку вторым подразделением единицы ресурса, составляет соответственно 6, 8 и 20 ч.

Требуется на основе построенной математической модели данной задачи в форме задачи линейного программирования распределить указанное задание между подразделениями так, чтобы суммарные затраты времени обоих подразделений на его выполнение были бы минимальными.

Решение. Сведем всю имеющуюся информацию в таблицу 2.2 и введем обозначение: x_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2$) — количество единиц ресурса r_i , которое должно заготовить подразделение с номером j .

Таблица 2.2. Исходные данные для примера 2.2

Ресурсы	Время на изготовление единицы ресурса (ч) и объемы заданий				Необходимые объемы ресурса (усл. ед.)
	первым подразделением		вторым подразделением		
r_1	4	x_{11}	6	x_{12}	500
r_2	10	x_{21}	8	x_{22}	300
r_3	10	x_{31}	20	x_{32}	450

Математическая модель имеет вид:

$$4x_{11} + 10x_{21} + 10x_{31} + 6x_{12} + 8x_{22} + 20x_{32} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + & & & x_{12} & & \geq 500, \\ & x_{21} + & & & x_{22} & \geq 300, \\ & & x_{31} + & & & x_{32} & \geq 450, \\ x_{11} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{31} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{32} \geq 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу симплекс-методом [35], [50], получим ответ: суммарные затраты времени составляют 8900 подразделение-часов, первое подразделение должно изготовить 500 единиц ресурса первого типа и 450 единиц третьего, затрачивая на это 6500 ч, второе подразделение должно изготовить 300 единиц ресурса второго типа, затрачивая на это 2400 ч.

Следует отметить, что начало построения методов решения задач линейного программирования было осуществлено американским математиком Д. Данцигом в конце 1940-х гг.

2.3. Транспортная задача линейного программирования

Транспортная задача линейного программирования [36], [37] является частной задачей линейного программирования. Напомним ее постановку:

- в пунктах A_1, A_2, \dots, A_m расположены склады с однородными материальными средствами в количествах a_1, a_2, \dots, a_m соответственно;
- в пунктах B_1, B_2, \dots, B_n находятся потребители этих материальных средств, их потребности равны соответственно b_1, b_2, \dots, b_n ;
- известны транспортные издержки по доставке единицы груза с любого склада любому потребителю (расстояния между пунктами, стоимость доставки единицы материальных средств и т. п.). Издержки по доставке единицы груза со склада A_i потребителю B_j ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) будем обозначать c_{ij} .

Найти план подвоза материальных средств со складов потребителям, требующий минимальных суммарных затрат и обеспечивающий потребности каждого потребителя.

Математическая модель этой задачи имеет вид:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.6)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Здесь x_{ij} — объем подвоза со склада A_i потребителю B_j . Эти числа задают план подвоза. Их совокупность будем обозначать буквой x и называть планом подвоза:

$$x = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{21}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}\}.$$

Пример 2.3. С трех нефтяных баз, расположенных в пунктах A_1, A_2, A_3 , осуществляется снабжение пунктов заправки горючим — B_1, B_2, B_3, B_4 .

Возможности по отпуску горючего с баз (в тоннах) за рассматриваемый период, отпускная цена на базах (в тысячах рублей за тонну), потребности в пунктах заправки (в тоннах) за рассматриваемый период указаны в таблице 2.3, а затраты на доставку тонны горючего с каждой базы на любой пункт заправки (в тысячах рублей за тонну) указаны в таблице 2.4.

Таблица 2.3. Исходные данные для примера 2.3

Базы	Пункты заправки				Возможности, т	Отпускная цена, тыс. руб./т
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	25	20	18	9	100	15
A_2	16	20	12	17	150	25
A_3	19	22	15	20	170	18
Потребности, т	60	80	35	120	—	—

Таблица 2.4. Суммарные расходы на закупку и доставку горючего

Базы	Пункты заправки								Возможности, т
	B_1		B_2		B_3		B_4		
A_1	40	x_{11}	35	x_{12}	33	x_{13}	24	x_{14}	100
A_2	41	x_{21}	45	x_{22}	37	x_{23}	42	x_{24}	150
A_3	37	x_{31}	40	x_{32}	33	x_{33}	38	x_{34}	170
Потребности, т	60		80		35		120		—

Требуется на основе построенной математической модели этой задачи, определить план подвоза горючего, требующий минимальных расходов и обеспечивающий горючим все пункты заправки в полном объеме.

Решение. Заметим, что расходы на поставку тонны горючего складываются из двух слагаемых: расходы на закупку и расходы на подвоз. С учетом сказанного из таблицы 2.3 получаем таблицу 2.4. В этой таблице в клетках, соответствующих маршрутам движения, указаны, наряду с расходами на поставку тонны горючего, объемы подвоза горючего с баз в пункты заправки. Так как эти объемы являются неизвестными в нашей задаче, мы обозначили их через x_{ij} : x_{ij} — это объем подвоза с базы $A_i (i=1,2,3)$ в пункт заправки $B_j (j=1,2,3,4)$.

С учетом сделанных обозначений получаем математическую модель:

$$40x_{11} + 35x_{12} + 33x_{13} + 24x_{14} + 41x_{21} + 45x_{22} + 37x_{23} + 42x_{24} + \\ + 37x_{31} + 40x_{32} + 33x_{33} + 38x_{34} \rightarrow \min ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100 , \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 150 , \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 170 , \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 60 , \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 80 , \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 35 , \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 120 , \\ x_{11} \geq 0 , x_{12} \geq 0 , x_{13} \geq 0 , x_{14} \geq 0 , \\ x_{21} \geq 0 , x_{22} \geq 0 , x_{23} \geq 0 , x_{24} \geq 0 , \\ x_{31} \geq 0 , x_{32} \geq 0 , x_{33} \geq 0 , x_{34} \geq 0 . \end{array} \right.$$

Решая эту задачу, получим, что оптимальными объемами подвоза являются следующие:

- с первой базы в четвертый пункт — 100 т;
- со второй базы в третий пункт — 5 т;
- со второй базы в четвертый пункт — 20 т;
- с третьей базы в первый пункт — 60 т;
- с третьей базы во второй пункт — 80 т;
- с третьей базы в третий пункт — 30 т.

Суммарные расходы составляют 9 835 000 руб.

2.4. Задача о ранце

При организации снабжения важную роль играет процесс обеспечения подвоза материальных средств и их хранения. Для решения некоторых возникающих здесь задач полезной может оказаться так называемая задача о ранце (о ней мы упоминали в п. 2.1), которая является частным случаем задачи математического программирования.

Задача о ранце формулируется следующим образом:

- имеются штучные грузы n типов A_1, A_2, \dots, A_n ;
- известны вес и стоимость штуки каждого груза (см. табл. 2.5);
- имеется транспортное средство грузоподъемностью D ;
- определить, сколько штук груза каждого типа надо погрузить на это средство, чтобы стоимость взятых грузов была бы максимальна.

Таблица 2.5. Исходные данные для задачи о ранце

Тип груза	A_1	A_2	...	A_n
Вес (т/шт.)	d_1	d_2	...	d_n
Стоимость (руб./шт.)	c_1	c_2	...	c_n
Число погружаемых штук	x_1	x_2	...	x_n

Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max, \quad (2.8)$$

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \leq D, \quad (2.9)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2.10)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \text{ — целые числа.} \quad (2.11)$$

Пример 2.4. Требуется загрузить самолет грузоподъемностью 40 т контейнерами. Всего имеется 4 типа контейнеров. Их вес и стоимость приведены в таблице 2.6.

Определить вариант загрузки самолета, при котором суммарная стоимость взятых контейнеров максимальна.

Таблица 2.6. Исходные данные для примера 2.4

Тип контейнера	A_1	A_2	A_3	A_4
Вес, т/шт.	2	3	5	7
Стоимость, тыс. руб./шт.	2	5	6	10
Число погружаемых штук	x_1	x_2	x_3	x_4

Решение. Построим прежде всего математическую модель задачи, обозначив через x_i ($i=1,2,3,4$) число контейнеров соответствующего типа, погружаемых в самолет:

$$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 10x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 40, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{целые числа.} \end{cases}$$

Анализируя эту модель, получаем, что при оптимальном варианте загрузки самолета на него надо погрузить 13 контейнеров второго типа или 11 контейнеров второго типа и один контейнер четвертого типа. Суммарная стоимость планируемых к погрузке контейнеров равна 650 тыс. руб.

2.5. Элементы теории управления запасами

Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой системы необходимо создание запасов некоторых ресурсов. Задача управления запасами [45], [46] возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени.

Поддержание запасов на определенном уровне способствует эффективному функционированию рассматриваемой системы. Уровень запасов не должен быть слишком высоким или слишком низким. Определение оптимального уровня запасов — задача исключительной сложности, и полагаться только на интуицию соответствующего должностного лица здесь слишком опасно. Решением этой и связанных с ней задач и занимается теория управления запасами.

В любой задаче управления запасами необходимо определить объемы заказываемых материальных средств и сроки размещения заказов. При этом возникает проблема поиска решения, удовлетворяющего противоречивым

требованиям сокращения расходов на хранение и надежного обеспечения спроса, что является делом достаточно сложным и требует тщательного количественного анализа.

На основе спроса (потребности), возникающего у потребителей в определенные (или случайные) моменты времени, в систему управления снабжением поступают заявки (требования) на предметы снабжения. Управление уровнем запасов осуществляется в виде заказов на создание или пополнение запаса.

Заявки, порожденные спросом, удовлетворяются до тех пор, пока их суммарный объем не превысит объема начального запаса.

Все последующие заявки не могут быть удовлетворены до момента пополнения запаса. Вследствие этого возникает дефицит и потребитель несет потери, которые относятся на счет системы снабжения, компенсирующей убыток потребителей в форме штрафов.

Понятно, что содержание запасов, гарантирующих удовлетворение любого спроса, может оказаться невыгодным из-за увеличения затрат на хранение. Однако выплачивать большие штрафы также невыгодно. Поэтому система снабжения организуется на принципе установления определенного уровня запаса материальных средств, который время от времени восстанавливается.

С каждым таким пополнением запасов связаны определенные расходы. В этих условиях необходимо выбрать такой уровень запасов, объем и сроки их пополнения, при которых суммарные расходы на снабжение были бы минимальными.

Следует иметь в виду, что реальные системы снабжения, конечно же, значительно сложнее только что описанной системы. В общем случае задачи управления запасами сводятся к задачам нелинейного программирования, общих эффективных методов, решения которых нет.

Как уже отмечалось, при исследовании систем снабжения методами теории управления запасами определяющее значение имеет величина затрат,

которые они несут. Затраты (суммарные расходы) являются критерием эффективности в задачах управления запасами, и они должны учитывать различные виды расходов, возникающих в системах управления запасами.

В зависимости от особенности исследуемой ситуации возникает большое число классов моделей управления запасами.

Рассмотрим одну из наиболее распространенных моделей теории управления запасами [44]–[46].

Прежде всего приведем вербальное описание этой модели, которое состоит в следующем.

Имеются склады одного уровня, с них производится снабжение однородными материальными средствами, свойства которых не меняются со временем. Спрос на предметы снабжения детерминированный, непрерывный и постоянный; его интенсивность характеризуется тем, что за весь период снабжения Q суммарная потребность в предмете снабжения равна N . Пополнение запасов происходит мгновенно; расходы на пополнение не зависят от объема поставки и равны K руб. за одну поставку; объемы поставок одинаковые, интервалы времени между ними тоже одинаковые. Расходы на хранение материальных средств пропорциональны объему запаса на складах и времени, в течение которого он хранится; эти расходы составляют S руб. за единицу материальных средств в единицу времени. Штраф за дефицит пропорционален его объему и времени его наличия и составляет P руб. за единицу материальных средств в единицу времени. Предполагается, что накопившийся дефицит покрывается за счет новой поставки и что максимальный размер дефицита на интервале времени между поставками одинаков для каждого такого интервала.

Проанализируем работу описанной системы за период времени от начала работы до момента T , когда поступает очередная поставка (от одной поставки до другой) (рис. 2.1).

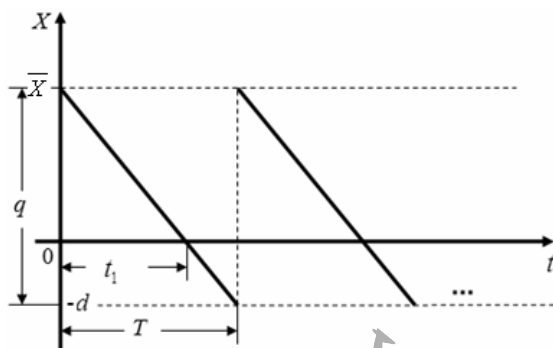


Рис. 2.1. Детерминированная динамическая модель управления запасами с дефицитом

В начальный момент времени на склады системы поступает запас \bar{X} , и затем до момента времени t_1 система выдает материальные средства, уменьшая тем самым уровень запасов на своих складах. К моменту времени t_1 уровень запасов в системе снижается до нуля. На интервале времени от t_1 до T система испытывает дефицит, и к моменту времени T дефицит достигает своего максимального уровня d , затем весь цикл повторяется.

При рассмотрении этой модели мы будем использовать следующие обозначения:

θ — расчетный период планирования, мес.;

N — величина спроса за период θ , т;

K — расходы на одну поставку, руб.;

S — стоимость хранения единицы материальных средств в единицу времени, руб./т·мес.;

P — штраф за дефицит единицы материальных средств в единицу времени, руб./т·мес.;

\bar{X} — максимальный уровень запасов, т;

T — длина интервала времени между поставками, мес.;

q — объем спроса за время T , он же объем поставки, т;

d — максимальный уровень дефицита, т;

$L(d, q)$ — суммарные расходы за время θ (руб.) при заданных d и q ;

n — число поставок за время θ , шт.;

t_1 — время бездефицитной работы на интервале между поставками, мес.

Математическая модель рассматриваемой системы снабжения имеет следующий вид:

$$L(d, q) = \frac{KN}{q} + \frac{(q-d)^2}{2q} \cdot S\theta + \frac{d^2}{2q} \cdot P\theta \rightarrow \min, \quad (2.12)$$

$$N \geq q \geq 0, d \geq 0, d \leq q, \quad (2.13)$$

$$n = \frac{N}{q} - \text{целое число}. \quad (2.14)$$

Заметим, что задача (2.12)–(2.14) является задачей математического программирования.

Отметим также, что в [51] в аналогичной модели отсутствует условие (2.14). Этим требованием действительно можно пренебречь, если относительные погрешности округления результатов решения задачи (2.12)–(2.13) невелики, например когда число поставок n достаточно большое.

Без учета требования целочисленности оптимальный объем поставки q^* , интервал времени между ними T^* , оптимальные расходы L^* и оптимальный размер дефицита d^* определяются по формулам (2.15)–(2.18).

$$q^* = \sqrt{\frac{2KN}{\theta S}} \cdot \sqrt{\frac{S+P}{P}}, \quad (2.15)$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2K\theta}{NS}} \cdot \sqrt{\frac{S+P}{P}}, \quad (2.16)$$

$$L^* = \sqrt{2NKS\theta} \cdot \sqrt{\frac{P}{P+S}}, \quad (2.17)$$

$$d^* = q^* - q^* \cdot \frac{P}{S+P}. \quad (2.18)$$

Если число поставок при этом оказывается нецелым и ошибка округления велика, то следует, используя формулы (2.12) и (2.18), вычислить расходы при числе поставок, равном максимальному целому числу, не превосходящему полученного дробного числа поставок, и при числе поставок на единицу большем этого числа. Выбрать из двух полученных значений меньшее, это и будет оптимальное значение расходов на снабжение.

Пример 2.5. Пусть общий объем поставок горючего составляет 24 000 т.

Расходы, связанные с обеспечением одной поставки, не зависят от ее объема и составляют 40 000 руб.

Стоимость хранения запасов пропорциональна объему запаса и времени хранения и составляет 20 000 руб. за тонну в месяц.

Накопившийся к моменту очередной поставки дефицит покрывается из этой поставки. Убытки, которые понес потребитель за время наличия дефицита, компенсируются системой снабжения в виде выплаты штрафов. Штраф за дефицит составляет 30 000 руб. за тонну в месяц.

Найти оптимальный объем поставки q^* , интервал времени между ними T^* , оптимальные расходы L^* .

Решение. Исходные данные:

$$\theta = 12 \text{ мес.}, N = 24\,000 \text{ т.}$$

$$K = 40\,000 \frac{\text{руб.}}{\text{поставка}}, \quad S = 20\,000 \frac{\text{руб.}}{\text{т} \cdot \text{мес.}}, \quad P = 30\,000 \frac{\text{руб.}}{\text{т} \cdot \text{мес.}}$$

Используя формулы (2.15), (2.16), получаем, что

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 40\,000 \cdot 24\,000}{12 \cdot 20\,000}} \cdot \sqrt{\frac{20\,000 + 30\,000}{30\,000}} \approx 115,45 \text{ т.}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 40\,000 \cdot 12}{24\,000 \cdot 20\,000}} \cdot \sqrt{\frac{20\,000 + 30\,000}{30\,000}} \approx 0,58 \text{ мес.}$$

По формуле (2.17) находим, что

$$L^* = \sqrt{2 \cdot 24\,000 \cdot 40\,000 \cdot 20\,000 \cdot 12} \cdot \sqrt{\frac{30\,000}{30\,000 + 20\,000}} \approx 16\,627\,688 \text{ руб.}$$

Число поставок при этом равно

$$n^* = \frac{N}{q^*} = \frac{24\,000}{115,45} \approx 207,9.$$

Ошибка округления представляется значительной, поэтому определим расходы при $n = 207$ и $n = 208$.

При $n = 207$ получаем:

$$q = \frac{N}{n} = 115,94 \text{ т.}$$

$$d = q - q \cdot \frac{P}{S + P} = 46,37 \text{ т.}$$

$$L(d, q) = \frac{KN}{q} + \frac{(q-d)^2}{2q} \cdot S\theta + \frac{d^2}{2q} \cdot P\theta = 16\,627\,825 \text{ руб.}$$

При $n = 208$

$$q \approx 115,38 \text{ т, } d \approx 46,15 \text{ т, } L(d, q) \approx 16\,627\,692 \text{ руб.}$$

При 207 поставках расходы больше, чем при 208. Значит, оптимальное число поставок — 208, размер поставки составляет 115,38 т, время между ними — 0,058, суммарные расходы составляют 16 627 692 руб.

В задаче (2.12)–(2.14) спрос на предметы снабжения предполагался детерминированным.

Рассмотрим одну из задач со случайным спросом — задачу об определении необходимого числа запасных деталей [45], [51].

Имеется некоторый агрегат. Одна из его деталей время от времени выходит из строя. Известна вероятность $p(r)$ того, что за все время эксплуатации агрегата эта деталь выйдет из строя точно r раз ($r = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Стоимость одной детали равна S , а расходы, связанные с ее закупкой и простым агрегата в случае отсутствия этой детали в запасе, равны P . Определить необходимое число запасных деталей с тем, чтобы математическое ожидание суммарных затрат из-за неправильно определенной потребности в запасных деталях было бы минимальным.

Функцией затрат в этом случае является математическое ожидание суммарных «лишних» затрат из-за неверного определения числа выходов детали из строя. Вычислим эту функцию, которую обозначим $L(x)$, x — число запасных деталей.

Если в запасе имеется x деталей, а за все время эксплуатации агрегата эта деталь выходила из строя r раз, то лишние расходы будут равны:

$$(x - r)S, \text{ если } x \geq r,$$

$$(x - r)P, \text{ если } x < r.$$

Тогда

$$L(x) = S \cdot \sum_{r=0}^x (x - r)p(r) + S \cdot \sum_{r=x+1}^{\infty} (r - x)p(x).$$

Оказывается, что x^* является оптимальным числом запасных деталей тогда и только тогда, когда выполняются неравенства:

$$p(r \leq x^* - 1) \leq \frac{P}{S + P} \leq p(r \leq x^*).$$

Мы рассмотрели всего лишь два примера систем управления запасами. В теории управления запасами изучаются также многие другие ситуации, см., например, [45], [46], [52].

2.6. Задача векторной оптимизации

Рассмотрим часто встречающуюся в процессе принятия решения задачу по выбору наилучшего способа действий в ситуации, когда качество варианта использования ресурсов оценивается с помощью не одного, а нескольких количественных показателей — критериев эффективности. В этом случае

становится неопределенным само понятие оптимальности, не ясно, какой вариант считать самым хорошим. Ведь наилучший с точки зрения некоторых из критериев способ действий может оказаться весьма плохим по другим критериям.

Как уже отмечалось, задачи такого типа называются задачами векторной (многокритериальной) оптимизации [53], [54].

Приведем формулировку *задачи векторной оптимизации*.

Имеется множество альтернатив $V = \{u, v, t, \dots\}$. Имеется также несколько функций $f_1(u), f_2(u), \dots, f_k(u)$, областью определения которых является множество V . Эти функции называются *частными критериями*.

Рассмотрим *векторный критерий*:

$$F(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_k(u)).$$

Требуется выбрать в множестве V альтернативу, наилучшую в смысле векторного критерия $F(u)$.

Один из подходов к решению этой задачи, предложенный в [13], основан на том, что с помощью некоторой функции k переменных осуществляется свертка векторного критерия и переход к задаче с одним критерием. Рассмотрим функцию $G(x_1, x_2, \dots, x_k)$, с помощью которой можно перейти к одному критерию $H(u)$, осуществив свертку векторного критерия по формуле:

$$H(u) = G(f_1(u), f_2(u), \dots, f_k(u)).$$

Существуют разные способы построения сверток [55], [56]. Часто в качестве свертки используется линейная функция k переменных:

$$H(u) = \sum_{i=1}^k \delta_i f_i(u),$$

$$\delta_i \geq 0 \text{ для любого } i \text{ и } \sum_{i=1}^k \delta_i = 1.$$

Коэффициент δ_i отражает важность частного критерия $f_i(u)$.

Заметим, что для использования такой свертки необходимо, чтобы:

— все частные критерии были максимизируемыми (минимизируемыми), т. е. чем лучше (хуже) по данному частному критерию вариант, тем больше (меньше) значение критерия;

— все частные критерии имели одинаковую размерность (являлись бы безразмерными величинами).

В литературе по векторной оптимизации предлагаются многочисленные подходы, позволяющие так преобразовать исходные критерии, чтобы указанные требования выполнялись.

Пример 2.6. Требуется выбрать один из нескольких имеющихся вариантов решения на применение ресурсов. Каждый вариант оценивается двумя показателями: оперативная эффективность и экономическая эффективность решения. Их значения для разных вариантов указаны в таблице 2.7.

Таблица 2.7. Исходные данные для примера 2.6

Критерии эффективности	Варианты решения		
	u_1	u_2	u_3
Оперативный (f_1)	0,60	0,75	0,80
Экономический (f_2)	1,00	0,67	0,00

Решение. Пусть в зависимости от принимаемых решений расходы могут изменяться от минимального значения A до максимального значения B . Тогда расходы, связанные с конкретным решением, будут равны $(1 - \delta)B + \delta A$, где δ — некоторое число от нуля до единицы. Это δ будем использовать в качестве критерия «экономическая эффективность». Обратим внимание на то, что этот критерий максимизируемый и безразмерный. Пусть, например, экономические затраты составляют соответственно 1, 2 и 4 условных единиц. Значит, $A = 1$, $B = 4$, тогда эффективность одной условной единицы равна 1, двух условных единиц — 0,67, трех — 0,33, четырех — 0.

Оперативную эффективность будем характеризовать вероятностью выполнения задачи. Будем предполагать, что эта вероятность лежит в пределах от 0,5 до 0,98. Очевидно, что и этот критерий максимизируемый и безразмерный.



Пусть лицо, принимающее решение, установило, что оперативный критерий в три раза важнее экономического, тогда $\delta_1 = 0,75$ и $\delta_2 = 0,25$. Вычисляя значения критерия $H(u)$ для рассматриваемых вариантов, получаем:

$$H(u_1) = 0,75 \cdot 0,60 + 0,25 \cdot 1 = 0,70,$$

$$H(u_2) = 0,75 \cdot 0,75 + 0,25 \cdot 0,67 = 0,73,$$

$$H(u_3) = 0,75 \cdot 0,80 + 0,25 \cdot 0,00 = 0,60.$$

Следовательно, оптимальным является второй вариант (вариант u_2).

В заключение отметим, что в пятой главе мы рассмотрим подходы к решению задач многокритериальной оптимизации, основанные на теории нечетких множеств и нечеткой логике.

2.7. Постановка транспортной задачи линейного программирования с нечетко заданными потребностями в материальных средствах

Рассмотрим транспортную задачу линейного программирования (п. 2.3), в которой потребности являются нечеткими [12], [56], [57] и задаются с помощью нечетких множеств. Будем предполагать, что снабжение n потребителей однородными материальными средствами производится с m складов, их потребности $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_n$ равны примерно b_1, b_2, \dots, b_n и являются нечеткими величинами, заданными на универсальном множестве $U = [0, \tilde{b}]$ (\tilde{b} — достаточно большое число, $\tilde{b} \geq b_j$ при любом j), с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{b}_j}(x), j = 1, 2, \dots, n; x \in [0, \tilde{b}]$:



$$\mu_{\tilde{b}_j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq b_j - \beta_j, \\ \frac{x - (b_j - \beta_j)}{\beta_j}, & \text{если } b_j - \beta_j \leq x \leq b_j, \\ 1, & \text{если } b_j \leq x \leq \tilde{b}, \end{cases}$$

где β_j — максимальная величина недопоставки, на которую может согласиться потребитель с номером j .

График одной из этих функций приведен на рисунке 2.2.

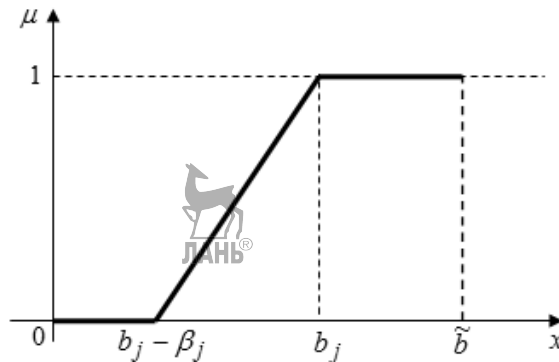


Рис. 2.2. График функции $\mu_{\tilde{b}_j}(x)$

Обозначать эти нечеткие величины по аналогии с треугольными числами будем $\langle b_j - \beta_j, b_j, \tilde{b} \rangle, j = 1, 2, \dots, n$.

Запасы на складах равны соответственно a_1, a_2, \dots, a_m и являются обычными четкими числами, при этом, хотя запасов, может быть, и хватает для удовлетворения потребностей в максимальных объемах, имеет место заинтересованность в экономии ресурсов. Предполагается, что для удовлетворения потребностей в минимальных объемах запасов хватает.

Потребитель с номером j готов согласиться на некоторое уменьшение своих потребностей по сравнению с величиной b_j ; β_j — максимальная величина недопоставки, на которую может согласиться этот потребитель.

Чем больше величина уменьшения потребности β_j , тем меньше значение функции принадлежности, которую будем трактовать как степень уверенности в том, что потребитель удовлетворен.

Найти вариант снабжения, при котором степень уверенности (значение функции принадлежности) в том, что он эффективен по затратам и уровню обеспечения потребителей, максимальна.

2.8. Математическая модель транспортной задачи с нечеткими потребностями

Подходы к решению таких задач приведены в [12], [56]–[59].

Обозначим через C_{min} минимальные суммарные расходы по доставке грузов для случая, когда потребности потребителей минимальны, т. е. равны $b_j - \beta_j, j=1,2,\dots,n$.

Степень уверенности в том, что предлагаемый вариант организации подвоза экономически эффективен, будем характеризовать значением функции принадлежности получаемых затрат нечеткому числу \hat{C}_u — «расходы почти минимальны», описывающему нашу цель, состоящую в минимизации расходов.

Чем больше разность между затратами

$$C(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (2.19)$$

связанными с вариантом x и величиной C_{min} , т. е. разность $C(x) - C_{min}$, тем меньше мы уверены в том, что план x экономически эффективен.

Будем исходить из того, что \hat{C}_u есть нечеткая величина $\langle -\infty, C_{min}, C_{max} \rangle$ с функцией принадлежности $\mu_u(x)$. Здесь C_{max} — минимальные расходы, являющиеся решением задачи (2.4)–(2.7) в случае, когда потребности равны b_j ($j=1,2,\dots,n$), или в случае недостатка запасов таковы, что их общая надежность

максимальна, т. е. минимальное из значений функций принадлежности этих потребностей максимально.



Рассмотрим ограничения

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq \hat{b}_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

С учетом того, что \hat{b}_j — нечеткие величины, эти ограничения задают нечеткие множества с функциями принадлежности $\mu_j(x)$:

$$\mu_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \\ \mu_{\hat{b}_j} \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right), & \text{если } \sum_{i=1}^m x_{ij} < b_j. \end{cases} \quad (2.20)$$

Оптимальный вариант должен принадлежать всем указанным нечетким множествам и, кроме того, должен принадлежать нечеткому множеству цели с функцией принадлежности $\mu_u(x)$, т. е. он должен принадлежать пересечению указанных нечетких множеств. Функция принадлежности этого пересечения имеет вид:

$$\mu_{\cap}(x) = \min\{\mu_u(x), \mu_1(x), \dots, \mu_n(x)\}. \quad (2.21)$$

Заметим, что функция $\mu_{\cap}(x)$ характеризует степень нашей уверенности в том, что план x эффективен по суммарным затратам и уровню обеспечения потребителей. Мы же стремимся степень этой уверенности максимизировать. С учетом сказанного получаем модель (2.22)–(2.25).

$$\min\{\mu_u(x), \mu_1(x), \dots, \mu_n(x)\} \rightarrow \max, \quad (2.22)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq \hat{b}_j, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.23)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.24)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.25)$$

Подчеркнем, что, в отличие от задачи (2.4)–(2.7), правые части неравенств из (2.23) являются нечеткими величинами.

Отметим некоторые свойства оптимального плана рассматриваемой задачи.

Пусть

$x^* = (x_{11}^*, x_{12}^*, \dots, x_{1n}^*, \dots, x_{mn}^*)$ — оптимальный план задачи (2.22)–(2.25),

$$\min \{ \mu_u(x^*), \mu_1(x^*), \mu_2(x^*), \dots, \mu_n(x^*) \} = I,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^* = b_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что x^* является решением следующей задачи с четкими ограничениями:

$$\min \{ \mu_u(x), \mu_1(x), \dots, \mu_n(x) \} \rightarrow \max, \quad (2.26)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.27)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.28)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.29)$$

Действительно, план x^* является допустимым планом задачи (2.26)–(2.29).

Пусть существует такой оптимальный план

$$x' = (x'_{11}, x'_{12}, \dots, x'_{1n}, x'_{21}, \dots, x'_{2n}, \dots, x'_{m1}, \dots, x'_{mn})$$

задачи (2.26)–(2.29), что

$$\mu_{\cap}(x') > \mu_{\cap}(x^*).$$

Пусть b'_j таковы, что $\sum_{i=1}^m x'_{ij} = b'_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что $b'_j \geq b_j^*$ для

любого j , а x' и x^* являются оптимальными планами задачи (2.4)–(2.7), в которой правые части из (2.5) равны соответственно b'_j и b_j^* . Поэтому

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_{ij},$$

следовательно,

$$\mu_{\eta}(x^*) \geq \mu_{\eta}(x').$$

Если

$$\mu_{\eta}(x^*) = \mu_{\eta}(x^*) = I, \text{ то } \mu_{\eta}(x') \leq \mu_{\eta}(x') \leq \mu_{\eta}(x^*) = I,$$

что противоречит нашему предположению.

Если $\mu_{\eta}(x^*) > \mu_{\eta}(x^*) = I$, то существует такое j_0 , что $\mu_{j_0}(x^*) = I$. Так как x' — оптимальный план задачи (2.26)–(2.29), то он и ее допустимый план, для которого выполнены все ее ограничения. Более того, для этого плана выполнены условия (2.27) в случае, когда их правые части равны b'_j . Значит, x' является допустимым планом задачи (2.22)–(2.25) и $\mu_{\eta}(x') > I$, что противоречит предположению об оптимальности плана x^* в этой задаче.

Теорема 2.1. План x^* является решением задачи (2.26)–(2.29) и в случае, когда правые части всех ограничений в (2.27) таковы, что $\mu_{b_j}(b_j^*) = I$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Так как меньшим значениям функций принадлежности соответствуют меньшие значения правых частей ограничений из (2.23) и по предположению $I \leq \mu_{b_j}(b_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), то при замене в (2.27) чисел b_j^* , $j = 1, 2, \dots, n$, на такие числа b'_j , что $\mu_{b_j}(b'_j) = I$, множество допустимых планов получившейся задачи будет содержать в себе все допустимые планы задачи (2.26)–(2.29) (если вариант допустим в некоторой задаче, то он допустим и в аналогичной задаче с меньшими потребностями). Значит, при такой замене значение целевой функции задач (2.26)–(2.29) не может ухудшиться, т. е. стать меньше I . Это завершает доказательство.



2.9. Алгоритм отыскания оптимального плана

Для приближенного решения задачи (2.22)–(2.25) можно предложить следующий алгоритм.

Будем менять значение целевой функции с определенным шагом, равным $e = \frac{1}{N}$, где N — число шагов. На k -м шаге ($0 \leq k \leq N$) решаем задачу (2.4)–(2.7), в которой правые части ограничений из формулы (2.5), равные b_j , заменены на числа, равные b_j^k , где $\mu_{b_j}(b_j^k) = ke$. Рассматриваем только те k , при которых построенная задача имеет допустимые планы. Пусть оптимальное значение целевой функции рассматриваемой задачи равно I_k . Обозначим соответствующий план подвоза через x^k . Тогда значение целевой функции задачи (2.26)–(2.29) при правых частях в (2.27), равных b_j^k , равно

$$\min \left\{ \frac{C_{max} - I_k}{C_{max} - C_{min}}, ke, ke, \dots, ke \right\}.$$

Из полученных для всех рассматриваемых k результатов выбираем максимальный, это и будет приближенное решение задачи (2.22)–(2.25).

2.10. Пример решения транспортной задачи с нечеткими потребностями

Пример 2.7. Для материально-технического обеспечения четырех потребителей используются три поставщика материальных средств. Потребность в материальных средствах j -го потребителя ($j=1,2,3,4$) равна b_j (т). Возможности получения материальных средств в i -м ($i=1,2,3$) поставщике материальных средств равны V_i т. Затраты на закупку единицы материальных средств в i -м поставщике материальных средств и доставку ее j -му потребителю материальных средств составляют C_{ij} руб. Решением задачи является план перевозок материальных средств — x , т. е. объемы подвоза материальных средств от i -го поставщика материальных средств (ПМС) j -му потребителю материальных средств:

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}).$$

Необходимо определить такой план перевозок материальных средств, при котором обеспечивалась бы достаточная экономическая эффективность и достаточная полнота их доставки.

Исходные данные (значения коэффициентов целевой функции и правых частей ограничений) приведены в таблице 2.8.

Таблица 2.8. Исходные данные для примера 2.7

Поставщики МС	Затраты C_{ij}				Наличие мат. средств у ПМС, т
	Потр.-1	Потр.-2	Потр.-3	Потр.-4	
ПМС-1	92	122	208	386	200
ПМС-2	62	92	180	355	250
ПМС-3	73	115	200	367	390
Потребность в мат. средствах, т	220	240	200	220	—

Как это видно из таблицы 2.8, для удовлетворения всех потребностей в полном объеме запасов не хватает, поэтому потребности $b_j (j=1,2,3,4)$ рассматриваются как нечетко заданные.

Модель (2.4)–(2.7) с учетом данных таблицы 2.8 принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 92x_{11} + 122x_{12} + 208x_{13} + 386x_{14} + \\ + 62x_{21} + 92x_{22} + 180x_{23} + 355x_{24} + \\ + 73x_{31} + 115x_{32} + 200x_{33} + 367x_{34} \rightarrow \min, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 390, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 220, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 240, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 200, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 220, \\ x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{14} \geq 0, \\ x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0, x_{24} \geq 0, \\ x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0, x_{33} \geq 0, x_{34} \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Потребности являются нечеткими и задаются нечеткими величинами

$$\hat{b}_1 = \langle 110, 220, 300 \rangle, \hat{b}_2 = \langle 120, 240, 300 \rangle, \hat{b}_3 = \langle 100, 200, 300 \rangle,$$

$$\hat{b}_4 = \langle 110, 220, 300 \rangle,$$

заданными на универсальном множестве $[0, 300]$.

Результаты расчетов приведены в таблице 2.9 и на рисунке 2.3.

Таблица 2.9. Результаты решения примера 2.7

№ шага (k)	Надежность потребностей (нечетких чисел (b_j^k)), степень уверенности в том, что план эффективен по уровню обеспечения потребителей	Потребности потребителей				Минимальные затраты (оптимальное значение целевой функции задачи (2.4)–(2.7) при соответствующих значениях потребностей: (I_k))	Надежность функции цели $(\mu_{\mu}(x^k))$ (степень уверенности в том, что план эффективен по затратам)
		№ 1 (b_1^k)	№ 2 (b_2^k)	№ 3 (b_3^k)	№ 4 (b_4^k)		
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,0	110	120	100	110	77 080	1,0
1	0,2	132	144	120	132	93 208	0,78
2	0,4	154	168	140	154	109 576	0,57
3	0,6	176	192	160	176	126 536	0,34
4	0,8	198	216	180	198	143 736	0,11
5	0,9	209	228	190	209	152 300	0,00

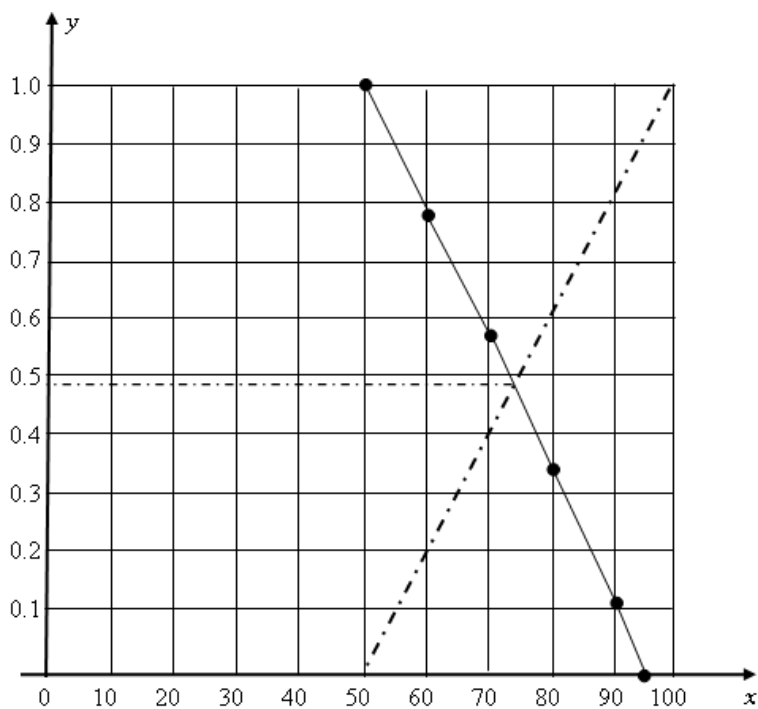
Значения потребностей менялись с шагом 10% (кроме последней строки, об особенностях ее заполнения речь пойдет далее), что соответствует изменению значений соответствующих функций надежности на 0,2, так как

$$\mu_{\hat{b}_j}(u) = \begin{cases} \frac{u - (b_j - \beta_j)}{b_j - (b_j - \beta_j)}, & \text{если } u \in [(b_j - \beta_j); b_j], \\ 1, & \text{если } \tilde{b} \geq u > b_j, \\ 0, & \text{если } 0 \leq u < (b_j - \beta_j), \end{cases}$$

а $(b_j - \beta_j) = 0,5 \cdot b_j$.

Так, уровню надежности 0% соответствует уровень потребностей в 50%, уровню надежности 20% соответствует уровень потребностей $50\%+10\%=60\%$, уровню надежности 40% — уровень потребностей $50\%+20\%=70\%$ и т. д.

Отметим, что для обеспечения всех потребностей в полном объеме с надежностью единица запасов не хватает. Поэтому рассмотрены значения потребностей, соответствующие уровню надежности до 0,90 включительно (последняя строка таблицы). При большем уровне надежности сумма потребностей становится больше суммы запасов, и задача перестает иметь допустимые планы.



Здесь x — уровень потребностей в процентах от максимального, y — надежность (графы 2 и 8 табл. 2.9).

Рис. 2.3. Графики степени уверенности в том, что план эффективен по затратам (— — — — — график функции $\mu_u(x^k)$) и уровню обеспечения потребителей (- - - - - график функции надежности потребностей).

Таблица 2.9 заполнялась по следующим правилам:

— вторая графа рассчитывается по формуле $\mu_{b_j}(b_j^k) = k \cdot \frac{1}{N}$, где k — номер шага, $N = 5$ — число шагов;

— для заполнения графа с третьей по шестую решаются уравнения

$$\mu_{b_j}(b_j^k) = k \cdot \frac{1}{5}.$$

Отсюда

$$b_j^k = \frac{k}{5}(b_j - (b_j - \beta_j)) + (b_j - \beta_j);$$

— третья графа (для 1-го потребителя) — по формуле

$$b_1^k = \frac{k}{5}(220 - 110) + 110;$$

— четвертая графа (для 2-го потребителя) — по формуле

$$b_2^k = \frac{k}{5}(240 - 120) + 120;$$

— пятая графа (для 3-го потребителя) — по формуле

$$b_3^k = \frac{k}{5}(200 - 100) + 100;$$

— шестая графа (для 4-го потребителя) — по формуле

$$b_4^k = \frac{k}{5}(220 - 110) + 110;$$

— седьмая графа — в результате решения задачи (2.30), в которой значения правых частей ограничений по потребностям взяты из 3–6 граф соответствующей строки таблицы 2.9. В последней строке седьмой графы указано (приближенно) значение C_{max} ;

— восьмая графа — по формуле

$$\mu_y(x^k) = \begin{cases} 0, & \text{если при этом } k \text{ задача не имеет допустимых планов,} \\ \frac{C_{max} - I_k}{C_{max} - C_{min}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из анализа представленных на рисунке 2.3 графиков видно, что максимальное значение уверенности в том, что план эффективен по суммарным затратам и уровню обеспечения потребителей, равно примерно 0,48. При этом уровень обеспеченности составляет 74%, т. е. первому потребителю следует планировать поставить 163 т, второму — 178 т, третьему — 148 т, четвертому — 163 т. Оптимальным планом подвоза при этом является следующий:

$$x_{13} = 12, x_{22} = 178, x_{23} = 72, x_{31} = 163, x_{33} = 64, x_{34} = 163.$$

При этом суммарные расходы равны 116 352 руб.

2.11. Задача о доставке труб для газопровода «Сила Сибири»

В интересах строительства газопровода «Сила Сибири» решалась задача [58] по доставке труб большого диаметра для этого газопровода.

Возможные маршруты перевозки труб указаны на схеме (рис. 2.4).

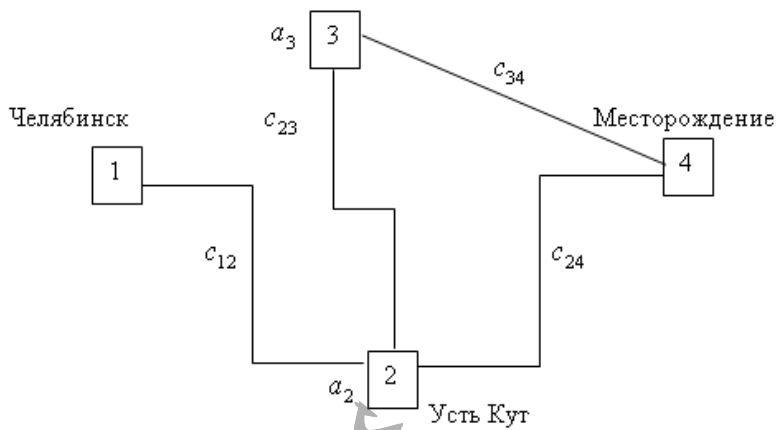


Рис. 2.4. Схема маршрутов

Требуется найти наиболее эффективный по затратам вариант доставки труб из Челябинска до месторождения, если суммарная потребность в трубах задана нечетко.

Для начала предположим, что потребность в трубах задана однозначно и равна \hat{b} , тогда для решения задачи рассмотрим следующую модель, заданную в форме задачи линейного программирования [35], [46]:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{12}x_{12} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34} \rightarrow \min, \\ \begin{array}{c} \text{ЛАНЬ}^{\circledR} \\ x_{12} \leq a_2, \\ x_{23} \leq a_3, \end{array} \\ x_{23} + x_{24} \leq x_{12}, \\ x_{34} \leq x_{23}, \\ x_{24} + x_{34} \geq b, \\ x_{ij} \geq 0, i=1,2,3; j=2,3,4, \end{array} \right. \quad (2.31)$$

где a_2, a_3 — емкости соответствующих складов, шт.; b — потребность в трубах, шт.; $c_{12}, c_{23}, c_{24}, c_{34}$ — стоимость перевозки одной трубы по соответствующему маршруту, руб.

Обозначим через $Q(b)$ оптимальные расходы в задаче (2.31).

По ряду причин, которые здесь не указываются, потребность в трубах для указанного выше газопровода не является четко определенной. Чтобы учесть это, воспользуемся теорией нечетких множеств.

Свяжем с задачей (2.31) следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(\mu_{\hat{c}}(x), \mu_{\hat{b}}(x)) \rightarrow \max, \\ x_{12} \leq a_2, \\ x_{23} \leq a_3, \\ x_{23} + x_{24} \leq x_{12}, \\ x_{34} \leq x_{23}, \\ x_{24} + x_{34} \geq \hat{b}, \\ x_{ij} \geq 0, i=1,2,3; j=2,3,4. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Здесь $x = (x_{11}, x_{23}, x_{24}, x_{34})$, \hat{b} — нечеткое число $\langle d; b; h \rangle$, характеризующее спрос на трубы, $a_2 + a_3 \geq h$, $\mu_{\hat{b}}(x)$ — функция принадлежности

нечеткого числа \hat{b} ; $\mu_{\hat{c}}(x)$ — функция принадлежности нечеткого числа \hat{C} (нечеткой цели) — «расходы почти оптимальные».

Введем обозначение: $\mu(x) = \mu_{\hat{b}}(x_{24} + x_{34})$.

Минимальные расходы мы получим, решив задачу (2.31), предполагая, что $b = d$ (предполагая, что потребность минимальна), обозначим их $Q(d)$. Максимальные расходы мы получим, решив задачу (2.31), предполагая, что $b = h$ (предполагая, что потребность максимальна), обозначим их $Q(h)$.

Значение целевой функции задачи (2.31) при заданном x обозначим через $W(x)$:

$$W(x) = c_{12}x_{12} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34}.$$

В качестве характеристики степени уверенности в том, что рассматриваемый план эффективен по затратам, можно использовать величину отклонения получающихся расходов от их значения при минимальном спросе, т. е. величину $W(x) - Q(d)$.

Но большее значение этой величины соответствует менее эффективному по затратам плану, и, кроме того, она может принимать значения из некоторого отрезка $[u, v] \neq [0, 1]$, поэтому в качестве функции принадлежности $\mu_{\hat{c}}(x)$ нечеткой цели будем использовать функцию

$$\mu_{\hat{c}}(x) = 1 - \frac{W(x) - Q(d)}{Q(h) - Q(d)}.$$

Пусть $x^* = (x_{11}^*, x_{23}^*, x_{24}^*, x_{34}^*)$ — решение задачи (2.32) и

$$\min(\mu_{\hat{c}}(x^*), \mu_{\hat{b}}(x^*)) = A.$$

Введем обозначение:

$$b^* = x_{24}^* + x_{34}^*.$$

Очевидно, что x^* является решением задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(\mu_{\hat{c}}(x), \mu(x)) \rightarrow \max, \\ x_{12} \leq a_2, \\ x_{23} \leq a_3, \\ x_{23} + x_{24} \leq x_{12}, \\ x_{34} \leq x_{23}, \\ x_{24} + x_{34} \geq b^*, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 4. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Действительно, x^* является допустимым планом задачи (2.33) и функция $\min(\mu_{\hat{c}}(x), \mu_b(x))$ достигает на нем максимального значения по сравнению со всеми другими планами.

Рассмотрим функцию принадлежности $\mu_b(x)$ (рис. 2.5).

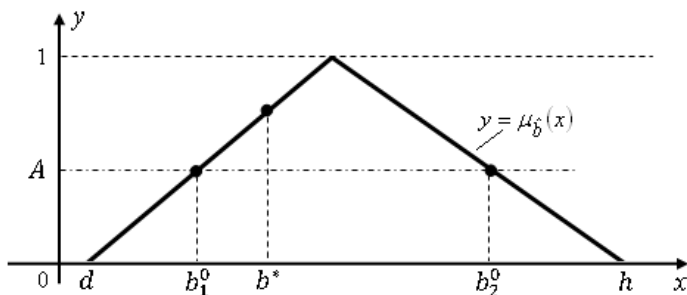


Рис. 2.5. Функция принадлежности $\mu_b(x)$

Замечание 2.1. Мы видим, что если $A < \mu_b(x)$, то существуют два таких числа b_1^0 и b_2^0 , что $\mu_b(b_1^0) = \mu_b(b_2^0) = A$, при этом $b_1^0 < b^* < b_2^0$. Но с ростом правой части неравенства $x_{24} + x_{34} \geq b^*$ область допустимых планов задачи (2.33) сужается (не расширяется) и, значит, оптимальное значение ее целевой функции убывает (не возрастает). Если $A = \mu_b(b^*)$, то $b_1^0 = b^* = b_2^0$.

Из сказанного следует, что

$$\min(\mu_{\hat{c}}(b_2^0), \mu(b_2^0)) \leq \min(\mu_{\hat{c}}(b_1^0), \mu(b_1^0)),$$

поэтому в дальнейшем из двух возможных значений потребности, имеющих заданную степень надежности, будем использовать меньшее, надежность его экономической эффективности выше. Если b^0 такое число, что $\mu_{\hat{b}}(b^0) = A$, то будем считать, что $b^0 \leq b^*$.

Рассмотрим задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(\mu_{\hat{c}}(x), \mu(x)) \rightarrow \max, \\ x_{12} \leq a_2, \\ x_{23} \leq a_3, \\ x_{23} + x_{24} \leq x_{12}, \\ x_{34} \leq x_{23}, \\ x_{24} + x_{34} \geq b^0, \\ x_{ij} \geq 0, i=1,2,3; j=2,3,4. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Утверждение 2.1. План x^* является решением задачи (2.34).

Доказательство. Так как $A = \min(\mu_{\hat{c}}(x^*), \mu(x^*))$, то $\mu(x^*) \geq A$.

Если $\mu(x^*) = A$, то $\mu_{\hat{b}}(b^*) = \mu_{\hat{b}}(x_{24}^* + x_{34}^*) = \mu(x^*) = A$ и, значит, $b^0 = b^*$ (замечание 2.1), следовательно, задачи (2.33) и (2.34) совпадают и x^* является решением задачи (2.34).

Пусть $\mu(x^*) > A$, тогда $b^0 < b^*$ (см. замечание 2.1). В этом случае любой допустимый план задачи (2.33) является допустимым планом задачи (2.34) и оптимальное значение целевой функции задачи (2.34) не может стать меньше A , а больше A оно быть не может, так как A — оптимальное значение целевой функции задачи (2.32), т. е. x^* — оптимальный план задачи (2.34).

Для приближенного решения задачи (2.32) можно предложить следующий алгоритм.

Обозначим целевую функцию $\min(\mu_{\hat{c}}(x), \mu_{\hat{b}}(x))$ задачи (2.32) через $\mu_3(x)$.

Будем менять значение целевой функции с определенным шагом, равным $\varepsilon = \frac{1}{N}$, где N — число шагов.

На k -м шаге ($0 \leq k \leq N$) решаем задачу (2.31), в которой правая часть ограничения, равная b , заменена на b^k , где

$$\mu_b(b^k) = k\varepsilon.$$

Пусть оптимальное значение целевой функции построенной задачи равно C_k . Тогда значение целевой функции задачи (2.32) при правой части ограничения по потребности, равной b^k , равно

$$\min \left\{ 1 - \frac{C_k - Q(d)}{Q(h) - Q(d)}, k\varepsilon \right\}.$$

Из полученных $(N+1)$ результатов выбираем максимальный, это и будет приближенное решение задачи (2.32), которое и предлагается использовать в качестве решения задачи (2.31).

Вернемся к задаче о поставке труб. Необходимое их количество для поставки с учетом всех возможных непредвиденных обстоятельств запланировано в количестве 33 500 шт. Себестоимость доставки одной трубы из Челябинска до газопровода равна 232 204 руб.

Применим изложенный подход для решения сформулированной задачи по поиску варианта поставки труб для газопровода при исходных данных:

$$a_2 = 34\,000, a_3 = 20\,000, \hat{b} = \langle 29\,500, 32\,000, 33\,200 \rangle, c_{12} = 573\,16,5 \text{ руб.}, \\ c_{23} = 3\,100 \text{ руб.}, c_{24} = 146\,562,5 \text{ руб.}, c_{34} = 47\,187,5 \text{ руб.}$$

Результаты решения показывают, что, поставив 32 160 труб, мы обеспечим баланс между надежностью расходов и надежностью выполнения плана поставок труб.

2.12. Случай дефицита запасов

Рассмотрим задачу, связанную с обеспечением потребителей в случае, когда для полного их удовлетворения запросов запасов не хватает.

Имеется n потребителей однородных материальных средств, их потребности равны соответственно b_1, b_2, \dots, b_n . Планируется, что их снабжение должно производиться со складов A_1, A_2, \dots, A_m , с которых максимально можно получить требуемые материальные средства в размерах a_1, a_2, \dots, a_m соответственно. При этом суммарные возможности по отпуску материальных средств меньше суммарной потребности в них, т. е.

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j.$$

Требуется определить суммарные объемы поставок каждому потребителю с тем, чтобы все потребители были бы удовлетворены в максимальной степени, т. е. чтобы минимальная из степеней удовлетворенности была бы максимальна.

Будем предполагать, что потребности являются нечеткими и задаются с помощью нечетких величин \hat{b}_j , функции принадлежности которых мы, как и раньше, обозначим $\mu_{\hat{b}_j}(u)$, $j=1, 2, \dots, n$. Значения функций принадлежности будем трактовать как степень удовлетворенности соответствующего потребителя полученным объемом материальных средств в размере u .

Для решения сформулированной задачи рассмотрим задачу (2.22)–(2.25), в которой целевая функция несколько изменена, будем считать, что $\mu_{\hat{b}_j}(x) = 1$ для любого допустимого плана x . Решение этой задачи и будет являться решением сформулированной задачи. Подчеркнем, что в результате мы получим значения суммарных объемов поставок потребителям. Если нас интересует вариант доставки, требующий при полученных значениях суммарных объемов поставок минимальных расходов, то надо решить обычную транспортную задачу, в которой потребности потребителей равны полученным суммарным объемам поставок.

Пример 2.8. Снабжение трех потребителей осуществляется с двух складов. Возможности складов по отпуску материальных средств, потребности в этих средствах, расходы на доставку (рублей за тонну) указаны в таблице 2.10. Запасов для удовлетворения всех потребностей в полном объеме не хватает, но потребители согласны на некоторое уменьшение своих потребностей, поэтому потребности рассматриваются как нечеткие величины с заданными на универсальном множестве $[0, +\infty)$ функциями принадлежности (формулы (2.35)–(2.37), рис. 2.6–2.8). В центральной части таблицы 2.10 указаны расходы по доставке (рублей за тонну).

Определить:

1) суммарные объемы поставок со складов потребителям, при которых совместная потребность потребителей оказывается удовлетворенной в наибольшей степени;

Таблица 2.10. Исходные данные для примера 2.8

Склады	Потребители			Объем запасов, т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	25	37	19	100
A_2	14	24	12	200
Потребности, т	150	120	80	

2) план подвоза, обеспечивающий полученные суммарные объемы поставок и требующий при этом минимальных затрат.

$$\mu_{\tilde{b}_1}(x) = \begin{cases} \frac{x-120}{30}, & \text{если } x \in [120; 150], \\ 1, & \text{если } x > 150, \\ 0, & \text{если } x < 120. \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\mu_{\tilde{b}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x-110}{10}, & \text{если } x \in [110; 120], \\ 1, & \text{если } x > 120, \\ 0, & \text{если } x < 110. \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\mu_{b_3}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-60}{20}\right)^2, & \text{если } x \in [60; 80], \\ 1, & \text{если } x > 80, \\ 0, & \text{если } x < 60. \end{cases} \quad (2.37)$$

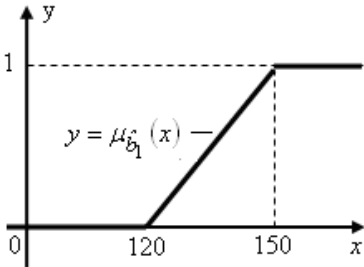


Рис. 2.6. Функция $\mu_{b_1}(x)$

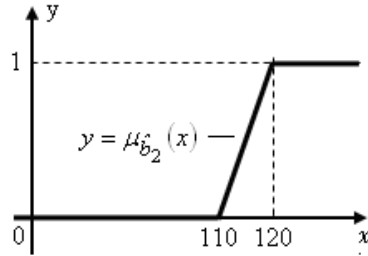


Рис. 2.7. Функция $\mu_{b_2}(x)$

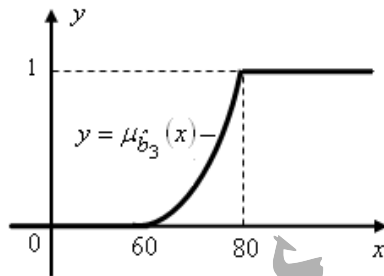


Рис. 2.8. Функция $\mu_{b_3}(x)$

Решение. Начнем с ответа на первый вопрос. Приближенно решать эту задачу можно, используя метод, примененный в примере 2.1. Но можно решить рассматриваемую задачу и точно.

Напомним, что значение функции принадлежности, задающее значение истинности высказывания «(степень удовлетворенности первого потребителя равна a), (степень удовлетворенности второго потребителя равна b) и (степень удовлетворенности третьего потребителя равна c)», равно минимальному из чисел a, b, c .

Заметим, что потребители в совокупности оказываются удовлетворены в максимальной степени, если удовлетворенность (надежность обеспеченности) каждого из них одинакова.

Действительно, пусть для определенности первый потребитель оказался удовлетворен в большей степени, чем два других. Если немного уменьшить степень его обеспеченности (но так, чтобы она оставалась больше степени обеспеченности остальных потребителей), а объемы поставок остальным потребителям не менять, то объем поставки первому потребителю уменьшится и, следовательно, на складах останутся невостребованные запасы. Эти запасы в некоторых долях можно направить второму и третьему потребителям, увеличив степень их удовлетворенности. В результате получаем план обеспечения, при котором потребители оказываются удовлетворенными в большей степени.

Будем искать максимальный общий уровень обеспеченности всех потребителей, обозначим его γ , а суммарные объемы поставок потребителям соответственно x_1, x_2, x_3 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \rightarrow \max, \\ \mu_{b_1}(x_1) = \gamma, \\ \mu_{b_2}(x_2) = \gamma, \\ \mu_{b_3}(x_3) = \gamma, \\ x_1 + x_2 + x_3 = a_1 + a_2, \\ 150 \geq x_1 \geq 120, 120 \geq x_2 \geq 110, 80 \geq x_3 \geq 60. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

С учетом формул (2.35)–(2.37) и исходных данных задача (2.38) преобразуется в задачу (2.39):

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \rightarrow \max, \\ \frac{x_1 - 120}{30} = \gamma, \\ \frac{x_2 - 110}{10} = \gamma, \\ \left(\frac{x_3 - 60}{20} \right)^2 = \gamma, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 100 + 200 = 300, \\ 150 \geq x_1 \geq 120, 120 \geq x_2 \geq 110, 80 \geq x_3 \geq 60. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Найдем допустимые планы задачи (2.39), для этого решим систему ее ограничений. Для начала выразим x_1, x_2, x_3 через γ :

$$x_1 = 30\gamma + 120,$$

$$x_2 = 10\gamma + 110,$$

$$x_3 = \pm 20\sqrt{\gamma} + 60.$$



Так как сумма всех поставок равна 300, то

$$30\gamma + 120 + 10\gamma + 110 \pm 20\sqrt{\gamma} + 60 = 300.$$

Решая получившуюся систему из четырех уравнений, находим, что единственное допустимое (оно же оптимальное) значение γ равно $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}$.

Это и есть решение задачи (2.39). Заметим, что это значение для γ получается в случае $x_3 = -20\sqrt{\gamma} + 60$. При этом значении γ находим, что

$$x_1 = \frac{525}{4} - \frac{15}{4}\sqrt{5},$$

$$x_2 = \frac{30}{8} + \frac{110}{8} - \frac{10}{8}\sqrt{5},$$

$$x_3 = -\frac{40}{8} + 60 + \frac{40}{8}\sqrt{5}.$$

Итак, мы получили ответ на первый вопрос.

Для ответа на второй вопрос надо решить транспортную задачу, в которой потребности равны полученным значениям. Исходные данные для этой транспортной задачи приведены в таблице 2.11.

Таблица 2.11. Условия транспортной задачи

Склады	Потребители			Объем запасов, т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	25	37	19	100
A_2	14	24	12	200
Потребности, т	$\frac{525}{4} - \frac{15}{4}\sqrt{5}$	$\frac{455}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{5}$	$\frac{220}{4} + \frac{20}{4}\sqrt{5}$	

Решая эту задачу методом потенциалов (см., например, [44], [50]), находим оптимальный план перевозок:

со склада A_1 потребителю B_1 надо доставить $\frac{180}{4} - \frac{20}{4}\sqrt{5}$ тонн груза,

со склада A_2 потребителю B_1 надо доставить $\frac{345}{4} + \frac{5}{4}\sqrt{5}$ тонн груза,

со склада A_2 потребителю B_2 надо доставить $\frac{455}{4} - \frac{5}{4}\sqrt{5}$ тонн груза,

со склада A_1 потребителю B_3 надо доставить $\frac{220}{4} + \frac{20}{4}\sqrt{5}$ тонн груза.

2.13. Задача о загрузке транспортного средства штучными грузами

Рассмотрим задачу о ранце. Речь о ней шла в п. 2.4. Но теперь мы будем предполагать, что полезности грузов заданы нечетко.

Итак, напомним «четкую» постановку задачи о ранце.

Имеются штучные грузы n видов — W_1, W_2, \dots, W_n . Известны вес и полезность (стоимость) штуки каждого груза: c_i — полезность штуки груза W_i , d_i — ее вес, $i = 1, 2, \dots, n$. Имеется транспортное средство грузоподъемностью D . Определить, сколько штук груза каждого типа надо погрузить на это средство, чтобы полезность взятых грузов была бы максимальна.

Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max, \quad (2.40)$$

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \leq D, \quad (2.41)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2.42)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ — целые числа.} \quad (2.43)$$

Здесь x_1, x_2, \dots, x_n — количество загружаемых штук груза соответствующего вида.

Мы в дальнейшем будем рассматривать эту задачу, изменяя в ней по мере надобности вектор $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ коэффициентов целевой функции — функции (2.40).

Так как мы исходим из того, что полезности грузов не заданы однозначно, то, как уже отмечалось, воспользуемся для их задания нечеткими множествами.

Пусть полезности грузов W_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в модели (2.40)–(2.43) являются нечеткими треугольными числами $\langle a_i, b_i, e_i \rangle$ («около b_i ») с функциями принадлежности, которые мы будем обозначать $\mu_i(u)$. Сами эти нечеткие числа будем обозначать символом \hat{c}_i .

Свяжем с нечетким числом \hat{c}_i нечеткое высказывание $\tilde{C}_i(u)$ («значением нечеткого числа \hat{c}_i является u »). При этом естественно полагать, что истинность этого высказывания равна нашей уверенности в том, что u есть приближенное значение этого нечеткого числа, т. е. равна $\mu_i(u)$.

Замечание 2.2. Пусть $\hat{f} = \langle a, b, e \rangle$, ($a < b < e$) — некоторое нечеткое число и v — некоторое число из интервала $(0; 1)$. В силу равенства (1.3) этому числу соответствуют два таких значения v_1 и v_2 , что $\mu_{\hat{f}}(v_1) = \mu_{\hat{f}}(v_2) = v$. Одно из них, пусть для определенности это v_1 , лежит в пределах от a до b , тогда v_2 лежит в пределах от b до e , следовательно, $v_1 < v_2$. Если $v = 1$, то $v_1 = v_2 = b$.

Рассмотрим универсальное множество X — множество допустимых планов задачи (2.40)–(2.43) и Y — универсальное множество наборов значений полезностей грузов (векторов $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — коэффициентов целевой функции задачи (2.40)–(2.43)). Зададим на прямом произведении указанных универсальных множеств нечеткое множество \hat{D} решений задачи с функцией принадлежности $\mu_{\hat{D}}(x, c)$. Значение этой функции выражает степень нашей уверенности в том, что вектором полезностей грузов будет вектор $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, а план загрузки x_1, x_2, \dots, x_n эффективен.

Введем обозначение:

$$\mu(c) = \min\{\mu_1(c_1), \mu_2(c_2), \dots, \mu_n(c_n)\}.$$

Обозначим через $X_{\text{эф}}^\alpha$ нечеткое множество «максимальная эффективность при таких векторах полезностей c , что $\mu(c) = \alpha$ ». Его функция принадлежности $\mu_{\text{эф}}^\alpha(x)$ характеризует степень нашей уверенности в эффективности плана $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ при самом хорошем векторе полезностей из числа векторов $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, для которых $\mu(c) = \alpha$ т. е. близости в указанном смысле этого плана к оптимальному плану $x^{\text{опт}}$ задачи (2.40)–(2.43) в случае, когда полезности грузов максимальны (равны e_i , $i = 1, 2, \dots, n$).

Близость плана x к плану $x^{\text{опт}}$ будем характеризовать величиной

$$S^\alpha(x) = \max_{c: \mu(c)=\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\}.$$

Через $c(\alpha, x)$ обозначим такой вектор полезностей $(c_1(\alpha, x_1), c_2(\alpha, x_2), \dots, c_n(\alpha, x_n))$, что

$$\max_{c: \mu(c)=\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\} = \sum_{i=1}^n c_i(\alpha, x) x_i.$$

Но поскольку $S^\alpha(x)$ может оказаться больше единицы, то будем использовать, например, нормированную функцию, т. е. будем считать, что

$$\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha, x)}(x) = \frac{S^\alpha(x)}{S_{\text{опт}}}.$$

Здесь $S_{\text{опт}}$ — оптимальное значение целевой функции задачи (2.40)–(2.43) в случае, когда полезности грузов W_i максимальны, т. е. равны e_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

С учетом сказанного и, следуя идеям Заде и Беллмана [9], [34], [59], получаем, что

$$\mu_{\text{эф}}(x, c(\alpha, x)) = \min\left\{\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha, x)}(x), \mu_1(c_1(\alpha, x_1)), \dots, \mu_n(c_n(\alpha, x_n))\right\},$$

где (см. формулу (1.3)):

$$\mu_i(c_i(\alpha, x_i)) = \begin{cases} \frac{c_i(\alpha, x_i) - a_i}{b_i - a_i}, & \text{если } c_i(\alpha, x_i) \in [a_i; b_i], \\ \frac{c_i(\alpha, x_i) - e_i}{b_i - e_i}, & \text{если } c_i(\alpha, x_i) \in [b_i; e_i], \quad i=1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Решением задачи (2.40)–(2.43) с нечеткими полезностями будем считать план, для которого степень его принадлежности нечеткому множеству решений (нечеткому множеству \hat{D}) максимальна, т. е. решением задачи (2.40)–(2.43) с нечеткими полезностями будем считать решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \mu_{\hat{D}}(x, c(\alpha, x)) \rightarrow \max, \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_n x_n \leq D, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 - \text{целые числа,} \end{cases} \quad (2.44)$$

здесь $\mu_{\hat{D}}(x, c(\alpha, x)) = \min \left\{ \mu_{\text{эф}}^{c(\alpha, x)}(x), \mu_1(c_1(\alpha, x_1)), \dots, \mu_n(c_n(\alpha, x_n)) \right\}$.

2.14. Об одном свойстве оптимального плана задачи (2.44)

Пусть (x^*, c^*) — оптимальный план задачи (2.44) и

$$E = \mu_{\hat{D}}(x^*, c^*) = \min \left\{ \mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*), \mu_1(c_1^*(\alpha^*, x_1^*)), \dots, \mu_n(c_n^*(\alpha^*, x_n^*)) \right\},$$

здесь $\alpha^* = \mu(c^*)$ и

$$\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) = \frac{\max_{c: \mu(c) = \alpha^*} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i^* \right\}}{S_{\text{опт}}} = \sum_{i=1}^n c_i^* x_i^*.$$

Тогда

$$E = \min \left\{ \mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*), \mu(c^*) \right\}.$$

Рассмотрим три возможности:

$$1) \mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) = \mu(c^*);$$

$$2) \mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) < \mu(c^*);$$

$$3) \mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) > \mu(c^*).$$

Пусть $\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) = \mu(c^*) = E$, значит, $\alpha^* = E$.

Так как

$$\mu(c^*) = \min\{\mu_1(c_1^*), \mu_2(c_2^*), \dots, \mu_n(c_n^*)\},$$

то существует такой номер i_0 , что

$$\mu_{i_0}(c_{i_0}^*) = \mu(c^*) = E.$$

Определим значения полезностей, для которых значение их функций принадлежности равно $\mu_{i_0}(c_{i_0}^*)$. Если этому значению соответствуют два значения полезности некоторого груза (см. замечание 2.2), то выберем из них большее. Получившийся вектор полезностей обозначим $c' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$.

$$\mu_i(c'_i) = E \text{ для любого } i \text{ и } \mu(c') = E.$$

Полезности c'_i не меньше полезностей c_i^* при любом i . Пусть $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ — оптимальный план задачи (2.40)–(2.43) при векторе полезностей c' .

Если $c'_i = c_i^*$ для любого i , то $x' = x^*$.

Пусть существует такой номер k , что $c'_k > c_k^*$, тогда

$$\sum_{i=1}^n c'_i x'_i \geq \sum_{i=1}^n c'_i x_i^* > \sum_{i=1}^n c_i^* x_i^*$$

и

$$\frac{\sum_{i=1}^n c'_i x_i^*}{S_{\text{опт}}} > \frac{\sum_{i=1}^n c_i^* x_i^*}{S_{\text{опт}}} = E,$$

а это противоречит тому, что

$$\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) = \frac{\max_{c: \mu(c) = \alpha^*} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i^* \right\}}{S_{\text{опт}}}.$$

Полученное противоречие свидетельствует о том, что $c'_i = c_i^*$ для любого i . Следовательно, в случае, когда $\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) = \mu(c^*)$, полезности всех грузов в оптимальном плане задачи (2.44) одинаковые.

Пусть $E = \mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) < \mu(c^*)$.



Как и в предыдущем случае, вместо вектора полезностей c^* рассмотрим вектор $c' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$, для которого $\mu_i(c'_i) = E$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Полезности c'_i больше полезностей c_i^* при любом i , тогда

$$\sum_{i=1}^n c'_i x_i^* > \sum_{i=1}^n c_i^* x_i^*.$$



Что вновь противоречит тому, что

$$\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) = \frac{\max_{c: \mu(c) = \alpha^*} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i^* \right\}}{S_{\text{опт}}}.$$

Следовательно, этот случай невозможен.

Пусть $\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) > \mu(c^*)$.

Найдем оценку для максимального суммарного числа штук загружаемых грузов:

$$D \geq \sum_{i=1}^n d_i x_i \geq \left(\min_{1 \leq j \leq n} d_j \right) \cdot \sum_{i=1}^n x_i,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{D}{\min_{1 \leq j \leq n} d_j} = f \cdot \text{ЛАНЬ}^{\circledR}$$

Возьмем

$$\delta < \frac{\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) - E}{f} S_{\text{опт}},$$

очевидно, что $\delta > 0$.

Рассмотрим вектор значений функций принадлежности, все координаты которого равны E . Увеличим значения всех координат этого вектора на ε и построим вектор полезностей $c^\varepsilon = (c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon, \dots, c_n^\varepsilon)$, все координаты которого имеют надежность, равную $E + \varepsilon$. При этом из возможных значений каждой координаты возьмем большее (см. замечание 2.2).

Пусть $c_i^\varepsilon = c_i^* - \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. В силу непрерывности функций принадлежности $\mu_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, n$, существует такое ε , что $\delta_i \leq \delta$ для любого i .

Решим задачу (2.40)–(2.43) для случая, когда полезности грузов равны $c^\varepsilon = (c_1^\varepsilon, c_2^\varepsilon, \dots, c_n^\varepsilon)$. Пусть $x^\varepsilon = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, \dots, x_n^\varepsilon)$ — решение этой задачи. Очевидно, что

$$\mu(c^\varepsilon) = E + \varepsilon,$$

покажем, что $\mu_{\text{эф}}(x^\varepsilon) > E$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{эф}}^{c(E+\varepsilon, x^\varepsilon)}(x^\varepsilon) &= \frac{\sum_{i=1}^n c_i^\varepsilon x_i^\varepsilon}{S_{\text{опт}}} \geq \frac{\sum_{i=1}^n c_i^\varepsilon x_i^*}{S_{\text{опт}}} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i^* x_i^*}{S_{\text{опт}}} - \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i x_i^*}{S_{\text{опт}}} \geq \\ &\geq \frac{\sum_{i=1}^n c_i^* x_i^*}{S_{\text{опт}}} - \frac{f \cdot \delta}{S_{\text{опт}}} \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i^* - \frac{\mu_{\text{эф}}^{c(\alpha^*, x^*)}(x^*) - E}{S_{\text{опт}}} \cdot f}{S_{\text{опт}}} = \mu_{\text{эф}}(x^*) > E.$$

Следовательно,

$$\mu_D(x^\varepsilon, c(E + \varepsilon, x^\varepsilon)) = \min\{\mu_{\text{эф}}^{c(E+\varepsilon, x^\varepsilon)}(x^\varepsilon), \mu(c^\varepsilon)\} > E$$

и план x^* не является оптимальным, что противоречит нашему предположению. Значит, рассматриваемый случай невозможен, и остается только один первый. А в первом случае полезности всех грузов в оптимальном плане задачи (2.44) одинаковые.

Из проделанных рассуждений видно, что в оптимальном плане задачи (2.44) вектор значений функций принадлежности полезностей грузов имеет равные координаты. Предлагаемый далее алгоритм позволяет отыскать именно такой вектор полезностей и оптимальный план соответствующей ему задачи (2.44). В соответствии с подходом Р. Беллмана и Л. Заде, упомянутым ранее, этот план является оптимальным планом задачи (2.40)–(2.43).

2.15. Алгоритм решения задачи

Наличие указанного в конце предыдущего раздела плана позволяет нам построить эффективный алгоритм для приближенного решения указанной задачи.

Решается последовательность задач с разными уровнями надежности полезности грузов. Эти уровни изменяются с шагом h . Для определения величины шага, задавшись допустимой величиной погрешности ε , находим число шагов M , полагая M равным целой части числа $\frac{1}{\varepsilon} + 1$. Величина шага h

равна $\frac{1}{M}$.

При решении k -й ($k = 1, 2, \dots, M$) задачи из указанной последовательности задач уровень надежности полезностей грузов полагаем равным kh . Находим

такие значения полезностей грузов, надежность которых равна kh , т. е. находим такие c_i , $i=1,2,\dots,n$, что

$$\mu_i(c_i) = kh, \quad i=0,1,2,\dots,n. \quad (2.45)$$

Решаем с этими полезностями задачу о ранце (2.40)–(2.43), находим уровень нашей удовлетворенности (уровень надежности отклонения полученной суммарной полезности от максимальной). Определяем значение целевой функции (минимум из всех надежностей) задачи (2.44). Из полученных $(M+1)$ -го значения выбираем наилучшее (максимальное). Объемы загрузки (значения неизвестных x_i), при которых получено это максимальное значение, и есть оптимальный план задачи (2.40)–(2.43) с нечеткими полезностями.

2.16. Пример загрузки самолета

Требуется загрузить самолет грузоподъемностью 40 тонн контейнерами. Контейнеры разного типа имеют разный вес и различную ценность (полезность) для лица, принимающего решение (см. табл. 2.12). Определить, сколько контейнеров каждого типа надо погрузить в этот самолет, чтобы суммарная полезность взятых контейнеров была бы максимальной (число контейнеров каждого типа на складе не ограничено). Предполагается, что полезности контейнеров определены нечетко и задаются нечеткими треугольными числами $\langle a_i, b_i, e_i \rangle$.

Таблица 2.12. Исходные данные для загрузки самолета

Тип контейнера (K_i)	a_i , усл. ед.	b_i , усл. ед.	e_i , усл. ед.	Вес контейнера, т
K_1	4	5	6	4
K_2	8	10	11	7
K_3	11	13	15	10
K_4	13	16	18	12
K_5	17	20	24	15

Решение. Результаты вычислений приведены в таблице 2.13. Вычисления производились с шагом $h = 0,1$.

Напомним, что при заданном значении функции принадлежности (кроме значения единица) полезность i -го груза принимает два значения: меньше и больше b_i .

Пусть план X является оптимальным вариантом загрузки при некоторых полезностях, имеющих заданную надежность, и пусть степень уверенности в его экономической эффективности при этих полезностях равна P . Степень уверенности в эффективности этого варианта при больших b_i значениях полезностей (но значениях полезностей с теми же значениями функции принадлежности) будет не меньше P . Поэтому из двух возможных значений полезности при заданной надежности мы ориентируемся на большее значение.

Таблица 2.13. Результаты промежуточных расчетов для примера с загрузкой самолета

Надежность значения полезности	Полезность контейнера типа					Максим. суммарная полезность	Степень эффективности
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5		
0	6	10,9	15	18	24	63,0	1,000
0,1	5,9	10,9	14,8	17,8	23,6	62,2	0,987
0,2	5,8	10,8	14,6	17,6	23,2	61,4	0,975
0,3	5,7	10,7	14,4	17,4	22,8	60,9	0,967
0,4	5,6	10,6	14,2	17,2	22,4	59,8	0,949
0,5	5,5	10,5	14,0	17,0	22,0	59,0	0,936
0,6	5,4	10,4	13,8	16,8	21,6	58,4	0,927
0,7	5,3	10,3	13,6	16,6	21,2	57,8	0,917
0,8	5,2	10,2	13,4	16,4	20,8	57,2	0,908
0,9	5,1	10,1	13,2	16,2	20,4	56,6	0,898
1,0	5,0	10,0	13,0	16,0	20,0	56,0	0,889

Анализ таблицы 2.13 показывает, что оптимальное значение степени надежности полезности грузов и степени эффективности равно примерно 0,9. Это достигается при значениях полезности, указанных в предпоследней строке таблицы 2.13. При этом оптимальный план загрузки следующий: погрузить 4 единицы груза K_2 и одну единицу груза K_4 .

Замечание 2.3. При заполнении 7-й графы таблицы решались задачи о ранце с соответствующими значениями полезности. Решение было осуществлено методом полного перебора всех допустимых планов. Для решения такой задачи можно использовать динамическое программирование [43].

2.17. Нечеткие множества в теории управления запасами

Рассмотрим детерминированную динамическую модель с дефицитом [45], [51]. Будем предполагать, что весь интервал снабжения θ разбит на n равных частей, длина каждого из которых равна $\frac{\theta}{n}$, обозначать i -й интервал ($i=1,2,\dots,n$) будем $[t_i, t_{i+1})$.

Интервал $[t_i, t_{i+1})$, $i=1,2,\dots,n$, образует один цикл снабжения, т. е. к моменту времени t_i запасы ресурсов снабжения закончились и накопился дефицит в размере d_i , в этот момент осуществляется поставка объемом x_i . На интервале $[t_i, t_{i+1})$ до момента, пока на складе системы снабжения имеются запасы, осуществляется удовлетворение поступающего спроса. После того как запасы закончились, происходит накопление дефицита и в момент t_{i+1} осуществляется очередная поставка объемом x_{i+1} и т. д. Накопившийся дефицит (его объем равен d_{i+1}) полностью удовлетворяется выплатой штрафа.

Пусть объем спроса на интервале $[t_i, t_{i+1})$ равен q_i , тогда объем поставки x_i должен равняться $q_i - d_i$, т. е.

$$x_i = q_i - d_i \text{ и } q_i = x_i + d_i.$$

Определить вариант снабжения, при котором суммарные расходы минимальны.

Рассмотрим некоторый план снабжения. Так как он должен содержать информацию о спросе на каждом интервале и о размере поставки на каждом из них, то обозначать его будем

$$(x, q) = (x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_n).$$

На интервале $[t_i, t_{i+1})$ при плане снабжения (x, q) система снабжения несет расходы $L_i(x_i, q_i)$, которые состоят из расходов на поставку $K_i(x_i)$, расходов на хранение $S_i(x_i, q_i)$ и расходов на оплату штрафов $P_i(x_i, q_i)$.

Таким образом,

$$L_i(x_i, q_i) = K_i(x_i) + S_i(x_i, q_i) + P_i(x_i, q_i).$$

Суммарные по всем интервалам расходы, связанные с указанным планом, обозначим $L(x, q)$:

$$L(x, q) = \sum_{i=1}^n L_i(x_i, q_i).$$

С учетом всего сказанного получаем следующую математическую модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} L(x, q) \rightarrow \min, \\ L(x, q) = \sum_{i=1}^n K_i(x_i) + S_i(x_i, q_i) + P_i(x_i, q_i), \\ q_i = f(t_i, t_{i+1}), \\ t_i = \frac{\theta}{n}(i-1), \\ n > 0, \text{ целое}, \\ q_i \geq x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Здесь функция $f(t_i, t_{i+1})$ и функции $K_i(x_i)$, $S_i(x_i, q_i)$, $P_i(x_i, q_i)$ заданы при $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть спрос определен нечетко, т. е. объем спроса q_i на интервале $[t_i, t_{i+1})$ есть нечеткое число с функцией принадлежности $\mu_i(u)$ (рис. 2.9):

$$\mu_i(u) = \begin{cases} f_i(u), & \text{если } a_i \leq u \leq b_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

при этом при любых допустимых i функции $f_i(u)$ возрастающие.

Аппроксимируя функцию $f_i(u)$ линейной функцией, будем считать, что объем спроса q_i на интервале $[t_i, t_{i+1})$ есть нечеткая величина $\langle a_i, b_i, b_i \rangle$ с функцией принадлежности

$$\mu_i(u) = \begin{cases} \frac{u - a_i}{b_i - a_i}, & \text{если } a_i \leq u \leq b_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

заданной на универсальном множестве $[0; +\infty)$ (рис. 2.10).

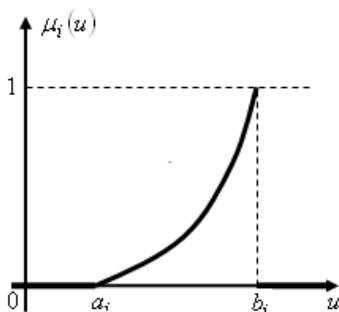


Рис. 2.9. График функции принадлежности спроса на i -м интервале

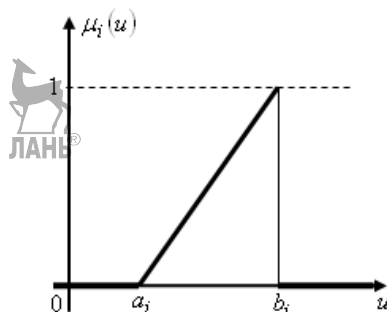


Рис. 2.10. График функции принадлежности треугольного числа $\langle a_i, b_i, b_i \rangle$

Для дальнейшего изложения нам потребуются следующие обозначения:

$x_i(q_i)$ — объем поставки, при котором расходы $L_i(x_i, q_i)$ минимальны;

$$L_i(x_i(q_i), q_i) = \min_{0 \leq x_i \leq q_i} \{K_i(x_i) + S_i(x_i, q_i) + P_i(x_i, q_i)\};$$

L_i^{min} — минимальные расходы на i -м интервале в случае, когда спрос на нем минимален, т. е. равен a_i ;

L^{min} — минимальные расходы по снабжению при минимальном спросе на каждом интервале:

$$L^{min} = \sum_{i=1}^n L_i(x_i(a_i), a_i);$$

L_i^{max} — максимальные расходы на i -м интервале в случае, когда спрос на нем максимален, т. е. равен b_i ;

L^{max} — максимальные расходы по снабжению при максимальном спросе на каждом интервале:

$$L^{max} = \sum_{i=1}^n L_i(x_i(b_i), b_i).$$

Степень уверенности в том, что предлагаемый вариант (x, q) организации снабжения эффективен, будем характеризовать соответствующим значением функции принадлежности нечеткой величины \hat{C}_{Π} — «расходы почти минимальны», описывающей нашу цель.

Чем больше разность $\sum_{i=1}^n L_i(x_i, q_i) - L^{\min}$ между затратами, связанными с вариантом (x, q) и минимальными затратами L^{\min} , тем меньше мы уверены в том, что план (x, q) экономически эффективен.

Будем исходить из того, что \hat{C}_{Π} есть нечеткая величина $\langle L^{\min}, L^{\min}, L^{\max} \rangle$ с функцией принадлежности $\mu_{\Pi}(u)$ (рис. 2.11), заданной на множестве $[0; +\infty)$. Для плана (x, q) значение u определяется формулой: $u = L(x, q)$, тогда

$$\mu_{\Pi}(u) = \begin{cases} \frac{L^{\max} - u}{L^{\max} - L^{\min}}, & \text{если } u \in [L^{\min}; L^{\max}] \\ 1, & \text{если } u \leq L^{\min} \\ 0, & \text{если } u \geq L^{\max} \end{cases}$$

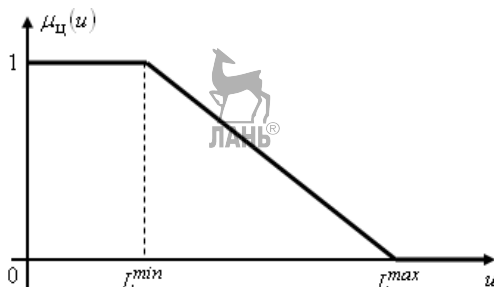


Рис. 2.11. График функции принадлежности показателя эффективности

Пусть $q_i \in [a_i, b_i]$, тогда наша уверенность в том, что на i -м интервале снабжения суммарный спрос будет равен q_i , равна $\mu_i(q_i)$. Таким образом, наша уверенность в том, что суммарный спрос по всем интервалам будет равен вектору $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, равна

$$\mu(q) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(q_i).$$

Это следует из определения конъюнкции, так как высказывание «спрос по интервалам равен q_1, q_2, \dots, q_n » эквивалентно следующей конъюнкции высказываний: «спрос на первом интервале равен q_1 » И «спрос на втором интервале равен q_2 » И ... И «спрос на n -м интервале равен q_n ».

Решением задачи (2.46) при нечетком спросе будем считать [9] план снабжения, при котором степень уверенности в том, что он эффективен по затратам и уровню обеспечения спроса (значение функции принадлежности плана нечеткому множеству «решение задачи»), максимальна.

Функцию принадлежности нечеткого множества «решение задачи» будем обозначать как

$$\mu_{\text{реш}}(x, q).$$

Из свойств операций над нечеткими множествами следует, что

$$\mu_{\text{реш}}(x, q) = \min \left\{ \mu(q), \mu_{\Pi} \left(\sum_{i=1}^n L_i(x_i, q_i) \right) \right\}.$$

В качестве решения рассматриваемой задачи предлагается использовать [9] такой план снабжения (x, q) , при котором функция $\mu_{\text{реш}}(x, q)$ принимает максимальное значение, т. е. который является решением задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\text{реш}}(x, q) \rightarrow \max, \\ L(x, q) = \sum_{i=1}^n K_i(x_i) + S_i(x_i, q_i) + P_i(x_i, q_i), \\ q_i = f(t_i, t_{i+1}), \\ t_i = \frac{Q}{n}(i-1), \\ n > 0, \text{ целое}, \\ q_i \geq x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.47)$$

2.18. Об одном свойстве оптимального плана задачи

Пусть (x^*, q^*) — оптимальный план задачи (2.47) и $\mu_{\text{реш}}(x^*, q^*) = E$.

Утверждение 2.2. Если вектор потребностей $q' = (q'_1, q'_2, \dots, q'_n)$ таков, что $\mu_i(q'_i) = E$, и x' — вектор оптимальных размеров поставок при векторе потребностей q' , то $\mu_{\text{реш}}(x, q) = E$.

Справедливость этого утверждения следует из того, что для любого i имеет место неравенство:

$$q'_i \leq q_i^*.$$

Но при уменьшении спроса оптимальные расходы по снабжению уменьшаются (во всяком случае, не увеличиваются) и, значит, экономическая эффективность оптимального решения не может ухудшиться, т. е. величина

$$\mu_{\text{ц}}\left(\sum_{i=1}^n L_i(x'_i, q'_i)\right)$$

не может стать меньше E . Следовательно, (x'_i, q'_i) — тоже оптимальный план задачи (2.47).

2.19. Алгоритм и пример решения задачи

Важным для дальнейшего изложения свойством плана x' , о котором шла речь в утверждении 2.2, является то, что надежности спроса на всех интервалах одинаковы, а это позволяет строить достаточно простой алгоритм приближенного решения задачи (2.47), аналогичный алгоритму из п. 2.15.

Решается последовательность задач с объемами спроса, значения функций принадлежности которых изменяются с фиксированным шагом h . Для определения величины шага, задавшись допустимой величиной погрешности ε ,

находим число шагов M , полагая M равным целой части числа $\frac{1}{\varepsilon} + 1$. Величина

шага h равна $\frac{1}{M}$.

При решении k -й ($k=0,1,2,\dots,M$) задачи из указанной последовательности задач значения функций принадлежности спроса на каждом временном интервале $[t_i, t_{i+1})$ полагаем равными kh . Находим такие значения спроса на

каждом временном интервале, для которых значения функций принадлежности спроса равны kh , т. е. находим такие $q_i, i = 1, 2, \dots, n$, что

$$\mu_i(q_i) = kh, i = 1, 2, \dots, n.$$

Решаем с этими значениями спроса задачу (2.46), находим суммарные затраты по снабжению, связанные с этим вариантом значений спроса, и определяем уровень нашей удовлетворенности (значение функции $\mu_{ц}$). Определяем значение целевой функции $\mu_{реш}$ (минимум из всех надежностей) задачи (2.47). Из полученных $M + 1$ значений выбираем наилучшее (максимальное). Объемы спроса и дефицита, при которых получено это максимальное значение, и есть оптимальный план рассматриваемой задачи — задачи (2.46) с нечетким спросом.

Пример 2.9. Снабжение ресурсами осуществляется в течение трех циклов, т. е. $n = 3, i = 1, 2, 3$. Продолжительность каждого временного интервала $[t_i, t_{i+1})$ (цикла) одинакова и составляет один месяц (30 сут). Спрос на каждом интервале снабжения постоянный с нечеткой интенсивностью, следовательно, его суммарная величина на интервале снабжения нечеткая, она описывается нечеткой величиной $\langle a_i; b_i; b_i \rangle$. Значения чисел a_i и b_i указаны в таблице 2.14.

Таблица 2.14. Данные о нечетких величинах, описывающих спрос

	Номер периода снабжения (i)		
	1	2	3
a_i	100	150	80
b_i	120	200	110

Объемы спроса, поставок, дефицита измеряются в тоннах, расходы — в тысячах рублей, время — в сутках.

Расходы на поставку пропорциональны ее объему и определяются по формуле (2.48):

$$K_i(x_i) = 5 \cdot x_i, i = 1, 2, 3. \quad (2.48)$$

Расходы на хранение пропорциональны объему запаса и времени хранения и составляют 0,1 тыс. руб. в сутки. Расходы на хранение на одном интервале снабжения определяются по формуле (2.49):

$$S_i(x_i, d_i) = 0,5 \cdot x_i \cdot (30 - t_i^{\text{деф}}) \cdot 0,1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.49)$$

Здесь $t_i^{\text{деф}}$ (сут) — продолжительность наличия дефицита в течение i -го цикла снабжения, тогда $30 - t_i^{\text{деф}}$ (сут) — продолжительность бездефицитной работы в ходе этого цикла.

Расходы на штраф за дефицит пропорциональны объему дефицита и времени его наличия и составляют 0,5 тыс. руб. в сутки. Расходы на хранение на i -м интервале снабжения определяются по формуле (2.50):

$$P_i(x_i, d_i) = 0,5 \cdot d_i \cdot t_i^{\text{деф}} \cdot 0,5, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.50)$$

Определить объемы поставок, при которых надежность обеспечения потребностей и экономической эффективности максимальна.

Решение. Будем менять значения функций принадлежности с шагом 0,1, т. е. $h = 0,1$. Результаты вычислений сведены в таблицу 2.15.

Таблица 2.15. Промежуточные результаты для примера 2.9

Значения функции $\mu_i(q_i)$	Объем спроса по периодам			Минимум суммарных затрат	Значение функции μ_{Π}
	q_1	q_2	q_{3i}		
1	2	3	4	5	6
0	100	150	80	1558,33	1,00
0,1	102	155	83	1605,55	0,90
0,2	104	160	86	1652,77	0,80
0,3	106	165	89	1700,00	0,70
0,4	108	170	92	1747,22	0,60
0,5	110	175	95	1794,44	0,50
0,6	112	180	98	1841,67	0,40
0,7	114	185	101	1888,88	0,30
0,8	116	190	104	1936,11	0,20
0,9	118	195	106	1978,60	0,11
1,0	120	200	110	2030,55	0,00

Так как спрос постоянный, то

$$t_i^{\text{деф}} = \frac{q_i - x_i}{q_i} \cdot 30, \quad i=1,2,3.$$

Тогда суммарные расходы на i -м ($i=1,2,3$) интервале равны

$$\begin{aligned} L_i(x_i, q_i) &= 5 \cdot x_i + 0,5 \cdot x_i \cdot (30 - t_i^{\text{деф}}) \cdot 0,1 + 0,5 \cdot (q_i - x_i) \cdot t_i^{\text{деф}} \cdot 0,5 = \\ &= 6,5 \cdot x_i - 0,05 \cdot x_i \cdot t_i^{\text{деф}} + 0,25 \cdot (q_i - x_i) \cdot t_i^{\text{деф}} = \\ &= 6,5 \cdot x_i - 0,05 \cdot x_i \cdot \frac{q_i - x_i}{q_i} \cdot 30 + 0,25 \cdot \frac{(q_i - x_i)^2}{q_i} \cdot 30. \end{aligned}$$

Для отыскания минимума этой функции при заданном спросе (при заданном q_i) вычислим ее производную:

$$(L_i(x_i, q_i))'_{x_i} = 5 + \frac{3}{q_i} \cdot x_i - \frac{15}{q_i} \cdot (q_i - x_i).$$

Решая уравнение

$$5 + \frac{3}{q_i} \cdot x_i - \frac{15}{q_i} \cdot (q_i - x_i) = 0,$$

находим точку экстремума функции $L_i(x_i, q_i)$ (оптимальный объем поставки при размере спроса, равном q_i):

$$x_i = \frac{10}{18} \cdot q_i, \quad (2.51)$$

оптимальный размер дефицита тогда равен

$$\bar{d}_i = q_i - \bar{x}_i = \frac{8}{18} \cdot q_i \quad (2.52)$$

Минимальные расходы при спросе q_i равны

$$L_i(\bar{x}_i, q_i) = 5 \cdot \bar{x}_i + 1,5 \cdot \frac{(\bar{x}_i)^2}{q_i} + \frac{7,5}{q_i} \cdot (q_i - \bar{x}_i)^2. \quad (2.53)$$

При заполнении пятой графы таблицы 2.15 по формуле (2.53) вычислены значения минимальных затрат для каждого из трех циклов снабжения, их сумма и указана в соответствующей строке этой графы.

Заполнение шестой графы осуществлено по формуле

$$\mu_{ц} = \frac{L^{max} - u}{L^{max} - L^{min}},$$

где u — число из соответствующей строки пятой графы; L^{max} — минимальные расходы по снабжению при максимальном спросе на каждом интервале, это число указано в последней строке пятой графы; L^{min} — минимальные расходы по снабжению при минимальном спросе на каждом интервале, число указано в верхней строке пятой графы таблицы.

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 2.4. Этот пример можно было, конечно, решить проще. Для этого достаточно в формулу (2.53) подставить выражение для \bar{x}_i из (2.51). Оказывается, что минимальные расходы на одном цикле снабжения, а значит, на всем интервале снабжения θ , линейно зависят от спроса, а это сразу дает ответ: максимальное значение функции принадлежности нечеткого множества «решение задачи», т. е. функции $\mu_{реш}(x, q)$, равно 0.5.

Замечание 2.5. Мы рассмотрели задачу с заданным и равным n числом интервалов. Если число интервалов не задано, то можно решить рассмотренную задачу с разными n и выбрать наилучший результат.

2.20. Задача по определению необходимого числа запасных деталей

Рассмотрим задачу о необходимом числе запасных деталей. Например, о том, сколько запасных автомобильных свечей для грузовых автомобилей необходимо иметь в автохозяйстве из расчета на год.

Необходимое число запасных деталей будем считать лингвистической переменной, например, с терминами — «очень много», «много», «нормально», «немного», «мало».

Будем исходить из того, что каждый терм определяется нечетким треугольным числом (заметим, что здесь можно использовать и более сложные

конструкции). Например, терму «нормально» может соответствовать нечеткое число $\langle 15, 20, 27 \rangle$ и т. д., график функции принадлежности такого термина «нормально» имеет вид, изображенный на рисунке 2.12.

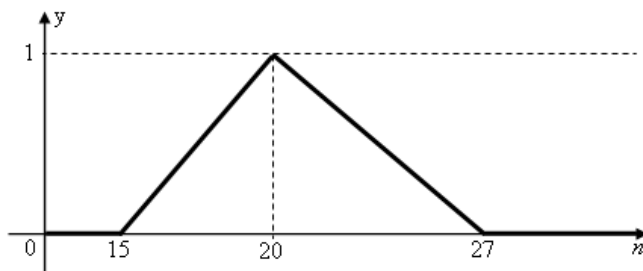


Рис. 2.12. График функции принадлежности термина «нормально»

Найти необходимое число запасных деталей.

Для решения сформулированной задачи предлагается следующий подход.

1. Для каждого термина находим «среднее» число отказов. Например, пусть терм «нормально» является нечетким множеством

$$N_{nor} = 0/14 + 0,1/15 + 0,3/16 + 0,4/17 + 0,8/18 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 0,9/23 + 0,7/24 + 0,5/25 + 0,3/26 + 0,2/27 + 0/28.$$

Дефаззификация этого нечеткого множества по методу центра тяжести дает значение, которое мы обозначили a_c :

$$a_c = \frac{0 \cdot 14 + 0,1 \cdot 15 + 0,3 \cdot 16 + 0,4 \cdot 17 + 0,8 \cdot 18 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 21 + 1 \cdot 22}{0 + 0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,8 + 1 + 1 + 1 + 0,9 + 0,7 + 0,5 + 0,3 + 0,2 + 0} + \frac{0,9 \cdot 23 + 0,7 \cdot 24 + 0,5 \cdot 25 + 0,3 \cdot 26 + 0,2 \cdot 27 + 0 \cdot 28}{0 + 0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,8 + 1 + 1 + 1 + 0,9 + 0,7 + 0,5 + 0,3 + 0,2 + 0} = 21,3.$$

Аналогично для остальных терминов получаем обычные четкие числа, которые мы обозначим соответственно a_a, a_b, a_d, a_e .

2. Рассмотрим универсальное множество, элементами которого являются термы лингвистической переменной «число запасных деталей», т. е. термы «очень много», «много», «нормально», «немного», «мало». Тогда нечеткое множество $N_{отк}$ («число отказов») имеет вид:

$$a/\langle \text{мало} \rangle + b/\langle \text{немного} \rangle + c/\langle \text{нормально} \rangle + d/\langle \text{много} \rangle + e/\langle \text{очень много} \rangle = a/a_a + b/a_b + c/a_c + d/a_d + e/a_e.$$

Здесь a, b, c, d, e — степени истинности нечетких высказываний вида « a является элементом нечеткого множества $N_{\text{отк}}$ ».

Используя результаты дефаззификации термов (пункт 1), осуществим методом центра тяжести дефаззификацию лингвистической переменной «число отказов», получим, что необходимое число запасных деталей равно

$$N = \frac{a \cdot a_a + b \cdot a_b + c \cdot a_c + d \cdot a_d + e \cdot a_e}{a + b + c + d + e}.$$

Пусть для примера



$$a = 0,1, b = 0,2, c = 0,4, d = 0,2, e = 0,1;$$

$$a_a = 10, a_b = 14, a_c = 20, a_d = 27, a_e = 35.$$

Тогда

$$N = \frac{0,1 \cdot 10 + 0,2 \cdot 14 + 0,4 \cdot 20 + 0,2 \cdot 27 + 0,1 \cdot 35}{0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,2 + 0,1} \approx 20,7.$$

2.21. Задачи векторной оптимизации с нечеткими исходными данными

При организации материально-технического обеспечения часто приходится учитывать несколько факторов (вообще говоря, противоречивых), характеризующих качество принимаемых решений, например оперативная и экономическая эффективность. Кроме того, многие параметры, влияющие на результат, определены неточно. Некоторые подходы к решению таких задач были намечены в п. 1.6. Приведем примеры, иллюстрирующие реализацию этих подходов.

Пример 2.10. Из пяти возможных решений требуется выбрать одно. Решения характеризуются оперативной и экономической эффективностью. Оперативная эффективность измеряется вероятностью выполнения поставленной задачи, экономическая — затратами ресурсов (в условных единицах).

Обозначения:



x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — возможные решения;

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ — универсальное множество;

Нечеткое множество альтернатив \hat{C} является четким и совпадает с множеством X , т. е. $C = X$;

$$\mu_{\hat{C}}(x_i) = 1 \text{ для } i = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$f_1(x_i)$ — оперативная эффективность решения x_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

$f_2(x_i)$ — экономическая эффективность решения x_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$;

\hat{G}_1 — нечеткое множество, формализующее частную нечеткую цель, определяемую частным критерием «оперативная эффективность», $\mu_1(x_i)$ — функция принадлежности этого множества;

\hat{G}_2 — нечеткое множество, формализующее частную нечеткую цель, определяемую частным критерием «экономическая эффективность», $\mu_2(x_i)$ — функция принадлежности этого множества;

Функции $f_1(x_i)$, $f_2(x_i)$, $\mu_1(x_i)$, $\mu_2(x_i)$ заданы таблично (табл. 2.16);

$\mu_{\hat{G}}(x_i)$ — функция принадлежности нечеткого множества \hat{G} , формализующего нечеткую цель, равна минимуму из функций принадлежности частных нечетких целей (минимальному из соответствующих элементов третьей и четвертой строк таблицы);

Таблица 2.16. Условия и результаты расчетов для примера 2.10

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f_1(x_i)$	0,1	0,5	0,7	0,85	0,95
$f_2(x_i)$	2	5	8	10	13
$\mu_1(x_i)$	0	0	0,3	0,7	1,0
$\mu_2(x_i)$	1,0	0,5	0,4	0,3	0,2
$\mu_{\hat{C}}(x_i)$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
$\mu_{\hat{G}}(x_i)$	0	0	0,3	0,3	0,2
$\mu_{\hat{D}}(x_i)$	0	0	0,3	0,3	0,2

$\mu_{\hat{D}}(x_i)$ — функция принадлежности нечеткого решения \hat{D} , равна минимуму из значения функции $\mu_{\hat{C}}(x_i)$ и значения функции $\mu_{\hat{G}}(x_i)$.

Анализ этой таблицы показывает, что ответом для поставленной задачи является выбор третьего или четвертого решений. Для этих решений граф $\mu_D(x_i)$ имеет максимальное, равное 0,3, значение.

Пусть частные критерии эффективности и множество альтернатив задаются с помощью линейных функций.

Рассмотрим для простоты задачу с двумя частными минимизируемыми критериями и с четким множеством допустимых планов (с четким множеством альтернатив):

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min, \\ f_2(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \rightarrow \min, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Через $\mu_l(x)$, ($l=1,2$) обозначим функцию принадлежности нечеткого множества, формализующего частную нечеткую цель задачи, определяемую частным критерием f_l . Будем предполагать, что функции μ_l являются убывающими функциями своего аргумента и что минимальное значение этих функций равно нулю, а максимальное — единице.

В литературе часто предлагается характеризовать степень принадлежности альтернативы нечеткой цели значением соответствующего нормированного критерия, например для минимизируемого критерия $f(x)$ можно использовать формулу

$$\mu(x) = \frac{f^{\max} - f(x)}{f^{\max} - f^{\min}},$$

для максимизируемого критерия — формулу

$$\mu(x) = \frac{f(x) - f^{\min}}{f^{\max} - f^{\min}},$$

где f^{\max} и f^{\min} — соответственно максимальное и минимальное значения критерия f , если в задаче (2.54) оставить только один этот критерий и убрать другой (другие).

Будем предполагать, что $d_j \geq 0$, $a_{ij} \geq 0$, $b_i \geq 0$ для $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$.

Рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра E , $1 \geq E \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \rightarrow \min, \\ \mu_1(x) \geq E, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Пусть x^E — оптимальный план задачи (2.55) при заданном E . План, при котором $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots$, $x_n = 0$, является допустимым планом задачи (2.55) при $E = 0$.

С ростом E множество допустимых планов задачи (2.55) не увеличивается и изменяется от множества допустимых планов задачи (2.54) до множества планов, для которых $\mu_1(x) = 1$. Следовательно, оптимальное значение критерия $f_2(x)$ с ростом E не убывает, а значит, функция $\mu_2(f_2(x))$ не может возрастать и меняется от единицы до нуля.

Пусть

$$W = \max_{0 \leq E \leq 1} \min \{ \mu_1(x^E), \mu_2(x^E) \} = \min \{ \mu_1(x^{E^0}), \mu_2(x^{E^0}) \},$$

тогда, согласно п. 1.6, план x^{E^0} считается решением задачи (2.54).

Строя по задаче (2.54) задачу (2.55), мы в качестве целевой функции в (2.55) взяли второй частный критерий из (2.54). Заметим, что максимальное

значение функции принадлежности нечеткого решения задачи (2.54) все равно получилось бы равным W , если бы мы в качестве целевой функции взяли первый частный критерий, оптимальный же план мог бы и измениться.

Для приближенного решения задачи (2.54) можно предложить следующий алгоритм.

Пусть погрешность в определении степени нашей уверенности в том, что альтернатива x является решением сформулированной задачи, не должна превосходить Δ .

Рассмотрим первый частный критерий $f_1(x)$ и соответствующую ему функцию принадлежности $\mu_1(x)$. Будем решать последовательность задач следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \rightarrow \max, \\ \mu_1(x) \geq k\Delta, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Разрешим неравенство $\mu_1(x) \geq k\Delta$ относительно $f_1(x)$, получим: $f_1(x) \leq R(k\Delta)$.

Пусть, например,

$$\mu_1(x) = \frac{f_1^{\max} - f_1(x)}{f_1^{\max} - f_1^{\min}},$$

где f_1^{\max} и f_1^{\min} — соответственно максимальное и минимальное значения критерия f_1 , если в задаче (2.54) оставить только один этот критерий и убрать другой (другие); аналогично, f_2^{\max} и f_2^{\min} — соответственно максимальное и минимальное значения критерия f_2 , если в задаче (2.54) оставить только его и убрать f_1 .

Тогда неравенство $\mu_1(x) \geq k\Delta$ в задаче превращается в неравенство

$$f_1(x) \leq f_1^{\max} - (f_1^{\max} - f_1^{\min}) \cdot k\Delta.$$



Задача (2.56) решается для $k=0,1,2,\dots,h$, где $h = \text{int}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$, т. е. h — максимальное целое число, не превосходящее $\frac{1}{\Delta}$. Для каждого k находим оптимальный план x^{*k} задачи (2.56), вычисляем $\mu_1(x^{*k})$ и $\mu_2(x^{*k})$ и находим $\mu_{\hat{D}}(x^{*k})$:

$$\mu_{\hat{D}}(x^{*k}) = \min\{\mu_1(x^{*k}), \mu_2(x^{*k})\},$$

т. е. для x^{*k} определяем значение функции принадлежности нечеткому решению.

Если x^{**} — план, при котором значение $\mu_{\hat{D}}(x^{*k})$ максимально, т. е.

$$\mu_{\hat{D}}(x^{**}) = \max_{1 \leq k \leq n} \mu_{\hat{D}}(x^{*k}),$$

то он считается решением задачи (2.54).

Пример 2.11. (Задача о диете). Продукты, используемые для питания, содержание полезных веществ в 100 г продукта, калорийность 100 г продукта (в килокалориях) и их стоимость, потребность в полезных веществах (в граммах) и килокалориях указаны в таблице 2.17. Требуется разработать дневной паек (условный), обеспечивающий потребности в полезных веществах и энергетике и наилучший по затратам и весу.

Таблица 2.17. Данные задачи о диете

Продукты	Полезные вещества			Калорийность	Стоимость
	Жир	Белок	Углеводы		
Хлеб	1,0	5,0	46,0	220	4,0
Сахар	0	0	100	380	4,5
Молоко сгущенное с сахаром	8,0	7,0	38,0	320	16,0
Говядина 1-й категории	16,0	19,0	0	220	30
Колбаса с/к	41,0	24,0	0	530	102,0
Потребность	130 г	100 г	570 г	3800 ккал	—



Решение. Построим математическую модель, приняв за неизвестное количество соответствующего продукта, используемого в пайке: x_1 — хлеба, x_2 — сахара, x_3 — молока сгущенного, x_4 — говядины, x_5 — колбасы, единицей измерения всех неизвестных является величина, равная 100 г. Чтобы гарантировать ограниченность множества допустимых планов, введем требование о том, что суммарный вес продуктов не должен превышать 20 единиц (2 кг).

Заметим, что в этой модели две целевые функции — стоимость пайка и его вес.

С учетом сказанного получим математическую модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min, \\ f_2(x) = 4x_1 + 4,5x_2 + 16x_3 + 30x_4 + 102x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20, \\ x_1 + 8x_3 + 16x_4 + 41x_5 \geq 130, \\ 5x_1 + 7x_3 + 19x_4 + 24x_5 \geq 100, \\ 46x_1 + 100x_2 + 38x_3 \geq 570, \\ 220x_1 + 380x_2 + 320x_3 + 220x_4 + 530x_5 \leq 3800, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.57)$$

В соответствии с изложенным ранее для приближенного решения задачи (2.57) будем с шагом $\Delta=0,1$ решать последовательность задач (2.56).

Будем предполагать, что

$$\mu_1(x) = \frac{f_1^{\max} - f_1(x)}{f_1^{\max} - f_1^{\min}} \text{ и } \mu_2(x) = \frac{(f_2^{\max} - f_2(x))^2}{(f_2^{\max} - f_2^{\min})^2}.$$

Для начала найдем f_1^{\max} и f_1^{\min} , для этого решим задачу (2.54), учитывая в ней только первый критерий f_1 :

$$f_1^{\max} = 20 \text{ и } f_1^{\min} = 9,87.$$

Затем решим задачу (2.58) при k , изменяющемся от нуля до единицы. Эти задачи решены симплекс-методом, необходимые результаты приведены в таблице 2.18.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 4,5x_2 + 16x_3 + 30x_4 + 102x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 20 - 1,013k, \\ x_1 + 8x_3 + 16x_4 + 41x_5 \geq 130, \\ 5x_1 + 7x_3 + 19x_4 + 24x_5 \geq 100, \\ 46x_1 + 100x_2 + 38x_3 \geq 570, \\ 220x_1 + 380x_2 + 320x_3 + 220x_4 + 530x_5 \leq 3800, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Таблица 2.18. Промежуточные результаты для примера 2.11

Шаг (k)	Оптимальный план задачи (2.57)–(x_k^*)	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_D(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
1	2	3	4	5	6	7
0	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
1	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
2	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
3	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
4	(0;0;15;0,63;0)	0,43	1,00	0,43	15,625	258,75
5	(0;2,19;9,25;3,5;0)	0,50	0,993	0,50	14,94	262,85
6	(0;5,39;0,81;7,72;0)	0,60	0,983	0,69	13,92	268,82
7	(0;5,7;0;6,62;0,59)	0,70	0,959	0,70	12,91	283,83
8	(0;5,7;0;4,96;1,23)	0,80	0,934	0,80	11,89	299,91
9	(0;5,7;0;3,3;1,9)	0,90	0,905	0,90	10,90	318,45
10	(0;5,7;0;0,02;4,15)	1,00	0,713	0,713	9,87	449,55

Анализируя пятый столбец таблицы 2.18, замечаем, что максимальное значение функция $\mu_D(x_k^*)$ принимает при $k=9$. Таким образом, оптимальным является план (0; 5,7; 0; 3,3; 1,9), т. е. для пайка следует использовать 570 г сахара, 330 г говядины первой категории и 190 г колбасы с/к. Его вес равен $10,90 \cdot 0,1 \text{ кг} = 1,090 \text{ кг}$, его стоимость равна 318,45 руб. Степень уверенности в том, что этот план является наилучшим, равна 0,9.

Рассмотрим задачу векторной оптимизации с p частными критериями и множеством альтернатив $X = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq e_j, j = 1, 2, \dots, \omega\}$:

$$\begin{cases} f_i(x) \rightarrow \max, i = 1, 2, \dots, p, \\ g_j(x) \leq e_j, j = 1, 2, \dots, \omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n. \end{cases} \quad (2.59)$$

Обозначим: $\hat{G}_i (i = 1, 2, \dots, p)$ — нечеткое множество, формализующее частную нечеткую цель, определяемую частным критерием эффективности f_i ; μ_i — функция принадлежности нечеткого множества \hat{G}_i ; \hat{G} — нечеткое множество, формализующее нечеткую цель; $\mu_{\hat{G}}$ — функция принадлежности нечеткого множества цели; \hat{X}_j — нечеткое множество, определяемое условием $g_j(x) \leq e_j, j = 1, 2, \dots, \omega$; μ_{p+j} — функция принадлежности нечеткого множества X_j .

Для решения задачи (2.59) воспользуемся идеями, изложенными в [9]. В соответствии с ними решим задачу (2.60):

$$\begin{cases} \mu_{\hat{D}}(x) = \min\{\mu_1(x), \dots, \mu_p(x); \mu_{p+1}(x), \mu_{p+2}(x), \dots, \mu_{p+\omega}(x)\} \rightarrow \max, \\ g_j(x) \leq e_j, j = 1, 2, \dots, \omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n. \end{cases} \quad (2.60)$$

Для решения же задачи (2.60) предлагается решить задачу (2.61):

$$\begin{cases} E \rightarrow \max, \\ \mu_i(x) \geq E, i = 1, 2, \dots, p, \\ \mu_{p+j}(x) \geq E, j = 1, 2, \dots, \omega, \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n. \end{cases} \quad (2.61)$$

Утверждение 2.3. Пусть x^* — оптимальный план задачи (2.60), тогда x^* — оптимальный план задачи (2.61).

Доказательство. Пусть (E^0, x^0) — оптимальный план задачи (2.61), тогда E^0 — оптимальное значение целевой функции этой задачи. Пусть E^* — максимальное значение целевой функции задачи (2.60), т. е. $\mu_{\hat{D}}(x^*) = E^*$. Так

как $\mu_i(x^*) \geq E^*$ при любом $i=1,2,\dots,p+\omega$, то (E^*, x^*) — допустимый план задачи (2.61) и, значит, максимальное значение E^0 целевой функции задачи (2.61) не меньше E^* , т. е.

$$E^0 \geq E^*.$$

Так как (E^0, x^0) — оптимальный план задачи (2.61), то $\mu_i(x^0) \geq E^0$ для $i=1,2,\dots,p+\omega$ и существует такое l , что $\mu_l(x^0) = E^0$. Если $E^0 > E^*$, то

$$\min_{1 \leq i \leq \omega} \mu_i(x^0) = E^0 > E^*.$$

Но тогда x^* — неоптимальный план в задаче (2.60), что противоречит нашему предположению. Следовательно, $E^0 = E^*$ и x^* — оптимальный план задачи (2.61).

Очевидно, что оптимальный план задачи (2.61) является оптимальным планом задачи (2.60).

Пример 2.12. Рассмотрим задачу об использовании ограниченных ресурсов. Предположим, что имеется возможность производить два вида специальной техники (СТ), при этом происходит потребление ресурсов четырех типов, запасы которых составляют соответственно 16, 12, 8 и 12 единиц. При производстве единицы специальной техники первого вида расходуется 4, 0, 1 и 2 единицы соответствующего ресурса, при производстве единицы специальной техники второго вида расходуется соответственно 0, 4, 2 и 2 единицы ресурсов. Лицо, принимающее решение, заинтересовано в максимизации производства специальной техники обоих видов. Определить, сколько единиц специальной техники каждого вида надо произвести.

Решение. Для удобства сведем исходные данные в таблицу (табл. 2.19) и построим математическую модель рассматриваемой задачи.

Неизвестными в задаче являются объемы производства:

x_1 — объем производства специальной техники первого вида,

x_2 — объем производства специальной техники второго вида.

Таблица 2.19. К задаче о производстве СТ

Тип ресурса	Расход на единицу СТ, ед.		Запас ресурса, ед.
	1-го вида	2-го вида	
А	4	0	16
Б	0	4	12
В	1	2	8
Г	2	2	12

Заметим, что в этой модели две целевые функции:

f_1 — объем производства специальной техники первого вида: $f_1(x) = x_1$;

f_2 — объем производства специальной техники второго вида: $f_2(x) = x_2$.

С учетом сказанного получим математическую модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \max, \\ x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 \leq 16, \\ 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Предполагается, что частные цели являются нечеткими с функциями принадлежности:

$$\mu_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_1^{\max}},$$

$$\mu_2(x) = \frac{f_2(x)}{f_2^{\max}},$$

а множество допустимых планов, для простоты, четкое.

Легко видеть, что максимально возможный объем производства специальной техники первого вида равен 4, второго — 3, тогда

$$\mu_1(x) = \frac{f_1(x)}{4},$$

$$\mu_2(x) = \frac{f_2(x)}{3}.$$

Для приближенного решения задачи (2.62) будем менять E от нуля до единицы с шагом $\Delta=0,1$ и решать последовательность задач типа задачи (2.63):

$$\left\{ \begin{array}{l} k \rightarrow \max, \\ \frac{f_1(x)}{4} \geq \Delta \cdot k, \\ \frac{f_2(x)}{3} \geq \Delta \cdot k, \\ 4x_1 \leq 16, \\ 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ k \geq 0 - \text{целое.} \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Задача (2.63) эквивалентна задаче (2.64):

$$\left\{ \begin{array}{l} k \rightarrow \max, \\ x_1 \geq 0,4 \cdot k, \\ x_2 \geq 0,3 \cdot k, \\ 4x_1 \leq 16, \\ 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ k \geq 0 - \text{целое.} \end{array} \right. \quad (2.64)$$

Необходимые результаты решения задачи (2.64) при различных k приведены в таблице 2.20.

Анализируя данные таблицы 2.20, видим, что при $k \geq 9$ задача (2.64) не имеет допустимых планов, т. е. в исходной задаче нет планов, для которых степень их принадлежности нечеткому решению больше, чем 0,8. Одним из планов, принадлежащих нечеткому решению с надежностью 0,8, является план, в соответствии с которым необходимо производить 3 единицы специальной техники первого вида и 2 единицы специальной техники второго вида.

Таблица 2.20. Результаты решения задачи (2.64)

Шаг (k)	Оптимальный план задачи (2.64) — (x_k^*)	$\mu_1(x_k^*)$	$\mu_2(x_k^*)$	$\mu_D(x_k^*)$	$f_1(x_k^*)$	$f_2(x_k^*)$
0	(0;0)	0,0	1,0	0,0	0	0
1	(0,4; 0,3)	0,1	1,0	0,1	0,4	0,3
2	(0,8; 0,6)	0,2	1,0	0,2	0,8	0,3
3	(1,2; 0,9)	0,3	1,0	0,3	1,2	0,9
4	(1,6; 1,2)	0,4	1,0	0,4	1,6	1,2
5	(2; 1,5)	0,5	1,0	0,5	2,0	1,5
6	(2,4; 1,8)	0,6	0,93	0,6	2,4	1,8
7	(2,8; 2,1)	0,7	0,87	0,7	2,8	2,1
8	(3,2; 2,4)	0,8	0,80	0,8	3,2	2,4
9	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—

В заключение отметим, что несомненный интерес представляет решение с использованием нечетких множеств и нечеткой логики, задач оценки эффективности применения многокритериальных моделей выработки решений [60], [61].





3.1. Вводные замечания

В данной главе представлено несколько классов задач, для формулировки и решения которых используются теория графов и теория нечетких множеств. В ней рассматриваются: задача расчета параметров сетевого графика, задача о наилучших маршрутах и задача о кратчайшем соединении, задача об оптимальном потоке, задача о назначении и задачи на многодольных графах (обобщения задачи о назначениях). С постановками и методами решения таких задач можно ознакомиться, например, в [19], [40], [62]–[66], но в этих постановках предполагается, что исходные данные полностью определены или носят вероятностный характер, однако при решении практических задач это далеко не всегда так. Мы часто будем исходить из того, что эти исходные данные являются нечеткими и задаются с помощью нечетких множеств.

В главе рассматриваются далеко не все изученные в теории графов задачи, исходные данные в которых полезно рассматривать как заданные нечетко. Круг охваченных задач определяется интересами авторов, рамками практических задач, с решением которых авторам приходилось сталкиваться.

При рассмотрении примеров решение ряда из них не приводится, упоминается метод их решения и указывается ссылка на источник, где можно ознакомиться с этим методом.

Теория графов [62], [67]–[69] начала развиваться с XVIII в. Первые работы по ней принадлежат Л. Эйлеру (1707–1783). Вначале ее рассматривали как инструмент для нахождения решений в азартных играх и различных головоломках. С начала прошлого века графы нашли широкое применение при решении практических задач. В настоящее время понятие графа используется для описания обширной области объектов и процессов.

Популярность теории графов определяется ее предметом, состоящим в изучении связей между объектами. Наше время стало свидетелем неуклонного развития теории графов, которая за последние десятилетия вступила в новый период интенсивных разработок. В этом процессе явно прослеживается влияние запросов современных, бурно развивающихся областей ее приложения: теории игр, программирования, теории передачи информации, теории управления, теории электрических и контактных сетей, а также проблем биологии, психологии и социологии, военного дела. К настоящему времени разработаны многочисленные алгоритмы для работы с графами [70].

3.2. Теория сетевого планирования и управления, ее применение

Теория сетевого планирования и управления (СПУ) [41], [71] используется для решения задач планирования. Ее методы особенно полезны, когда требуется выполнить большое число различных технологических операций (работ), привлекая различных исполнителей.

Методы СПУ позволяют определить срок выполнения принятого плана проведения работ и указывают список критических работ, т. е. тех работ, от выполнения которых этот срок зависит в первую очередь.

При решении указанных задач используется модель в форме сетевого графика.

Сетевой график — это сеть без кратных ребер, все ребра которой взвешенные и являются дугами.

Работам соответствуют дуги сетевого графика, рядом с дугой, изображающей работу, указывается продолжительность этой работы. Вершина сетевого графика обозначает определенное *событие* — начало и/или окончание работы (работ).

Событие, с которого работа начинается, называется **начальным событием** для этой работы; событие которым работа заканчивается, называется **конечным событием** для этой работы.

Работы, для которых их начальное событие является конечным событием для данной работы, называются **последующими** для данной работы; работы, для которых их конечное событие является начальным событием для данной работы, называются **предшествующими** для данной работы.

Различают следующие классы работ.

1. **Действительные** — это работы, которые требуют затрат сил, средств и времени.

2. **Ожидания** — это работы, которые требуют затрат только времени.

3. **Фиктивные** — это работы, которые не требуют затрат ресурсов. Их продолжительность равна нулю. Они используются для указания логической связи между событиями и работами.

На сетевом графике различают:

исходное событие, которое определяет начало выполнения всего комплекса работ и не является конечным ни для какой работы;

завершающее событие, которое определяет окончание выполнения всего комплекса работ и не является начальным ни для какой работы;

промежуточное событие, которое определяет окончание и/или начало определенных работ, оно имеет предшествующие и последующие работы.

Длиной пути называется сумма продолжительности работ, из которых этот путь состоит.

Самый длинный путь называется *критическим путем*.

Длина критического пути определяет продолжительность выполнения принятого плана проведения всего комплекса работ. *События и работы*, которые лежат на этом пути, называются *критическими*. Любая задержка с выполнением любой критической работы приводит к увеличению общего времени выполнения всего комплекса работ.

Сетевой график строится на основании технологической таблицы, в которой указывается продолжительность каждой работы и ее связь с предшествующими и последующими работами.

Укажем некоторые, важные для дальнейшего, правила построения сетевых графиков.

Сетевой график не должен иметь циклов и кратных ребер.

Сетевой график является сетью, поэтому он представляется связным графом.

Сетевой график должен иметь одно исходное и одно завершающее событие.

События на сетевом графике нумеруются числами. Для любой работы номер ее начального события должен быть меньше номера ее конечного события.

Заметим, что в литературе описаны приемы, позволяющие добиться того, чтобы на сетевом графике не было кратных ребер и было бы точно одно исходное и одно завершающее событие.

Важнейшей задачей СПУ является построение критического пути, для этого сначала определяются параметры событий, затем параметры работ и на основании полученных результатов строится критический путь.

Изложим кратко метод определения параметров событий и работ и правило построения критического пути.

Обозначения:

i, j — номера событий;

(i, j) — работа, i — ее начальное событие, j — ее конечное событие;

$t(i, j)$ — продолжительность работы (i, j) .

Вычисления начинаются с определения параметров событий, потом определяются параметры работ и строится критический путь.

Параметры событий:



$t_{p.}(i)$ — **ранний срок наступления события** i — срок, раньше которого событие наступить не может. Для завершающего события ранний срок наступления равен длине критического пути;

$t_{n.}(i)$ — **поздний срок наступления события** i , равный разности между длиной критического пути и длиной самого большого пути, который следует за событием i . Это такой срок, что более позднее наступление события приводит к соответствующей задержке наступления завершающего события, т. е. к увеличению длины критического пути;

$R(i)$ — **резерв события** (резерв времени в сроках наступления события), равный разности между поздним и ранним сроками наступления события i .

Параметры работ:

$t_{p.n.}(i, j)$ — **ранний срок начала работы** (i, j) ,

$$t_{p.n.}(i, j) = t_p(i);$$

$t_{p.o.}(i, j)$ — **ранний срок окончания работы** (i, j) ,

$$t_{p.o.}(i, j) = t_p(i) + t(i, j);$$

$t_{n.o.}(i, j)$ — **поздний срок окончания работы** (i, j) ,

$$t_{n.o.}(i, j) = t_n(j);$$

$t_{n.n.}(i, j)$ — **поздний срок начала работы**,

$$t_{n.n.}(i, j) = t_n(j) - t(i, j);$$

$R(i, j)$ — **полный резерв работы**,

$$R(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j),$$

использование полного резерва может изменить ранние сроки наступления промежуточных событий, но не меняет срока раннего наступления завершающего события.

Метод расчета параметров сетевого графика.

1. Определить ранние сроки наступления событий:

а) ранний срок наступления исходного события равен нулю.

б) для остальных событий этот срок определяется в порядке увеличения номеров событий. Ранний срок наступления события равен максимальному из ранних сроков окончания работ, для которых это событие является конечным:

$$t_p(j) = \max\{t_{p.o.}(i) + t(i, j)\},$$

здесь максимум берется по всем работам, для которых событие j является конечным.

Замечание 3.1. Ранний срок наступления завершающего события равен длине критического пути (затратам времени на выполнение плана).

2. Определить поздние сроки наступления событий:

а) поздний срок наступления завершающего события равен длине критического пути;

б) для остальных событий этот срок определяется в порядке уменьшения номеров событий. Поздний срок наступления события равен минимальному из поздних сроков начала работ, для которых это событие является начальным:

$$t_n(i) = \min\{t_n(j) - t(i, j)\},$$

здесь минимум берется по всем работам, для которых событие i является начальным.

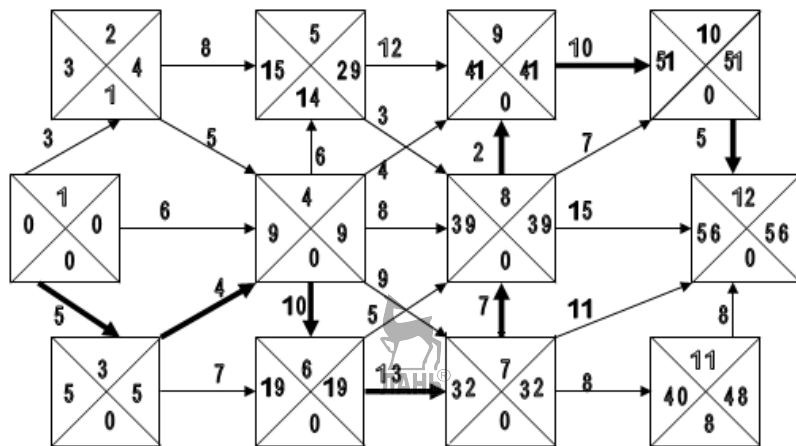
Замечание 3.2. Отметим, что поздний срок наступления исходного события равен нулю.

3. Определить резервы событий:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Замечание 3.3. Резерв события не может быть меньше нуля.

4. Найти все критические работы: работа является критической тогда и только тогда, когда ее полный резерв равен нулю.



Обозначения:

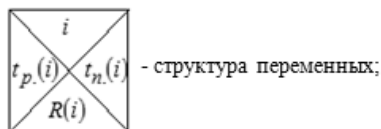


Рис. 3.1. Расчет параметров сетевого графика

Пример 3.1. На рисунке 3.1 представлены результаты расчета параметров сетевого графика.

Мы предполагали, что работы выполняются точно в запланированный срок. На самом деле время выполнения работы далеко не всегда известно точно. В некоторых источниках рассматриваются ситуации, когда продолжительность работы является случайной [72], [73]. Мы же далее будем предполагать, что продолжительность работы задана нечетко в форме нечеткого числа. С элементами теории нечетких множеств и нечеткой логики можно ознакомиться по материалам первой главы данной монографии, там же приводятся и ссылки на соответствующие литературные источники.

3.3. Задача о кратчайшем расстоянии на ориентированной сети без циклов

Рассматривая сетевой график, мы решали задачу по отысканию самого длинного пути от первой вершины до последней. Рассмотрим задачу по нахождению кратчайшего пути на сетевом графике. При решении проблем, связанных с перевозками грузов различными видами транспорта на дорогах с односторонним движением, достаточно часто возникает проблема выбора оптимального маршрута движения. Качество маршрута обычно оценивается его протяженностью (временем движения, транспортными расходами, измеряемыми в рублях, тоннокилометрах, тонночасах и т. д.). В дальнейшем под термином «длина» будем понимать расстояние, время или какой-то иной показатель, характеризующий маршрут, значение которого равно сумме значений показателей, характеризующих коммуникации маршрута, к минимизации которого мы стремимся.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется некоторая сеть, являющаяся ориентированным графом без циклов и кратных ребер, содержащая n вершин. Каждой ее дуге (i, j) соотнесено число d_{ij} , которое будем трактовать как длину коммуникации (i, j) . Требуется найти путь из вершины 1 в вершину n , имеющий минимальную длину. Под *длиной пути* будем понимать сумму длин коммуникаций, из которых он состоит. Будем также предполагать, что все $d_{ij} \geq 0$.

Алгоритм решения этой задачи имеет много общего с рассмотренным ранее методом отыскания критического пути на сетевом графике и базируется на методе динамического программирования [41], [43], [63].

Перенумеруем все вершины сети числами так, чтобы для любой коммуникации номер вершины ее начала был меньше номера вершины ее конца.

Последовательно, начиная с предпоследней вершины, в порядке убывания номеров вершин вычисляем кратчайшее расстояние S_{in} от рассматриваемой вершины с номером i до вершины с номером n :

$$S_{in} = \min\{d_{ir} + S_{rn}\},$$

здесь минимум ищется по всем коммуникациям, которые начинаются с вершины i , отметим, что $i < r$. То есть кратчайшее расстояние от рассматриваемой вершины до последней равно наименьшей из сумм: длина коммуникации, начинающейся в рассматриваемой вершине, плюс кратчайшее расстояние от конца этой коммуникации до последней вершины.

Пусть $S_{in} = d_{iu} + S_{un}$, следовательно, u — это номер вершины, в которую следует двигаться, попав в вершину i . Рассмотренная вершина (вершина с номером i) получает метку (S_{in}, u) . Пусть первая вершина получила метку (S_{1n}, v) . Следовательно, длина кратчайшего маршрута из вершины 1 в вершину n равна S_{1n} и двигаться из вершины 1 надо в вершину v . Если метка вершины v равна (S_{vn}, w) , то, значит, из вершины v надо двигаться в вершину w и т. д.

Пример 3.2. На рисунке 3.2 представлены результаты решения задачи по отысканию кратчайшего пути от первой вершины до вершины с номером семь. Кратчайший путь выделен жирными линиями.

Заметим, что изложенный алгоритм аналогичен методу определения поздних сроков наступления событий в сетевом графике.

Отметим, что решать рассмотренную задачу можно и методом, рассмотренным в следующем разделе.

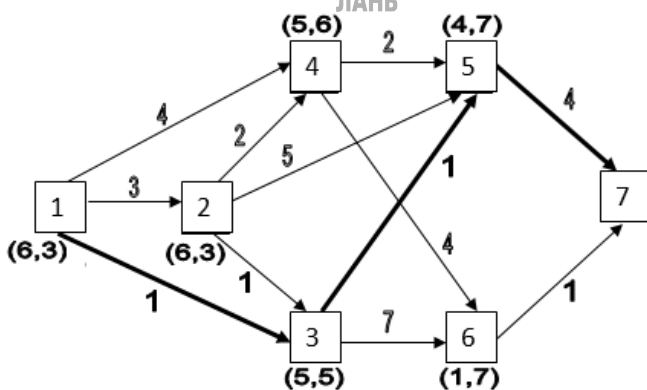


Рис. 3.2. Задача о кратчайшем расстоянии на ориентированной сети без циклов

3.4. Задача о кратчайшем маршруте на смешанном графе

Задача о кратчайшем пути является одной из важнейших классических задач теории графов [40], [62], [63]. Эта задача имеет разнообразные применения на практике, например в GPS-навигаторах для поиска кратчайшего пути между двумя пунктами. К настоящему времени получен целый ряд алгоритмов для ее решения, мы остановимся на алгоритме Дейкстры [74].

Итак, имеется некоторая сеть, содержащая n вершин. Каждой ее коммуникации (i, j) соответствует число d_{ij} , которое будем трактовать как длину коммуникации (i, j) . Требуется найти смешанный путь из вершины 1 в вершину n , имеющий минимальную длину. В дальнейшем для краткости вместо термина смешанный путь будем использовать термин *маршрут*. Под *длиной маршрута* будем понимать сумму длин коммуникаций, из которых он состоит. Будем также предполагать, что все $d_{ij} \geq 0$.

Если вершины i и j не соединены ни одной коммуникацией, то положим $d_{ij} = \infty$, если между вершинами i и j имеется только дуга (i, j) , то положим $d_{ji} = \infty$. Для неориентированных ребер принимаем, что $d_{ij} = d_{ji}$. Заметим, то если на сети имеются дуги (i, j) и (j, i) , то вовсе не обязательно, чтобы $d_{ij} = d_{ji}$.

Решим более общую задачу. Вместо отыскания кратчайшего маршрута из первой вершины в вершину с номером n будем искать кратчайшие маршруты из первой вершины во все остальные вершины сети.

Алгоритм Дейкстры решения этой задачи состоит в том, что мы последовательно будем расширять множество вершин, до которых искомые маршруты уже найдены. Таким вершинам мы будем присваивать постоянные пометки, всем остальным — временные пометки.

Постоянная пометка состоит из двух частей и для вершины с номером k имеет вид:

$$\overline{(r; L_k)},$$

где L_k — длина кратчайшего маршрута от первой вершины до вершины с номером k ; r — такая вершина, что коммуникация (r, k) лежит на этом маршруте.

Временная пометка также состоит из двух частей и для вершины с номером k имеет вид:

$$(r; l_k),$$

где r — вершина, соседняя с вершиной k (т. е. вершины r и k соединены коммуникацией (r, k)); l_k — длина маршрута, проходящего через вершину r и соединяющего первую вершину с вершиной k .

Опишем теперь алгоритм отыскания кратчайших маршрутов от первой вершины сети до всех остальных ее вершин.

Алгоритм начинается с подготовительного этапа, на котором происходит начальное построение пометок. Первая вершина получает постоянную пометку $(1; 0)$, остальные вершины получают временные пометки $(1; d_{1k})$ (k — номер рассматриваемой вершины). Напомним, что мы считаем, что каждая вершина сети соединена с каждой. Если на самом деле коммуникации между вершинами i и j нет, то мы считаем, что она есть, но имеет длину, равную бесконечности. Поэтому если на нашей сети коммуникация $(1, k)$ отсутствует, то $d_{1k} = \infty$.

В дальнейшем алгоритм состоит из последовательности итераций, каждая из которых состоит из следующих шагов.

1. Находим такую вершину k , что

$$l_k = \min l_u,$$

здесь минимум берется по всем вершинам u с временными пометками.

Оказывается, что l_k есть кратчайшее расстояние от первой вершины до вершины k .

2. Временная пометка $(r; l_k)$ вершины k заменяется на постоянную пометку

$$\overline{(r; L_k)},$$

где $L_k = l_k$.

3. Пересчитываем временные пометки. Для этого рассматриваем вершины с временными пометками, соседние с вершиной k (только что получившей постоянную пометку), и проверяем, не будет ли короче путь от первой вершины до рассматриваемой, если двигаться через вершину k . Если этот путь короче, то находим его длину и присваиваем вершине j (j — номер рассматриваемой вершины) новую временную пометку $(k; L_k + d_{kj})$; в противном случае временная пометка вершины не изменяется. То есть мы для

каждой вершины j , соседней с вершиной k и имеющей временную пометку $(u(j); l_j)$, вычисляем сумму:

$$L_k + d_{kj}.$$

Если $L_k + d_{kj} < l_j$, то вершина j получает новую временную пометку $(k; L_k + d_{kj})$. Иначе временная пометка вершины j не изменяется.

4. Если еще не все вершины имеют постоянные пометки, то переходим к шагу 2, в противном случае все итерации выполнены и осталось построить кратчайшие маршруты.

Алгоритм заканчивается этапом, на котором восстанавливаются кратчайшие маршруты от первой вершины до остальных. Рассмотрим вершину с номером k , пусть она имеет постоянную пометку $(r; L_k)$, значит, кратчайший маршрут до нее от первой вершины проходит через вершину r . Рассматриваем вершину r , если левая часть ее постоянной пометки равна w , то кратчайший маршрут до нее проходит через вершину w , и так далее, пока не дойдем до первой вершины. На этом алгоритм заканчивает свою работу.

Пример 3.3. Найти пути кратчайшей длины от первой вершины до остальных на сети, изображенной на рисунке 3.3.

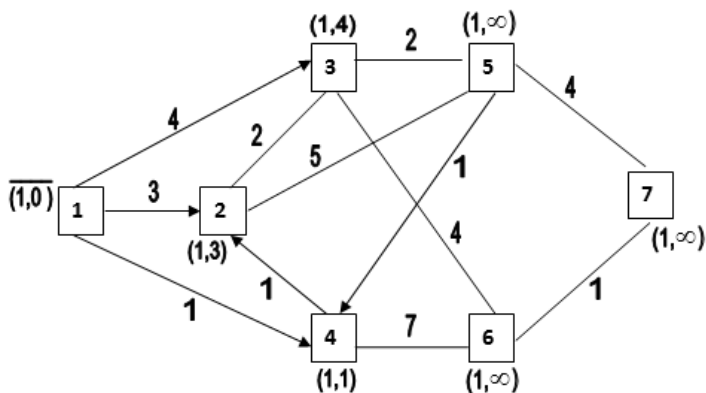


Рис. 3.3. Пометки после выполнения подготовительного этапа

Первая итерация.

Выполняя шаг 1, находим, что $k = 4$ (мы рассмотрели все вершины, имеющие временные пометки, т. е. вершины 2, 3, 4, 5, 6, 7, и выбрали из них ту, правая часть пометки которой минимальна).

Выполняя шаг 2, находим, что вершина 4 получает постоянную пометку $\overline{(1;1)}$.

При выполнении шага 3 пересчитываем временные пометки для вершин, связанных коммуникациями с четвертой вершиной — для вершин 2 и 6. До вершины 2 добираться ближе, если двигаться через вершину 4: $1+1 < 3$, следовательно, она получает новую временную пометку $(4;2)$. До вершины 6 тоже ближе, если двигаться через четвертую вершину: $1+7 < \infty$, следовательно, и она получает новую временную пометку $(4;8)$. Результаты вычислений шагов 2 и 3 указаны на рисунке 3.4.

Вторая итерация.

Шаг 1. Находим, что $k = 2$ (мы рассмотрели вершины 2, 3, 5, 6, 7 и выбрали из них ту, правая часть пометки которой минимальна).

Шаг 2. Вершина 2 получает постоянную пометку $\overline{(4;2)}$.

Шаг 3. Пересчитываем временные пометки для вершин, связанных коммуникациями со второй вершиной, — 3 и 5. Результаты вычислений пунктов 3 и 4 алгоритма указаны на рисунке 3.5.

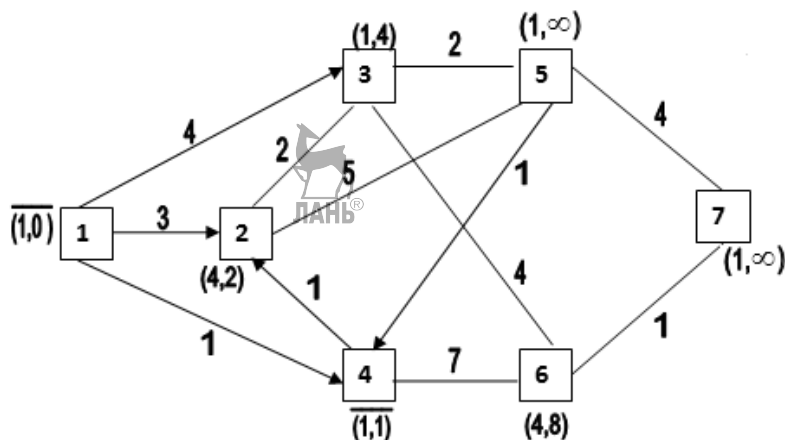


Рис. 3.4. Результаты выполнения первой итерации

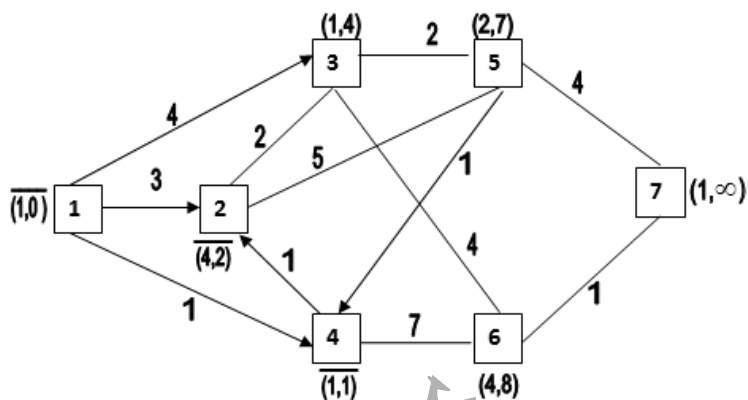


Рис. 3.5. Результаты выполнения второй итерации

Заметим, что вершине 3 можно присвоить новую временную пометку $(2;4)$, а можно оставить старую, что мы и сделали (это говорит о том, что до этой вершины может быть несколько (два) кратчайших пути от первой вершины).

Дальнейшие вычисления приведены на рисунках 3.6–3.8.

На рисунке 3.9 коммуникации, составляющие кратчайшие пути от первой вершины до остальных, отмечены жирными линиями.

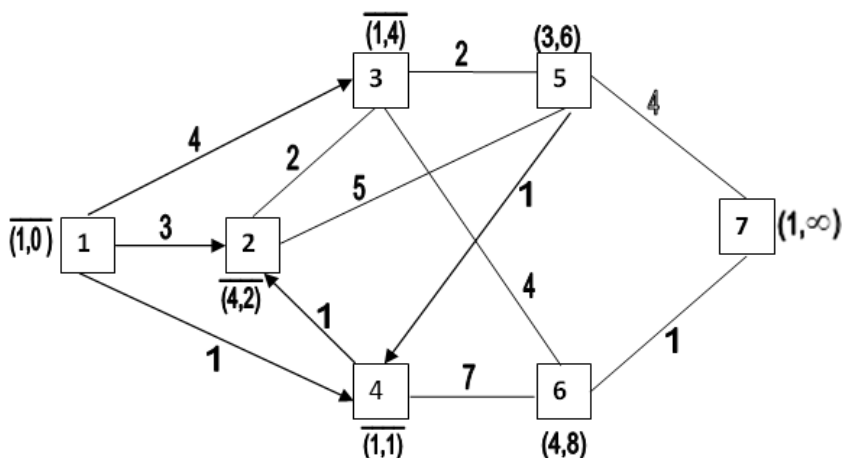


Рис. 3.6. Результаты выполнения третьей итерации



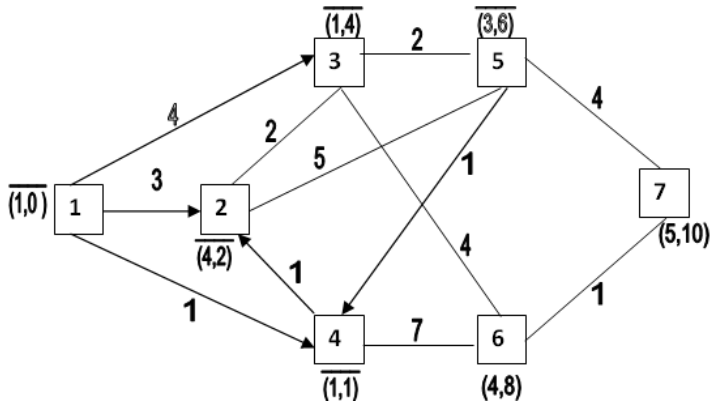


Рис. 3.7. Результаты выполнения четвертой итерации

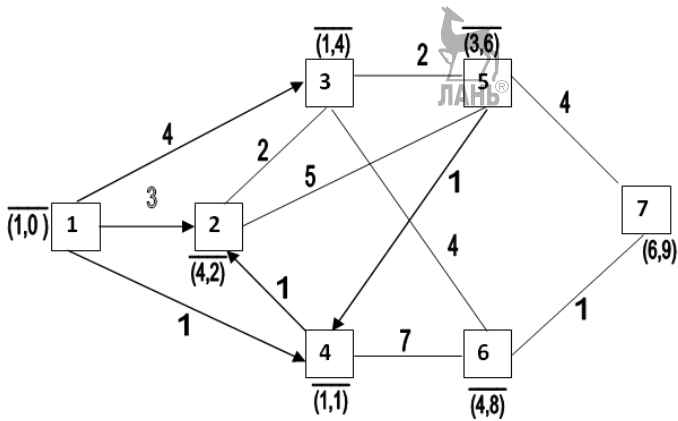


Рис. 3.8. Результаты выполнения пятой итерации

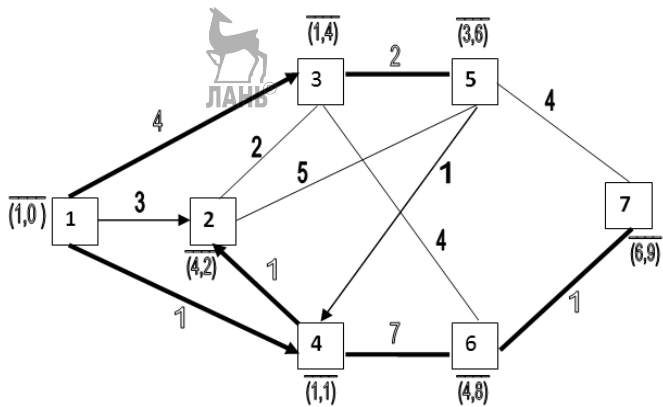


Рис. 3.9. Результаты выполнения последней итерации

Следует отметить высокую эффективность рассмотренного алгоритма и его широкую применимость. Бортовые компьютеры современных автомобилей позволяют находить трассу кратчайшего пути, и делают они это с помощью описанного алгоритма. Маршрутизаторы, являющиеся важнейшими элементами глобальной компьютерной сети Интернет, определяя маршрут доставки сообщения с одного сервера на другой, также используют этот алгоритм.

3.5. Задача о кратчайшем соединении

Рассмотрим так называемую задачу о кратчайшем соединении [67], [70], [71], [75], которая возникает при решении, например, следующей проблемы: известно расположение некоторых населенных пунктов и трассы дорог, которые можно построить. Известны также длины (проектные стоимости строительства, время движения, стоимость проезда и т. п.) этих дорог. Требуется определить, какие из этих дорог следует построить, чтобы полученная дорожная сеть позволяла бы попасть из любого пункта в любой другой и из всех возможных таких сетей имела бы наименьшую стоимость строительства.

Задача о нахождении кратчайшего (самого дешевого соединения) имеет практическое применение в ходе строительства или ремонта дорог, при прокладке трубопроводов для снабжения ряда пунктов питьевой водой, газом, нефтью и в ряде других случаев, когда требуется связать определенные пункты с наименьшей затратой сил и средств, то есть построить минимальную сеть. С помощью этой задачи Росси, Хайзер и Кинг предложили схему прокладки телевизионных кабелей, соединяющих все станции в единую сеть [76]. В [77] рассматривается пример, в котором в качестве характеристики канала связи используется вероятность несанкционированного доступа к информации при его использовании. В литературе отмечается, что некоторые задачи приводят к необходимости построить остов не минимального, а максимального веса. К этой задаче также применим рассматриваемый далее алгоритм Краскала, если изменить знак веса каждого ребра на противоположный. Если требуется найти остовное дерево с минимальным произведением весов ребер, то, учитывая, что $\log ab = \log a + \log b$, минимальное остовное дерево графа, в котором веса ребер заменены их логарифмами, дает нужное решение. Правда, вес ребер обязательно должен быть положительным.

Сформулируем рассматриваемую задачу на языке теории графов: для заданного неориентированного графа найти минимальный остов — остов, сумма весов ребер которого минимальна [4], [62], [67].

Теорема 3.1. Решением задачи о кратчайшем соединении является остов.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что подграф, являющийся решением задачи (содержащий все вершины рассматриваемой сети и имеющий минимальный вес), не является деревом. Тогда в нем существует цикл. Убрав произвольную коммуникацию этого цикла, мы получим подграф, содержащий все вершины, но меньшего веса, что противоречит исходному предположению.

Теорема доказана.

Для обозначения минимального остова будем использовать аббревиатуру МО (минимальный остов).

Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $U \subset V$.

Изложим теперь алгоритм Крускала, при его изложении будем в основном следовать [78].

Пусть дан связный взвешенный граф $G = (V, E)$, имеющий n вершин, и пусть для любого ребра $e \in E$ определен его вес $d(e) > 0$.

Начинаем с графа $G_0 = (V, \emptyset)$, который состоит только из вершин графа $G = (V, E)$ и не имеет ребер. Этот граф можно рассматривать как n компонент связности, каждая из которых состоит из одной вершины.

В дальнейшем алгоритм состоит из последовательности этапов. На этапе с номером k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) строится граф $G_k = (V, T_k)$, для этого к множеству ребер T_{k-1} графа G_{k-1} добавляется одно ребро, которое выбирается по следующему правилу:

— в графе $G = (V, E)$ выбираем ребро минимального веса из числа ребер, не принадлежащих T_{k-1} ;

— если добавление этого ребра к T_{k-1} не приводит к образованию цикла, то присоединяем это ребро к T_{k-1} , получаем T_k и граф $G_k = (V, T_k)$;

— если цикл образуется, то из оставшихся ребер графа $G = (V, E)$, не принадлежащих T_{k-1} , выбираем ребро минимального веса и т. д.

Граф G_{n-1} является минимальным остовом графа G .

Теорема 3.2. Алгоритм Краскала дает МО.

Доказательство. Покажем сначала, что при $0 < i < n - 1$ граф G_i можно построить. Действительно, рассмотрим множества ребер T_{i-1} и $E \setminus T_{i-1}$. В силу

связности графа G найдется такое ребро (k, l) , что $k \in T_{i-1}$ и $l \in E \setminus T_{i-1}$. Это ребро не образует цикла с ребрами из T_{i-1} . Выбрав из всех таких ребер ребро с минимальным весом, получим ребро, присоединение которого к T_{i-1} даст T_i . Заметим, что $G_i = (V, T_i)$ — связный граф.

Докажем теперь, что T_{n-1} является остовом минимального веса в графе G .

Рассмотрим граф G_{n-1} с множеством ребер T_{n-1} . Так как он связный и состоит из n вершин и $(n - 1)$ ребер и не имеет циклов, то он является деревом (см. [78]). Покажем, что вес дерева G_{n-1} минимален.

Предположим, что это не так. Среди всех остовов графа G , имеющих минимальный вес, выберем такой остов с множеством ребер T , который имеет с T_{n-1} максимальное число общих ребер. Пусть $e_i = (a, b)$ — ребро из T_{n-1} , не содержащееся в T и имеющее минимальный номер среди ребер множества T_{n-1} , не входящих в T . (Ребра в множестве T_{n-1} получили номера в процессе его построения, в порядке их присоединения к строящемуся графу.) В множестве T есть цепь, соединяющая вершины a и b , присоединив к ней ребро e_i , получим цикл. В этом цикле есть ребро e , не входящее в T_{n-1} (иначе T_{n-1} содержит цикл). Заменяя в T ребро e на e_i , получим новый остов $T' = T \setminus \{e\} \cup \{e_i\}$. Но T — остов минимального веса, следовательно, вес T' не меньше веса T . Отсюда следует, что вес ребра e_i не меньше веса ребра e .

Присоединяя ребро e к T_{i-1} (при $i=1$ полагаем $T_{i-1} = \emptyset$), мы не получим цикла, поскольку ребра $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e$ входят в множество T . Если бы вес ребра e был меньше веса ребра e_i , то при построении дерева T_i мы взяли бы не e_i , а e (или другое ребро с весом меньшим веса e_i). Следовательно, вес ребра e_i равен весу ребра e , и веса деревьев с множествами ребер T и T' одинаковые.

Итак, T' — остов минимального веса. Число ребер, общих для множеств T' и T , больше, чем число общих ребер для T_{n-1} и T ($T' = T \setminus \{e\} \cup \{e_i\}$), что противоречит выбору множества T . Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример 3.4. Рассмотрим сеть, представленную на рисунке 3.10.

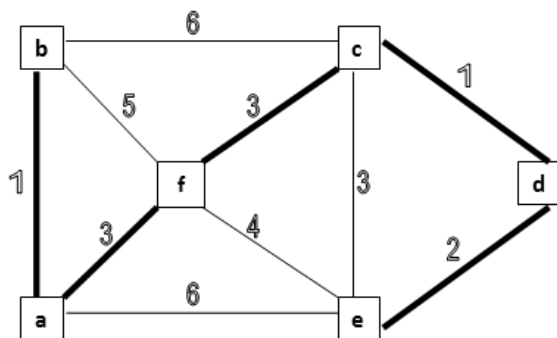


Рис. 3.10. Задача о кратчайшем соединении

На первом шаге выбирается коммуникация (c,d) (заметим, что можно было бы выбрать (a,b)), затем (a,b) и (e,d) . Выбор (c,e) невозможен из-за нарушения условия, связанного с возникновением цикла, поэтому выбираем (c,f) , затем (a,f) (или наоборот). На этом построение остова заканчивается и процесс обрывается.

3.6. Задача о максимальном потоке

В качестве сети рассмотрим, например, сеть автомобильных дорог в некотором регионе. Вершинам сети соответствуют некоторые географические пункты, а коммуникациям — дороги, соединяющие эти пункты. При этом ребро соответствует дороге с двусторонним движением, а дуга — дороге с односторонним движением, осуществляемом в направлении ориентации дуги. Будем вновь предполагать, что все пункты (вершины) перенумерованы и что их число равно n . Как и раньше, мы будем часто отождествлять сам пункт с его номером. Заданы пропускные способности дорог b_{ij} (b_{ij} — пропускная способность дороги, соединяющей пункты i и j).

На сети выделяются две вершины, одна из них называется **источником**, ее номер полагаем равным 1, обозначим ее буквой s ; другая — **стоком**, ее номер — n , ее обозначим буквой t .

Требуется найти максимальный (по объему, или весу, или цене, или и т. д.) поток грузов, который можно пропустить из источника в сток в единицу времени, при этом предполагается, что в промежуточных пунктах грузы не потребляются и не возникают [40], [41], [73].

Чтобы сформулировать эту задачу более точно, введем понятие потока в сети.

Потоком из источника в сток в сети будем называть множество неотрицательных чисел x_{ij} (в примере с дорожной сетью это объемы перевозок по каждой коммуникации в единицу времени), удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} = 0, \text{ если } i \neq 1, k \neq n, \\ \sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn} = v, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$v \geq 0, \quad (3.2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \text{ для всех } i \text{ и всех } j. \quad (3.3)$$

В левой части формулы (3.1) первая сумма берется по всем коммуникациям, для которых $b_{ij} > 0$ (по которым можно осуществлять подвоз в пункт j); вторая сумма берется по всем коммуникациям, для которых $b_{jk} > 0$ (по которым можно осуществлять вывоз материальных средств из пункта j).

Число v (подчеркнем, что оно неотрицательное) называется **величиной потока**. Число x_{ij} называется **потоком по коммуникации** (i, j) . Отметим, что по дуге (i, j) поток может протекать только в одном направлении от i к j , поэтому $x_{ij} \geq 0$, а $x_{ji} = 0$; по ребру (i, j) поток может протекать в обоих направлениях, если он протекает от i к j , то $x_{ij} > 0$, если он протекает от j к i , то $x_{ji} > 0$.

Условия (3.1) выражают тот факт, что в каждую вершину, кроме источника и стока, приходит ровно столько же потока, сколько из нее его выходит (в промежуточных пунктах грузы не потребляются и не возникают). Условия (3.3) показывают, что поток по коммуникации (i, j) не может быть меньше нуля и больше ее пропускной способности.

Задача отыскания потока, имеющего максимальную величину, является задачей линейного программирования с целевой функцией:

$$v = \sum_j x_{sj}, \quad (3.4)$$

суммирование берется по всем коммуникациям, идущим из источника.

Но благодаря специфике этой задачи для ее решения были получены существенно более эффективные методы, чем симплекс-метод.

Мы рассмотрим алгоритм, следующий из теоремы Форда — Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе.

Заметим, что если сеть является смешанным путем (*смешанный путь* состоит из ребер и дуг, при этом при движении от начала смешанного пути к его концу дуги проходятся в направлении их ориентации), то максимальная величина потока равна минимальной из пропускных способностей коммуникаций этого пути. Таким образом, коммуникация с минимальной пропускной способностью является «узким местом» в такой сети. Обобщим понятие «узкого места» на случай произвольных сетей. Для этого введем понятие разреза (X, \bar{X}) сети, где X — подмножество множества V вершин сети, $\bar{X} = V \setminus X$ — множество всех вершин сети, не попавших в X .

Разрезом (X, \bar{X}) называется множество всех коммуникаций (i, j) , для которых $i \in X, j \in \bar{X}$ или, наоборот, $j \in X, i \in \bar{X}$, т. е. разрез — это множество всех коммуникаций, у которых один конец является вершиной из множества X , а другой — из множества \bar{X} . Удаление из сети всех коммуникаций разреза (X, \bar{X}) превращает сеть в несвязанную, т. е. исходная сеть распадается на две (или более) части, не связанные между собой.

Для примера рассмотрим сеть, изображенную на рисунке 3.11.

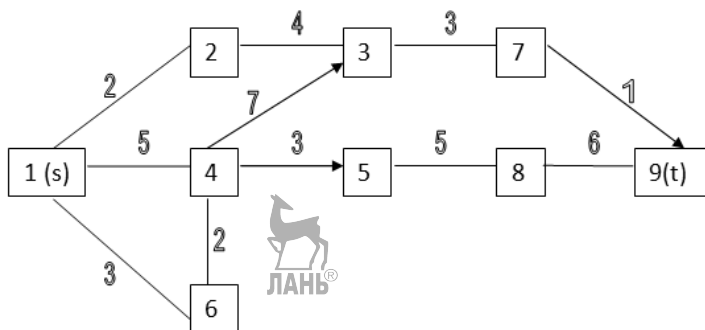


Рис. 3.11. Пример дорожной сети

Рассмотрим разрез (X, \bar{X}) , где $X = \{1, 2, 4\}$, $\bar{X} = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, тогда разрез (X, \bar{X}) состоит из дуг $(4, 3)$ и $(4, 5)$ и ребер $(2, 3), (1, 6), (4, 6)$. Удаление этих коммуникаций разбивает сеть на три не связанных между собой связные части (рис. 3.12).

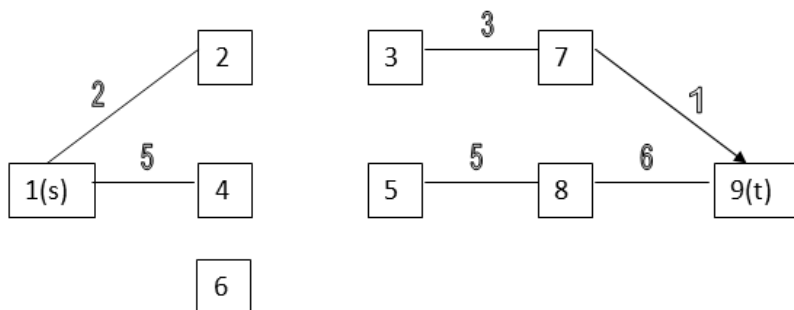


Рис. 3.12. Дорожная сеть после удаления коммуникаций разреза

Разрез (X, \bar{X}) называется **разделяющим источник и сток** (вершины s и t), если $s \in X, t \in \bar{X}$.

Пропускной способностью (величиной) разреза (X, \bar{X}) называется величина

$$C(X, \bar{X}) = \sum_{(i,j)} b_{ij},$$

где сумма берется по всем дугам (i, j) , ведущим из X в \bar{X} , и по всем ребрам (i, j) , соединяющим вершины из X с вершинами из \bar{X} .

Вообще говоря, $C(X, \bar{X}) \neq C(\bar{X}, X)$. Для сети, изображенной на рисунке 3.11, при

$$X = \{1, 2, 4\}, \quad \bar{X} = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

имеем

$$C(X, \bar{X}) = 4 + 7 + 3 + 2 + 3 = 19, \quad C(\bar{X}, X) = 4 + 3 + 2 = 9.$$

Разрез (X, \bar{X}) , разделяющий источник и сток и имеющий минимальную величину, является обобщением понятия «узкое место» смешанного пути на случай произвольной сети.

Рассмотрим теперь алгоритм решения задачи о максимальном потоке. Заметим, что указанный алгоритм непосредственно следует из доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.3. [40], [78], [79] (Форда — Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе). В любой сети величина максимального потока из источника в сток равна величине минимального (по пропускной способности) разреза, разделяющего источник и сток.

Доказательство. Очевидно, что величина максимального потока не может быть больше пропускной способности любого разреза, разделяющего вершины s и t .

Докажем и обратное утверждение. Будем предполагать, что величины b_{ij} — целые. На самом деле эта теорема верна и в более общем случае.

Итак, пусть числа x_{ij} удовлетворяют условиям (3.1)–(3.3). Если величина этого потока равна пропускной способности некоторого разреза, разделяющего источник и сток, то она равна в силу сказанного ранее пропускной способности именно минимального разреза (разреза с минимальной пропускной способностью), разделяющего источник и сток, и теорема доказана. Если же нет, то величину потока можно увеличивать до тех пор, пока она не станет равной пропускной способности некоторого разреза, разделяющего источник и сток. Отметим, что числа x_{ij} , удовлетворяющие условиям (3.1)–(3.3), всегда существуют, например $x_{ij} = 0$ для всех i и j .

Покажем, как можно увеличить поток в рассматриваемом случае.

Имея поток x_{ij} в сети, построим по нему множество вершин X по следующим правилам.

1. $s \in X$, т. е. источник является элементом множества X .
2. Если $i \in X$ и $x_{ij} < b_{ij}$, то $j \in X$, т. е. если для какой-то вершины уже известно, что она является элементом множества X , и при этом существует такая коммуникация (i, j) , что запланированный по ней поток x_{ij} (из вершины i в вершину j) меньше пропускной способности b_{ij} этой коммуникации (в данном случае поток по коммуникации (i, j) в направлении от i к j можно увеличить), то вершина j тоже является вершиной из множества X .

3. Если $i \in X$ и $x_{ji} > 0$, то $j \in X$, т. е. если $i \in X$ и поток, поступающий из некоторой вершины j в вершину i (встречный поток) можно уменьшить, то вершина $j \in X$. Вершины, не принадлежащие множеству X , образуют множество \bar{X} .

Строя множество X по указанным правилам, мы можем получить один из двух возможных случаев.

1. Вершина $t \notin X$. Тогда для всех дуг и ребер из разреза (X, \bar{X}) выполнено $x_{ij} = b_{ij}$ ($i \in X, j \in \bar{X}$) и не существует таких коммуникаций в этом разрезе, что $x_{ji} > 0$ (это следует соответственно из правил 2 и 3).

Следовательно, получен поток, величина которого равна $C(X, \bar{X})$.

Теорема доказана.

2. Здесь нам потребуется понятие квазипути: *квазипутем* будем называть такую последовательность ребер и дуг, что если убрать ориентацию с дуг, то получится цепь. То есть при движении вдоль квазипути некоторые дуги могут быть пройдены в направлении, противоположном их ориентации.

Итак, второй случай заключается в том, что сток не принадлежит X , т. е. $t \notin X$. Тогда существует квазипуть из вершины s в вершину t , в котором для каждой коммуникации встречный поток больше нуля, а попутный поток меньше ее пропускной способности.

При движении по рассматриваемому квазипути некоторые его коммуникации будут пройдены в направлении, совпадающем с направлением потока по ним (такие коммуникации называются *прямыми коммуникациями*), другие — в направлении, противоположном направлению потока (*обратные коммуникации*).

Итак, существует квазипуть из источника в сток, в котором $x_{ij} < b_{ij}$ на всех прямых коммуникациях и $x_{ji} > 0$ на всех обратных. Пусть a_1 — минимальная из разностей $b_{ij} - x_{ij}$ для всех прямых коммуникаций, если прямых коммуникаций нет, то a_1 равно бесконечности; a_2 — минимальная из величин x_{ji} по всем обратным коммуникациям, если обратных коммуникаций нет, то $a_2 = \infty$. Возьмем $a = \min\{a_1, a_2\}$. Очевидно, что $a > 0$.

Таким образом, мы можем увеличить на a поток на всех прямых коммуникациях рассматриваемого квазипути и уменьшить на a поток на всех его обратных коммуникациях. Тогда величина потока увеличится на a и новые значения x_{ij} потоков по коммуникациям будут удовлетворять условиям (3.1)–(3.3).

По новому потоку снова строим множество X и т. д. Так как величина минимального разреза есть величина конечная, а мы каждый раз увеличиваем поток не менее чем на единицу (мы же предполагали пропускные способности равными целым числам), то за конечное число шагов мы обязательно получим максимальный поток. Теорема доказана.

Пример 3.5. Найти поток максимальной величины (максимальный поток) на сети, представленной на рисунке 3.13, реализующий возможный объем перевозок материальных средств от поставщика на временный склад в условиях ограниченных пропускных способностей сети коммуникаций района ликвидации последствий чрезвычайной ситуации.

1. Строим начальный поток x_{ij} . Для этого находим несколько (можно и один) непересекающихся по коммуникациям смешанных путей из источника в сток. Для каждого из этих путей находим максимальный поток, который можно пропустить по нему, пусть его величина равна b :

$$b = \min_{(i,j)} x_{ij},$$

минимум берется по всем коммуникациям рассматриваемого пути; полагаем $x_{ij} = b$ для всех коммуникаций этого пути, причем направление подвоза по каждой коммуникации совпадает с направлением движения от начала этого пути к его концу.

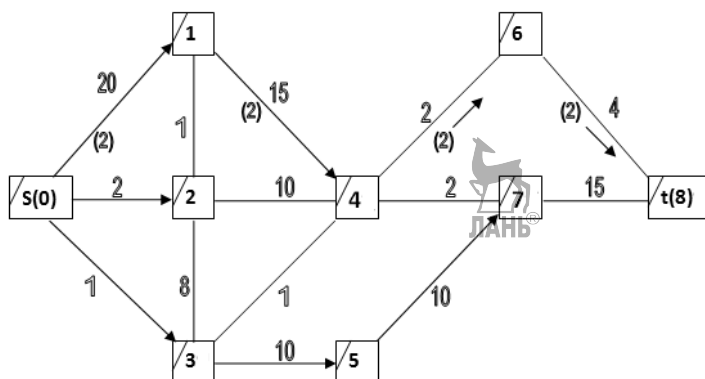


Рис. 3.13. Условия задачи о максимальном потоке и ее начальный поток

В рассматриваемом примере мы взяли смешанный путь, проходящий через вершины $s, 1, 4, 6, t$; для этого пути $b=2$. На рисунке 3.13 рядом с коммуникациями даны их пропускные способности, а объемы перевозок даны в скобках, направление перевозок там, где это необходимо, указано стрелкой. Если объем перевозок по коммуникации не указан, то он равен нулю.

2. Строим множество X , его вершины на рисунке 3.13 отмечены чертой в верхнем левом углу соответствующего прямоугольника. Для дальнейшего полезно запоминать порядок построения этого множества. Мы строили множество X в порядке, представленном на схеме (рис. 3.14).

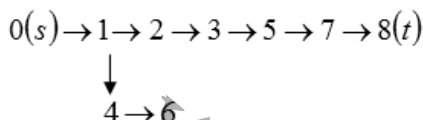


Рис. 3.14. Схема построения множества X

Конечно, порядок построения этого множества может быть и иным.

Отметим, что вершины 4 и 6 можно не проверять на принадлежность множеству X .

Мы видим, что вершина t попала в множество X , значит, поток можно увеличить.

3. Ищем квазипуть, поток вдоль которого можно увеличить. Этот квазипуть можно взять со схемы построения множества X . На этой схеме найдем последовательность вершин от s до t . Квазипуть, проходящий через вершины этой последовательности, и будет искомым:

$$(s, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 7), (7, t) \text{ (рис. 3.15).}$$

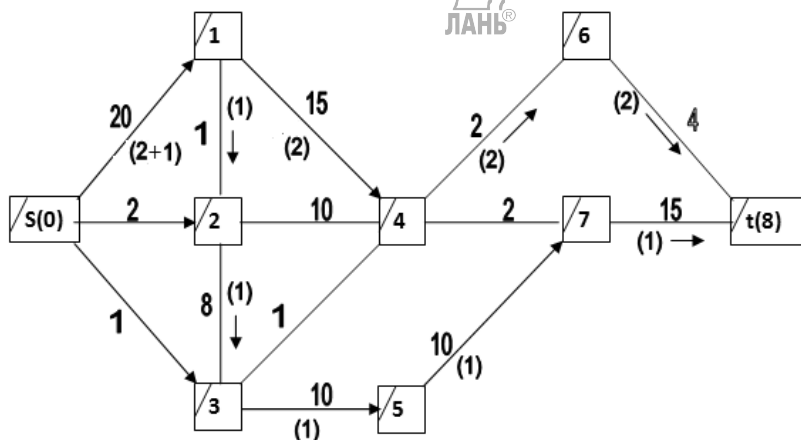


Рис. 3.15. План перевозок после первой итерации

Для этого пути $a = 1$.

Далее на рисунках, иллюстрирующих решение примера 3.5, в скобках указаны объемы перевозок по коммуникациям; стрелками отмечены направления перевозок по соответствующим коммуникациям; вершины из множества X отмечены чертой в левом верхнем углу соответствующего прямоугольника.

4. Увеличиваем потоки по коммуникациям этого квазипути на a и выполняем пункт 2 и т. д.

Решение рассматриваемого примера представлено на рисунках 3.16–3.18.

Вдоль квазипути $(s, 1), (1, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 7), (7, t)$ поток можно увеличить на 1.

Вдоль квазипути $(s, 2), (2, 4), (4, 7), (7, t)$ $a = 2$, вдоль квазипути $(s, 3), (3, 5), (5, 7), (7, t)$ $a = 1$ (см. рис. 3.16).

Вдоль квазипути $(s,1), (1,4), (4,2), (2,3), (3,5), (5,7), (7,t)$ $a = 2$. Новый поток показан на рисунке 3.17. Заметим, что ребро $(4,2)$ мы проходим в обратном направлении, поэтому поток x_{24} мы уменьшаем на 2.

Вдоль квазипути $(s,1), (1,4), (4,2), (2,3), (3,5), (5,7), (7,t)$ $a = 5$ (см. рис. 3.18).

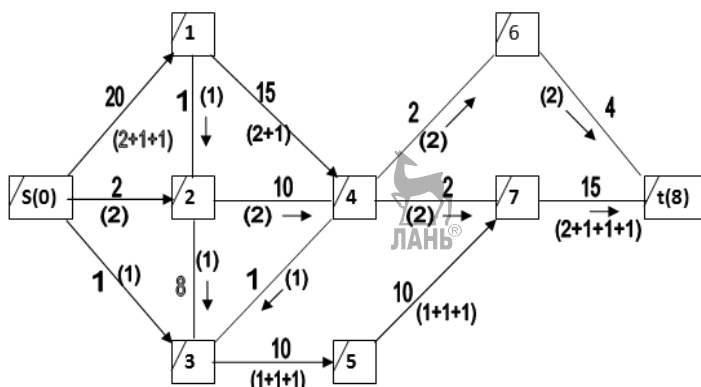


Рис. 3.16. План перевозок после второй-четвертой итераций

Напомним, что черта в углу прямоугольника, изображающего вершину, означает, что эта вершина попала в множество X . Мы видим, что после последней итерации $X = \{s, 1, 2, 4\}$ и $\bar{X} = \{3, 5, 6, 7, t\}$. Пропускная способность разреза (X, \bar{X}) равна $2 + 2 + 1 + 1 + 8 = 14$. Поток такой величины и представлен на рисунке 3.18.

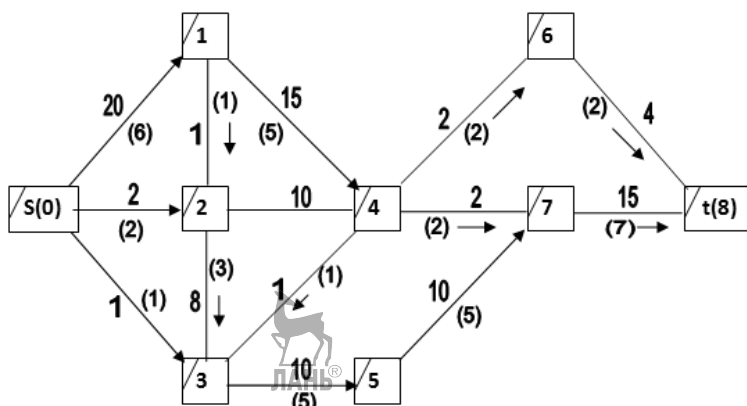


Рис. 3.17. План перевозок после пятой итерации

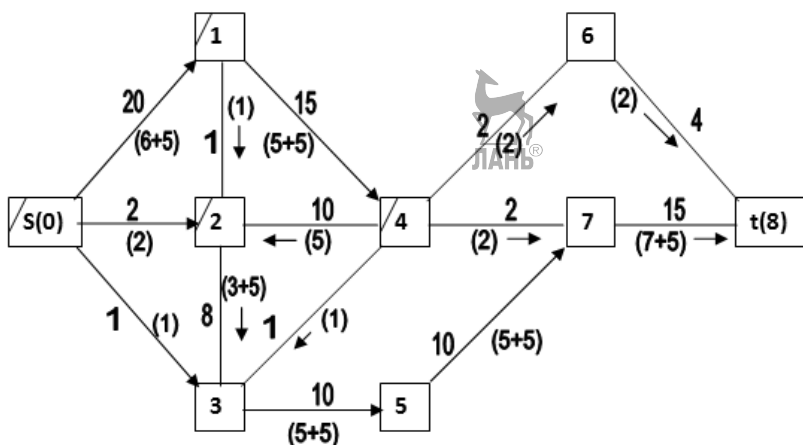


Рис. 3.18. Оптимальный план перевозок

3.7. Паросочетания в графах

Рассмотрим задачу о назначении, в которой требуется выполнить n работ силами n исполнителей. При этом все исполнители должны выполнить в точности по одной работе и все работы должны быть выполнены. Известен доход, получаемый при выполнении каждой работы каждым исполнителем. Требуется распределить работы по исполнителям так, чтобы суммарный доход от выполнения всех работ был максимальным. Эта задача называется *задачей о назначении*.

Заметим, что в случае, когда заданы, скажем, затраты на выполнение разных работ разными исполнителями, целью является такое распределение, при котором суммарные затраты минимальны. Используя в качестве характеристики назначения исполнителя на работу разность между некоторым числом и указанным затратами, мы от рассматриваемой задачи на минимум перейдем к эквивалентной задаче на максимум.

Наиболее эффективным методом решения сформулированной задачи является венгерский метод, разработанный и опубликованный Гарольдом Куном в 1955 г. [80]. Сам Кун дал алгоритму название «венгерский», потому что он был в значительной степени основан на более ранних работах двух венгерских математиков: Денеша Кенига и Эйгена Эгервари.

В литературе, см., например, [62], [63], [71], приводится ряд моделей задачи о назначениях. Мы будем рассматривать модель, использующую

двудольные графы. Сформулируем задачу о назначениях в терминах двудольных графов.

Рассмотрим двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$, у которого множество вершин V состоит из двух непересекающихся подмножеств V_1 и V_2 (рис. 3.19):

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

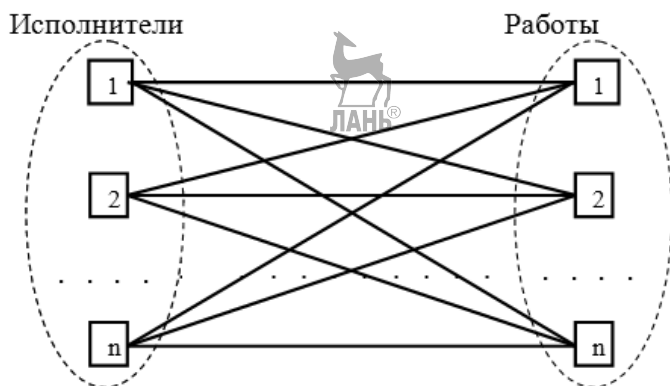


Рис. 3.19. Двудольный граф в задаче о назначениях

Вершины из V_1 соответствуют исполнителям, вершины из V_2 — работам. Каждая вершина из V_1 соединена ребром с каждой вершиной из V_2 . Эти ребра соответствуют возможным назначениям исполнителей на работы. Каждому ребру соотнесено число — доход, получаемый при выполнении соответствующей работы соответствующим исполнителем. Обозначать эти доходы будем $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$, здесь i — порядковый номер исполнителя, j — работы.

Рассмотрим взвешенный двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$ с матрицей весов $A = \|a_{ij}\|_{i=1, j=1}^{n, n}$.

Введем необходимые определения.

Паросочетанием P в двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ называется такое множество ребер из E , что любые два различных ребра из P не являются смежными.

Вершина, свободная относительно данного паросочетания, — вершина, не принадлежащая ни одному ребру этого паросочетания, остальные **вершины** называются **насыщенными**. Аналогично ребра из паросочетания называются насыщенными относительно этого паросочетания, остальные ребра — свободные. Если понятно, о каком паросочетании идет речь, то слова «относительно паросочетания» будем опускать.

Мощностью паросочетания называется количество ребер в нем.

Наибольшим (максимальным) паросочетанием называется паросочетание, мощность которого максимальна среди всех возможных паросочетаний в данном графе.

Паросочетание полное (насыщенное, совершенное) — паросочетание, в котором все вершины данного двудольного графа являются насыщенными. Если существует полное паросочетание, то любое наибольшее паросочетание является полным.

Весом ребра (i, j) называется элемент a_{ij} матрицы весов A .

Весом паросочетания P называется сумма весов его ребер.

Цепью длины k назовем цепь, содержащую k ребер.

Пусть P — паросочетание в графе $G = (V_1, V_2, E)$, P — **чередующейся цепью** относительно P называется такая последовательность

$$(x_0, y_1), (y_1, x_1), (x_1, y_2), \dots, (x_k, y_{k+1})$$

ребер, что эти ребра поочередно принадлежат и не принадлежат паросочетанию P .

Увеличивающей цепью относительно паросочетания P называется такая P -чередующаяся цепь, у которой начальная и конечная вершины не принадлежат паросочетанию. Заметим, что так как первая и последняя вершины являются свободными, то первое и последнее ребра этой цепи не принадлежат паросочетанию P .

Как и раньше, если понятно, о каком паросочетании идет речь, то слова «относительно паросочетания» будем опускать.

На рисунке 3.20 ребра $(2,4)$, $(3,5)$, $(8,9)$ образуют паросочетание, полное паросочетание образуют, например, выделенные ребра $(1,2)$, $(4,9)$, $(3,6)$, $(5,7)$, $(8,10)$; для паросочетания $P = \{(1,2), (3,5), (8,9)\}$ вершинами, свободными относительно него, являются 4, 6, 7, 10 и притом это все свободные относительно P вершины; остальные вершины — насыщенные; вес паросочетания P равен 12.

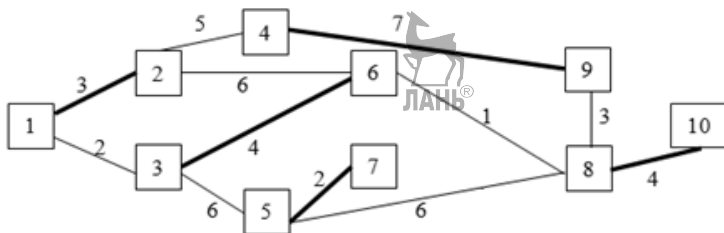


Рис. 3.20. Паросочетания, свободные и насыщенные вершины

Рассмотрим на рисунке 3.21 паросочетание $P = \{(2,6), (5,8), (4,9)\}$ (выделено жирными линиями) и следующую последовательность ребер:

$(1,2), (2,6), (6,7)$.

В этой последовательности вершины 1 и 7 — свободные, вершины 2 и 6 — насыщенные в паросочетании P , ребро $(2,6)$ принадлежит P и является насыщенным, а ребра $(1,2)$ и $(6,7)$ — свободные. Следовательно, рассматриваемая последовательность является P -чередующейся цепью. Более того, эта последовательность является увеличивающей цепью.

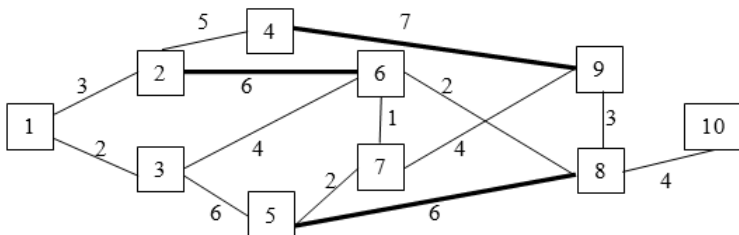


Рис. 3.21. P -чередующаяся цепь

Теорема 3.4 (Бержа). Паросочетание является наибольшим тогда и только тогда, когда не существует увеличивающих относительно него цепей.

Алгоритм Куна [62], [81] основан на теореме Бержа [68]. Его идея состоит в следующем: сначала берется пустое паросочетание, затем на каждой итерации алгоритма строится, пока это возможно, увеличивающая цепь. С ее помощью получается паросочетание, мощность которого на единицу больше мощности текущего паросочетания. Это следует из того, что первая и последняя вершины увеличивающей цепи — свободные, следовательно, ее первое и последнее ребра — свободные. Значит, число свободных ребер в этой цепи на единицу больше числа насыщенных. Включая в текущее паросочетание все свободные ребра этой цепи и исключая из него все ее насыщенные ребра, получим паросочетание на единицу мощнее текущего.

Процесс останавливается, если увеличивающую цепь найти не удастся. Полученное к этому моменту паросочетание является наибольшим.

Рассмотрим способ построения увеличивающих цепей. Для этого потребуется ввести понятия поиска в глубину и поиска в ширину (см., например, [62, 82]). Вершину с нужным свойством назовем *целевой вершиной*.

Поиск в глубину — один из методов обхода графа. Стратегия поиска в глубину, как это следует из названия, состоит в том, чтобы идти «вглубь» графа, насколько это возможно. Алгоритм поиска описывается рекурсивно: перебираем все исходящие из рассматриваемой вершины ребра. Если ребро ведет в вершину, которая не была рассмотрена ранее, то запускаем алгоритм от этой нерассмотренной вершины, а после возвращаемся и продолжаем перебирать ребра. Возврат происходит в том случае, если в рассматриваемой вершине не осталось ребер, которые ведут в нерассмотренную вершину. Если после завершения алгоритма не все вершины были рассмотрены, то необходимо запустить алгоритм от одной из нерассмотренных вершин.

Для примера рассмотрим граф на рисунке 3.22. При поиске в глубину вершины графа, изображенного на рисунке 3.22а, просматриваются в порядке, указанном на рисунке 3.22б.

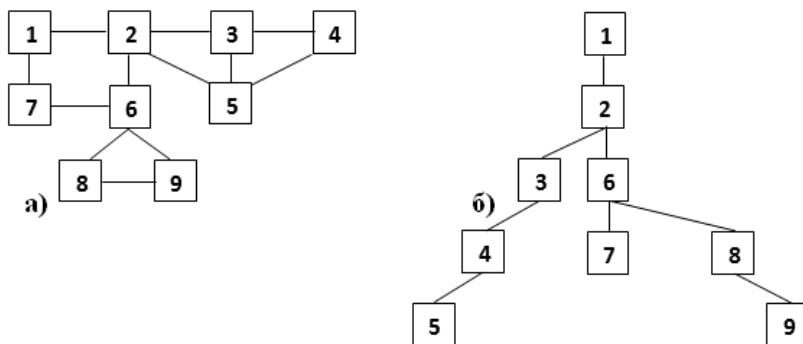


Рис. 3.22. Поиск в глубину

Поиск в ширину осуществляется путем последовательного просмотра отдельных уровней графа, начиная с вершины — источника u .

Рассмотрим все ребра, выходящие из вершины u . Если очередная вершина является целевой, то поиск завершается; в противном случае вершина добавляется в конец очереди. После того как будут проверены все ребра, выходящие из вершины u , из очереди извлекается следующий узел v и процесс повторяется.

Опишем этот алгоритм более строго.

1. Поместить вершину, с которой начинается поиск, в изначально пустую очередь.

2. Извлечь из начала очереди вершину и пометить ее как развернутую.

Если вершина является целевой, то завершить поиск с результатом «успех».

В противном случае в конец очереди добавляются все преемники вершины (все вершины, смежные с рассматриваемой), которые еще не развернуты и не находятся в очереди.

Если очередь пуста, то все вершины связного графа были просмотрены, следовательно, целевая вершина недостижима из начальной; завершить поиск с результатом «неудача».

В противном случае вернуться к п. 2.

Пример применения этого метода приведен на рисунке 3.23. При поиске в ширину вершины графа, изображенного на рисунке 3.23а, просматриваются в порядке, указанном на рисунке 3.23б.

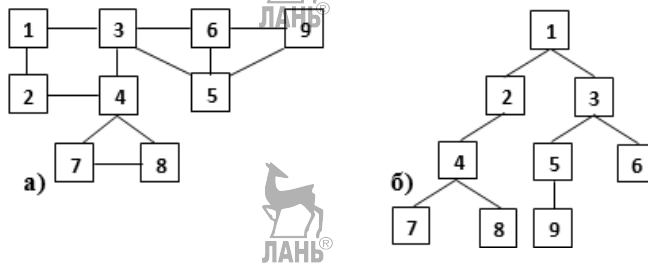


Рис. 3.23. Поиск в ширину

Вернемся к алгоритму Куна. Он просматривает все свободные вершины графа по очереди, запуская из каждой из них обход, пытающийся найти увеличивающую цепь, начинающуюся в этой вершине. Пусть для вершины v такая цепь найдена. Так как первая и последняя ее вершины являются свободными, то первое и последнее ее ребра тоже свободные и общее число ребер в такой цепи нечетно и, следовательно, число свободных ребер на единицу больше числа насыщенных. Если теперь убрать из текущего паросочетания все насыщенные ребра построенной увеличивающей цепи и добавить к нему все ее свободные ребра, то мощность полученного паросочетания увеличится на единицу. Заметим, что в полученном паросочетании вершина v , бывшая свободной, становится насыщенной.

Алгоритм просматривает все вершины v первой доли графа: $v = 1, 2, \dots, n$. Если текущая вершина v уже насыщена текущим паросочетанием, то эту

вершину пропускаем. Иначе алгоритм пытается насытить эту вершину, для чего запускается поиск увеличивающей цепи, начинающейся с этой вершины.

Поиск увеличивающей цепи осуществляется с помощью поиска в глубину или ширину. Остановимся на поиске в глубину, в этом случае обход начинается в текущей ненасыщенной вершине v первой доли. Просматриваем все ребра из этой вершины, пусть текущее ребро — это ребро (v, t_0) . Если вершина t_0 еще не насыщена паросочетанием, то, значит, мы смогли найти увеличивающую цепь: она состоит из единственного ребра (v, t_0) ; в таком случае просто включаем это ребро в паросочетание и прекращаем поиск увеличивающей цепи из вершины v .

Если t_0 уже насыщена каким-то ребром (p, t_0) , то пробуем найти увеличивающую цепь, проходящую через ребра (v, t_0) , (t_0, p) . Для этого перейдем в вершину p и будем искать увеличивающую цепь из этой вершины.

В результате этот обход, начатый из вершины v , либо найдет увеличивающую цепь, и тем самым, построив новое паросочетание, мы насытим вершину v , либо такой увеличивающей цепи не найдется (и, следовательно, вершина v не сможет стать насыщенной).

После того как все вершины $v = 1, 2, \dots, n$ будут просмотрены, текущее паросочетание будет наибольшим.

Пример 3.6. Найти наибольшее паросочетание на графе, изображенном на рисунке 3.24.

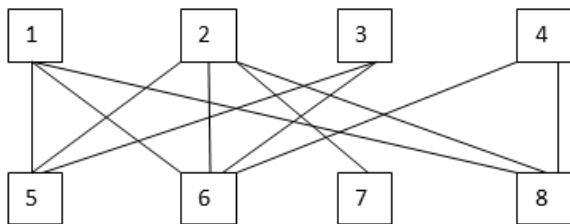


Рис. 3.24. Построение наибольшего паросочетания

Решение. Текущее паросочетание будем обозначать буквой P . Построение наибольшего паросочетания состоит из следующих шагов.

1. $v = 1$. Первое по порядку ребро с началом в этой вершине — это ребро $(1, 5)$. Вершины 1 и 5 становятся насыщенными, $P = \{(1, 5)\}$.

2. $v = 2$. Первое по порядку ребро с началом в вершине 2 — это ребро $(2, 5)$, но вершина 5 уже насыщенная, она насыщена ребром $(1, 5)$. Ищем увеличивающую цепь, проходящую через ребра $(2, 5)$ и $(5, 1)$. В качестве

вершины p мы имеем вершину 1. Первое по порядку свободное ребро с началом в вершине 1 — это ребро (1,6). Получили увеличивающую цепь (2,5), (5,1), (1,6). Ребра (2,5) и (1,6) — свободные, ребро (5,1) — насыщенное. Исключая из рассматриваемого паросочетания ребро (5,1) и добавляя к нему ребра (2,5) и (1,6), получаем новое текущее паросочетание $P = \{(2,5), (1,6)\}$.

3. Из вершины $v=3$ порядок построения увеличивающей цепи получается на графе, представленном на рисунке 3.25а. Выделены ребра, насыщенные в паросочетании, полученном на предыдущем шаге.

Новое текущее паросочетание $P = \{(3,5), (2,6), (1,8)\}$.

4. Из вершины $v=4$ порядок построения увеличивающей цепи получается на графе, представленном на рисунке 3.25б.

Новое текущее паросочетание $P = \{(4,6), (2,7), (3,5), (1,8)\}$ является насыщенным (оно же максимальное).



Рис. 3.25. Увеличивающие пути из вершин 3 и 4

Заметим, что число вершин в долях графа может быть и разным.

При использовании двудольных графов задача об оптимальном назначении состоит в отыскании паросочетания максимального веса в заданном взвешенном двудольном графе [62], [68], [83]. Мы изложим алгоритм решения этой задачи, следуя в основном работе [84].

Определение 3.1. *Допустимой вершинной разметкой* взвешенного двудольного графа $G = (V_1, V_2, E)$ называется функция f , соотносящая каждой вершине v графа G действительное число $f(v)$ так, что $f(x_i) + f(y_j) \geq a_{ij}$,

$x_i \in V_1, y_j \in V_2$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$. Число $f(v)$ будем называть *меткой вершины* v .

Граф $G = (V_1, V_2, E)$ с допустимой вершинной разметкой f будем обозначать через $G = (V_1, V_2, E, f)$.

Замечание 3.4. Допустимая вершинная разметка существует в каждом взвешенном графе $G = (V_1, V_2, E)$. Ее можно получить, например, положив

$$\begin{cases} f(x_i) = \max_{1 \leq k \leq n} a_{ik}, & i = 1, 2, \dots, n, \\ f(y_j) = 0, & j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.5)$$

Определение 3.2. Пусть $G = (V_1, V_2, E, f)$ — взвешенный граф с допустимой вершинной разметкой f . **Подграфом равенств графа** $G = (V_1, V_2, E, f)$ называется его подграф, определяемый следующим образом: ребро (x_i, y_j) графа $G = (V_1, V_2, E, f)$ является ребром подграфа равенств тогда и только тогда, когда $f(x_i) + f(y_j) = a_{ij}$. Подграф равенств графа $G = (V_1, V_2, E, f)$ мы будем обозначать через G_{Af} .

Рассмотрим граф, изображенный на рисунке 3.26.

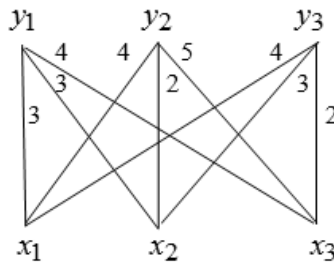


Рис. 3.26. Взвешенный двудольный граф

Его матрица весов

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 3.27 представлен граф, изображенный на рисунке 3.26, с допустимой вершинной разметкой, задаваемой формулами (3.5) (метки вершин указаны в скобках), на рисунке 3.28 — подграф равенств этого графа. Излагаемый далее алгоритм Куна — Манкреса базируется на следующей лемме.

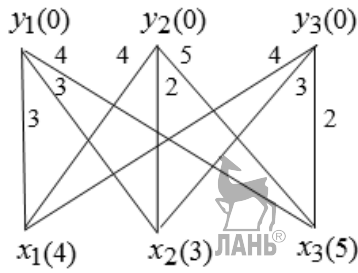


Рис. 3.27. Граф с допустимой вершинной разметкой

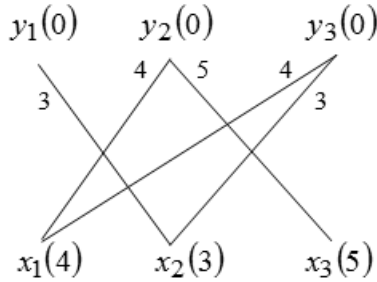


Рис. 3.28. Подграф равенств графа с рисунка 3.27 с допустимой вершинной разметкой

Лемма 3.1 (О подграфе равенств). Пусть f — допустимая разметка взвешенного графа $G = (V_1, V_2, E, f)$. Если подграф равенств графа $G = (V_1, V_2, E, f)$ содержит совершенное паросочетание P , то P является паросочетанием максимального веса в графе $G = (V_1, V_2, E)$.

Доказательство. Пусть P — совершенное паросочетание в графе $G_{A, f}$, а значит, и в графе $G = (V_1, V_2, E)$. Пусть Q — другое совершенное паросочетание в $G = (V_1, V_2, E)$. Напомним, что вес графа — это сумма весов входящих в него ребер. Используя определение допустимой разметки и тот факт, что в совершенном паросочетании каждая вершина графа инцидентна ровно одному ребру, получаем, что вес $w(Q)$ паросочетания Q равен весу $w(P)$ паросочетания P :

$$\begin{aligned}
 w(Q) &= \sum_{(x_i, y_j) \in Q} a_{ij} = \sum_{(x_i, y_j) \in Q} (f(x_i) + f(y_j)) = \sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{j=1}^n f(y_j) = \\
 &= \sum_{(x_i, y_j) \in P} (f(x_i) + f(y_j)) = w(P),
 \end{aligned}$$

откуда следует максимальность P .

Изложим алгоритм Куна — Манкреса решения задачи о назначении.

1. Задать в графе $G = (V_1, V_2, E)$ произвольную допустимую разметку f и найти подграф равенств G_{Af} графа $G = (V_1, V_2, E, f)$.

2. Найти максимальное паросочетание P в графе G_{Af} и множество F свободных относительно P вершин доли V_1 .

3. Если $F = \emptyset$, перейти на шаг 7.

4. Найти все чередующиеся цепи в графе G_{Af} , начинающиеся в F , положить S и T равными множеству всех вершин соответственно доли V_1 и V_2 , встретившиеся в этих цепях.

5. Если в T нет свободных вершин, положить

$$\Delta = \min_{x_i \in S, y_j \in V_2 \setminus T} \{f(x_i) + f(y_j) - a_{ij}\}$$
$$f(x) = f(x) - \Delta \text{ для всех } x \in S,$$
$$f(y) = f(y) + \Delta \text{ для всех } y \in T,$$

найти новый граф G_{Af} и вернуться на шаг 3. Иначе, выполнять шаг 6.

6. Увеличить P , присоединив к нему все ненасыщенные ребра из найденной увеличивающей цепи и удалив из него все насыщенные ребра из этой цепи, и вернуться на шаг 3.

7. Останов.

Пример 3.7. Найти оптимальное (максимального веса) паросочетание в графе $G = (V_1, V_2, E)$ с долями

$$V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ и } V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$$

и матрицей весов

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 10 & 6 \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1. Зададим допустимую разметку f_1 в соответствии с формулами (3.5):

$$f_1(x_1) = 10, f_1(x_2) = 8, f_1(x_3) = 7, f_1(x_4) = 5, f_1(x_5) = 6,$$

$$f_1(y_1) = 0, f_1(y_2) = 0, f_1(y_3) = 0, f_1(y_4) = 0, f_1(y_5) = 0.$$

Найдем в графе $G = (V_1, V_2, E)$ подграф равенств G_{Af_1} (см. рис. 3.29, возле каждой вершины в скобках указана ее метка).

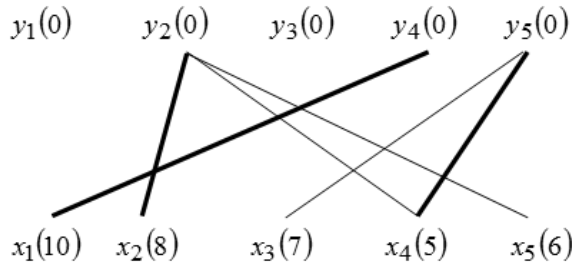


Рис. 3.29. Подграф равенств G_{Af_1}

1.2. Рассмотрим максимальное паросочетание P_1 в графе G_{Af_1} , выделенное на рисунке 3.29 жирными линиями:

$$P_1 = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_4, y_5)\}, F_1 = \{x_3, x_5\}.$$

1.3. $F_1 \neq \emptyset$.

1.4. Строим все чередующиеся цепи в G_{Af_1} , начинающиеся с вершин из F_1 :

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_2 - x_2 \text{ и } x_5 - y_2.$$

Получаем, что

$$S = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, T = \{y_2, y_5\}, V_2 \setminus T = \{y_1, y_3, y_4\}.$$

1.5. Так как в T нет свободных вершин, то вычисляем Δ , которое, как оказывается, равно единице.

Находим новую вершинную разметку f_2 :

$$f_2(x_1) = 10, f_2(x_2) = 7, f_2(x_3) = 6, f_2(x_4) = 4, f_2(x_5) = 5,$$

$$f_2(y_1) = 0, f_2(y_2) = 1, f_2(y_3) = 0, f_2(y_4) = 0, f_2(y_5) = 1.$$

Строим граф G_{Af_2} (рис. 3.30) и возвращаемся на шаг 3.

2.3. $F_2 = \{x_3, x_5\}$.

2.4. Строим все чередующиеся цепи в G_{Af_2} , начинающиеся с вершин из F_2 :

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_2 - x_2 - y_4 - x_1, x_5 - y_2 - x_2 - y_4 - x_1,$$

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_4 - x_1.$$

Получаем, что

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, T = \{y_2, y_4, y_5\}, V_2 \setminus T = \{y_1, y_3\}.$$

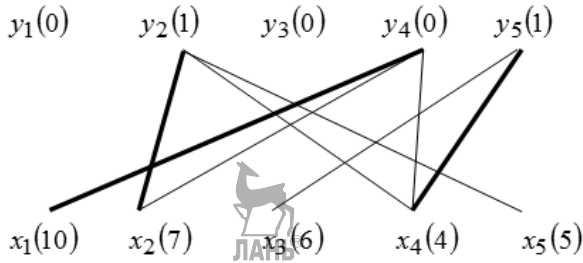


Рис. 3.30. Подграф равенств G_{Af_2}

2.5. Так как в T нет свободных вершин, то вычисляем Δ , которое равно единице. Находим новую вершинную разметку f_3 :

$$f_3(x_1)=9, f_3(x_2)=6, f_3(x_3)=5, f_3(x_4)=3, f_3(x_5)=4,$$

Строим граф G_{Af_3} (рис. 3.31) и возвращаемся на шаг 3.

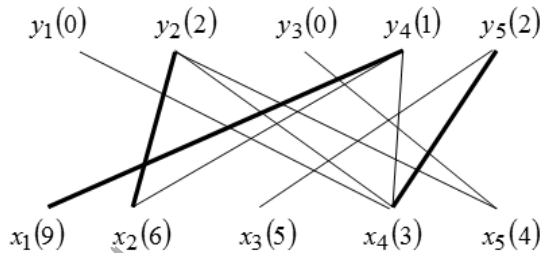


Рис. 3.31. Подграф равенств

3.3. $F_3 = \{x_3, x_5\}$.

3.4. Строим все чередующиеся цепи в G_{Af_3} , начинающиеся с вершин из F_3 :

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_2 - x_2 - y_4 - x_1, x_5 - y_2 - x_2 - y_4 - x_1, \\ x_3 - y_5 - x_4 - y_4 - x_1, x_3 - y_5 - x_4 - y_1, x_5 - y_3.$$

Получаем, что

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, T = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, V_2 \setminus T = \emptyset.$$

3.5. В T есть свободные вершины — y_1, y_3 , поэтому выполняем п. 6.

3.6. Заменяем в найденных увеличивающих цепях

$$x_3 - y_5 - x_4 - y_1 \text{ и } x_5 - y_3$$

ненасыщенные ребра на насыщенные, получаем паросочетание (рис. 3.32):

$$P_2 = \{(x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_3, y_5), (x_4, y_1), (x_5, y_3)\},$$

возвращаемся на шаг 3.

4.3. $F_4 = \emptyset$, работа алгоритма закончена.

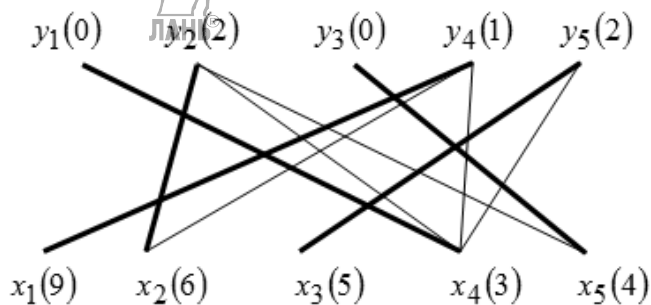


Рис. 3.32. Подграф равенств G_{A_3} с паросочетанием P_2

Алгоритм Эдмондса является обобщением алгоритма Куна на случай произвольных неориентированных графов без петель и кратных ребер.

Основная проблема заключается в том, как находить увеличивающую цепь, если в графе имеются циклы нечетной длины. Нас интересуют только те циклы длиной $2k + 1$, в которых имеется k насыщенных ребер. В таком цикле есть ровно одна вершина, не насыщенная ребрами этого цикла, назовем ее *базой*. К базовой вершине подходит чередующаяся цепь четной (возможно, нулевой) длины, начинающаяся в свободной (т. е. не принадлежащей паросочетанию) вершине, и эта цепь называется *стеблем*. Наконец, подграф, образованный «насыщенным» нечетным циклом, называется *цветком* (рис. 3.33).

Сначала строится увеличивающая цепь для некоторой свободной вершины a . Построение этой цепи прекращается, если:

- к ней нельзя добавить больше ни одной вершины;
- к ней добавляется свободная вершина, т. е. обнаруживается наличие увеличивающей цепи;
- исследуемое ребро замыкает цикл (цветок).

Обнаружение такого ребра означает, что найден цветок (рис. 3.33). Он состоит из чередующейся цепи P , соединяющей исходную вершину a

с некоторой вершиной b , и нечетного цикла C . При этом b является единственной общей вершиной цепи P и цикла C , а C можно рассматривать как замкнутую чередующуюся цепь, с началом и концом в b .

Обнаружив цветок, превращаем все насыщенные ребра цепи P в свободные, а свободные — в насыщенные.

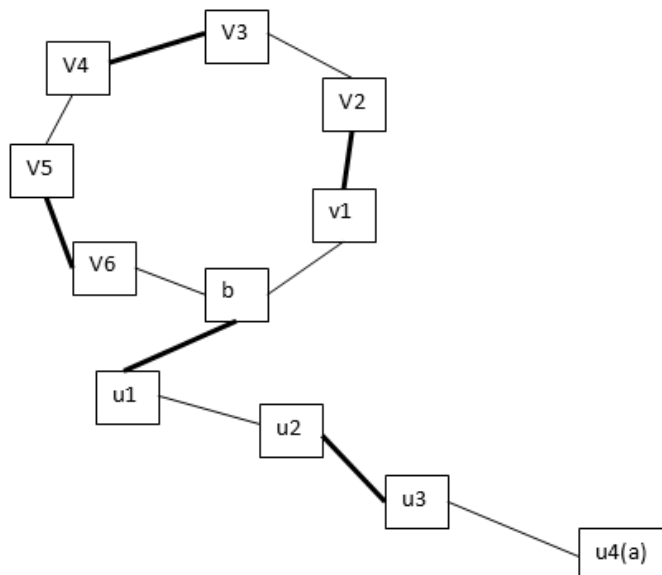


Рис. 3.33. Цветок со стеблем

После этого преобразования множество насыщенных ребер является паросочетанием той же мощности, но вместо вершины a свободной вершиной становится вершина b . Таким образом, на цикле C будет одна свободная вершина, и этот цикл является чередующимся циклом, который начинается и заканчивается в этой вершине. Оказывается, что такой цикл можно сжать в одну вершину, не теряя информации о существовании увеличивающих путей.

Операция сжатия подграфа H графа G состоит в следующем. Все вершины этого подграфа удаляются из графа, а вместо них добавляется новая вершина. Эта новая вершина соединяется ребрами с теми и только теми из оставшихся вершин графа G , которые были смежными хотя бы с одной вершиной подграфа H . *Граф*, получаемый в результате такой операции, будем обозначать через G/H .

Теорема 3.5. Пусть M — паросочетание в графе G , C — цикл длины $2k + 1$ в этом графе, причем на цикле имеется k насыщенных ребер и одна свободная вершина. Пусть M' — паросочетание в графе $G' = G/H$, составленное из всех ребер паросочетания M , не принадлежащих циклу C . Паросочетание M является наибольшим в графе G тогда и только тогда, когда M' — наибольшее паросочетание в графе G' .

Пример 3.8. Пусть при поиске в глубину (рис. 3.35) на графе (рис. 3.34) обнаружен цветок, изображенный на рисунке 3.34.

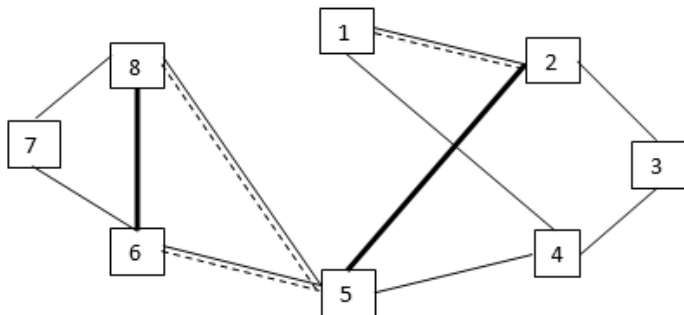


Рис. 3.34. Цветок, пунктиром отмечены ненасыщенные ребра, жирными линиями — насыщенные

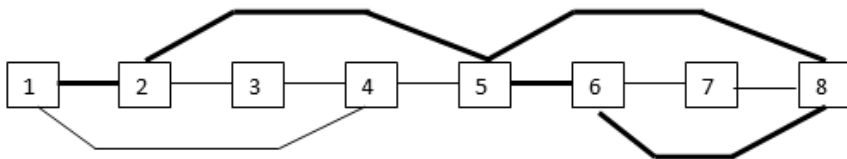


Рис. 3.35. Поиск в глубину на графе (рис. 3.34)

Отметим, что цикл $2-3-4-5-2$ состоит из четного числа ребер и его стебель содержит нечетное число ребер. Циклы $1-2-5-4-1$, $1-2-3-4-1$ и $5-6-7-8-5$ имеют четные стебли и сами состоят из четного числа ребер, цикл $6-7-8-6$ имеет нечетное число ребер, но его стебли — $1-2-3-4-5-6$ и $1-2-5-6$ содержат нечетное число ребер. Сформулированным ранее условиям удовлетворяет цветок с циклом $5-6-8-5$ и стеблем $1-2-5$ (рис. 3.34).

Меняя насыщенные ребра на ненасыщенные и наоборот, получаем граф, изображенный на рисунке 3.36.

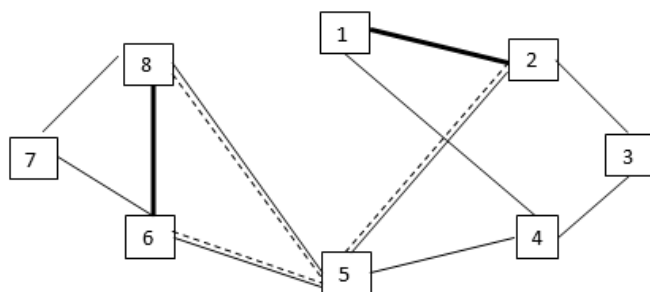


Рис. 3.36. Цветок после замены насыщенных ребер стебля ненасыщенными и наоборот

Заменяем цветок (подграф с вершинами 5, 6, 8) одной вершиной «ц». Эта вершина соединяется ребрами с теми и только теми из оставшихся вершин данного графа, которые были смежными хотя бы с одной из вершин 5, 6, 8. На полученном графе построим максимальное паросочетание (рис. 3.37).

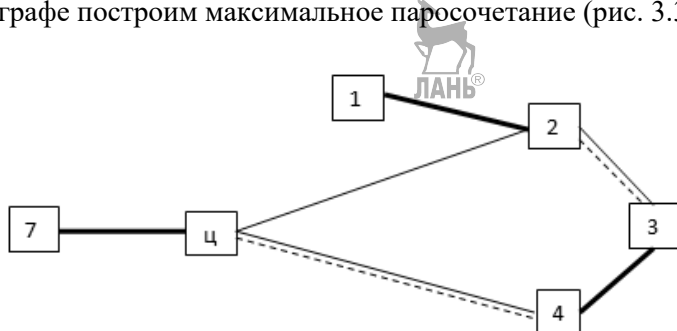


Рис. 3.37. Максимальное паросочетание после сжатия цветка

Восстанавливаем цветок. Заметим, что при этом нам потребовалось изменить набор насыщенных ребер цветка, не изменив их числа. Результат представлен на рисунке 3.38.

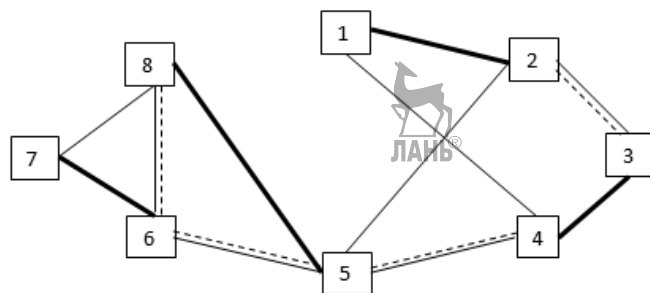


Рис. 3.38. Максимальное паросочетание

Заканчивая обсуждение упомянутых в этих разделах задач, отметим, что мы затронули далеко не все задачи теории графов, в которых веса ребер часто нельзя считать заданными однозначно. Круг выбранных здесь для изучения задач определялся интересами авторов и потребностями в их научно-исследовательской деятельности. Нам представляется весьма интересным и полезным осуществление исследования не затронутых в данной монографии задач теории графов.

Рассмотрим теперь упомянутые выше задачи, предполагая, что веса ребер соответствующих графов определены нечетко и заданы нечеткими числами.

3.8. Сетевой график с нечеткими продолжительностями работ

Рассмотрим сетевой график (см. п. 3.3). Будем предполагать, что продолжительность работы (i, j) является нечетким числом $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$, где a_{ij} — минимально возможное значение времени выполнения работы, b_{ij} — максимально возможное время выполнения работы, $c_{ij} = b_{ij}$. Функцию принадлежности нечеткого числа d_{ij} обозначим $\mu_{ij}(u)$ (рис. 3.40), где u — элемент универсального множества $U = [0, \infty)$. Будем предполагать, что на отрезке $[a_{ij}, b_{ij}]$ функция $\mu_{ij}(u)$ строго возрастает.

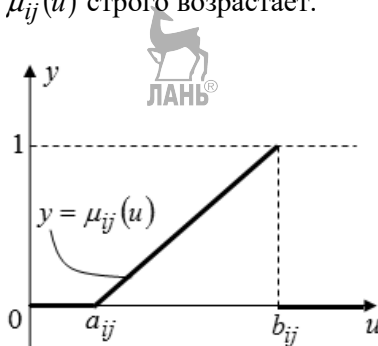


Рис. 3.39. Возможный график функции $\mu_{ij}(u)$

Величину $\mu_{ij}(u)$ будем трактовать как уверенность в том, что работа (i, j) за время, не большее u , будет выполнена, как показатель истинности нечеткого высказывания «за время, не большее u , работа (i, j) будет выполнена».

Оценим качество плана проведения работ, формализованного в виде сетевого графика. В качестве функции принадлежности плана нечеткой цели

будем использовать степень достижения своевременности выполнения плана проведения работ.

Рассмотрим, следуя Заде и Беллману [9], [34], задачу нечеткого математического программирования с нечетким множеством допустимых планов \widehat{X} и нечетко определенной целью.

В качестве универсального множества X , на котором определено нечеткое множество допустимых планов, будем рассматривать множество всех возможных сетевых графиков, заданных на рассматриваемом графе. Функцию принадлежности нечеткого множества \widehat{X} обозначим $\mu_{\widehat{X}}(x)$, где $x \in X$.

Нечетко определенная цель формализуется нечетким множеством \widehat{X}_c с функцией принадлежности $\mu_c(x)$, $x \in X$.

Планы из X являются сетевыми графиками, заданными на одном и том же графе и отличающимися друг от друга временем выполнения работ. Время выполнения работы (i, j) будем обозначать u_{ij} , подчеркнем, что здесь речь идет о «четком» значении времени выполнения работы. Для планов из множества X выполняются неравенства: $a_{ij} \leq u_{ij} \leq b_{ij}$. Тогда степень нашей уверенности в том, что работа (i, j) будет выполнена за время, не большее u , равна $\mu_{ij}(u)$. Поскольку допустимые планы отличаются друг от друга только продолжительностями выполнения работ, то для полной характеристики допустимого плана достаточно указать только эти продолжительности работ.

Если число дуг в рассматриваемом графе равно n , то каждому допустимому сетевому графику $x \in \widehat{X}$ соотнесем вектор значений продолжительностей работ $u(x)$:

$$u(x) = (u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \dots, u_{i_n j_n}),$$

где $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$ — все работы на сетевом графике; $u_{i_k j_k}$ — четкое значение продолжительности (предельной продолжительности) работы (i_k, j_k) .

Тогда в соответствии с формулой (1.1):

$$\mu_{\widehat{X}}(x) = \min_k \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}).$$

Обозначения:

$t(x)$ — продолжительность критического пути на рассматриваемом графе в случае, когда продолжительность работы (i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, равна $u_{i_k j_k}$;

T^{min} — продолжительность критического пути на рассматриваемом графе в случае, когда продолжительность работы (i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, равна $a_{i_k j_k}$; сам план с такими продолжительностями работ обозначим x^{min} .

Тогда

$$u(x^{min}) = (a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_n j_n});$$

T^{max} — продолжительность критического пути на рассматриваемом графе в случае, когда продолжительность работы (i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, равна $b_{i_k j_k}$; сам план с такими продолжительностями работ обозначим x^{max} .

Тогда

$$u(x^{max}) = (b_{i_1 j_1}, b_{i_2 j_2}, \dots, b_{i_n j_n}).$$

В качестве функции принадлежности $\mu_{\hat{C}}(x)$ допустимого плана x нечеткой цели \hat{C} будем использовать показатель близости рассматриваемого плана к самому эффективному плану — плану x^{min} , положим

$$\mu_{\hat{C}}(x) = \frac{T^{max} - t(x)}{T^{max} - T^{min}}. \quad (3.6)$$

Замечание 3.5. Если мы хотим усилить (уменьшить) роль эффективности варианта, то можно, следуя, например, [85], использовать степенные функции (3.7), т. е. положить

$$\mu_{\hat{C}}(x) = \frac{(T^{max} - t(x))^k}{(T^{max} - T^{min})^2}. \quad (3.7)$$

При $k=2$ график формулы (3.7) представлен на рисунке 3.40.

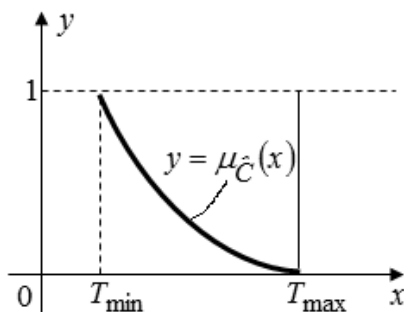


Рис. 3.40. График $\mu_{\hat{C}}(x)$ при $k = 2$ (формула (3.7))

Можно, конечно, сделать это и как-то иначе, в зависимости от имеющейся у лица, принимающего решение, информации.

Решить задачу — значит достигнуть цели с той или иной степенью уверенности, причем следует учитывать и степень выполнения ограничений (степень принадлежности плана множеству \hat{X}). Таким образом, в качестве нечеткого решения задачи рассматривается пересечение нечеткой цели и нечеткого множества допустимых планов, т. е. нечеткое множество \hat{D} функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{D}}(x) = \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{C}}(x)\}. \quad (3.8)$$

При таком определении решения остается вопрос о том, какой план выбрать. Различные подходы к ответу на этот вопрос предлагаются, например, в работах [9], [34]. Одним из наиболее распространенных способов является выбор альтернативы, имеющей максимальную степень принадлежности нечеткому решению, т. е. альтернативы x^0 , для которой

$$\mu_{\hat{D}}(x^0) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{D}}(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{C}}(x)\}. \quad (3.9)$$

Будем предполагать, что число работ на сетевом графике, как и раньше, равно n , исходное событие имеет номер 1, завершающее — m .

Пусть x^0 — оптимальный план, т. е.

$$\mu_{\hat{D}}(x^0) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{D}}(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{C}}(x)\},$$

и пусть

$$\begin{aligned} u(x^0) &= (u_{i_1 j_1}^0, u_{i_2 j_2}^0, \dots, u_{i_n j_n}^0), \\ \mu_{\hat{X}}(x^0) &= \min_k \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = \mu_{i_v j_v}(u_{i_v j_v}^0) = \alpha, \\ \mu_{\hat{C}}(x^0) &= A, \\ t(x^0) &= \theta. \end{aligned}$$

Лемма 3.2. $\alpha \leq A$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha > A$, тогда $\mu_{\hat{D}}(x^0) = A$. Пусть $\alpha - A = \delta$. Найдем такие $u'_{i_k j_k}$, что

$$\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \alpha - 0,5\delta = A + 0,5\delta, k = 1, 2, \dots, n.$$

Понятно (см. рис. 3.39), что $u'_{i_k j_k} < u_{i_k j_k}$ при любом k . Рассмотрим наш сетевой график, но с продолжительностями работ, равными $u'_{i_k j_k}$. Тогда

$$u(x') = (u'_{i_1 j_1}, u'_{i_2 j_2}, \dots, u'_{i_n j_n}).$$

Так как продолжительности всех работ уменьшились, то и продолжительность критического пути на получившемся сетевом графике уменьшилась, а значит, значение функции принадлежности нечеткой цели увеличилось и стало равным $A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, т. е. $\mu_{\hat{C}}(x') = A + \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{D}}(x') &= \min\{\mu_{\hat{X}}(x'), \mu_{\hat{C}}(x')\} = \min\{\min_k \mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}); \mu_{\hat{C}}(x')\} = \\ &= \min\{A + 0,5\delta; A + \varepsilon\} > A. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\max_{x \in X} \mu_{\hat{D}}(x) > A,$$

что противоречит нашему предположению. Это завершает доказательство утверждения леммы.

Лемма 3.3. $\alpha = A$.

Доказательство. Ранее было доказано (см. лемму 3.2), что $\alpha \leq A$. Предположим, что $\alpha < A$, заметим, что в этом случае $\max_{x \in X} \mu_{\hat{D}}(x) = \alpha$.

Пусть $A - \alpha = \delta > 0$.

Отметим, что

$$\mu_{\hat{C}}(x^0) = \frac{T^{\max} - t(x^0)}{T^{\max} - T^{\min}} = A > (A - 0,5\delta),$$

тогда, если

$$\Delta = T^{\max} - t(x^0) - (A - 0,5\delta)(T^{\max} - T^{\min}), \quad (3.10)$$

то $\Delta > 0$.

Рассмотрим допустимый план

$$x' = (u'_{i_1 j_1}, u'_{i_2 j_2}, \dots, u'_{i_n j_n}),$$

у которого

$$\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) + \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $0 < \varepsilon \leq 0,5\delta$ и такое, что

$$u'_{i_k j_k} \leq u_{i_k j_k}^0 + \frac{1}{n}(T^{\max} - t(x^0) - (A - 0,5\delta)(T^{\max} - T^{\min})). \quad (3.11)$$

Для этого допустимого плана

$$\mu_{\bar{X}}(x') = \min_k \mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \min_k (\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) + \varepsilon) > \alpha.$$

Кроме того, так как продолжительность каждой работы увеличилась не более чем на Δ , то продолжительность критического пути $t(x')$ удовлетворяет неравенству

$$t(x') \leq t(x^0) + T^{\max} - t(x^0) - (A - 0,5\delta)(T^{\max} - T^{\min}),$$

что следует из (3.11).

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{C}}(x') &= \frac{T^{\max} - t(x')}{T^{\max} - T^{\min}} > (A - 0,5\delta) \frac{T^{\max} - T^{\min}}{T^{\max} - T^{\min}} = \\ &= A - 0,5\delta = \alpha + 0,5\delta > \alpha. \end{aligned}$$

Итак,

$$\mu_{\hat{D}}(x') = \min\{\mu_{\bar{X}}(x'), \mu_{\hat{C}}(x')\} > \alpha,$$

что противоречит оптимальности плана x^0 . Полученное противоречие доказывает справедливость рассматриваемого утверждения.

Теорема 3.6. Существует такой план

$$x^* \in X, u(x^*) = (u_{i_1 j_1}^*, u_{i_2 j_2}^*, \dots, u_{i_n j_n}^*),$$

что

$$\mu_{\hat{D}}(x^*) = \mu_{\hat{D}}(x^0) = A \text{ и } \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) = A \text{ для } k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Построим план x^* . Для этого рассмотрим план x^0 . Из леммы 3.3 следует, что $\mu_{\bar{X}}(x^0) = A$. Если для работы (i_k, j_k) выполняется неравенство $\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) > A$, то уменьшим ее продолжительность так, чтобы значение ее функции принадлежности стало равно A , $k = 1, 2, \dots, n$. Обозначим этот план через x^* .

Для этого плана $\mu_{\bar{X}}(x^*) = A$.

Так как продолжительности всех работ не увеличились, то и продолжительность критического пути на получившемся сетевом графе не возросла, следовательно, $\mu_{\hat{C}}(x^*) \geq A$.

Отсюда $\mu_{\hat{D}}(x^*) = A$.

Что и требовалось доказать.

Свойство, сформулированное в теореме 3.6, позволяет строить простой алгоритм приближенного построения оптимального сетевого графика, т. е.

графика с максимальным значением функции $\mu_{\hat{D}}(x)$ — функции принадлежности нечеткого решения.

Алгоритм заключается в следующем.

Задавшись числом шагов N , полагаем $\Delta = \frac{1}{N}$. На шаге с номером k , $k = 0, 1, \dots, N$, находим такие продолжительности работ u_{ij} , что

$$\mu_{ij}(u_{ij}) = k \cdot \Delta.$$

Получившийся сетевой график обозначим x^k , имеем: $\mu_{\hat{X}}(x^k) = k \cdot \Delta$. Вычисляем $\mu_{\hat{C}}(x^k)$ и, наконец, $\mu_{\hat{D}}(x^k)$. Сетевой график x^{k_0} , для которого

$$\mu_{\hat{D}}(x^{k_0}) = \max_{0 \leq k \leq N} \mu_{\hat{D}}(x^k)$$

является приближенным ответом на вопрос об оптимальном графике.

Пример 3.9. Необходимо построить сетевой график выполнения комплекса работ по реконструкции регионального центра управления. Список работ и вся необходимая информация о них представлены в таблицах 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1. Данные о логических связях между работами

№ п/п	Наименование работы	Предшествующие работы
1	Подготовительные работы	–
2	Демонтаж старого оборудования	–
3	Ремонтные строительно-монтажные работы	1
4	Подготовка фундамента под новое оборудование	1, 2
5	Подготовка к монтажу нового оборудования	1
6	Электротехнические работы	1
7	Монтаж нового оборудования	4, 5
8	Подключение оборудования к электросети	6, 7
9	Наладка и технологические испытания оборудования	8
10	Отделочные работы	3, 6, 7
11	Приемка центра в эксплуатацию	9, 10

Таблица 3.2. Данные о продолжительности работ

№ п/п	Наименование работы	Обозначение работы (i, j)	Данные о продолжительности работ (ч)	
			a_{ij}	b_{ij}
1	Подготовительные работы	(1,2)	10	20
2	Демонтаж старого оборудования	(1,3)	6	8
3	Ремонтные строительно-монтажные работы	(2,6)	60	210
4	Подготовка фундамента под новое оборудование	(3,4)	100	105
5	Подготовка к монтажу нового оборудования	(2,4)	50	90
6	Электротехнические работы	(2,5)	45	75
7	Монтаж нового оборудования	(4,5)	40	45
8	Подключение оборудования к электросети	(5,7)	17	22
9	Наладка и технологические испытания оборудования	(7,8)	30	35
10	Отделочные работы	(6,8)	15	45
11	Приемка центра в эксплуатацию	(8,9)	5	15

Будем предполагать, что продолжительности работ являются нечеткими числами, их функции принадлежности, как это часто делается, будем приближать линейными функциям (см. рис. 3.39), т. е. будем считать, что

$$\mu_{ij}(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leq a_{ij}, \\ \frac{u - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}, & \text{если } a_{ij} \leq u \leq b_{ij}, \\ 0, & \text{если } u \geq b_{ij}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Здесь b_{ij} — время, за которое работа (i, j) будет обязательно выполнена; $\mu_{ij}(b_{ij})=1$, т. е. наша уверенность в том, что этого времени хватит для выполнения работы, равна единице. За время большее a_{ij} работа с определенной, большей нуля, степенью уверенности будет выполнена, за время a_{ij} и меньшее ее не выполнить.

На основании данных из таблицы 3.1 строим сетевой график (без указания продолжительностей работ), он изображен на рисунке 3.41, здесь рядом со стрелками в скобках указаны номера соответствующих работ.

В качестве функции принадлежности рассматриваемых планов нечеткой цели будем рассматривать функцию

$$\mu_C(x) = \frac{T^{max} - t(x)}{T^{max} - T^{min}}.$$

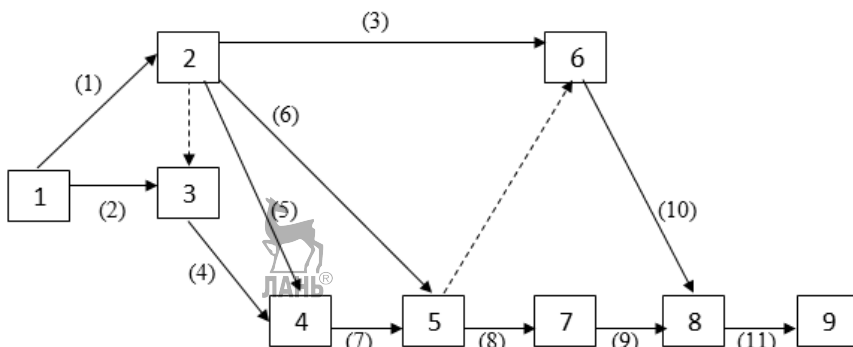


Рис. 3.41. Графическое изображение логической связи работ

Сетевой график с продолжительностями работ, которые соответствуют значению функций принадлежности, равному 0,5, изображен на рисунке 3.42, эти продолжительности указаны рядом с соответствующими стрелками. Напомним, что пунктирными стрелками обозначаются фиктивные работы.

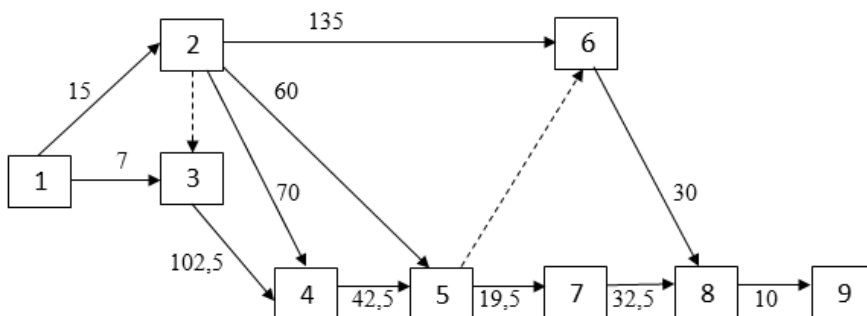


Рис. 3.42. Вариант сетевого графика выполнения комплекса работ по реконструкции центра

Решать задачу по приближенному отысканию сетевого графика с максимальным значением функции $\mu_D(x)$ будем с шагом $\Delta=0,1$. Промежуточные результаты вычислений сведены в таблицу 3.3.

Заметим, что при заполнении четвертой графы таблицы 3.3 вычислялись длины критических путей при условии, что продолжительности всех работ

соответствуют значению функций принадлежности, указанному в третьей графе таблицы. При этом оказалось, что при изменении значений этих функций принадлежности от нуля до 0,7 критический путь проходит через события 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9; а при изменении этих значений от 0,8 до единицы он проходит через события 1, 2, 6, 8, 9.



Таблица 3.3. Промежуточные результаты решения примера 3.9

№ п/п	k	$\mu_{\hat{X}} = \Delta \cdot k$	Продолжительность критического пути	μ_c	$\mu_{\hat{D}}$
1	2	3	4	5	6
1	0,0	0,00	202	1,00	0,00
2	1,0	0,10	206	0,95	0,10
3	2,0	0,20	210	0,91	0,20
4	3,0	0,30	214	0,86	0,30
5	4,0	0,40	218	0,82	0,40
6	5,0	0,50	222	0,77	0,50
7	6,0	0,60	226	0,73	0,60
8	7,0	0,70	230	0,68	0,68
9	8,0	0,80	250	0,45	0,45
10	9,0	0,90	270	0,23	0,23
11	10,0	1,00	290	0,00	0,00

Напомним, что при вычислениях значения функций принадлежности менялись с шагом 0,1.

Анализ последней графы таблицы 3.3 показывает, что приближенно оптимальное значение функции принадлежности нечеткого решения равно 0,68, что достигается при $\mu_{\hat{X}} = 0,70$, при $k = 7$.

При оценке качества сетевого графика можно использовать и другие подходы. Рассмотрим два случая.

1. Оценкой является надежность выполнения плана за заданное время τ . Оптимальным будем считать план, время выполнения которого не превосходит заданной величины, а надежность его выполнения при этом максимальна.

Как и раньше, обозначим через \hat{X} нечеткое множество допустимых планов в рассматриваемой задаче, X — множество сетевых графиков, заданных на рассматриваемом графе и отличающихся друг от друга продолжительностями выполнения работ (хотя бы одной).

Будем, как и раньше, предполагать, что продолжительность работы (i, j) является нечетким числом $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$, где a_{ij} — минимально возможное

значение времени выполнения работы, b_{ij} — максимально возможное время, $c_{ij} = b_{ij}$. Функцию принадлежности нечеткого числа d_{ij} обозначим $\mu_{ij}(u)$ (рис. 3.39), где u — элемент универсального множества $U = [0, +\infty)$. Будем предполагать, что на отрезке $[a_{ij}, b_{ij}]$ функция $\mu_{ij}(u)$ строго возрастает и непрерывна.

Поскольку, как и раньше, допустимые планы отличаются друг от друга только продолжительностями выполнения работ, то для полной характеристики допустимого плана достаточно указать только эти продолжительности работ.

Если число работ в рассматриваемом графе равно n , то плану $x \in X$ соответствует вектор продолжительностей работ

$$u(x) = (u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \dots, u_{i_n j_n}),$$

где $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$ — все работы на сетевом графике, $u_{i_k j_k}$ — четкое значение продолжительности работы (i_k, j_k) .

Пусть $t(x)$ — продолжительность критического пути на сетевом графике (в том случае, когда на рассматриваемом графе продолжительность работы (i_k, j_k) , $k = 1, 2, \dots, n$, равна $u_{i_k j_k}$).

Функция $\mu_{\hat{X}}(x)$ — функция принадлежности нечеткого множества допустимых планов \hat{X} , определяется формулой, основанной на формуле (1.1):

$$\mu_{\hat{X}}(x) = \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq n} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}), & \text{если } t(x) \leq \tau, \\ 0, & \text{если } t(x) > \tau. \end{cases}$$

Пусть x^0 — оптимальное решение рассматриваемой задачи, т. е.

$$\mu_{\hat{X}}(x^0) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{X}}(x).$$

Пусть

$$u(x^0) = (u_{i_1 j_1}^0, u_{i_2 j_2}^0, \dots, u_{i_n j_n}^0)$$

и

$$\mu_{\hat{X}}(x^0) = \max_{\substack{x \in X \\ t(x) \leq \tau}} \min_{1 \leq k \leq n} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}) = \alpha.$$

Теорема 3.7. Существует такой $x^* \in X$, что

$$t(x^*) = \tau, \mu_{\hat{X}}(x^*) = \mu_{\hat{X}}(x^0) \text{ и } \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) = \alpha \text{ при любом } k.$$

Доказательство. Рассмотрим план x^* с такими продолжительностями выполнения работ, что их надежности одинаковы и равны α . Напомним, что в принятых обозначениях

$$u(x^*) = (u_{i_1 j_1}^*, u_{i_2 j_2}^*, \dots, u_{i_n j_n}^*),$$

и тогда сказанное означает, что для любого k от 1 до n

$$\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) = \alpha.$$

Так как при любом k от 1 до n выполняется неравенство

$$\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) \leq \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0),$$

то продолжительность каждой работы в сетевом графике x^* не превосходит продолжительности этой работы в x^0 . Значит, продолжительность выполнения плана, формализованного сетевым графиком x^* , не превосходит τ , т. е. $t(x^*) \leq \tau$.

Если $t(x^*) < \tau$, то, значит, мы можем немного увеличить продолжительности выполнения всех работ, укладываясь тем не менее в отведенное время τ . Но, увеличив продолжительности выполнения работ, мы увеличим и надежность того, что этих продолжительностей достаточно для их выполнения. Таким образом, мы получим новый план, время выполнения которого не превосходит заданного времени τ , а надежность больше α . А это противоречит оптимальности плана x^0 .

Следовательно, $t(x^*) = \tau$. Итак, $t(x^*) = \tau$ и $\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^*) = \alpha$ для любого k от 1 до n , следовательно, план x^* удовлетворяет всем условиям теоремы и она доказана.

При приближенном решении рассматриваемой задачи можно воспользоваться описанным выше алгоритмом, слегка его упростив, — не надо вычислять значения функций принадлежности рассматриваемых планов нечеткой цели и нечеткому решению, т. е. не надо заполнять последние две графы таблицы 3.3.

Пусть в условиях примера 3.9 требуется определить максимальное значение надежности, с которым принятый план проведения работ будет выполнен за время, не большее 250 ч. Из таблицы 3.3 видно (см. девятую строку этой таблицы), что это значение 0,8.

2. Оценкой является время, необходимое для выполнения принятого плана при заданной надежности его выполнения. Оптимальным будем считать

план, надежность выполнения которого не меньше заданной величины, а время выполнения при этом минимально. Для приближенного решения сформулированной задачи опять же можно воспользоваться таблицей, аналогичной таблице 3.3, но без двух последних граф.

Пусть в условиях примера 3.9 требуется определить, сколько времени достаточно для того, чтобы план проведения работ был выполнен с надежностью 0,6. Из данных таблицы 3.3 видим (см. седьмую строку), что это время равно 226 ч.

3.9. Задача о кратчайшем маршруте с нечетко заданным временем движения по коммуникациям

При организации движения большой интерес представляет задача об отыскании кратчайшего маршрута, соединяющего два заданных пункта. Отметим, что в качестве транспортных издержек можно рассматривать не только пройденное расстояние. Часто интерес представляют суммарные денежные расходы на проезд по маршруту или время движения по нему или расход горючего и т. п.

Такую задачу рассматривал, например, Дейкстра, который построил эффективный алгоритм ее решения [40], [74], используемый в настоящее время, в частности, в GPS-навигаторах. Мы эту задачу обсуждали в п. 3.3, 3.4. Но Дейкстра и другие авторы предполагали, что издержки на движение по любой коммуникации четко определены, что на самом деле далеко не всегда соответствует действительности. В [15] в качестве характеристики маршрута рассматривается его надежность, при этом используется теория нечетких множеств.

Будем предполагать, что всего на сети имеется m пунктов, все пункты упорядочены и перенумерованы числами от 1 до m , при этом первый пункт имеет номер 1, последний — номер m . В дальнейшем часто сам пункт будем отождествлять с его номером.

Для определенности под издержками будем понимать время, при этом будем предполагать, что оно не определено однозначно, а задается нечетким числом. Требуется найти оптимальный маршрут между двумя заданными пунктами на имеющейся сети коммуникаций (между первым и последним пунктами). Отметим сразу, что само понятие «оптимальный маршрут» требует уточнения.

Дадим строгую постановку задачи, напомним, что ее постановка для случая однозначно определенных расстояний рассматривалась в п. 3.3 и 3.4. Теперь же мы будем предполагать, что транспортные издержки (время)

задаются нечеткими числами. Нечеткое число — нечеткое время движения по коммуникации (i, j) , соединяющей пункты i и j на рассматриваемой сети, будем обозначать t_{ij} :

$$t_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle,$$

где a_{ij} — минимально возможное время движения по коммуникации (i, j) ; c_{ij} — максимально возможное время движения по коммуникации (i, j) ; b_{ij} — мода.

Функцию принадлежности нечеткого числа t_{ij} будем обозначать $\mu_{ij}(t)$, где t — элемент универсального множества T — множества возможных четких (обычных) значений затрат времени на движение, $\mu_{ij}(b_{ij})=1$, $\mu_{ij}(a_{ij})=0$, $\mu_{ij}(c_{ij})=0$. Для определенности будем считать, что $T = [0, +\infty)$, функция принадлежности $\mu_{ij}(t)$ строго возрастает на отрезке $[a_{ij}, b_{ij}]$ и строго убывает на $[b_{ij}, c_{ij}]$.

В подходе к понятию «оптимальный маршрут» будем, как и часто ранее, следовать идеям, сформулированным Заде и Беллманом [9], [34].

Универсальным множеством допустимых планов теперь является множество X — множество сетей данной (рассматриваемой) конфигурации с заданным для каждой коммуникации «четким» значением времени движения по ней. Это «четкое» значение времени движения по коммуникации (i, j) для сети $x \in X$ будем обозначать $t_x(i, j)$. Отметим, что два допустимых плана x и y считаются разными, если существует такая (хотя бы одна) коммуникация (i, j) , что $t_x(i, j) \neq t_y(i, j)$, т. е. время движения хотя бы по одной коммуникации на этих сетях разное. Функцию принадлежности нечеткого множества допустимых планов \hat{X} задачи обозначим $\mu_{\hat{X}}(x)$, $x \in X$.

Будем предполагать, что сеть имеет n коммуникаций: (i_1, j_1) , (i_2, j_2) , ..., (i_n, j_n) . Их множество обозначим буквой \mathfrak{K} :

$$\mathfrak{K} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}.$$

Тогда $t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), \dots, t_x(i_n, j_n)$ — набор значений времени движения по коммуникациям для плана x , этот набор мы будем обозначать $\Phi(x)$.

Поскольку допустимые планы отличаются друг от друга только временем движения по коммуникациям, то для полной характеристики допустимого плана x достаточно указать только набор чисел:

$$\Phi(x) = \{ t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), \dots, t_x(i_n, j_n) \}.$$

Маршрут от первого пункта до последнего при плане x , требующий минимальных затрат времени на движение, обозначим $\mathfrak{Z}(x)$. Этот маршрут состоит из $k(x)$ коммуникаций: $(1, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k(x)-1}, i_{k(x)})$. Таким образом,

$$\mathfrak{Z}(x) = \{(1, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k(x)-1}, i_{k(x)})\}.$$

Здесь $i_{k(x)} = m$.

Тогда время движения $t(\mathfrak{Z}(x))$ по маршруту $\mathfrak{Z}(x)$ задается формулой

$$t(\mathfrak{Z}(x)) = \sum_{(u,v) \in \mathfrak{Z}(x)} t_x(u,v).$$

Пусть для плана x время движения по коммуникациям равно $t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), \dots, t_x(i_n, j_n)$, тогда под надежностью плана x на основании формулы (1.4) будем понимать величину, равную

$$\min_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \mu_{kl}(t_x(k,l)).$$

В качестве нечеткого множества допустимых планов рассмотрим нечеткое множество \hat{X} , заданное на универсальном множестве X функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{X}}(x) = \min_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \mu_{kl}(t_x(k,l)). \quad (3.13)$$

Нечетко определенную цель (нечеткую цель) будем формализовать нечетким множеством \hat{X}_c с функцией принадлежности $\mu_c(x), x \in X$.

Обозначим:

$t^{min}(x)$ — минимальное время движения из первого пункта в последний при плане x ;

T^{min} — минимальное время движения из первого пункта в последний, когда время движения по каждой коммуникации (i, j) минимально, т. е. равно a_{ij} , сам план с такими временами движения по коммуникациям обозначим x^{min} ,

$$\Phi(x^{min}) = \{a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_n j_n}\}.$$

T^{max} — максимальное время движения из первого пункта в последний, в случае, когда время движения по каждой коммуникации (i, j) максимально, т. е. равно c_{ij} , сам план с такими значениями времени обозначим x^{max} ,

$$\Phi(x^{max}) = \{c_{i_1 j_1}, c_{i_2 j_2}, \dots, c_{i_n j_n}\}.$$

В качестве функции принадлежности рассматриваемых планов нечеткой цели (нечеткому множеству, формализующему нечеткую цель) будем использовать показатель близости плана x к самому эффективному плану — плану x^{min} , что мы предлагаем характеризовать близостью (по времени) маршрутов $\mathfrak{Z}(x)$ и $\mathfrak{Z}(x^{min})$. Положим

$$\mu_c(x) = \frac{T^{max} - t^{min}(x)}{T^{max} - T^{min}}. \quad (3.14)$$

Нечетким решением рассматриваемой задачи будем считать нечеткое множество \hat{D} с функцией принадлежности $\mu_{\hat{D}}(x)$, являющееся пересечением нечеткого множества допустимых планов и нечеткой цели:

$$\mu_{\hat{D}}(x) = \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_c(x)\}. \quad (3.15)$$

В качестве решения предлагается план x^0 , для которого

$$\mu_{\hat{D}}(x^0) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{D}}(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_c(x)\}. \quad (3.16)$$

Изучим некоторые свойства решения.

Пусть для плана x^0 выполняется равенство (3.16) и пусть

$$\begin{aligned} \Phi(x^0) &= (t_{x^0}(i_1, j_1), t_{x^0}(i_2, j_2), \dots, t_{x^0}(i_n, j_n)), \\ \mu_{\hat{X}}(x^0) &= \min_k \mu_{i_k j_k}(t_{x^0}(i_k, j_k)) = \mu_{i_v j_v}(t_{x^0}(i_v, j_v)) = \alpha, \\ \mu_c(x^0) &= A, \\ \mu_{\hat{D}}(x^0) &= B, \\ t^{min}(x^0) &= \theta. \end{aligned}$$

Теорема 3.8. Для рассматриваемой задачи $B = \alpha = A$.

Доказательство. Если $\alpha > A$, то $B = A$. Пусть $\alpha - A = \delta$, возьмем $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ и зададим такие продолжительности $t_{x'}(i_k, j_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, движения по коммуникациям, что

$$\mu_{i_k j_k}(t_{x'}(i_k, j_k)) = \mu_{i_k j_k}(t_{x^0}(i_k, j_k)) - \varepsilon, \quad t_{x'}(i_k, j_k) \leq b_{i_k j_k},$$

т. е. уменьшим продолжительности движения по всем коммуникациям сети так, чтобы значения функций принадлежности для этих продолжительностей стали

бы на ε меньше. Понятно, что продолжительность $t^{\min}(x')$ кратчайшего маршрута для получившегося допустимого плана будет меньше, чем для плана x^0 , т. е. меньше, чем $t^{\min}(x^0)$. Но тогда $\mu_c(x') > \mu_c(x^0) = A + \delta^*$. Получаем, что

$$\mu_{\hat{X}}(x') = \min_k \mu_{i_k j_k}(t_{x'}(i_k, j_k)) = \mu_{i_v j_v}(t_{x^0}(i_v, j_v)) - \varepsilon = \alpha - \varepsilon,$$

$$\mu_{\hat{D}}(x') = \min\{\mu_{\hat{X}}(x'), \mu_c(x')\} = \min\{\alpha - \varepsilon, A + \delta^*\} = \min\{A + \varepsilon, A + \delta^*\} > A.$$

Следовательно, x^0 не является оптимальным планом, полученное противоречие показывает, что α не может быть больше A .

Если $\alpha < A$, то $B = \alpha$. Пусть $A - \alpha = \Delta$, возьмем

$$\varepsilon = \frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2n},$$

напомним, что n равно числу коммуникаций.

Рассмотрим новый план x'' , продолжительности движения по коммуникациям которого по сравнению с планом x^0 увеличены на ε , т. е. для любой коммуникации (i, j) положим время движения по ней равным $t_{x^0}(i, j) + \varepsilon$. При этом значение функции принадлежности нового временного значения для коммуникации (i, j) увеличится на τ_{ij} .

Пусть

$$\tau = \min_{(i,j) \in \mathfrak{R}} \tau_{ij},$$

т. е.

$$\mu_{\hat{X}}(x'') = \alpha + \tau.$$

Суммарная продолжительность движения по всем коммуникациям сети увеличена на величину, равную

$$\varepsilon \cdot n = \frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2n} \cdot n = \frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2}.$$

Следовательно, и суммарная продолжительность движения по любому маршруту от первого пункта до последнего для плана x'' увеличилась не более чем на

$$\frac{\Delta(T^{\max} - T^{\min})}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mu_c(x'') &= \frac{T^{max} - t(x'')}{T^{max} - T^{min}} \geq \frac{T^{max} - \left(t^{min}(x^0) + \frac{\Delta \cdot (T^{max} - T^{min})}{2} \right)}{T^{max} - T^{min}} = \\ &= \frac{T^{max} - t^{min}(x^0)}{T^{max} - T^{min}} - \frac{\Delta}{2} = A - \frac{\Delta}{2} = \alpha + \frac{\Delta}{2} > \alpha.\end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\mu_{\hat{D}}(x'') = \min\{\mu_{\hat{X}}(x''), \mu_c(x'')\} \geq \min\left\{\alpha + \tau, \alpha + \frac{\delta}{2}\right\} > \alpha = B,$$

следовательно, план x^0 не является оптимальным, а это противоречит нашему предположению.

Тем самым доказано, что $B = A = \alpha$.

Теорема 3.9. Пусть план x^0 удовлетворяет равенству (3.16) и $\mu_{\hat{D}}(x^0) = B$.

Тогда для рассматриваемой задачи существует такой оптимальный план x^* , что $\mu_{ij}(t_{x^*}(i, j)) = B$ для любой коммуникации (i, j) .

Доказательство. Пусть план x^0 удовлетворяет равенству (3.16) и пусть

$$\mu_{\hat{X}}(x^0) = \min_k \mu_{i_k j_k}(t_{x^0}(i_k, j_k)) = \mu_{i_v j_v}(t_{x^0}(i_v, j_v)) = \alpha$$

и

$$\mu_c(x^0) = A.$$

В силу теоремы 3.8 $B = A = \alpha$. Рассмотрим план x' , для которого

$$\mu_{i_k j_k}(t_{x'}(i_k, j_k)) = B$$

для любой коммуникации (i_k, j_k) .

Тогда

$$\mu_{\hat{X}}(x') = B.$$

Заметим, что $t_{x'}(i_k, j_k) \leq t_{x^0}(i_k, j_k)$ для любой коммуникации (i_k, j_k) .

Следовательно, $t^{min}(x') \leq t^{min}(x^0)$ и, значит, $\mu_c(x') \geq \mu_c(x^0) = B$.

Таким образом,

$$\mu_{\hat{D}}(x') = \min\{\mu_{\hat{X}}(x'), \mu_c(x')\} = B.$$

Следовательно, $\mu_{\hat{D}}(x') = B$ и план x' оптимален. Положив $x^* = x'$, мы получаем план из заключения теоремы.

Последняя теорема дает алгоритм приближенного решения рассматриваемой задачи 3.16.

Этот алгоритм аналогичен алгоритму, рассмотренному в предыдущем параграфе, и заключается в следующем.

Задавшись числом шагов N , полагаем $\Delta = \frac{1}{n}$. На шаге с номером k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) находим такие значения времени движения t_{ij} по коммуникациям, что

$$\mu_{ij}(t_{ij}) = k \cdot \Delta \text{ для любой коммуникации } (i, j).$$

Получившуюся сеть обозначим x^k , имеем: $\mu_{\hat{x}}(x^k) = k \cdot \Delta$. Вычисляем $\mu_c(x^k)$ и, наконец, $\mu_{\hat{D}}(x^k)$. Маршрут, требующий минимальных затрат времени на движение из первого пункта в последний при плане x^{k_0} , для которого

$$\mu_{\hat{D}}(x^{k_0}) = \max_{0 \leq k \leq N} \mu_{\hat{D}}(x^k)$$

является приближенным ответом на вопрос об оптимальном маршруте.

Пример 3.10. Определить оптимальный в указанном выше смысле маршрут на сети дорог, схема которой изображена на рисунке 3.43, необходимая информация о нечетком времени движения по каждой коммуникации представлена в таблице 3.4. На рисунке рядом с каждым ребром, изображающим коммуникацию, указана мода (в часах) нечеткого времени движения по ней.

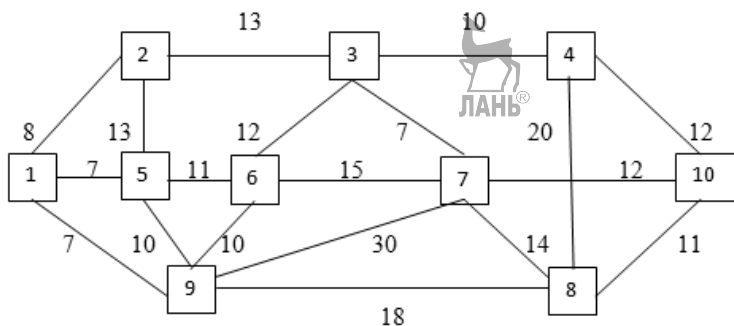


Рис. 3.43. Схема сети дорог из примера 3.10

Напомним, что нечеткое время движения по коммуникации (i, j) является нечетким числом $t_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$. Его функция принадлежности $\mu_{ij}(t)$ не убывает на отрезке $[a_{ij}, b_{ij}]$ и не возрастает на $[b_{ij}, c_{ij}]$ (рис. 3.44).

Таблица 3.4. Данные о нечетком времени движения

Дорога (i, j)	Параметры			Дорога (i, j)	Параметры		
	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}		a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}
(1,2)	4	8	10	(4,10)	8	12	13
(1,5)	5	7	11	(5,9)	7	10	15
(1,9)	6	7	9	(5,6)	7	11	14
(2,3)	9	13	15	(6,9)	8	10	12
(2,5)	10	13	17	(6,7)	10	15	16
(3,4)	6	10	13	(7,8)	10	14	19
(3,6)	8	12	12	(7,9)	25	30	33
(3,7)	5	7	10	(7,10)	10	12	15
(4,8)	15	20	26	(8,9)	16	18	25
				(8,10)	10	11	14

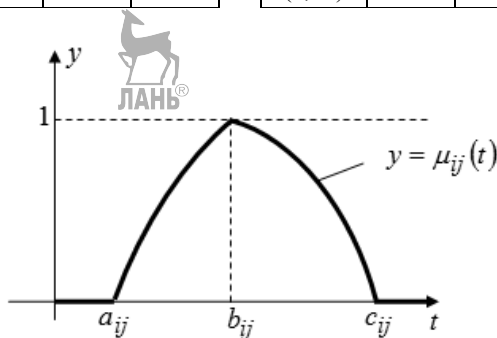


Рис. 3.44. Пример графика функции принадлежности $\mu_{ij}(t)$

Отметим, что фиксированному значению функции принадлежности, не равному единице, соответствуют два значения времени. Так как мы стремимся время уменьшить, то из этих двух значений будем использовать меньшее.

В верхней части таблицы 3.5 указаны четкие значения времени движения по соответствующим коммуникациям сети, изображенной на рисунке 3.43, при этом для каждого значения функции принадлежности указаны меньшие из двух возможных значения времени.

По данным соответствующей графы верхней части таблицы 3.5 с использованием алгоритма Дейкстры находим маршрут, требующий минимальных затрат времени и само это время t^{min} . Отметим, что при значениях $\mu_{\bar{x}}$ в пределах от 0 до 0,2 таким маршрутом является путь, проходящий через пункты 1, 2, 3, 4, 10; при значениях $\mu_{\bar{x}}$ в пределах от 0,3 до 0,5 — через пункты 1, 2, 3, 7, 10; при значениях $\mu_{\bar{x}}$ в пределах от 0,6 до 1,0 — через пункты

1, 9, 8, 10. Оптимальное значение функции принадлежности нечеткого решения равно примерно 0,36, оно достигается при временных значениях, надежность которых равна 0,4, что видно и на рисунке 3.44.

Таблица 3.5. Исходные данные и промежуточные результаты для задачи об оптимальном маршруте

Код коммун.	$k \cdot \Delta$										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(1,2)	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8
(1,5)	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7
(1,9)	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7
(2,3)	9	9,4	9,8	10,2	10,6	11,0	11,4	11,8	12,2	12,6	13
(2,5)	10	10,3	10,6	10,9	11,2	11,5	11,8	12,1	12,4	12,7	13
(3,4)	6	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2	9,6	10
(3,6)	8	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12
(3,7)	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7
(4,10)	8	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12
(4,8)	15	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20
(5,9)	7	7,3	7,6	7,9	8,2	8,5	8,8	9,1	9,4	9,7	10
(5,6)	7	7,4	7,8	8,2	8,6	9,0	9,4	9,8	10,2	10,6	11
(6,9)	8	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10
(6,7)	10	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15
(7,10)	10	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12
(7,9)	25	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30
(7,8)	10	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	12,4	12,8	13,2	13,6	14
(8,9)	16	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18
(8,10)	10	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11
И Т О Г И											
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\mu_{\hat{X}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
t^{\min}	27,00	28,60	30,20	31,60	32,80	34,00	34,40	34,80	35,20	35,60	36,00
μ_c	1,00	0,82	0,64	0,49	0,36	0,22	0,18	0,13	0,09	0,04	0,00
$\mu_{\hat{D}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,36	0,22	0,18	0,13	0,09	0,04	0,00

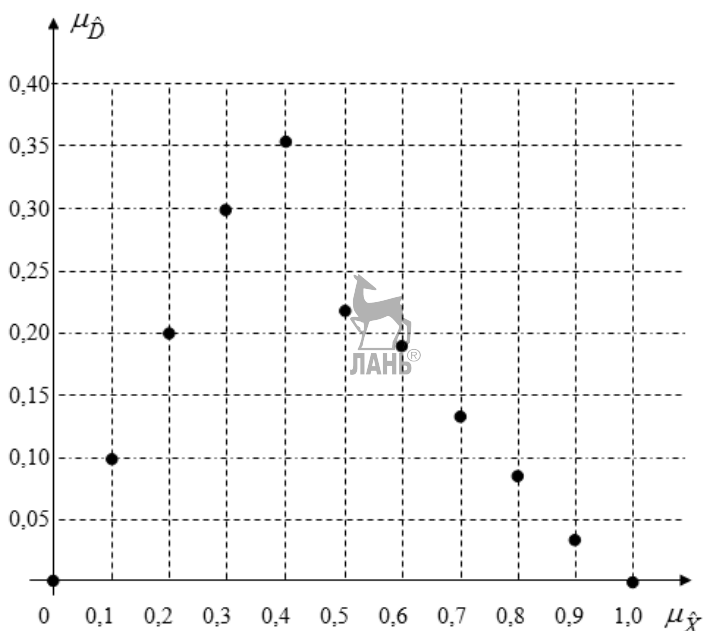


Рис. 3.45. График функции принадлежности нечеткого решения $\mu_{\hat{D}}$ в зависимости от значений функции принадлежности $\mu_{\hat{X}}$ нечеткого множества допустимых планов

Для получения более точного, но, конечно же, тоже приближенного ответа, рассмотрим рисунок 3.45, на котором изображены два графика:

— график зависимости значений функции принадлежности нечеткого множества допустимых планов от значения функций принадлежности нечетких затрат времени на движение по коммуникации $y = \mu_{\hat{X}}(\mu_{ij}(t))$ (напомним, что мы имеем дело только с ситуациями, когда значения последних функций одинаковы для всех коммуникаций);

— график зависимости значений функции принадлежности нечеткой цели $y = \mu_c(\mu_{ij}(t))$ от того же аргумента, что и первый график.

Таблица 3.6. Данные о зависимости функций μ_c и $\mu_{\hat{D}}$ от значений функции $\mu_{ij}(t)$

$\mu_{ij}(t)$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$\mu_{\hat{X}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
t^{\min}	27,00	28,60	30,20	31,60	32,80	34,00	34,40	34,80	35,20	35,60	36,00
μ_c	1,00	0,82	0,64	0,49	0,36	0,22	0,18	0,13	0,09	0,04	0,00
$\mu_{\hat{D}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,36	0,22	0,18	0,13	0,089	0,044	0,000

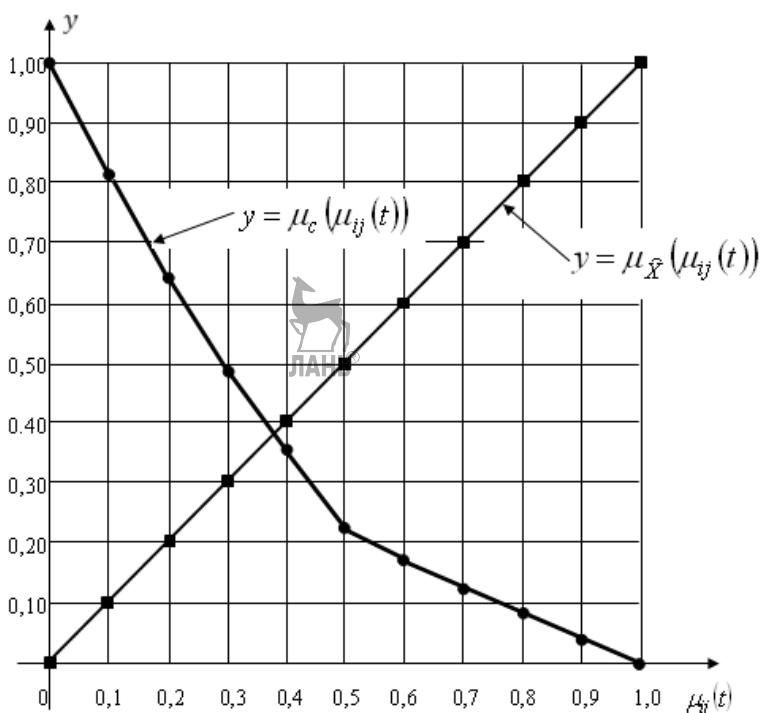


Рис. 3.46. Графики функций принадлежности $\mu_{\hat{x}}$ и μ_c

Приближая на графике (рис. 3.46) результаты из таблицы 3.6 (точки) ломаными линиями, мы можем немного уточнить ответ, полученный на рисунке 3.45. На рисунке 3.46 мы видим, что

$$\max_{0 \leq k \leq N} \min \{ \mu_{\hat{x}}(x^k), \mu_c(x^k) \}$$

достигается при $\mu_{\hat{x}}(x) = 0,38$, при этом оптимальное значение функции принадлежности $\mu_{\hat{D}}$ нечеткого решения равно 0,38. То есть степень нашей уверенности в том, что вариант с продолжительностями движения, взятymi из шестой графы таблицы 3.5, оптимален, равна 0,38.

Остановимся на некоторых других подходах к понятию оптимальности в рассматриваемой задаче.

При оценке качества маршрута можно использовать и другие подходы. Рассмотрим два случая.

1. Оценкой является степень уверенности лица, принимающего решение, в том, что минимальные затраты времени на движение от первого пункта до последнего не превзойдут заданной величины τ . Оптимальным предлагается

считать план, для которого время движения от первого пункта до последнего не превосходит τ , а степень уверенности в его реализации максимальна среди всех таких планов.

Прием решения сформулированной задачи аналогичен приему, рассмотренному в п. 3.8.

Пусть в условиях примера 3.10 требуется определить максимальное значение степени уверенности лица, принимающего решение, в том, что на движение от первого пункта до последнего потребуется не более 35 ч.

Из таблицы 3.5 видно (см. графу 8), что это значение равно 0,70.

2. Оценкой качества плана является время, которого с заданной надежностью достаточно на движение от первого пункта до последнего. Оптимальным будем считать план, надежность которого не меньше заданной величины, а время движения от первого пункта до последнего при этом минимально.

Для приближенного решения сформулированной задачи опять же можно воспользоваться таблицей, аналогичной таблице 3.5.

Пусть в условиях примера 3.10 требуется определить, за какое минимальное время можно переехать из первого пункта в последний с заданной степенью уверенности, равной 0,6. Из данных таблицы 3.5 видим (см. графу 7), что это время равно 34,4 ч.

3.10. Задача о кратчайшем соединении с нечетко определенной экономической эффективностью коммуникаций

Рассмотрим еще одну задачу, связанную с сетями коммуникаций, мы уже упоминали о ней в п. 3.5, это так называемая задача о кратчайшем соединении. Речь идет о создании наиболее экономичной сети коммуникаций, соединяющей все рассматриваемые пункты. Под экономической эффективностью можно понимать, например, суммарную длину коммуникаций сети, стоимость построения этой сети, суммарное время движения или стоимость проезда и т. д. Мы в дальнейшем будем вести речь о суммарной стоимости создания всех необходимых коммуникаций. В [71], [75] и других источниках характеристика экономической эффективности каждой коммуникации задана четко, однозначно. На самом же деле этот показатель однозначно определен далеко не всегда, скажем, стоимость создания коммуникации зависит от большого числа факторов и точно предсказать ее возможно далеко не всегда. Мы собираемся учесть этот факт, применяя теорию нечетких множеств.

Итак, рассмотрим сеть с m коммуникациями (конечный, связный, неориентированный граф G , каждому ребру которого соотнесено некоторое

число, у нас это затраты на создание соответствующей коммуникации) с n вершинами (пунктами). Пункты будем предполагать перенумерованными числами от 1 до n . В дальнейшем вершину будем отождествлять с ее номером. Как это принято в теории графов, коммуникацию (ребро), соединяющую пункт i с пунктом j , будем обозначать (i, j) . Будем предполагать, что множество коммуникаций

$$\mathfrak{X} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)\}$$

некоторым образом упорядочено и что стоимость создания коммуникации (i, j) является нечетким числом d_{ij} с функцией принадлежности $\mu_{ij}(d)$ (см. формулу (3.17) и рис. 3.47), заданной на универсальном множестве возможных значений расходов $[0, \infty)$.

$$\mu_{ij}(d) = \begin{cases} f_{ij}^1(d), & \text{если } d \in [a_{ij}, b_{ij}], \\ f_{ij}^2(d), & \text{если } d \in [b_{ij}, c_{ij}], \\ 0, & \text{если } d \leq a_{ij} \text{ или } d \geq c_{ij}. \end{cases} \quad (3.17)$$

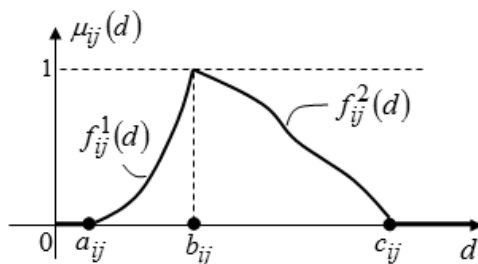


Рис. 3.47. Пример графика функции принадлежности

Предполагается, что $f_{ij}^1(d)$ строго возрастающая функция, $f_{ij}^2(d)$ — строго убывающая функция, обе они непрерывны, $f_{ij}^1(a_{ij}) = f_{ij}^2(c_{ij}) = 0$, $f_{ij}^1(b_{ij}) = f_{ij}^2(b_{ij}) = 1$.

Решая сформулированную задачу, будем, как и раньше, использовать подход Заде и Беллмана [9], [34].

Будем рассматривать множество сетей коммуникаций, заданных на одном и том же графе и отличающихся друг от друга затратами на строительство соответствующих коммуникаций. Поэтому полной характеристикой сети (варианта) является набор значений затрат.

В качестве универсального множества будем рассматривать множество

$$U = \left\{ u \in R^m \mid u_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \right\},$$

где R^m — m -мерное евклидово пространство:

$$R^m = \left\{ u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \mid u_i - \text{вещественное число}, i = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

Будем предполагать, что оси координат соответствуют коммуникациям. Если

$$\mathfrak{X} = \left\{ (i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m) \right\}$$

есть упорядоченное множество коммуникаций на рассматриваемой сети, то первая координата соответствует коммуникации (i_1, j_1) , вторая — (i_2, j_2) и т. д. Вдоль координатных осей откладываются стоимости создания соответствующих коммуникаций. Точкой $u \in U$ является точка с координатами

$$(u_1, u_2, \dots, u_m),$$

т. е. u — это вариант (план) затрат на создание коммуникаций рассматриваемой сети.

Каждой точке $u \in U$ соответствует набор (вектор) значений функций принадлежности

$$\Psi(u) = (\mu_{i_1 j_1}(u_1), \mu_{i_2 j_2}(u_2), \dots, \mu_{i_m j_m}(u_m)),$$

где $\mu_{i_k j_k}(u_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$ — степень нашей уверенности в том, что затраты на создание коммуникации (i_k, j_k) равны u_k .

В качестве нечеткого множества допустимых планов будем рассматривать нечеткое множество \widehat{X} , определенное на универсальном множестве U , для которого функция принадлежности $\mu_{\widehat{X}}(u)$ определяется формулой (3.18):

$$\mu_{\widehat{X}}(u) = \min_{1 \leq k \leq m} \mu_{i_k j_k}(u_k), u \in U. \quad (3.18)$$

Еще раз отметим, что $\mu_{i_k j_k}(u_k)$ — это степень нашей уверенности в том, что стоимость создания коммуникации (i_k, j_k) равна u_k , т. е. каждой коммуникации соответствует свое нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_{i_k j_k}(u_k)$.

Заметим, что формула (3.18) получена на основании определения конъюнкции нечетких высказываний (на основании формулы (1.4)).

Аналогично предыдущему (см. п. 3.9) нечеткую цель в рассматриваемой задаче будем формализовать нечетким множеством \tilde{X}_c с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{c}}(u)$, $u \in U$.



Обозначим:

$M(u)$ — множество коммуникаций, которые при варианте u соединяют все пункты и при этом их суммарная стоимость минимальна по сравнению со всеми другими наборами коммуникаций, соединяющими все пункты, при варианте u ;

$S(u)$ — минимальные суммарные затраты на создание коммуникаций, соединяющих все пункты, при допустимом плане u ;

S^{min} — минимальные затраты на создание коммуникаций, соединяющих все рассматриваемые пункты, когда затраты на создание любой коммуникации (i, j) сети минимальны, т. е. равны a_{ij} , сам план с такими затратами на создание коммуникаций обозначим u^{min} :

$$u^{min} = \{a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_m j_m}\};$$

S^{max} — максимальные затраты на создание коммуникаций, соединяющих все рассматриваемые пункты, когда затраты на создание любой коммуникации (i, j) сети максимальны, т. е. равны c_{ij} , сам план с такими затратами на создание коммуникаций обозначим u^{max} :

$$u^{max} = \{c_{i_1 j_1}, c_{i_2 j_2}, \dots, c_{i_m j_m}\}.$$

Отметим, что для заданного $u \in U$ для любой коммуникации из \mathfrak{X} известна стоимость ее создания. Поэтому, применяя алгоритм Краскала, мы можем вычислить $S(u)$.

В качестве функции принадлежности рассматриваемых планов нечеткой цели будем использовать показатель экономической эффективности плана, значение которого мы предлагаем в соответствии с [9] характеризовать близостью (по затратам) планов u и u^{min} . Положим

$$\mu_{\tilde{c}}(u) = \frac{S^{max} - S(u)}{S^{max} - S^{min}}. \quad (3.19)$$

Нечетким решением рассматриваемой задачи будем считать нечеткое множество \hat{D} с функцией принадлежности $\mu_{\hat{D}}(u)$, являющееся пересечением нечеткого множества допустимых планов и нечеткой цели:

$$\mu_{\hat{D}}(u) = \min\{\mu_{\hat{X}}(u), \mu_{\hat{C}}(u)\}. \quad (3.20)$$

В качестве решения задачи предлагается рассматривать план u^0 , для которого

$$\mu_{\hat{D}}(u^0) = \max_{u \in U} \mu_{\hat{D}}(u) = \max_{u \in U} \min\{\mu_{\hat{X}}(u), \mu_{\hat{C}}(u)\}. \quad (3.21)$$

Отметим следующие свойства решения.

Пусть

$$\begin{cases} u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0), \\ \mu_{\hat{X}}(u^0) = \min_{1 \leq k \leq m} \mu_{i_k j_k}(u_k^0) = \alpha, \\ \mu_{\hat{C}}(u^0) = A, \\ \mu_{\hat{D}}(u^0) = B, \\ S(u^0) = \theta. \end{cases} \quad (3.22)$$

Теорема 3.10. Найдется такой оптимальный план u^* , что $\mu_{i_k j_k}(u_k^*) = B$ для любой коммуникации (i_k, j_k) .

Доказательство. Рассмотрим следующие возможности: $\alpha = A$, $\alpha < A$ и $\alpha > A$.

1. Пусть $\alpha = A$. Если $\alpha = 1$, то $\mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = 1$ для любой коммуникации (i_k, j_k) и план u^0 — искомый. Если $\alpha < 1$, то построим такой план u' , что

$$\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \alpha \text{ для любого } k.$$

Заметим, что для каждой коммуникации (i_k, j_k) существуют два разных значения затрат, при которых значения функции принадлежности совпадают и равны ε (кроме рассмотренного случая, когда $\alpha = 1$), обозначим эти значения s_k^1 и s_k^2 . Пусть $s_k^1 < s_k^2$. Отметим, что $s_k^1 < b_{i_k j_k} < s_k^2$.

При построении плана u' в качестве значения для u'_k будем брать меньшее из указанных двух значений, т. е. s_k^1 .



Так как в силу равенств (3.22) $\alpha \leq \mu_{i_k j_k}(u_k^0)$, то в силу свойств функций принадлежности затрат на создание коммуникации, $s_k^1 \leq u_k^0$.

Следовательно, расходы на создание любой коммуникации при плане u' не превосходят соответствующих расходов при плане u^0 . Значит, $S(u') \leq S(u^0)$, а в силу оптимальности u^0 мы имеем, что $S(u') \geq S(u^0)$, следовательно, $S(u') = S(u^0) = B$ и u' — оптимальный план.

2. Пусть $\alpha < A$. Увеличим на ε ($0 < \varepsilon < b_{ij}$) для любой коммуникации (i_k, j_k) расходы на ее создание, получим план u' (это можно сделать в силу непрерывности рассматриваемых функций принадлежности), пусть при этом значения соответствующих функций принадлежности увеличились не менее, чем на δ каждое. В силу непрерывности функций принадлежности ε можно выбрать так, чтобы увеличенные на δ значения функций принадлежности не превосходили бы единицы. Так как на участках от a_{ij} до b_{ij} соответствующие функции принадлежности строго возрастают, то $\delta > 0$. Расходы $S(u')$ увеличатся по сравнению с $S(u^0)$ не более чем на $m \cdot \varepsilon$, величина же $\mu_{\bar{X}}(u')$ увеличится по сравнению с $\mu_{\bar{X}}(u^0)$ не менее чем на δ .

Тогда

$$\begin{aligned}\mu_c(u') &= \frac{S^{\max} - S(u')}{S^{\max} - S^{\min}} \leq \frac{S^{\max} - [S(u^0) + m \cdot \varepsilon]}{S^{\max} - S^{\min}} = \\ &= \mu_c(u^0) - \frac{m \cdot \varepsilon}{S^{\max} - S^{\min}}.\end{aligned}$$

Выберем ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha < A - \frac{m \cdot \varepsilon}{S^{\max} - S^{\min}}.$$

Отсюда

$$\varepsilon < \frac{A - \alpha}{m} \cdot (S^{\max} - S^{\min}) = \beta.$$

Итак, при выборе $\varepsilon < \beta$ значение $\mu_c(u')$, хотя и уменьшается по сравнению с $\mu_c(u^0)$, но остается все-таки больше α , значение же $\mu_{\bar{X}}(u')$ увеличивается по сравнению с $\mu_{\bar{X}}(u^0)$ не менее чем на δ . Следовательно,

$$B = \mu_{\bar{D}}(u^0) < \mu_{\bar{D}}(u')$$

и u^0 не является оптимальным планом, что противоречит нашему предположению, следовательно, рассматриваемый случай невозможен.

3. Пусть $\alpha > A$. Рассмотрим такой план u' , что $\mu_{i_k j_k}(u') = \alpha - \varepsilon$, причем из двух имеющихся здесь возможных значений затрат для плана u' возьмем меньшие (мы это рассматривали в п. 1 данного доказательства). Полученные значения затрат не больше аналогичных значений в плане u^0 , значит,

$$\mu_c(u') \geq \mu_c(u^0) = A,$$

тогда

$$\mu_{\bar{D}}(u') = \min\{\mu_{\bar{X}}(u'), \mu_c(u')\} \geq \min\{\alpha, A\} = A.$$

Так как u^0 — оптимальный план, то $\mu_{\bar{D}}(u')$ не может быть больше A , следовательно, $\mu_{\bar{D}}(u') = A$ и u' — оптимальный план, его и можно взять в качестве плана u^* из заключения теоремы. Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 3.10, так же как и предыдущая, дает возможность строить алгоритм приближенного решения рассматриваемой задачи. Как и раньше, задавая с определенным шагом значения функций принадлежности затрат, находим соответствующие значения затрат. Зная затраты на создание каждой коммуникации сети, находим, используя алгоритм Краскала, кратчайшее соединение, определяем значение функции принадлежности нечеткой цели и, наконец, значение функции принадлежности нечеткого решения. Определив последнее значение для всех шагов алгоритма, выбираем из них максимальное, оно и будет искомым приближенным оптимальным значением функции принадлежности нечеткого решения, соответствующий план приближенно является оптимальным.

Пример 3.11. Необходимо построить дорожную сеть, связывающую данные шесть пунктов. Известно, какие из дорог, соединяющих эти пункты, можно построить (рис. 3.48) и функции принадлежности $\mu_{ij}(d)$ нечетких множеств, формализующих нечеткие затраты на строительство этих дорог.

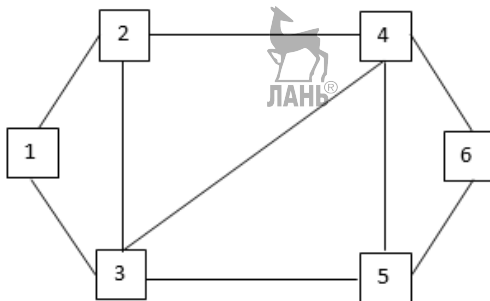


Рис. 3.48. Дороги, которые могут быть построены

Будем предполагать, что для коммуникации (i, j) :

$$\mu_{ij}(d) = \begin{cases} \frac{d^2}{b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}} - \frac{a_{ij}d}{b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}}, & \text{если } d \in [a_{ij}, b_{ij}], \\ \frac{d^2}{b_{ij}^2 - c_{ij}b_{ij}} - \frac{c_{ij}d}{b_{ij}^2 - c_{ij}b_{ij}}, & \text{если } d \in [b_{ij}, c_{ij}], \\ 0, & \text{если } d \leq a_{ij} \text{ или } d \geq c_{ij}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Значения параметров a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} для разных дорог указаны в таблице 3.7 в условных единицах.

Таблица 3.7. Данные о нечетких затратах

Дорога (j, j)	Параметры		
	a_{ij}	b_{ij}	c_{ij}
(1,2)	5	6	15
(1,3)	7	8	9
(2,3)	1	10	12
(2,4)	5	7	14
(3,4)	3	9	11
(3,5)	6	8	16
(4,5)	2	7	10
(4,6)	5	10	12
(5,6)	4	9	15

Для заполнения верхней части таблицы 3.8 рассмотрим первое соотношение из (3.23):

$$y = \mu_{ij}(d) = \frac{d^2}{b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}} - \frac{a_{ij}d}{b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}},$$

решая его относительно d , получаем

$$d = \frac{a_{ij} + \sqrt{a_{ij}^2 + 4(b_{ij}^2 - a_{ij}b_{ij}) \cdot \mu_{ij}(d)}}{2}. \quad (3.24)$$

В верхнюю часть таблицы 3.8 в клетки строки, соответствующей коммуникации (i, j) , заносятся результаты вычислений по формуле (3.24) при заданных значениях функции $\mu_{ij}(d)$.

Таблица 3.8. Исходные данные и промежуточные результаты для примера 3.11

Код коммун.	$k \cdot \Delta$										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(1,2)	5	5,12	5,23	5,34	5,44	5,54	5,64	5,73	5,82	5,91	6
(1,3)	7	7,11	7,22	7,33	7,43	7,53	7,63	7,72	7,82	7,91	8
(2,3)	1	3,54	4,77	5,72	6,52	7,23	7,87	8,45	9,00	9,51	10
(2,4)	5	5,27	5,51	5,73	5,94	6,14	6,33	6,51	6,68	6,84	7
(3,4)	3	4,57	5,11	5,80	6,38	6,91	7,39	7,83	8,24	8,63	9
(3,5)	6	6,26	6,49	6,71	6,92	7,12	7,31	7,49	7,67	7,84	8
(4,5)	2	3,12	3,83	4,39	4,87	5,30	5,69	6,05	6,39	6,70	7
(4,6)	5	5,85	6,53	7,11	7,62	8,09	8,52	8,92	9,30	9,66	10
(5,6)	4	4,92	5,61	6,18	6,69	7,15	7,57	7,96	8,32	8,67	9
И Т О Г И											
$k \cdot \Delta$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$\mu_{\hat{X}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
S	15,00	21,27	24,55	27,36	29,32	31,09	32,54	33,74	34,88	35,96	37,00
μ_c	1,00	0,72	0,57	0,44	0,35	0,27	0,20	0,15	0,10	0,05	0,00
$\mu_{\hat{D}}$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,35	0,27	0,20	0,15	0,10	0,05	0,00

Заметим, что так как мы при заданном значении функции принадлежности затрат ориентируемся на меньшее значение затрат, то значения параметра c_{ij} мы при заполнении таблицы 3.8 не используем.

На рисунке 3.49 изображен график зависимости функции принадлежности нечеткого решения $\mu_{\hat{D}}(u)$ от значений функции принадлежности нечеткого множества допустимых планов $\mu_{\hat{X}}(u)$. Из анализа этого графика видно, что оптимальное значение функции принадлежности нечеткого решения приближенно равно 0,35, оптимальным же планом является план, стоимости создания коммуникаций при котором указаны в шестой графе таблицы 3.8.

Для получения более точного, но, конечно же, тоже приближенного ответа, рассмотрим рисунок 3.50, на котором изображены два графика:

— график зависимости функции принадлежности нечеткого множества допустимых планов от значения функций принадлежности нечетких затрат на создание коммуникаций (напомним, что мы имеем дело только с ситуациями, когда все эти значения одинаковы для всех коммуникаций);

— график зависимости функции принадлежности нечеткому множеству цели $\mu_c(u)$ от того же аргумента, что и первый график.

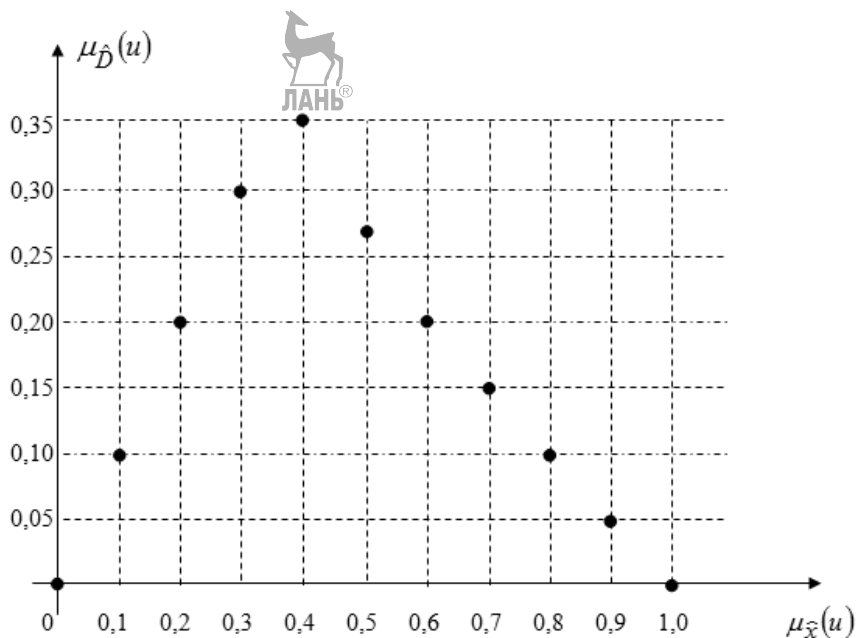


Рис. 3.49. График зависимости значений функции $\mu_{\hat{D}}(u)$ от значений $\mu_{\hat{X}}(u)$

Анализ графиков на рисунке 3.50 показывает, что решению задачи соответствует точка пересечения этих графиков, ее же координаты равны примерно по 0,375 для обеих координат. Из графика же видно, что максимальное значение функции $\mu_{\hat{D}}(u)$ (равное, в соответствии с формулой (3.13), минимальному из значений функций $\mu_{\hat{X}}(u)$ и $\mu_c(u)$) равно примерно 0,375.

При оценке качества плана строительства дорог можно использовать и другие подходы. Рассмотрим два из них.

1. Оценкой является степень уверенности лица, принимающего решение, в том, что минимальные затраты на создание требуемой сети дорог не превзойдут заданной величины s . Оптимальным предлагается считать план, для которого стоимость создания необходимой сети дорог не превосходит s , а степень уверенности в его реализации максимальна среди всех таких планов.

Прием решения сформулированной задачи аналогичен приему, использованному в п. 3.8.

Пусть в условиях примера 3.11 требуется определить максимальное значение степени уверенности лица, принимающего решение, в том, что на создание необходимой сети дорог потребуется не более 35 единиц денежных средств.

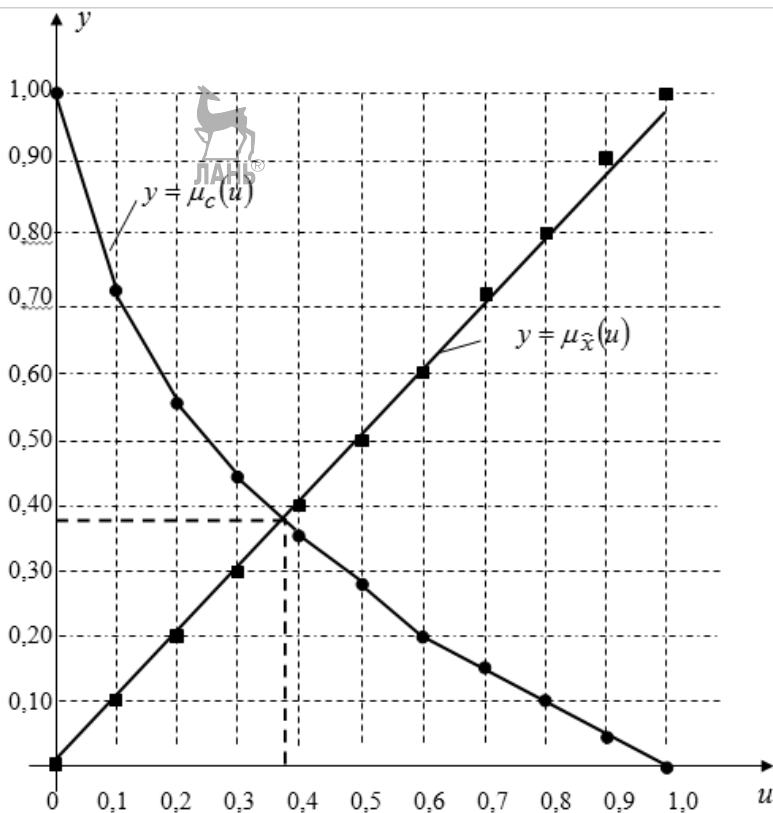


Рис. 3.50. Графики функций $\mu_{\hat{x}}(u)$ и $\mu_c(u)$

Из таблицы 3.8 видно (см. графу 10), что это значение приближенно равно 0,8.

2. Оценкой являются суммарные затраты, которых с заданной надежностью хватает на строительство сети. Оптимальным предлагается считать план, надежность которого не меньше заданной величины, а затраты при этом минимальны. Для решения этой задачи опять же можно воспользоваться таблицей, аналогичной таблице 3.8.

Пусть в условиях примера 3.11 требуется определить минимальные затраты на создание сети дорог, и чтобы при этом степень уверенности в достаточности этих затрат для строительства рассматриваемой сети была не меньше 0,6. Из данных восьмой графы таблицы 3.8 видим, что эти затраты равны 32,54 усл. ед.

3.11. Задача о максимальном потоке с нечетко заданными пропускными способностями коммуникаций

Рассмотрим задачу о максимальном потоке (см. п. 3.6), но теперь будем предполагать, что пропускные способности коммуникаций являются нечеткими и задаются нечеткими числами. Для формулировки понятия оптимальности воспользуемся идеями Заде и Беллмана [9], [34], о которых речь уже шла в предыдущих разделах.

Приведем точную формулировку рассматриваемой задачи.

Итак, рассмотрим сеть коммуникаций (конечный, связный, смешанный граф, каждому ребру которого соотнесено некоторое число) с n вершинами (пунктами) и m коммуникациями.

Пункты будем предполагать перенумерованными числами от 1 до n . В дальнейшем вершину будем отождествлять с ее номером. Коммуникацию (ребро), соединяющую пункт i с пунктом j , будем обозначать (i, j) . Будем предполагать, что множество коммуникаций

$$\mathcal{K} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)\}$$

некоторым образом упорядочено и что пропускная способность коммуникации (i, j) является нечетким числом $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$ с функцией принадлежности $\mu_{ij}(d)$ (см. рис. 3.46 и формулу (3.17)), заданной на универсальном множестве возможных значений пропускных способностей $[0, +\infty)$. Пусть

$$U = [0, +\infty) = \{u \in R^m \mid u_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}.$$

В качестве множества допустимых планов будем рассматривать нечеткое множество \hat{V} , заданное на универсальном множестве

$$V = \{v \in R^m \mid v_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Будем предполагать, что оси координат в пространстве R^m соответствуют коммуникациям: первая координата соответствует коммуникации (i_1, j_1) , вторая — (i_2, j_2) и т. д. Вдоль координатных осей при рассмотрении множества U откладываются значения пропускных способностей, а при рассмотрении множества V — планируемые объемы перевозок по соответствующим коммуникациям, т. е. u_k — значение пропускной способности коммуникации (i_k, j_k) и v_k — планируемый объем перевозки по этой коммуникации; так как $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, то V — план перевозок по всей сети.

Обозначим через $v^*(u)$ максимальный поток (объем перевозок) на рассматриваемой сети в случае, когда пропускные способности коммуникаций равны

$$u = (u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \dots, u_{i_m j_m}).$$

Тогда

$$v^*(u) = (v^*_{i_1 j_1}(u), v^*_{i_2 j_2}(u), \dots, v^*_{i_m j_m}(u)).$$

Функция принадлежности $\mu_{\widehat{V}}(v)$ нечеткого множества \widehat{V} задана на универсальном множестве V и определяется формулой

$$\mu_{\widehat{V}}(v) = \begin{cases} \max_{\{u \in U | v = v^*(u)\}} \min_{(i_k, j_k) \in \mathfrak{R}} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}), \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (3.25)$$

т. е. если v есть максимальный поток при значениях пропускных способностей, равных $u_{i_1 j_1}, u_{i_2 j_2}, \dots, u_{i_m j_m}$, то его надежность (см. формулу (1.4)) равна $\min_{(i_k, j_k) \in \mathfrak{R}} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k})$, в противном случае она равна нулю. Но один и тот же поток может оказаться максимальным при разных значениях пропускных способностей коммуникаций. В качестве $\mu_{\widehat{V}}(v)$ мы используем значение истинности высказывания $\bigvee_{u \in U} (v = v^*(u))$, поэтому в соответствии с формулой (1.5) для вычисления значения функции $\mu_{\widehat{V}}(v)$ мы должны использовать формулу (3.25), $\mu_{\widehat{V}}(v)$ — это максимальная из степеней нашей уверенности в том, что v есть максимальный поток на рассматриваемой сети.

Итак, формула (3.25) получена на основании определения конъюнкции нечетких высказываний (на основании формулы (1.4)) и дизъюнкции нечетких высказываний (формула (1.5)).

Аналогично предыдущему нечетко определенную цель в рассматриваемой задаче будем формализовать нечетким множеством $V_{\widehat{C}}$ с функцией принадлежности $\mu_{\widehat{C}}(v), v \in V$.

Обозначим:

$S(v)$ — величина потока при допустимом плане v ;

$v^*(u)$ — максимальный поток при пропускных способностях u ;

$S(v^*(u))$ — величина максимального потока при пропускных способностях u ;

S^{min} — величина максимального потока в случае, когда пропускные способности всех коммуникаций минимальны, т. е. равны a_{ij} ;

S^{max} — величина максимального потока в случае, когда пропускные способности всех коммуникаций максимальны, т. е. равны c_{ij} .

Отметим, что при заданном $u \in U$ для любой коммуникации из \mathfrak{X} известна ее пропускная способность. Поэтому, применяя, например, алгоритм Форда — Фалкерсона, мы можем вычислить $S(v^*(u))$.

В качестве функции принадлежности $\mu_{\hat{C}}$ рассматриваемых планов нечеткой цели будем рассматривать показатель близости рассматриваемого плана v к самому большому по величине максимальному потоку, что мы предлагаем характеризовать близостью величины $S(v)$ к величине S^{max} .

Положим

$$\mu_{\hat{C}}(v) = \frac{S(v) - S^{min}}{S^{max} - S^{min}}. \quad (3.26)$$

Нечетким решением рассматриваемой задачи будем считать нечеткое множество \hat{D} с функцией принадлежности $\mu_{\hat{D}}(v)$, являющееся пересечением нечеткого множества допустимых планов и нечеткой цели:

$$\mu_{\hat{D}}(v) = \min\{\mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{C}}(v)\}. \quad (3.27)$$

В качестве решения предлагается план v^0 , для которого

$$\mu_{\hat{D}}(v^0) = \max_{v \in V} \mu_{\hat{D}}(v) = \max_{v \in V} \min\{\mu_{\hat{V}}(v), \mu_{\hat{C}}(v)\}. \quad (3.28)$$

Обсудим некоторые свойства решения.

Пусть

$$\mu_{\hat{V}}(v^0) = \min_{(i_k, j_k) \in \mathfrak{X}} \mu_{i_k j_k}(u_{i_k j_k}^0) = \alpha, \quad (3.29)$$

$$v^0 = v^*(u^0),$$

$$\mu_{\hat{C}}(v^0) = A,$$

$$\mu_{\hat{D}}(v^0) = B,$$

$$S(v^0) = \theta.$$

Теорема 3.11. Найдется такой набор u' значений пропускных способностей коммуникаций сети, что $\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = B$ для любой коммуникации (i_k, j_k) и $\mu_{\hat{D}}(v^*(u')) = \mu_{\hat{D}}(v^0)$.

Доказательство. Рассмотрим следующие возможности: $\alpha = A$, $\alpha < A$ и $\alpha > A$.

1. Пусть $\alpha = A$. Тогда $\alpha = A = B$. Если $\alpha = 1$, то $\mu_{i_k j_k}(u^0_{i_k j_k}) = 1$ для любой коммуникации (i_k, j_k) и план v^0 — искомый. Если $\alpha < 1$, то построим такой план v' , что

$$\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \alpha \text{ для любого } k.$$

Покажем, что u' — оптимальный план.

Заметим, что для каждой коммуникации (i_k, j_k) существуют два разных значения пропускной способности, при которых значения функции принадлежности совпадают и равны α (за исключением случая, когда значение функции принадлежности равно единице), обозначим эти значения $u^1_{i_k j_k}$ и $u^2_{i_k j_k}$. Пусть $u^1_{i_k j_k} < u^2_{i_k j_k}$. При построении плана u' в качестве значения для $u_{i_k j_k}$ при любом k будем брать большее из этих двух чисел, т. е. $u^2_{i_k j_k}$. Отметим еще, что $u^1_{i_k j_k} < b_{ij} < u^2_{i_k j_k}$.

Так как в силу равенства (3.29) $\alpha \leq \mu_{i_k j_k}(u^0_{i_k j_k})$, то, в силу свойств функций принадлежности пропускных способностей, $u'_{i_k j_k} = u^2_{i_k j_k} \geq u^0_{i_k j_k}$. Значит, $S(v^*(u')) \geq S(v^0)$. Имеем: $\mu_{\hat{C}}(v^*(u')) \geq \mu_{\hat{C}}(v^0)$ и $\mu_{\hat{D}}(v^*(u')) \geq \mu_{\hat{D}}(v^0)$. Но в силу формулы (3.28) $\mu_{\hat{D}}(v^0) \geq \mu_{\hat{D}}(v^*(u'))$, тогда $\mu_{\hat{D}}(v^*(u')) = \mu_{\hat{D}}(v^0) = B$ и план u' является оптимальным.

Что и требовалось доказать.

2. Пусть $\alpha < A$, тогда $B = \alpha$. Рассмотрим коммуникации (i_k, j_k) , для которых $\mu_{i_k j_k}(u^0_{i_k j_k}) = \alpha$. Увеличим на ε значения функций принадлежности их пропускных способностей, но так, чтобы минимальное значение этих функций принадлежности было бы равно $\alpha + \varepsilon < A$. При этом сами пропускные способности немного уменьшатся (здесь, как и раньше, из двух возможных значений берем большее), а следовательно, немного уменьшится величина

максимального потока, т. е. значение функции принадлежности нечеткой цели уменьшится и станет равным $A - \delta$. В силу непрерывности функций принадлежности ε можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha + \varepsilon \leq A - \delta.$$

Обозначим через u' вектор получившихся значений функций принадлежности и v' максимальный поток при соответствующих пропускных способностях, т. е. $v' = v^*(u')$. Тогда

$$\mu_{\hat{v}}(v') = \mu_{\hat{v}}(v^*(u')) = \alpha + \varepsilon.$$

Имеем:

$$\mu_{\hat{c}}(v') = A - \delta,$$

$$\mu_{\hat{v}}(v') = \alpha + \varepsilon,$$

$$\alpha + \varepsilon \leq A - \delta,$$

тогда

$$\mu_{\hat{D}}(v') = \min\{\mu_{\hat{v}}(v'), \mu_{\hat{c}}(v')\} = \min\{\alpha + \varepsilon, A - \delta\} = \alpha + \varepsilon > \alpha.$$

Следовательно, план v^0 не оптимальный, что противоречит сделанному предположению. Значит, случай, когда $\alpha < A$, невозможен.

3. Пусть $\alpha > A$. Рассмотрим такой вектор u' значений пропускных способностей, что $\mu_{i_k j_k}(u'_{i_k j_k}) = \alpha - \varepsilon$, где ε таково, что $\alpha - \varepsilon > A$, причем из двух имеющихся здесь возможных значений пропускных способностей для каждой коммуникации возьмем большее (мы аналогично уже поступали в рамках данного доказательства).

Рассмотрим максимальный поток $v^*(u') = v'$, заметим, что $v' > v^0$ и тогда $\mu_{\hat{c}}(v') > A$.

По выбору ε получаем, что

$$\mu_{\hat{D}}(v') > \mu_{\hat{D}}(v^0),$$

чего быть не может, следовательно, $\alpha = A$, и мы получаем первый случай. Это завершает доказательство теоремы.

Последняя теорема так же, как и некоторые предыдущие, дает возможность строить алгоритм приближенного решения рассматриваемой задачи. Как и раньше, задаем с определенным шагом значения функций принадлежности пропускных способностей и находим соответствующие значения пропускных способностей коммуникаций. Зная значения пропускных

способностей, находим максимальный поток при таких пропускных способностях, определяем значение функции принадлежности нечеткой цели и, наконец, значение функции принадлежности нечеткого решения.

Определив значения функции принадлежности нечеткого решения для всех шагов алгоритма, выбираем из этих значений максимальное. Соответствующий максимальный поток и дает искомое приближенное решение рассматриваемой задачи.

Пример 3.12. Найти оптимальный поток на сети, схема которой изображена на рисунке 3.51. Пропускные способности (u_{ij} ($i=1,2,3,4,5$; $j=2,3,4,5,6$)) предполагаются нечеткими и при значениях функции принадлежности, взятых с шагом 0,1, указаны в таблице 3.9.

Из последней строки таблицы 3.9 видно, что максимальное значение функции принадлежности нечеткого решения равно 0,46, что соответствует значению функций принадлежности пропускных способностей коммуникаций, равному 0,5, значения же пропускных способностей коммуникаций указаны в соответствующей графе таблицы.

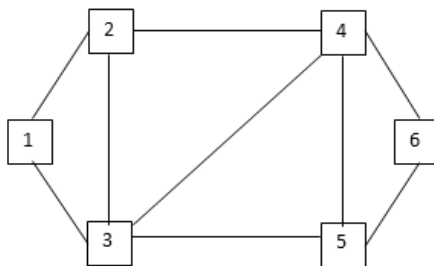


Рис. 3.51. Граф — схема коммуникаций

Таблица 3.9. Нечеткие пропускные способности и максимальный поток

u_{ij}	Значения функций принадлежности пропускных способностей										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_{12}	50	48	46	40	30	29	28	24	24	22	20
v_{12}^*	46	44	42	39	30	27	25	20	24	11	10
u_{13}	40	30	26	25	24	23	22	22	22	21	20
v_{13}^*	33	28	25	25	24	23	21	22	12	20	15
u_{23}	24	23	22	19	16	15	14	13	12	11	10
v_{23}^*	24	23	22	19	10	9	9	6	12	0	0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_{24}	22	21	20	20	20	18	16	14	12	11	10
v_{24}^*	22	21	20	20	20	18	16	14	12	11	10
u_{34}	30	25	23	23	22	21	20	18	16	13	10
v_{34}^*	30	25	23	20	11	10	9	10	8	4	0
u_{35}	27	26	25	24	23	22	21	18	17	16	15
v_{35}^*	27	26	25	24	23	22	21	18	16	16	15
u_{45}	30	28	26	25	23	22	21	19	15	16	15
v_{45}^*	0	0	0	0	5	4	3	4	0	0	0
u_{46}	55	52	50	40	26	24	22	20	20	15	10
v_{46}^*	52	46	43	40	26	24	22	20	0	15	10
u_{56}	45	42	40	35	30	26	24	22	16	16	15
v_{56}^*	27	26	25	24	28	26	21	22	16	16	15
$S(v^*)$	79	72	68	64	54	50	46	42	36	31	25
$\mu_c(v^*)$	1,00	0,87	0,80	0,72	0,54	0,46	0,39	0,31	0,20	0,11	0,00
$\mu_D(v^*)$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,46	0,39	0,31	0,20	0,11	0,00

3.12. Задача о назначении с нечетко заданными затратами

Рассмотрим задачу о назначении (см. п. 3.7) в терминах двудольных графов. Будем предполагать, что доход d_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$), получаемый при выполнении работы с номером j исполнителем с номером i , является нечетким числом: $d_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$, где a_{ij} — минимально возможное значение дохода при выполнении работы с номером j исполнителем с номером i , c_{ij} — максимально возможный доход, b_{ij} — мода. Функцию принадлежности нечеткого числа d_{ij} обозначим $\mu_{ij}(u)$, где u — элемент универсального множества $U = [0, +\infty)$.

Будем предполагать, что функция $\mu_{ij}(u)$ непрерывна, на отрезке $[a_{ij}, b_{ij}]$ строго возрастает и на отрезке $[b_{ij}, c_{ij}]$ строго убывает, $\mu_{ij}(b_{ij}) = 1$, $\mu_{ij}(a_{ij}) = \mu_{ij}(c_{ij}) = 0$. Найти «наилучшее» совершенное паросочетание, т. е. оптимальное распределение исполнителей по работам.

Величину $\mu_{ij}(u)$ будем трактовать как уверенность в том, что доход при выполнении работы с номером j исполнителем с номером i равен u как показатель истинности нечеткого высказывания «доход при выполнении работы с номером j исполнителем с номером i равен u ».

Строя математическую модель рассматриваемой задачи в подходе к понятию «оптимальный план» будем, как и ранее, следовать идеям, сформулированным Заде и Беллманом [9], [34]. Обозначим через X множество всех возможных взвешенных двудольных графов $G_F = (V_1, V_2, E, F)$, вершины из V_1 соответствуют исполнителям, вершины из V_2 соответствуют работам. Каждая вершина из V_1 соединена ребром с каждой вершиной из V_2 . Эти ребра соответствуют возможным назначениям исполнителей на работы и в совокупности образуют множество E . Каждому ребру (i, j) соотнесено неотрицательное число (вес) $u_{ij} = F(i, j)$ — доход при выполнении соответствующей работы соответствующим исполнителем. Подчеркнем, что здесь речь идет о «четком» значении этого дохода. Степень нашей уверенности в том, что этот доход составляет u_{ij} единиц, равна $\mu_{ij}(u_{ij})$. Поскольку рассматриваемые графы отличаются друг от друга только величинами доходов при выполнении различных работ разными исполнителями, то для полной их характеристики достаточно указать только значения этих доходов.

Пусть x_F — совершенное паросочетание (распределение исполнителей по работам), имеющее максимальный вес на графе G_F (максимальный суммарный доход при соответствующих доходах за выполнение конкретных работ); если таких паросочетаний несколько, то x_F какое-то из них. Множество таких паросочетаний, соответствующих всем возможным отображениям F , обозначим через Y . Будем задавать паросочетание x_F указанием ребер, из которых оно состоит:

$$x_F = \{(i_{1F}, j_{1F}), (i_{2F}, j_{2F}), \dots, (i_{nF}, j_{nF})\}.$$

Обозначим:

$S(x_F)$ — максимальный суммарный доход при выполнении всех работ в случае, когда для любого ребра (i, j) доход при выполнении работы j исполнителем i равен $F(i, j)$;

F^{min} — такое отображение, что $F^{min}(i, j) = a_{ij}$ для любого $(i, j) \in E$;

F^{max} — такое отображение, что $F^{min}(i, j) = c_{ij}$ для любого $(i, j) \in E$.

Зададим на множестве Y нечеткое множество \hat{Y} с функцией принадлежности $\mu_{\hat{Y}}(x_F)$, $x_F \in Y$. Величина $\mu_{\hat{Y}}(x_F)$ есть степень нашей уверенности в том, что паросочетание x_F является совершенным паросочетанием максимального веса (суммарный доход при выполнении всех работ при соответствующих назначениях максимален). Заметим, что так как паросочетание x_F мы ищем на графе G_F , то в силу формулы (1.4)

$$\mu_{\hat{Y}}(x_F) = \min_{(i,j) \in E} \mu_{ij}(F(i,j)).$$

Будем учитывать также степень принадлежности паросочетания x_F нечеткой цели. Функция принадлежности нечеткой цели характеризует степень нашей уверенности в экономической эффективности плана x_F , т. е. близости этого плана к плану $x_{F^{max}}$.

Близость плана x_F к плану $x_{F^{max}}$ будем характеризовать величиной

$$\Xi(x_F) = S(x_{F^{max}}) - S(x_F).$$

В качестве функции принадлежности нечеткой цели (нечеткого множества \hat{C}) будем использовать нормированную функцию $\Xi(x_F)$, т. е. положим

$$\mu_{\hat{C}}(x_F) = \frac{S(x_F) - S(x_{F^{\min}})}{S(x_{F^{\max}}) - S(x_{F^{\min}})}.$$

Напомним, что в подходе Беллмана — Заде предлагается считать степенью принадлежности альтернативы x нечеткому решению задачи число, равное минимуму из степени принадлежности этой альтернативы нечеткой цели и степеней принадлежности этой альтернативы всем нечетким множествам, задающим ограничения задачи. Функция же принадлежности пересечения рассматриваемых множеств равна минимуму из функций принадлежности рассматриваемых множеств.

В качестве нечеткого решения \hat{D} исходной задачи предлагается использовать пересечение нечетких множеств \hat{Y} и \hat{C} . В соответствии с формулой (1.1) функция принадлежности $\mu_{\hat{D}}(x_F)$ нечеткого решения задается формулой

$$\mu_{\hat{D}}(x_F) = \min\{\mu_{\hat{C}}(x_F), \mu_{\hat{Y}}(x_F)\}.$$

Решением задачи предлагается считать план x_F , для которого значение функции $\mu_{\hat{D}}(x_F)$ максимально.

Таким образом, мы получаем задачу нечеткого математического программирования:

$$\mu_{\tilde{D}}(x_F) \rightarrow \max,$$

$$x_F \in Y.$$

Пример 3.13. Пусть требуется распределить трех исполнителей по трем работам. Доходы при выполнении работ задаются нечеткими числами и равны соответственно:

$$d_{11} = (1,2,3), d_{12} = (1,4,5), d_{13} = (2,2,4),$$

$$d_{21} = (2,4,6), d_{22} = (1,3,5), d_{23} = (2,3,4),$$

$$d_{31} = (2,4,6), d_{32} = (2,4,5), d_{33} = (2,3,4).$$

Отображение F задано таблицей 3.10 и рисунком 3.52. Значения функций принадлежности μ_{ij} заданы таблицей 3.10.

Таблица 3.10. Отображение F и функции принадлежности μ_{ij}

(i, j)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$F(i, j)$	2,5	2	4	3	4	3	5	4,5	2,25
$\mu_{ij}(F(i, j))$	0,50	0,33	0,00	0,50	0,50	1,00	0,50	0,50	0,25

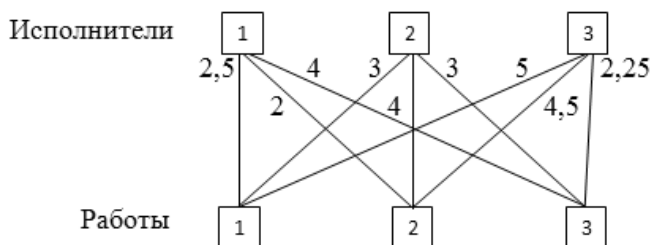


Рис. 3.52. Модель задачи о назначении из примера 3.13

Совершенным паросочетанием максимального веса при указанных в таблице 3.10 доходах при выполнении работ является паросочетание

$$x_F = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}.$$

Суммарный доход при этом равен $S(x_F) = 4 + 4 + 5 = 13$.

При минимальных значениях доходов d_{ij} при выполнении работ рассматриваем паросочетание $x_{F^{min}}$, которым является паросочетание $(1,3), (2,1), (3,2)$, при этом $S(x_{F^{min}}) = 6$, при максимальных доходах —

паросочетанием $x_{F^{max}}$ является, например, паросочетание $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ и $S(x_{F^{max}}) = 15$. Тогда

$$\mu_{\hat{C}}(x_F) = \frac{13-6}{15-6} \approx 0,78.$$

Следовательно, степень нашей уверенности в экономической эффективности того, что при доходах, заданных отображением F , первый исполнитель должен выполнять третью работу, второй — вторую и третий — первую, равна 0,78.

Заметим, что рассматриваемая в этом разделе задача во многом аналогична задаче о кратчайшем маршруте с нечетко заданным временем движения по коммуникациям (см. п. 3.9). Для этой задачи имеет место теорема, аналогичная теореме 3.8, что позволяет использовать для ее решения алгоритм, аналогичный предложенному в п. 3.8.

3.13. К вопросу об определении надежности коммуникации

Под надежностью коммуникации естественно понимать то, насколько мы уверены в безопасности ее использования для выполнения перевозок. В качестве показателя надежности коммуникации можно использовать вероятность того, что никаких отрицательных последствий из-за воздействия на нее со стороны террористов, природных или техногенных чрезвычайных ситуаций в ходе осуществления перевозок не будет. Но здесь возникает серьезный вопрос — откуда взять эти вероятности, особенно если рассматриваемые чрезвычайные ситуации уникальны, что вполне естественно. К тому же, даже если эти вероятности известны, остается достаточно сложная технически задача по определению оптимального варианта использования всей сети дорог.

Под надежностью плана будем понимать минимальную из надежностей маршрутов, используемых в этом плане, под надежностью маршрута — минимальную из надежностей коммуникаций, из которых этот маршрут состоит. Указанный прием вычисления надежностей маршрутов и всего плана основан на формуле (1.4), ведь высказывание «маршрут надежен» является конъюнкцией высказываний «коммуникация надежна» про каждую из коммуникаций маршрута, аналогично высказывание «план надежен» есть конъюнкция высказываний «маршрут надежен» про каждый маршрут, используемый в плане.

Рассмотрим несколько из возможных подходов к определению степени надежности коммуникаций [15], [17], [20].

1. Привлечь экспертов. Например, рассмотреть лингвистическую переменную [6], [8], [13] «надежность» с термами «абсолютно надежные», «очень надежные», «надежные» и т. п. Классифицировать имеющиеся маршруты в соответствии с перечисленными термами. Внутри каждого класса упорядочить их по степени истинности высказываний «данный маршрут надежен».

2. В рамках многокритериальной оптимизации разработано довольно много методов сведения множества частных критериев к единому обобщенному критерию [54], [55], [86], что позволяет упорядочить изучаемые альтернативы по значениям этого обобщенного критерия. В [15] предложен еще один подход к построению единого обобщенного критерия по заданным частным.

Рассмотрим задачу с нечеткой целью, как это в свое время предложили Заде и Беллман [9], [34]. Будем рассматривать задачу упорядочения коммуникаций (альтернатив) как задачу векторной оптимизации. Например, рассматривая задачу по определению надежности [17] коммуникации, будем учитывать два критерия: защищенность и глубина обзора, $f_1:U \rightarrow R^1, f_2:U \rightarrow R^1$, U — множество альтернатив. Защищенность коммуникации характеризуется числом постов на 100 км, глубина обзора — средним расстоянием в глубину, на которое коммуникация четко просматривается по бокам. Заметим, что оба частных критерия максимизируемые, т. е. лучшим альтернативам соответствуют большие значения частных критериев. Частная нечеткая цель формализуется нечетким множеством $X_C^i, i=1,2$ (например, «почти f_i^* », f_i^* — максимальное значение i -го частного критерия) с функцией принадлежности $\mu_i(x), x \in U$; $\mu_i(x)$ — это значение истинности нечеткого высказывания «дорога x по i -му критерию надежна». Например, пусть $\mu_1(\text{дорога от Москвы до Тулы}) = 0,7$, тогда степень нашей уверенности в том, что эта дорога защищена (на этой коммуникации имеется необходимое число постов), равна 0,7 (70%).

В качестве возможных функций принадлежности в первом приближении рассмотрим линейные зависимости — нормированное отклонение значения частного критерия от минимального, например:

$$\mu_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}},$$

f_i^{\min} — минимальное значение критерия f_i ; f_i^{\max} — максимальное.

Здесь предполагается, что частные критерии эквивалентны по важности. Если это не так, то можно использовать для задания функций принадлежности более сложные, чем линейные, зависимости, например:

$$\mu_i(x) = \left(\frac{f_i(x) - f_i^{\min}}{f_i^{\max} - f_i^{\min}} \right)^\alpha,$$

или зависимости, примеры графиков которых изображены на рисунке 3.53 ($f(x_{\min})$, $f(x_{\max})$) — минимум (максимум) частного критерия).

Нечеткая цель заключается в конъюнкции частных целей, поэтому функция принадлежности $\mu(x)$ нечеткого множества X_C , формализующего нечеткую цель, есть минимум функций принадлежности нечетких множеств, формализующих частные нечеткие цели:

$$\mu(x) = \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}. \quad (3.30)$$

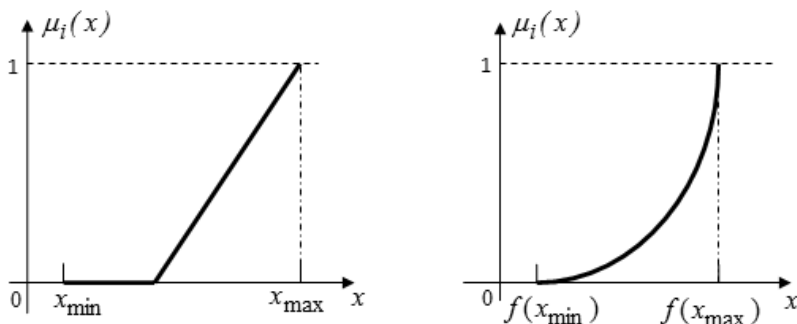


Рис. 3.53. Возможные графики функции принадлежности

Пример 3.14. Пусть функция $f_1(x)$ (число постов на 100 км) принимает значения на множестве $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$, функция $f_2(x)$ (глубина обзора в метрах) — на множестве чисел из отрезка $[0, 400]$.

Пусть для коммуникации x_0 число постов на 100 км равно $f_1(x_0) = 9$, глубина обзора $f_2(x_0)$ составляет 150 м.

Определить значение обобщенного критерия «надежность коммуникации», предполагая, что

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f_1(x) = 0,1,2,3, \\ \frac{f_1(x) - 3}{12}, & \text{если } f_1(x) = 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15. \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\mu_2(x) = \frac{f_2(x)}{400}. \quad (3.32)$$

Графики этих функций представлены на рисунках 3.54 и 3.55.

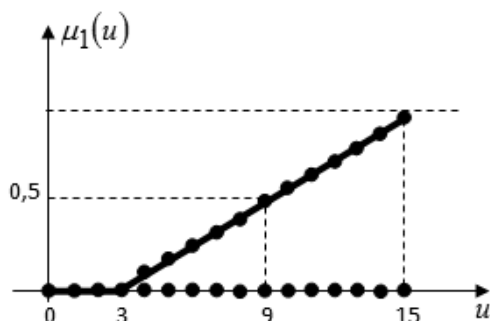


Рис. 3.54. График функции $\mu_1(u)$

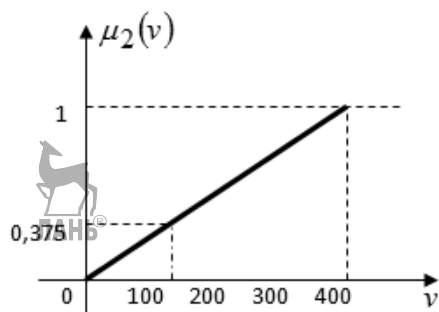


Рис. 3.55. График функции $\mu_2(v)$

Для рассматриваемой коммуникации $f_1(x_0)=9$, т. е. $u=9$ и $\mu_1(9)=0,5$ (см. формулу (3.31) или рис. 3.53); $f_2(x_0)=150$, т. е. $v=150$ и $\mu_2(150)=0,375$ (формула (3.32) и рис. 3.54). Мы получили, что степень нашей уверенности в том, что коммуникация защищена (значение истинности высказывания «коммуникация защищена») в нашем случае равна 0,5; для глубины обзора соответствующий показатель равен 0,375. Отсюда по формуле (3.30) получаем, что показатель надежности $\mu(x)$ для рассматриваемой коммуникации, равный минимальному из этих двух чисел, равен 0,375.

В рамках рассматриваемого подхода коммуникации предлагается упорядочивать по величине значений функции $\mu(x)$, чем больше это значение, тем надежнее коммуникация.

3. Остановимся на подходе, основанном на методе нечеткого вывода Мамдани и Ассилиани [54]. Рассмотрение этого подхода будем осуществлять, опираясь на пример, связанный с оценкой надежности дороги [15]. С использованием подхода Мамдани для решения задач векторной оптимизации можно познакомиться по [17].

Надежность (выходная переменная) есть нечеткая лингвистическая переменная «надежность» с терминами, например, «очень надежная», «практически надежная», «опасная». Эти термины формализуются с помощью нечетких множеств на универсальном множестве чисел — оценок $[0, 5]$ (рис. 3.56).

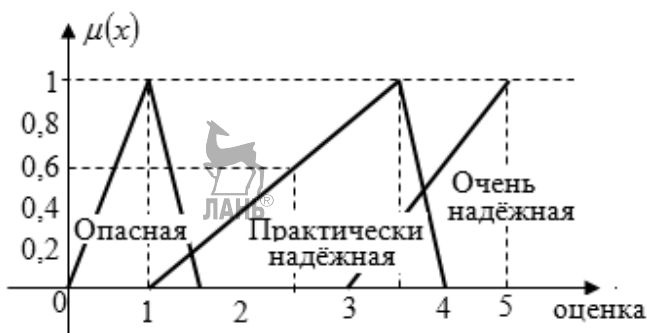


Рис. 3.56. Графики функций принадлежности термов лингвистической переменной «надежность»

Уровень надежности зависит от двух входных нечетких лингвистических переменных, например, «защищенность» с термами — «полностью защищена», «не очень защищена» и «глубина обзора» с термами — «очень скрытно», «почти открыто», «открыто».

В качестве универсального множества для первой будем использовать множество возможных значений числа постов на 100 км дороги, обозначим это множество буквой U , пусть $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; для второй — универсальным множеством является множество значений средней дальности обзора территории (в метрах), обозначим это множество буквой V , пусть $V = [0; 400]$. Функции принадлежности термов этих лингвистических переменных имеют графики, изображенные на рисунках 3.57 и 3.58.

Задана база знаний, содержащая информацию о значении (терме) выходной переменной в зависимости от сочетания значений (термов) входных переменных. Пример такой базы знаний представлен в таблице 3.11.

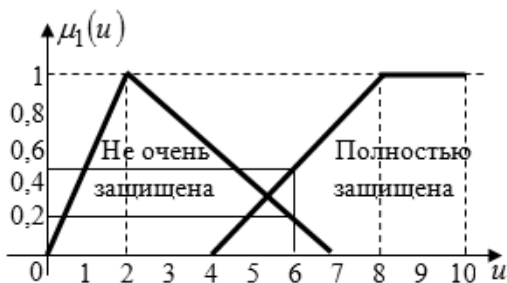


Рис. 3.57. Термы переменной «защищенность», u — число постов на 100 км

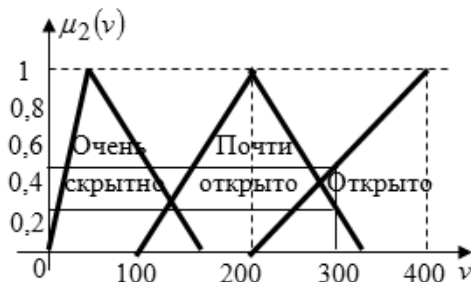


Рис. 3.58. Термы переменной «глубина обзора» v — просматриваемая глубина

Таблица 3.11. База знаний

«Защищенность»	«Глубина обзора»		
	B_1 «Открыто»	B_2 «Почти открыто»	B_3 «Очень скрытно»
A_1 «Полностью защищена»	«Очень надежная»	«Очень надежная»	«Практически надежная»
A_2 «Не очень защищена»	«Практически надежная»	«Практически надежная»	«Опасная»

Для рассматриваемой дороги определяем числовые значения входных переменных, например «защищенность» — 6 постов на 100 км, «глубина обзора» — 300 м. По этим данным, используя графики функций принадлежности или их аналитические выражения (мы ограничимся графиками), находим уровень нашей уверенности (значения соответствующих функций принадлежности) в том, что значением лингвистической переменной является тот или иной терм (табл. 3.12).

Таблица 3.12. Надежность термов выходной переменной при условиях $u = 6, v = 300$

«Защищенность»	«Глубина обзора»		
	B_1 «Открыто» (0,500)	B_2 «Почти открыто» (0,250)	B_3 «Очень скрытно» (0,000)
«Полностью защищена» (0,5)	«Очень надежная» (0,5)	«Очень надежная» (0,25)	«Практически надежная» (0,0)
«Не очень защищена» (0,2)	«Практически надежная» (0,2)	«Практически надежная» (0,2)	«Опасная» (0,0)

Оказывается, что уверенность в том, что дорога «полностью защищена» равна 0,500, «не очень защищена» — 0,2; уверенность в том, что подходы «очень скрытные» равна 0,000, «почти открытые» — 0,25, «открытые» — 0,5.

Для всех возможных сочетаний значений этих переменных по базе знаний определяем значение выходной переменной «надежность» (соответствующий терм) и соответствующее значение функции принадлежности (нашей уверенности в том, что значением «надежности» является именно этот терм).

Пусть уверенность в том, что значением первой переменной («защищенность») является терм «не очень защищена», равна 0,2, и уверенность в том, что значением второй переменной («глубина обзора») является терм «открыто», равна 0,5. Тогда уверенность в том, что значением выходной переменной будет терм «практически надежная», равна минимальному из этих двух чисел, т. е. 0,2.

Почему минимальному? В силу определения истинности конъюнкции нечетких высказываний (формула (1.4)).

Далее по полученным результатам, используя информацию о функциях принадлежности, находим уровень нашей уверенности (значение соответствующей функции принадлежности) в том, что «надежность» заслуживает конкретной числовой оценки. По этим результатам, используя, например, метод центра тяжести, получаем окончательный результат — оценку по пятибалльной системе рассматриваемой дороги.

Положительные значения функций принадлежности получились только для двух термов выходной переменной, для термина «очень надежная» и термина «практически надежная». При рассматриваемых значениях входных переменных терм «очень надежная» может оказаться значением выходной переменной только в двух случаях при наступлении ситуации, состоящей в объединении (дизъюнкции) двух сочетаний значений входных переменных:

1) значением переменной «защищенность» является терм «полностью защищена» и значением переменной «глубина обзора» является терм «открыто», значение функции принадлежности для этого сочетания равно 0,5 (формула (1.4));

2) значением переменной «защищенность» является терм «полностью защищена» и значением переменной «глубина обзора» является терм «почти открыто», значение функции принадлежности для этого сочетания равно 0,25 (формула (1.4)).

По формуле (1.5) получаем, что при рассматриваемых значениях входных переменных степень уверенности в том, что значением выходной переменной будет терм «очень надежная», равна максимальному из чисел 0,5 и 0,25, т. е. эта степень уверенности равна 0,5.

Аналогично степень уверенности в том, что значением выходной переменной при заданных значениях входных будет терм «практически надежная», равна 0,2.

Определим теперь степень принадлежности различных числовых значений выходной переменной (с шагом 0,5) при указанных сочетаниях термов входных

переменных (см. табл. 3.13) и при $u = 6, v = 300$. Например, степень принадлежности числового значения 2 терму «очень надежная» равна нулю (см. рис. 3.55); аналогично степень принадлежности значения 2,5 терму «практически надежная» равна 0,6.

Таблица 3.13. Степени принадлежности различных значений выходной переменной при $u = 6, v = 300$

Термы выходной переменной	Значения выходной переменной										
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
«Очень надежная» (0,500)	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,50	0,75	1,00
«Практически надежная» (0,200)	0	0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0	0

В таблице 3.14 даны степени принадлежности разных числовых значений выходной переменной с учетом степени принадлежности соответствующего выбора выходного терма.

Таблица 3.14. Степени принадлежности различных значений выходной переменной при $u = 6, v = 300$

Термы выходной переменной	Значения выходной переменной (x)										
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
«Очень надежная» (0,500)	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,50	0,50	0,50
«Практически надежная» (0,200)	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0	0	0
$\mu_E(x)$	0	0	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,25	0,50	0,50	0,50

Напомним, что при $u = 6, v = 300$ эти надежности равны: 0,5 для терма «очень надежная» и 0,2 для терма «практически надежная».

В последней строке таблицы 3.14 указаны значения функции принадлежности $\mu_E(x)$ нечеткого множества «значение выходной переменной при наборе значений факторов $u = 6, v = 300$ », т. е. степень уверенности в том, что коммуникация с такими значениями факторов с точки зрения ее надежности заслуживает соответствующей оценки. Клетки последней строки заполняются на основании формулы (1.5).

Для получения окончательной оценки надежности в различных источниках предлагается несколько подходов, отметим два из них.

В качестве оценки используется «центр тяжести», т. е. отношение суммы произведений элементов первой строки таблицы 3.14 на соответствующие элементы ее последней строки к сумме элементов ее последней строки:

$$\frac{1,5 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 + 2,5 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 3,5 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,5 + 4,5 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5}{0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,25 + 0,5 + 0,5 + 0,5} =$$

$$= \frac{9,425}{2,55} \approx 3,696.$$

Второй подход связан с выбором оценки, степень уверенности относительно которой максимальна. Сравнивая эти результаты, можно сделать вывод о том, что оценка, равная четверке, представляется достаточно обоснованной.

3.14. Задача о наиболее надежном маршруте

Рассмотрим задачу об отыскании на сети дорог максимально надежного маршрута, соединяющего два выделенных пункта. Под надежностью маршрута понимается степень уверенности в безопасном проезде по нему. Для решения используется, по существу, метод Дейкстры [67], [78] с той лишь разницей, что эффективность маршрута равна не сумме эффективностей составляющих его коммуникаций, а минимальной из этих эффективностей. В статье [15] содержится обоснование предлагаемого алгоритма для рассматриваемого случая. При формулировке задачи привлекаются элементы теории нечетких множеств и нечеткой логики.

Имеется n пунктов, связанных сетью дорог. Предполагается, что пункты перенумерованы числами от 1 до n , и в дальнейшем мы будем отождествлять сам пункт с его номером. Если между пунктами i и j имеется дорога, не проходящая ни через какие другие пункты, то будем называть ее коммуникацией и обозначать (i, j) . Эффективность коммуникации (i, j) будем обозначать d_{ij} . Если пункты i и j не соединены ни одной коммуникацией, то положим $d_{ij} = d_{ji} = 0$. Если между пунктами i и j имеется только дуга (i, j) , т. е. по коммуникации (i, j) возможно только одностороннее движение из пункта i в пункт j , то положим $d_{ji} = 0$. Для неориентированных коммуникаций принимаем, что $d_{ij} = d_{ji}$. Заметим, что если на сети имеются дуги (i, j) и (j, i) , то вовсе не обязательно, что $d_{ij} = d_{ji}$.

Требуется найти самый эффективный маршрут из первого пункта в пункт с номером n , т. е. маршрут, для которого показатель эффективности максимален. Если показателем эффективности коммуникации является степень истинности нечеткого высказывания «коммуникация надежная», то в качестве показателя эффективности маршрута будем использовать степень истинности нечеткого высказывания «все коммуникации маршрута надежные». В силу формулы (1.4) это значение равно минимальному из степеней истинности значений нечетких высказываний «коммуникация надежная», где минимум берется по всем коммуникациям рассматриваемого маршрута.

При добавлении к рассматриваемому маршруту еще одной коммуникации значение этого показателя не увеличивается.

Вернемся к рассматриваемой задаче и решим более общую задачу. Вместо отыскания самого эффективного маршрута из первого пункта в пункт с номером n будем искать самые эффективные маршрут из первого пункта до всех остальных пунктов рассматриваемой сети.

Алгоритм решения этой задачи состоит в том, что мы поэтапно будем расширять множество пунктов, до которых искомые маршруты уже найдены. Таким пунктам мы будем присваивать постоянные пометки, всем остальным — временные. На каждом этапе к указанному множеству пунктов добавляется еще один пункт.

Пусть S — множество пунктов, имеющих постоянную пометку. Пункт $i \notin S$ будем называть соседним с множеством S , если существует такая коммуникация (i, j) или (j, i) , что $j \in S$.

Постоянная пометка состоит из двух частей и для пункта с номером $k \in S$ имеет вид:

$$(\overline{r, L_k}),$$

где L_k — значение показателя эффективности для оптимального маршрута от первого пункта до пункта с номером k ; r — такой пункт из S , что коммуникация (r, k) лежит на этом маршруте.

Временная пометка также состоит из двух частей и для пункта с номером $k \notin S$ имеет вид:

$$(r, l_k),$$

Если k — соседний с S пункт, то l_k — это наибольшая из эффективностей маршрутов, идущих от пункта 1 до пункта k . При этом все

пункты кроме пункта k , через которые проходят эти маршруты, принадлежат S . В этом случае r — пункт из S , соседний с пунктом k (т. е. пункты r и k соединены коммуникацией (r, k)).

Если k не является пунктом, соседним с S , то $l_k = 0$ и его временная пометка имеет вид $(1, 0)$.

Опишем теперь алгоритм отыскания самых эффективных маршрутов от пункта 1 до всех остальных пунктов сети коммуникаций.

На подготовительном этапе первый пункт получает временную пометку $(1, 1)$, остальные пункты получают временные пометки $(1, d_{1k})$ (k — номер рассматриваемого пункта). Напомним, что мы считаем, что каждый пункт сети соединен с каждым. Если на самом деле коммуникации между пунктами i и j нет, то мы считаем, что она есть, но имеет показатель эффективности, равный нулю. Поэтому если на нашей сети коммуникация $(1, k)$ отсутствует, то $d_{1k} = 0$.

На каждом из остальных этапов осуществляется пересчет временных пометок, для чего выполняются следующие четыре шага.

Шаг 1. Находим такой пункт k , что

$$l_k = \max l_u,$$

здесь максимум берется по всем пунктам u с временными пометками.

Шаг 2. Пункт k получает постоянную пометку

$$\overline{(r, L_k)},$$

где $L_k = l_k$.

Оказывается, что L_k есть значение показателя эффективности для самого эффективного маршрута от пункта 1 до пункта k .

Шаг 3. Пересчитываем временные пометки. Для этого рассматриваем пункты с временными пометками, связанные с пунктом k коммуникацией, только что получившей постоянную пометку. Проверяем, не будет ли эффективнее двигаться до рассматриваемого пункта вдоль маршрута, проходящего через пункт k . Если этот маршрут эффективнее, то находим его эффективность и присваиваем пункту j (j — номер рассматриваемого пункта) новую временную пометку $(k, \min\{L_k, d_{kj}\})$. В противном случае временная пометка пункта j не изменяется.

Заметим, что $\min\{L_k, d_{kj}\}$ — это значение показателя эффективности рассматриваемого маршрута. То есть мы для каждого пункта j , соседнего с пунктом k и имеющего временную пометку (i, l_j) , вычисляем $\min\{L_k, d_{kj}\}$. Если $\min\{L_k, d_{kj}\} \geq l_j$, то пункт j получает новую временную пометку $(k, \min\{L_k, d_{kj}\})$. Иначе временная пометка пункта j не изменяется.

Шаг 4. Если еще не все пункты сети имеют постоянные пометки, то переходим к шагу 1, в противном случае пересчет временных пометок прекращается.

Восстанавливаем самые эффективные маршруты от первого пункта до остальных. Рассмотрим пункт с номером k , пусть он имеет постоянную пометку $(r, \overline{L_k})$, значит, наиболее эффективный маршрут до него от первого пункта проходит через пункт r . Рассматриваем пункт r , если левая часть его постоянной пометки равна w , то наиболее эффективный маршрут до него проходит через пункт w , и так далее, пока не дойдем до первого пункта.

Обоснованием изложенного алгоритма является следующая теорема.

Теорема 3.12.

1. Для наиболее эффективного маршрута от первого пункта до пункта с номером k значение показателя эффективности равно L_k .

2. Если k — соседний с S пункт, то l_k — это наибольшая из эффективностей маршрутов, идущих от пункта 1 до пункта k и таких, что все пункты кроме пункта k , через которые проходят эти маршруты, принадлежат S .

Доказательство. Через S_m будем обозначать множество пунктов, получивших постоянную пометку в ходе выполнения этапов с первого до этапа с номером m .

Доказывать справедливость заключений теоремы будем по индукции по номеру этапа.

При выполнении первого этапа первый пункт как пункт с максимальным показателем эффективности получает постоянную пометку $(1, \overline{L_1})$, где $L_1 = 1$. Множество S_1 становится равным $\{1\}$. Выполняя третий шаг, рассматриваем все пункты, соседние с первым. Пересчитываем их временные пометки. Для соседнего с пунктом 1 пункта (пусть его номер равен k) показатель эффективности l_k оказывается равным наибольшей из эффективностей

маршрутов, идущих от пункта 1 до пункта k и таких, что все пункты кроме пункта k , через которые проходят эти маршруты, принадлежат S_1 .

Предположим, что заключения теоремы выполняются перед началом этапа с номером m .

Выполним этап с номером m .

Пусть w — номер пункта, присоединяемого к множеству S_{m-1} в начале m -го этапа ($S_m = S_{m-1} \cup \{w\}$) и пусть его временная пометка равна (r, l_w) .

Рассмотрим произвольный маршрут из первого пункта в пункт w . Так как $1 \in S_{m-1}$ и $w \notin S_{m-1}$, то на этом маршруте найдется такой первый пункт v (первый при движении по этому маршруту от пункта 1), что $v \notin S_{m-1}$. Заметим, что таким пунктом может оказаться и пункт w . Из определения показателя эффективности маршрута следует, что любой маршрут из первого пункта в пункт w , проходящий через пункт v , будет иметь значение показателя эффективности не большее l_v . По индукционному предположению l_v — это наибольшая из эффективностей маршрутов, идущих от пункта 1 до пункта v и таких, что все пункты кроме пункта v , через которые проходят эти маршруты, принадлежат S_{m-1} . Следовательно, любой маршрут от первого пункта до пункта v имеет эффективность не большую, чем l_v . А так как $l_v \leq l_w$, то любой маршрут из первого пункта в пункт w имеет эффективность не большую, чем l_w . Значит, $l_w = L_w$ и максимальное значение показателя эффективности маршрута от первого пункта до пункта w равно L_w .

При выполнении третьего шага рассматриваемого этапа соседние с построенным множеством S_m вершины получают, в соответствии с правилом пересчета временных пометок, временные пометки, обладающие свойством, указанным во втором заключении теоремы.

Это завершает доказательство теоремы.

Замечание 3.6. Аналогичный алгоритм и теорема имеют место и в случае, когда эффективность d_{ij} коммуникации (i, j) равна вероятности ее надежности, а эффективность маршрута — равна произведению этих вероятностей по всем коммуникациям маршрута. Разница состоит только в том, что при выполнении п. 3, пересчитывая временные пометки, мы вычисляем произведение $L_k \cdot d_{kj}$.

Если $L_k \cdot d_{kj} > l_j$, то вершина j получает новую временную пометку $(k, L_k \cdot d_{kj})$. Иначе временная пометка вершины j не изменяется.

Пример 3.15. Найти наиболее надежный маршрут от первого пункта до шестого пункта на сети, изображенной на рисунке 3.59. Значения истинности нечеткого высказывания «коммуникация надежная» указаны на рисунке рядом с соответствующей коммуникацией.

Пометки пунктов после подготовительного этапа указаны рядом с пунктами на рисунке 3.60.

На первом этапе постоянную пометку получает п. 1. После пересчета временных пометок изменений нет (рис. 3.61).

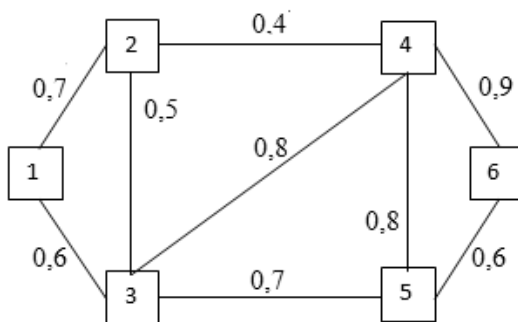


Рис. 3.59. Сеть коммуникаций из примера 3.15

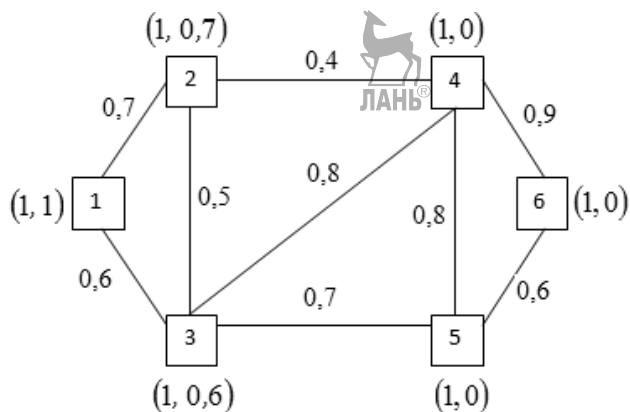


Рис. 3.60. Результаты подготовительного этапа

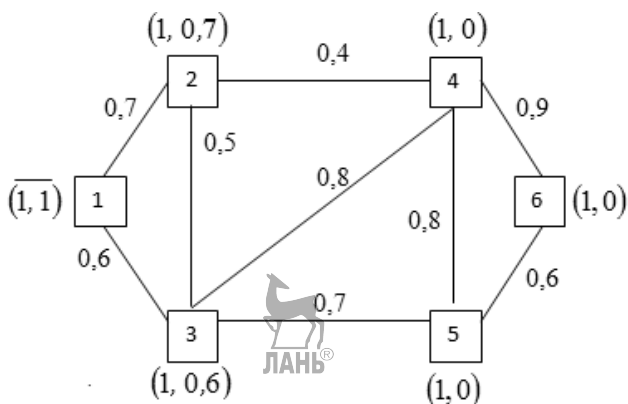


Рис. 3.61. Результаты после первого этапа

На втором этапе постоянную пометку получает п. 2, 4 получает новую временную пометку, которая лучше первоначальной (рис. 3.62).

На третьем этапе постоянную пометку получает п. 3, 4 получает новую временную пометку (маршрут до него через третий пункт надежнее, чем через второй). Новую временную пометку получает и п. 5 (рис. 3.63).

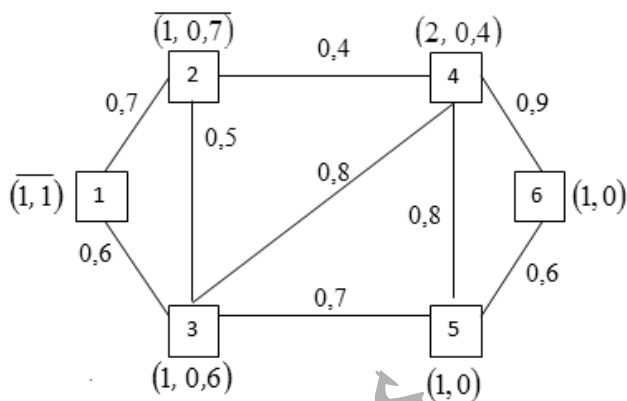


Рис. 3.62. Результаты после второго этапа

На четвертом этапе на получение постоянной пометки претендуют п. 4, 5. Берем любой из них (мы взяли п. 4) и присваиваем ему постоянную пометку. Временная пометка меняется только у п. 6 (рис. 3.64).

На пятом этапе постоянную пометку получает п. 5, временная пометка последнего пункта — п. 6 — не меняется (рис. 3.65).

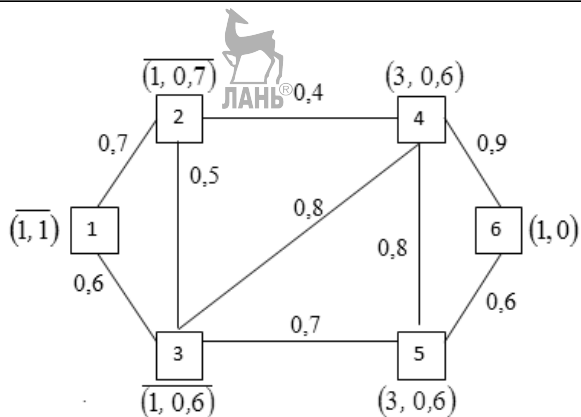


Рис. 3.63. Результаты после третьего этапа

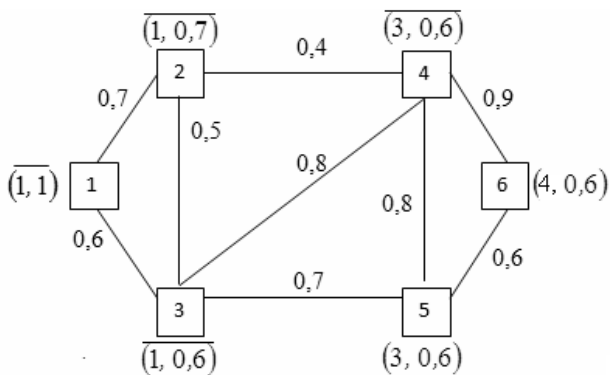


Рис. 3.64. Результаты после четвертого этапа

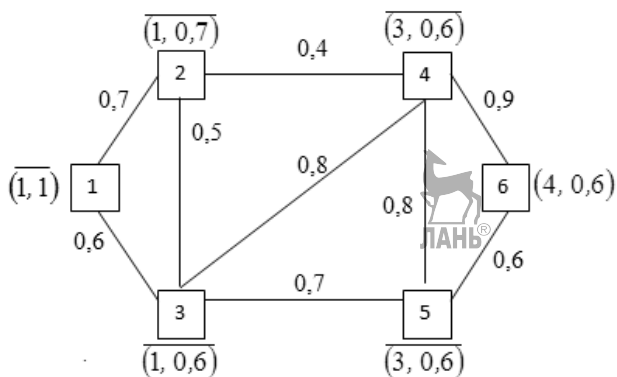


Рис. 3.65. Результаты после пятого этапа

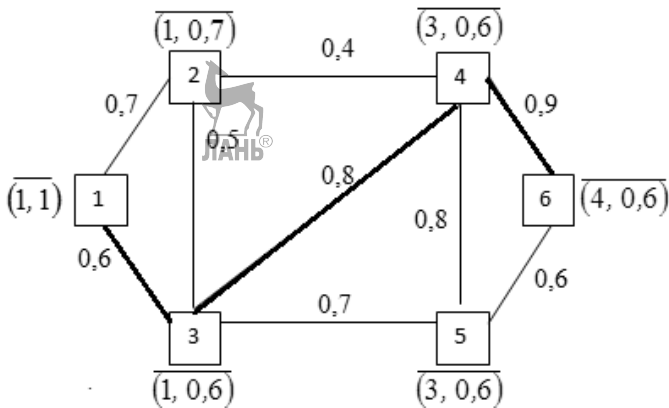


Рис. 3.66. Результаты после шестого этапа

На последнем (шестом) этапе п. 6 получает постоянную пометку (рис. 3.66).

Оптимальный маршрут на рисунке 3.66 отмечен жирными линиями. Он состоит из коммуникаций $(1,3)$, $(3,4)$, $(4,6)$. Показатель эффективности — степень истинности нечеткого высказывания «все коммуникации этого маршрута надежные» — равен 0,6. Заметим, что в данном примере это не единственный маршрут с таким значением показателя эффективности. Мы при выполнении пятого этапа не стали менять временную пометку пункта 6, а вообще говоря, могли ее поменять на $(5,0,6)$. Тогда мы получили бы оптимальный маршрут, который проходит через вершины 1–3–5–6, но его эффективность такая же, как и у полученного ранее маршрута.

3.15. Задача о наиболее надежном покрытии

Рассмотрим задачу, аналогичную задаче из п. 3.6, но вместо отыскания наиболее экономичной сети коммуникаций, соединяющей все рассматриваемые пункты, будем искать самую надежную сеть, соединяющую все пункты. Будем предполагать, что число пунктов и коммуникаций конечно. Такая задача представляет интерес в случаях, когда функционирование коммуникации зависит от состояния погоды, степени воздействия на нее природных условий и т. д.

Итак, пусть дан связный взвешенный граф $G=(V,E)$, его ребра соответствуют коммуникациям, каждому из них сопоставлена степень истинности нечеткого высказывания «коммуникация надежна».

Требуется найти остов этого графа, для которого истинность нечеткого высказывания «все коммуникации надежны» максимальна.

Решать задачу будем, используя несколько модифицированный алгоритм Краскала (см. п. 3.5), заменив в нем только критерий присоединения очередного ребра к уже построенному перспективному множеству ребер, и искать будем не минимальный, а максимальный остов (остов максимального веса). Обозначать максимальный остов будем МакО. Заметим, что здесь используется терминология из п. 3.5. Под весом ребра будем понимать степень истинности нечеткого высказывания «коммуникация надежна» относительно соответствующей коммуникации, под весом остова — степень истинности высказывания «все коммуникации остова надежны».

Для рассматриваемого случая имеют место аналоги теорем 3.1, 3.2 — теоремы 3.13, 3.14.

Теорема 3.13. Среди решений задачи о самом надежном соединении имеется остов.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что подграф, являющийся решением задачи (соединяющий все вершины рассматриваемой сети и имеющий максимальный вес), не является деревом. Тогда в нем существует цикл. Убрав произвольную коммуникацию этого цикла, мы получим подграф, содержащий все вершины, но не меньшего веса. Если полученный подграф является деревом, то мы получили требуемый остов, в противном случае в этом подграфе имеется цикл, убрав в нем произвольное ребро, получим новый подграф не меньшего веса и т. д. В силу конечности числа ребер в исходном графе мы, в конце концов, получим требуемый остов. Теорема доказана.

Изменяя с учетом сказанного алгоритм Краскала, получаем следующий алгоритм.

Пусть дан связный взвешенный граф $G=(V,E)$, имеющий n вершин и m ребер, пусть для любого ребра $e \in E$ определен его вес $d(e)$ (его надежность).

Начинаем с графа $G_0=(V,\emptyset)$, который состоит только из вершин графа $G=(V,E)$ и не имеет ребер. Этот граф можно рассматривать как n компонент связности, каждая из которых состоит из одной вершины.

В дальнейшем алгоритм состоит из последовательности этапов. На этапе с номером k ($k=1,2,\dots,n-1$) строится граф $G_k=(V,T_k)$, для этого к множеству ребер T_{k-1} графа G_{k-1} добавляется одно ребро, которое выбирается по следующему правилу:

— в графе $G=(V,E)$ выбираем ребро максимального веса из числа ребер, не принадлежащих T_{k-1} ;

— если добавление этого ребра к T_{k-1} не приводит к образованию цикла, то присоединяем это ребро к T_{k-1} и получаем T_k и граф $G_k=(V,T_k)$;

— если цикл образуется, то из оставшихся ребер графа $G=(V,E)$, не принадлежащих T_{k-1} , выбираем ребро максимального веса и т. д.

Граф G_{n-1} является остовом графа G максимального веса.

Теорема 3.14. Изложенный алгоритм дает МакО.

Доказательство. Покажем сначала, что при $0 < i < n-1$ граф G_i можно построить. Действительно, рассмотрим множества ребер T_{i-1} и $E \setminus T_{i-1}$. В силу связности графа G найдется такое ребро (k,l) , что $k \in T_{i-1}$ и $l \in E \setminus T_{i-1}$. Это ребро не образует цикла с ребрами из T_{i-1} . Выбрав из всех таких ребер ребро с максимальным весом, получим ребро, присоединение которого к T_{i-1} даст T_i .

Докажем теперь, что T_{n-1} является остовом максимального веса в графе G .

Рассмотрим граф G_{n-1} с множеством ребер T_{n-1} . Так как он связный, состоит из n вершин и $n-1$ ребра и не имеет циклов, то он является деревом (см. [78]). Покажем, что вес дерева G_{n-1} максимален.

Предположим, что это не так. Среди всех остовов графа G , имеющих максимальный вес, выберем такой остов с множеством ребер T , который имеет с T_{n-1} максимальное число общих ребер. Пусть $e_i=(a,b)$ — ребро из T_{n-1} , не содержащееся в T и имеющее минимальный номер среди ребер множества T_{n-1} , не входящих в T . (Ребра в множестве T_{n-1} получили номера в процессе его построения в порядке их присоединения к строящемуся графу.) В множестве T есть простая цепь, соединяющая вершины a и b , присоединив к ней ребро e_i , получим цикл. В этом цикле есть ребро e , не входящее в T_{n-1} (иначе T_{n-1} содержит цикл). Заменяя в T ребро e на e_i , получим новый остов $T'=T \setminus \{e\} \cup \{e_i\}$. Но T — остов максимального веса, следовательно, вес T' не больше веса T . Отсюда следует, что ребро e_i весит не больше ребра e .

С другой стороны, присоединяя ребро e к T_{i-1} (при $i=1$ полагаем $T_{i-1}=\emptyset$), мы не получим цикла, поскольку ребра $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, e$ входят в

множество T . Если бы вес ребра e был больше веса ребра e_i , то при построении дерева T_i мы взяли бы не e_i , а e (или другое ребро с весом большим веса e_i). Следовательно, вес ребра e_i равен весу ребра e , и веса деревьев с множествами ребер T и T' одинаковые.

Итак, T' — остов максимального веса. Число ребер, общих для множеств T' и T , больше, чем число общих ребер для T_{n-1} и T ($T' = T \setminus \{e\} \cup \{e_i\}$), что противоречит выбору множества T . Полученное противоречие доказывает теорему.

Пример 3.16. Возможные линии связи представлены в виде графа G на рисунке 3.67.

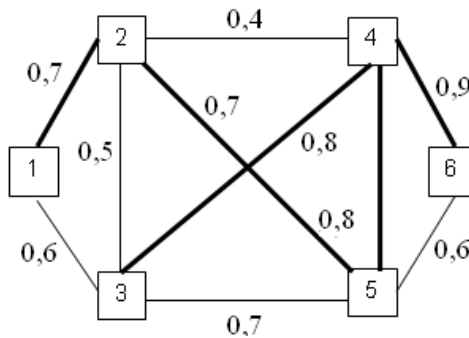


Рис. 3.67. Граф, на котором указаны все возможные линии связи

Рядом с ребрами, изображающими линии связи, указаны надежности этих линий (например, степень нашей уверенности в том, что при передаче информации по данной линии несанкционированного доступа к ней не будет). Основным источником информации является п. 1, необходимо передавать сообщения из п. 1 во все остальные пункты. Определить, какие линии связи необходимо организовать, чтобы надежность передачи сообщений, исключающей несанкционированный доступ к ним в рамках этой системы связи, была бы максимальной.

Решение. $G_0 = (V, \emptyset)$, $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Перечислим ребра, из которых состоит МакО, указав их в том порядке, в котором они присоединялись к создаваемому остову:

$$(4, 6), (3, 4), (4, 5), (2, 5), (1, 2).$$

Это остов максимальной надежности, его показатель надежности равен 0,7.

Заметим, что порядок построения остова мог быть и другим. Отметим также, что присоединение ребра (3,5) вместо, например, (2,5) невозможно, так как ребра (3,5), (3,4), (4,5) образуют цикл.

Усложним формулировку рассматриваемой задачи, будем учитывать не только показатель надежности коммуникации, но и стоимость ее создания. Пусть каждому ребру графа $G=(V,E)$ соотнесены степень истинности нечеткого высказывания «коммуникация надежна» (надежность) и значение стоимости ее создания (стоимость). Рассмотрим в связи со сказанным две задачи.

1. Построить максимально надежный остов при условии, что его стоимость не должна быть больше S .

Эту задачу можно решать, последовательно исключая из исходного графа ребра минимальной надежности.

Решение начинается с рассмотрения исходного графа, для которого строится остов минимальной стоимости. Пусть его стоимость меньше S и его надежность равна r_1 . Удаляем из исходного графа коммуникации, надежность которых не превосходит r_1 . Для получившегося графа опять строим остов минимальной стоимости. Стоимость и надежность получившегося остова будут не меньше, чем остова, полученного ранее. Пусть его надежность равна r_2 . Удаляем из исходного графа коммуникации, надежность которых не превосходит r_2 и т. д., пока не получим остов стоимостью больше S или граф, не содержащий всех вершин исходного. Остов, построенный на предыдущем шаге, и будет искомым.

2. Построить остов минимальной стоимости при условии, что его надежность должна быть не меньше R .

Для решения этой задачи уберем из исходного графа коммуникации, надежность которых меньше R , если при этом мы получим граф, который содержит не все вершины исходного, то, значит, сформулированная задача не имеет решения. В противном случае построим остов минимальной стоимости для полученного графа.



3.16. Задача о наиболее надежном потоке заданной величины и о максимальном потоке заданной надежности

Начнем с задачи о наиболее надежном потоке заданной величины.

Рассмотрим некоторую сеть, в качестве характеристик коммуникаций будем использовать их надежность и пропускную способность.

Пусть по рассматриваемой сети требуется пропустить поток, величина которого равна F , при этом требуется выбрать для использования такие коммуникации, чтобы надежность того, что этот поток будет пропущен по сети, была бы максимальной.

Для решения сформулированной задачи предлагается следующий алгоритм.

На начальной итерации (итерация с номером 0) алгоритма для заданной сети определяется максимальный поток. Пусть его надежность равна μ_0 , а его величина равна f_0 .

Если $f_0 < F$, то задача не имеет решения и работа алгоритма на этом заканчивается.

Если $f_0 \geq F$, то выполняется несколько итераций, на каждой из которых строится новый максимальный поток, надежность которого больше надежности потока, построенного на предыдущей итерации.

Величину максимального потока, построенного на k -й итерации, будем обозначать f_k , а его надежность — μ_k .

На k -й итерации запрещаем использование (убираем из сети) коммуникаций, надежность которых не превосходит μ_{k-1} . На получившейся сети находим максимальный поток. Если $f_k \geq F$, то переходим к следующей итерации. Если $f_k < F$, то работа алгоритма заканчивается. При этом решением задачи является максимальный поток, построенный на предыдущей итерации, его величина равна f_{k-1} , его надежность равна μ_{k-1} .

Пример 3.17. Найти самый надежный поток из потоков, величина которых не меньше 55 ед., на сети, изображенной на рисунке 3.68. На этом рисунке рядом с ребрами, изображающими коммуникации, указаны пропускные способности, в скобках — показатели надежности этих коммуникаций.

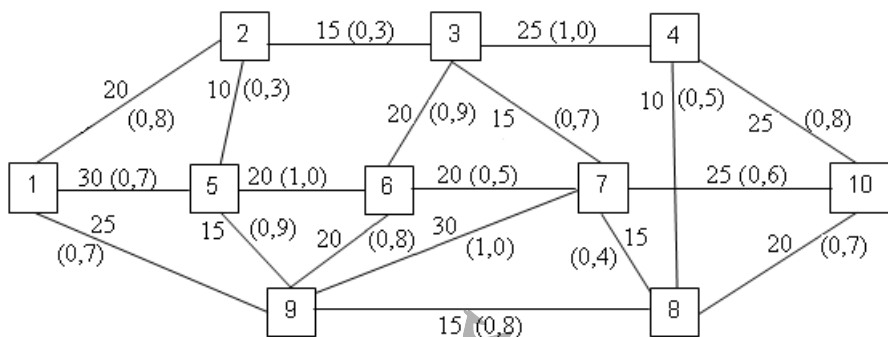


Рис. 3.68. Схема сети коммуникаций из примера 3.17

Коммуникации, используемые в самом надежном потоке величиной в 55 ед., выделены на рисунке 3.69 жирными линиями. У соответствующих ребер указаны объемы перевозок, рядом с ними стрелками показано направление, в котором они перемещаются. Показатель надежности (степень истинности высказывания «поток надежен») для этого потока равен 0,6 (рис. 3.69).

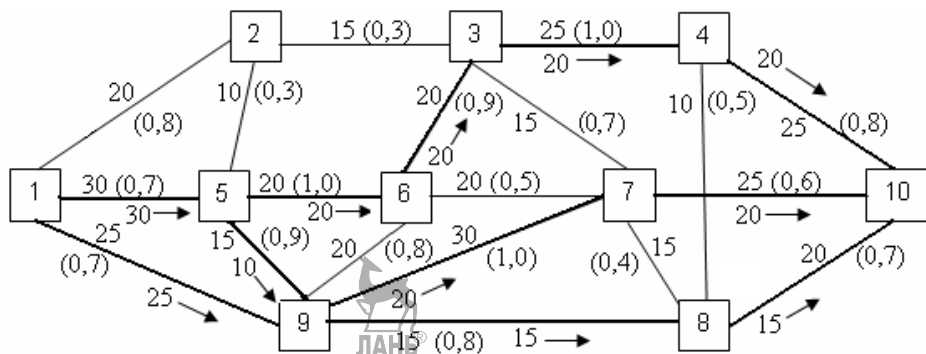


Рис. 3.69. Поток величины 55 ед. и надежностью 0,6

Значение 0,6 — это действительно максимальное значение показателя надежности для потоков величиной не менее 55 ед. Если запретить использование коммуникаций с показателем надежности 0,6, т. е. коммуникацию (7,10), то величина потока не сможет быть больше 45 ед.

Решим еще одну задачу для рассматриваемой сети: требуется найти поток максимальной величины из числа потоков, показатель надежности которых не меньше заданной величины.

Для решения сформулированной задачи запрещаем использование (убираем из сети) коммуникаций, надежность которых ниже заданной. Для

получившейся сети находим максимальный поток. Это завершает решение задачи.

Пример 3.18. Для сети из примера 3.17 найти максимальный поток, показатель надежности которого не меньше 0,7.

Запретив коммуникации (2,3), (2,5), (4,8), (6,7), (7,8), (7,10), получим сеть, изображенную на рисунке 3.70.

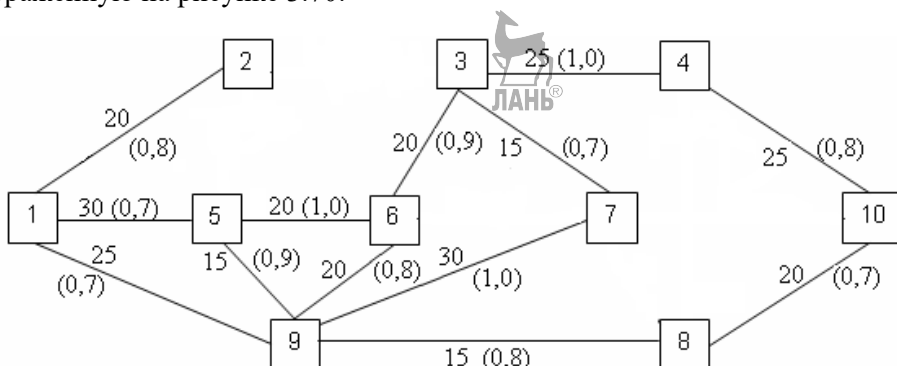


Рис. 3.70. Сеть коммуникаций с надежностью не меньше 0,7

Коммуникации, используемые в максимальном потоке, на рисунке 3.71 отмечены жирными линиями. Рядом с этими коммуникациями указаны транспортируемые по ним объемы, там же стрелками указаны направления подачи этих объемов. Построенный максимальный поток имеет величину 40 ед. и надежность 0,7.

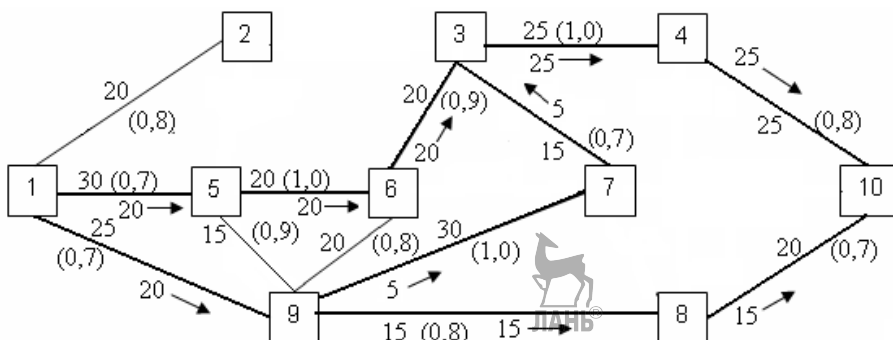


Рис. 3.71. Максимальный поток с надежностью 0,7

3.17. Задача о наиболее надежном назначении на произвольном графе

Рассмотрим задачу, аналогичную задаче из п. 3.12, но вместо отыскания совершенного паросочетания максимального веса на двудольном графе будем искать паросочетание на произвольном связном графе без петель и

изолированных вершин, состоящее из заданного числа ребер и имеющее максимальный вес. Под весом ребра (i, j) теперь, в отличие от задачи из п. 3.12, будем понимать степень истинности нечеткого высказывания «пара (i, j) обладает необходимым свойством». Под весом данного паросочетания будем понимать степень истинности нечеткого высказывания «все ребра данного паросочетания обладают необходимым свойством». В соответствии с формулой (1.4) это значение равно минимальному[®] из значений истинности нечетких высказываний «пара (i, j) обладает необходимым свойством» для всех ребер данного паросочетания.

Итак, рассмотрим граф $G = (V, E)$. Будем предполагать, что все вершины перенумерованы числами от 1 до n . Если возможно паросочетание i и j , то в E имеется ребро (i, j) . Каждому ребру (i, j) соотнесен его вес $\mu(i, j)$ — степень нашей уверенности в том, что эта пара справится с заданием (степень истинности соответствующего утверждения).

Требуется сформировать m ($m \leq n/2$) пар так, чтобы степень истинности нечеткого высказывания «каждая из сформированных пар справится с заданием» была бы максимальной.

Множество всех паросочетаний в графе G , содержащих по m ребер, обозначим \mathfrak{X}_m . В терминах теории графов рассматриваемая задача состоит в том, что в множестве \mathfrak{X}_m требуется найти паросочетание максимального веса.

Для решения этой задачи предлагается следующий достаточно простой алгоритм, включающий нижеприведенную последовательность этапов.

На начальном (нулевом) этапе[®], используя алгоритм Эдмондса (п. 3.8), строим паросочетание P_0 с числом ребер, равным m . Если на исходном графе такого паросочетания не оказывается, то рассматриваемая задача не имеет решения. Если такое паросочетание нашлось, то определяем его вес, пусть он равен α_0 . Строим граф $G_1 = (V_1, E_1)$, который получается из графа G после удаления из него ребер, вес которых не превосходит α_0 , и изолированных вершин (если таковые появились после удаления указанных ребер).

На первом этапе опять, используя алгоритм Эдмондса, строим паросочетание P_1 с числом ребер, равным m . Если такового не нашлось, то паросочетание P_0 , построенное на предыдущем этапе, дает ответ для рассматриваемой задачи. Если паросочетание P_1 нашлось, то определяем его вес, обозначим его α_1 . Отметим, что $\alpha_1 > \alpha_0$. Строим граф $G_2 = (V_2, E_2)$, который получается из графа G_1 после удаления из него ребер, вес которых не

превосходит α_1 , и изолированных вершин (если таковые появились после удаления указанных ребер). И так далее до тех пор, пока не удастся построить паросочетания с m ребрами. Паросочетание, полученное на предпоследнем этапе, дает ответ на вопрос указанной задачи.

Следует отметить, что оптимальных в рассматриваемом смысле паросочетаний может быть и не одно.

Пример 3.19. Всего имеется 8 военнослужащих, из которых надо образовать три патруля из двух военнослужащих в каждом так, чтобы уверенность в том, что задача будет выполнена, была бы максимальной. Возможности их объединения в пары показаны на графе (рис. 3.72).

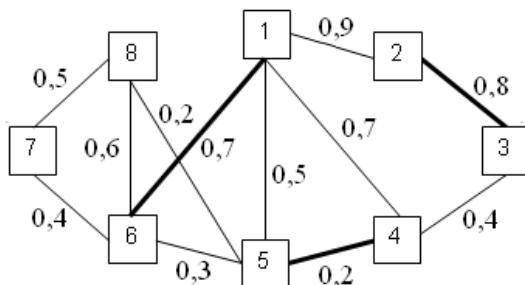


Рис. 3.72. Возможности по объединению в патрули и их надежность

Степени истинности нечетких высказываний «данная пара гарантирует безопасность в течение заданного срока (продолжительности)» указаны в таблице 3.15.

Таблица 3.15. Надежности патрулей

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	0,9	—	0,7	0,5	0,7	—	—
2	0,9	—	0,8	—	—	—	—	—
3	—	0,8	—	0,4	—	—	—	—
4	0,7	—	0,4	—	0,2	—	—	—
5	0,5	—	—	0,2	—	0,3	—	—
6	0,7	—	—	—	0,3	—	0,4	0,6
7	—	—	—	—	—	0,4	—	0,5
8	—	—	—	—	—	0,4	0,5	—

В терминах теории графов требуется построить паросочетание из трех ребер, вес которого был бы максимальным среди всех таких паросочетаний.

Строим паросочетание, пока число ребер в нем не достигнет трех.

I. Берем первую вершину, $v=1$. Ребро $(1,2)$ является увеличивающей цепью, и мы получаем паросочетание $P = \{(1,2)\}$. Вершины 1 и 2 становятся насыщенными.

Выбираем следующую вершину из числа ненасыщенных, это вершина 3 ($v=3$). Рассматриваем ребро $(3,2)$. Так как вершина 2 насыщенная (она инцидентна насыщенному ребру $(1,2)$), то присоединяем это ребро к строимой чередующейся цепи, получаем цепь $(3,2)$, $(2,1)$ и строим чередующуюся цепь, начиная с вершины 1. Эта цепь состоит из одного ребра — ребра $(1,4)$. В результате мы получаем чередующуюся цепь $(3,2)$, $(2,1)$, $(1,4)$. Так как начальная и конечная вершины этой цепи (вершины 3 и 4) свободные, то эта цепь является увеличивающей. Убирая из паросочетания P насыщенное ребро этой цепи и добавляя в него свободные в ней ребра, получаем новое паросочетание с большим на единицу числом ребер. Теперь $P = \{(3,2), (1,4)\}$.

Следующей из числа ненасыщенных вершин является вершина 5. Начиная с нее, получаем увеличивающую цепь $(5,4)$, $(4,1)$, $(1,6)$, и тогда новое паросочетание $P = \{(5,4), (1,6), (3,2)\}$, его ребра выделены на рисунке 3.72 жирными линиями.

Вес этого паросочетания равен

$$\min\{0,2, 0,7, 0,8\} = 0,2.$$

II. Запрещая использование патрулей, чья надежность (вес соответствующего ребра) не превосходит 0,2, получаем граф, изображенный на рисунке 3.73.

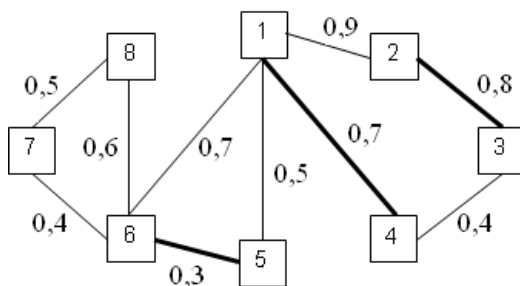


Рис. 3.73. Граф после первого этапа

На этом графе имеется паросочетание из трех ребер, например $\{(2,3), (1,4), (5,6)\}$. Его вес равен 0,3.

III. Удаляя ребра с весом, не превосходящим 0,3, получаем граф, изображенный на рисунке 3.74. На нем имеется паросочетание из трех ребер, например $\{(2,3), (1,4), (6,7)\}$. Его вес равен 0,4.

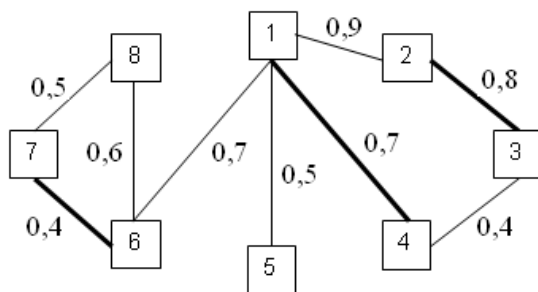


Рис. 3.74. Граф после второго этапа

IV. Удаляя ребра с весом, не превосходящим 0,4, получаем граф, изображенный на рисунке 3.75. На нем имеется паросочетание из трех ребер, например $\{(2,3), (1,4), (7,8)\}$. Его вес равен 0,5.

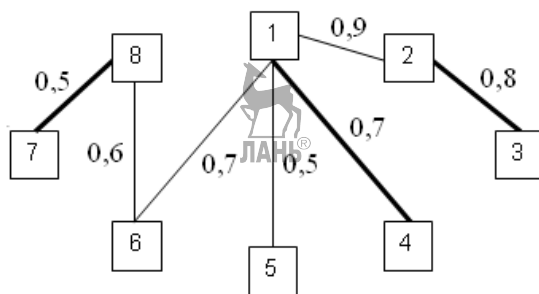


Рис. 3.75. Граф после третьего этапа

V. Удаляя ребра с весом, не превосходящим 0,5, получаем граф, изображенный на рисунке 3.76. На нем имеется паросочетание из трех ребер, например $\{(2,3), (1,4), (6,8)\}$. Его вес равен 0,6.

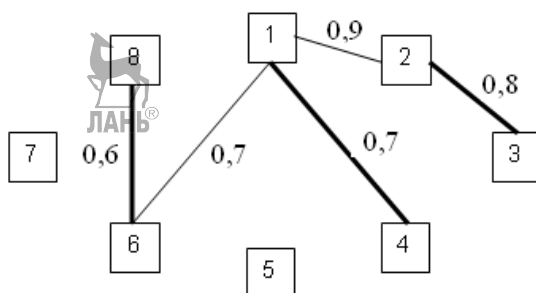


Рис. 3.76. Граф после четвертого этапа

VI. Удаляя ребра с весом, не превосходящим 0,6, получаем граф, изображенный на рисунке 3.77. На нем максимальное паросочетание состоит всего из двух ребер. На этом работа алгоритма заканчивается.

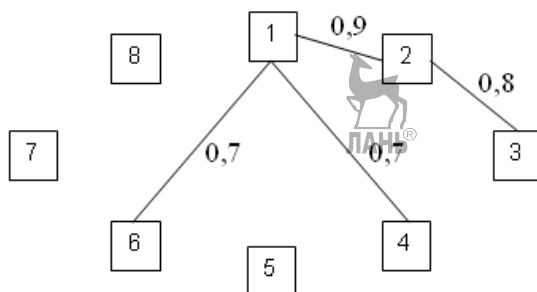


Рис. 3.77. Граф после пятого этапа

Оптимальным является паросочетание, полученное на предпоследнем (пятом) этапе: $\{(2,3), (1,4), (6,8)\}$. Его вес равен 0,6.

3.18. Трехдольные графы с нечеткими вершинами

Рассматриваются две задачи, в которых для трех заданных непересекающихся множеств объектов требуется найти наиболее эффективный вариант формирования максимального числа групп, содержащих по одному объекту из каждого множества. Качество группы оценивается степенью истинности нечеткого высказывания — «группа удовлетворяет поставленным требованиям» [22]–[25].

Рассматриваемые задачи отличаются тем, как определяется эта степень истинности. В первой задаче она равна минимальной из степеней истинности нечетких высказываний «сочетание из первого и второго элементов удовлетворяет требованиям» и «сочетание из второго и третьего элементов удовлетворяет требованиям». Скажем, требуется сформировать несколько групп численностью по три человека в каждой. При этом первый человек выбирается из некоторого множества студентов-магистров, второй — лидер, выбирается из множества аспирантов, третий выбирается из множества студентов бакалавриата.

Известна степень истинности нечеткого высказывания «магистр работает с лидером» и «лидер работает с бакалавром» для каждой пары «лидер — магистр» и «лидер — бакалавр». Под эффективностью группы понимается степень истинности высказывания «личный состав группы работает с лидером», под эффективностью варианта формирования требуемого числа групп — степень истинности высказывания «личный состав каждой группы работает со своим лидером».

Нам потребуется понятие трехдольного графа, которое вводится по аналогии с понятием двудольного графа (см. п. 3.1). В рамках этого раздела,

если не оговорено противное, будем рассматривать ориентированные графы. **Граф** $G = (V, E)$ назовем **трехдольным**, если множество его вершин распадается на три непересекающиеся части V_1, V_2, V_3 . При этом если $(u, v) \in E$, то либо $u \in V_1$ и $v \in V_2$, либо $u \in V_2$ и $v \in V_3$ (рис. 3.78).

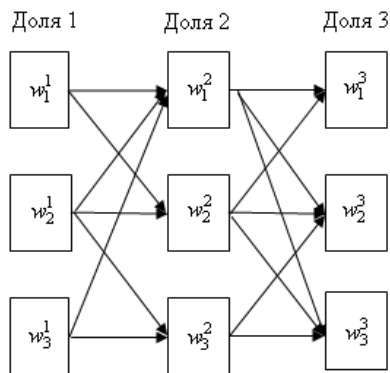


Рис. 3.78. Трехдольный граф G

Трехвершинным ансамблем назовем путь, состоящий из двух дуг и содержащий три различные вершины по одной из каждой доли графа. Под **весом ансамбля** будем понимать минимальный из весов его ребер.

Трехвершинным сочетанием P в графе $G = (V, E)$ назовем такое множество трехвершинных ансамблей из E , что любые два различных ансамбля из P не являются смежными, т. е. не имеют общих вершин. **Мощностью трехвершинного сочетания** назовем количество трехвершинных ансамблей в нем. Под **весом трехвершинного сочетания** понимается наименьший из весов его ансамблей. **Трехвершинное сочетание** назовем **максимальным**, если его мощность максимальна.

Итак, рассмотрим ориентированный трехдольный взвешенный граф $G = (V, E)$. Множество вершин $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, где V_1 — множество вершин первой доли графа, V_2 — множество вершин второй доли, V_3 — третьей; V_1, V_2, V_3 попарно не пересекаются. Пусть l_r — число вершин в V_r , $r = 1, 2, 3$. Предполагается, что вершины каждой доли упорядочены.

Обозначим:

- w_i^1 ($i = 1, 2, \dots, l_1$) — вершина из V_1 с номером i ,
- w_j^2 ($j = 1, 2, \dots, l_2$) — вершина из V_2 с номером j ,
- w_k^3 ($k = 1, 2, \dots, l_3$) — вершина из V_3 с номером k .

Под весом дуги будем понимать надежность выполнения соответствующего требования (санитар работает с командиром, командир работает с бойцом и т. п.). Требуется построить трехвершинное сочетание заданной мощности и наибольшего веса. Под весом сочетания понимается минимальный вес дуги из числа дуг, входящих в это сочетание.

Для решения поставленной задачи для заданного графа G строится граф G^* . Если граф G изображен на рисунке 3.78, то граф G^* представлен на рисунке 3.79.

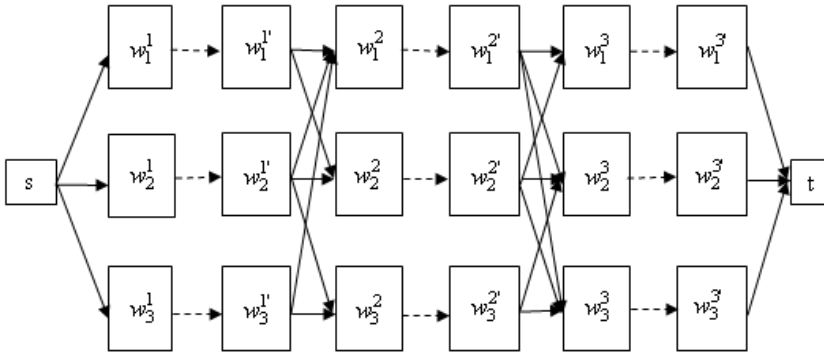


Рис. 3.79. Граф G^*

Опишем алгоритм построения графа G^* .

Каждую вершину u графа G заменим на дугу (u, u') . Если на графе G есть дуга (u, v) , то на графе G^* есть дуги (u, u') и (u', v) . Кроме этого, на графе G^* имеется вершина s — источник, соединенная дугами со всеми вершинами первой доли графа G , и вершина t — сток, соединенная дугами со всеми вершинами третьей доли графа G (рис. 3.79).

Рассматривая граф G^* как сеть с пропускными способностями дуг, равными единице, найдем максимальный поток на этой сети из источника в сток.

Дугу, объем перевозки по которой больше нуля (а значит, равен единице), назовем *загруженной дугой*, путь от источника до стока, все дуги которого являются загруженными дугами, назовем *загруженным путем*.

Замечание 3.7. Рассмотрим на графе G трехвершинный ансамбль $(w_i^1, w_j^2), (w_j^2, w_k^3)$. На графе G^* имеется единственный путь, содержащий эти вершины — это путь, проходящий через вершины $s, w_i^1, w_i^1', w_j^2, w_j^2', w_k^3, w_k^3', t$. В дальнейшем будем считать, что этот путь соответствует рассматриваемому

ансамблю и наоборот. Следовательно, каждому трехвершинному ансамблю на G соответствует определенный путь на графе G^* и наоборот.

Замечание 3.8. Загруженные пути на графе G^* не пересекаются. Действительно, в силу условий, налагаемых на поток, объем подвоза в каждый пункт должен равняться объему вывоза из него. На графе G^* в каждую вершину, не считая источника и стока, входит или выходит точно одна дуга. Следовательно, ни одна из указанных вершин не может лежать на двух загруженных путях.

Замечание 3.9. Число загруженных путей равно величине максимального потока.

Замечание 3.10. Так как непересекающимся загруженным путям соответствуют непересекающиеся трехвершинные ансамбли, то величина максимального потока не превосходит мощности трехвершинного сочетания.

Замечание 3.11. Непересекающимся трехвершинным ансамблям соответствуют непересекающиеся пути от источника до стока на графе G^* . Это следует непосредственно из определения соответствия путей и ансамблей. Следовательно, максимальное число непересекающихся трехвершинных ансамблей в графе G (мощность максимального трехвершинного сочетания) не превосходит величины максимального потока.

Замечание 3.12. Из замечаний 3.9 и 3.10 следует, что величина максимального потока на G^* равна мощности максимального трехвершинного сочетания на G .

Для решения задачи по отысканию максимального трехвершинного сочетания наибольшего веса на графе G предлагается следующий алгоритм, состоящий из последовательности этапов.

На подготовительном этапе по графу G строится граф G^* , который мы обозначим G_1^* .

На этапе с номером τ рассматриваем граф G_τ^* . Для него находим максимальный поток (его величину v_τ и загруженные пути), например, методом Форда — Фалкерсона [40], [79], [87]. По найденным загруженным путям находим соответствующее им трехвершинное сочетание. Определяем его вес, пусть он равен g_τ . Убираем с графа G_1^* дуги, вес которых не превосходит g_τ . Если при этом появляется изолированная вершина, то убираем и ее. Получаем граф $G_{\tau+1}^*$. Переходим к следующему этапу.

Вычисления ведем до тех пор, пока не получим максимальный поток (трехвершинное сочетание), величина которого меньше v_1 (меньше полученной на первом этапе). Трехвершинное сочетание, полученное на предпоследнем этапе, является искомым.

Замечание 3.13. Вычислительная сложность одной итерации метода Форда — Фалкерсона, равна $O(m)$, m — число ребер на графе G . Число же итераций на каждом этапе в нашем случае равно величине максимального потока, которая не больше максимального числа вершин в долях графа — не больше N — общего числа вершин. Следовательно, вычислительная сложность одного этапа равна $O(mN)$. Число же этапов при точности определения весов дуг, равной Δ , не превосходит $\frac{1}{\Delta}$ и не зависит от размеров решаемой задачи.

Итак, вычислительная сложность предложенного алгоритма равна $O(mN)$.

Замечание 3.14. Предложенный подход обобщается на случай многодольного графа с конечным числом долей.

Пример 3.20. В [25] рассмотрена задача о выборе плана осуществления программы переподготовки (повышения квалификации, дополнительного образования) трех сотрудников психологической службы и их последующего назначения на должности. Требуется определить такой план, который обеспечил бы максимальный уровень надежности выполнения каждым из прошедших переподготовку служебных обязанностей. Предполагается, что информация о соответствии прошедшего переподготовку стандартам по соответствующей специальности и уровню его соответствия занимаемой должности имеет неоднозначный, нечеткий характер.

Предполагается, что кандидаты уже имеют подготовку по какой-то специальности и в зависимости от уровня своей подготовки они на курсах переподготовки осваивают ее программу с определенной оценкой, измеряемой по 100-балльной шкале. Степень соответствия этой оценки требованиям по освоению необходимых компетенций неоднозначна и является нечеткой. Будем задавать ее нечетким числом D_{ij}^p , $D_{ij}^p = \langle a_{ij}^p, b_{ij}^p, c_{ij}^p \rangle$, функцию принадлежности которого обозначим $\mu_{D_{ij}^p}$, b_{ij}^p — выпускная оценка. Мы считаем, что кандидат i надежно освоил программу, если его оценка 90 баллов и выше. Тогда степень истинности нечеткого высказывания «кандидат надежно освоил программу» равна $\mu_{D_{ij}^p}(90)$.



Степень готовности к исполнению k -й должности кандидата, прошедшего курсы переподготовки по j -й программе, также оценивается по 100-балльной шкале и является нечетким числом $D_{jk}^d = \langle a_{jk}^d, b_{jk}^d, c_{jk}^d \rangle$, функцию принадлежности которого обозначим $\mu_{D_{jk}^d}$, b_{ij}^d — выпускная оценка. Будем считать, что кандидат будет надежно исполнять должностные обязанности, если его оценка по окончании курсов 90 баллов и выше. Тогда степень истинности нечеткого высказывания «кандидат готов надежно исполнять должностные обязанности» равна $\mu_{D_{jk}^d}(90)$.

Пусть, например, график функции принадлежности нечеткого числа $D_{11}^p = \langle 30, 70, 100 \rangle$ представлен на рисунке 3.80. Тогда $y = \mu_{D_{11}^p}(90) = 0,33$.

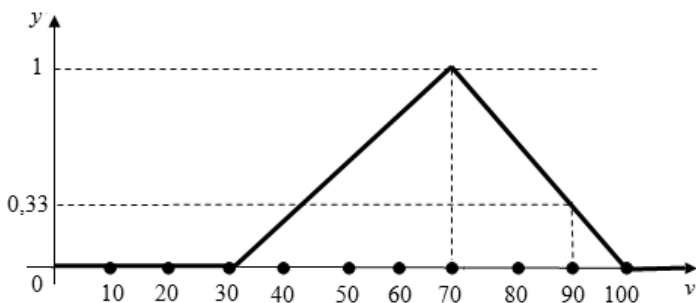


Рис. 3.80. График функции принадлежности

Пример 3.21. Пусть в условиях примера 3.20 имеются 4 кандидата, 3 программы обучения и 5 вакантных должностей. Веса соответствующих ребер указаны в таблицах 3.16 и 3.17 (прочерк в таблице означает невозможность соответствующего назначения). Трехдольный граф, соответствующий условиям примера 3.21, изображен на рисунке 3.81, на нем вершинам первой доли соответствуют кандидаты, вершинам второй — программы обучения, вершинам третьей — должности.

Таблица 3.16. Веса дуг между вершинами первой и второй долей

Вершины первой доли	Вершины второй доли		
	1	2	3
1	0,6	0,7	—
2	0,7	0,6	0,9
3	0,9	—	0,9
4	0,8	0,8	0,7

Таблица 3.17. Веса дуг между вершинами второй и третьей долей

Вершины второй доли	Вершины третьей доли				
	1	2	3	4	5
1	0,8	0,5	0,7	—	—
2	0,9	0,8	0,9	—	0,5
3	—	0,9	0,6	0,9	0,8

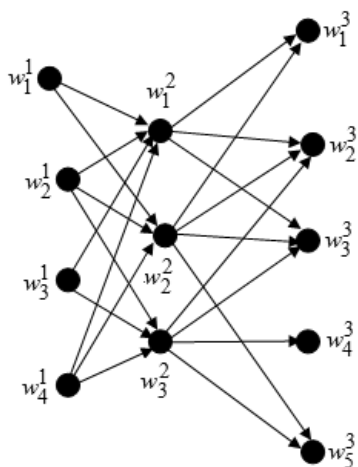


Рис. 3.81. Трехдольный граф G из примера 3.21

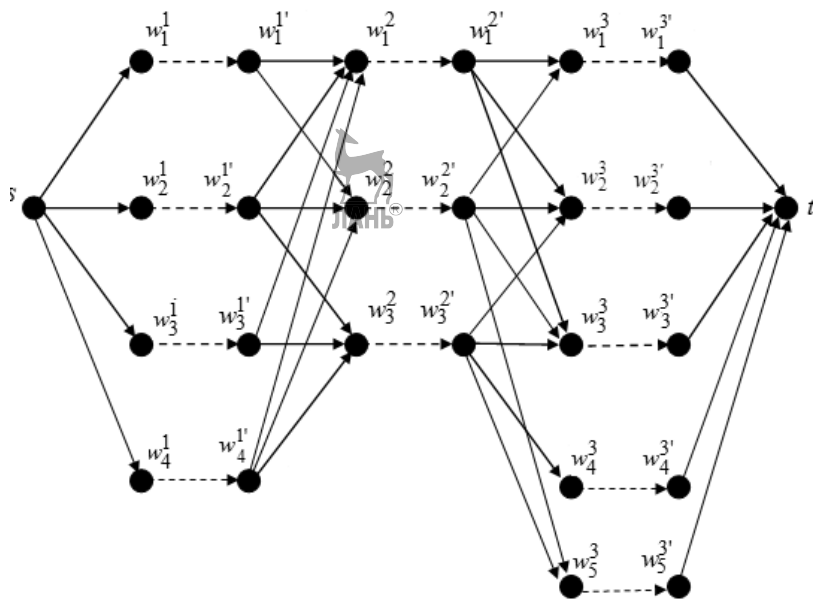


Рис. 3.82. Граф G_1^* , построенный на подготовительном этапе (из примера 3.21)

Решение. На подготовительном этапе по графу G (рис. 3.81) строим граф G_1^* , представленный на рисунке 3.82.

На первом этапе для графа G_1^* строим максимальный поток (рис. 3.83), его величина v_1 равна 3, возможными загруженными путями могут быть пути, проходящие через вершины:

$$s, w_1^1, w_1^{1'}, w_1^2, w_1^{2'}, w_1^3, w_1^{3'}, t, s, w_2^1, w_2^{1'}, w_2^2, w_2^{2'}, w_2^3, w_2^{3'}, t, \\ s, w_3^1, w_3^{1'}, w_3^2, w_3^{2'}, w_3^3, w_3^{3'}, t$$

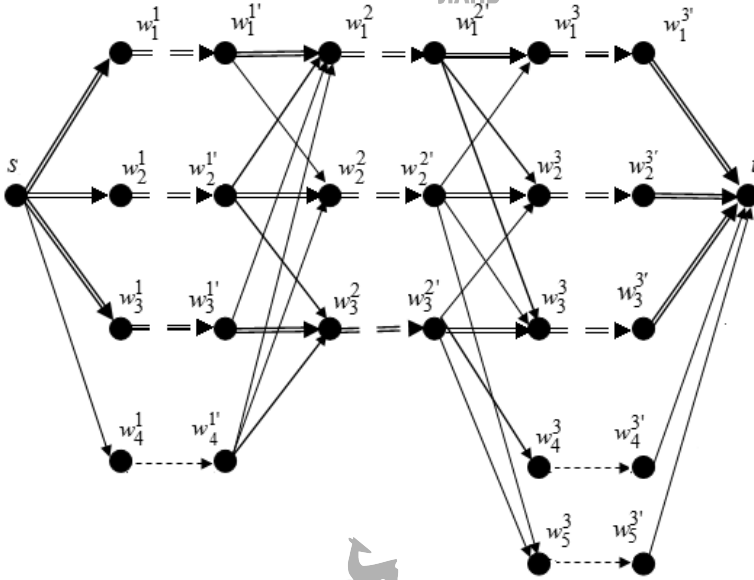


Рис. 3.83. Граф G_1^* , построенный на первом этапе (из примера 3.21), загруженные дуги выделены двойными линиями

Им соответствует трехвершинное сочетание, состоящее из трех трехвершинных ансамблей:

$$(w_1^1, w_1^2), (w_1^2, w_1^3), (w_2^1, w_2^2), (w_2^2, w_2^3), (w_3^1, w_3^2), (w_3^2, w_3^3).$$

Его вес τ_1 равен 0,6. Убираем на графе G_1^* дуги, вес которых не превосходит 0,6, получаем граф G_2^* , изображенный на рисунке 3.84.

На втором этапе $v_2=3$, возможные загруженные пути на рисунке 3.84 выделены двойными линиями, максимальное трехвершинное сочетание состоит из трехвершинных ансамблей

$$(w_1^1, w_2^2), (w_2^2, w_3^3), (w_2^1, w_1^2), (w_1^2, w_1^3), (w_4^1, w_3^2), (w_3^2, w_5^3).$$

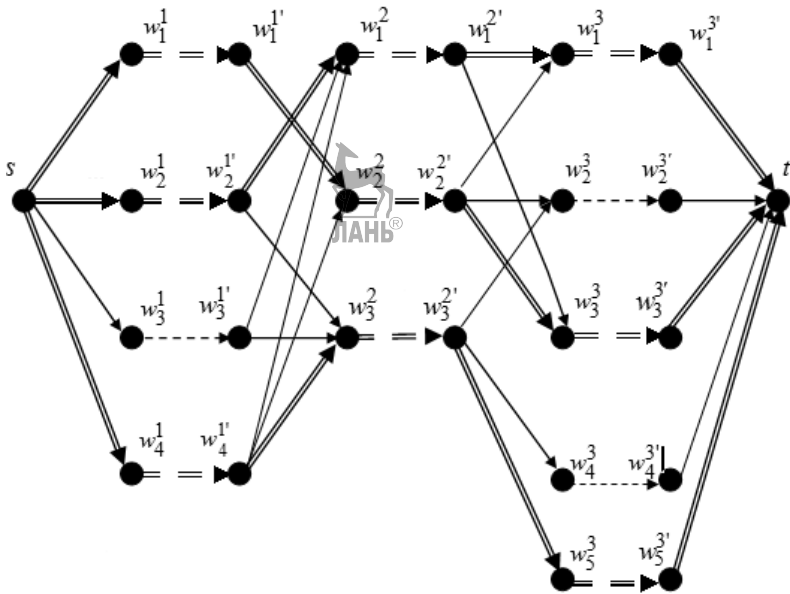


Рис. 3.84. Граф G_2^*

Его вес равен 0,7. Убрав на графе соответствующие дуги, получаем граф G_3^* (рис. 3.85).

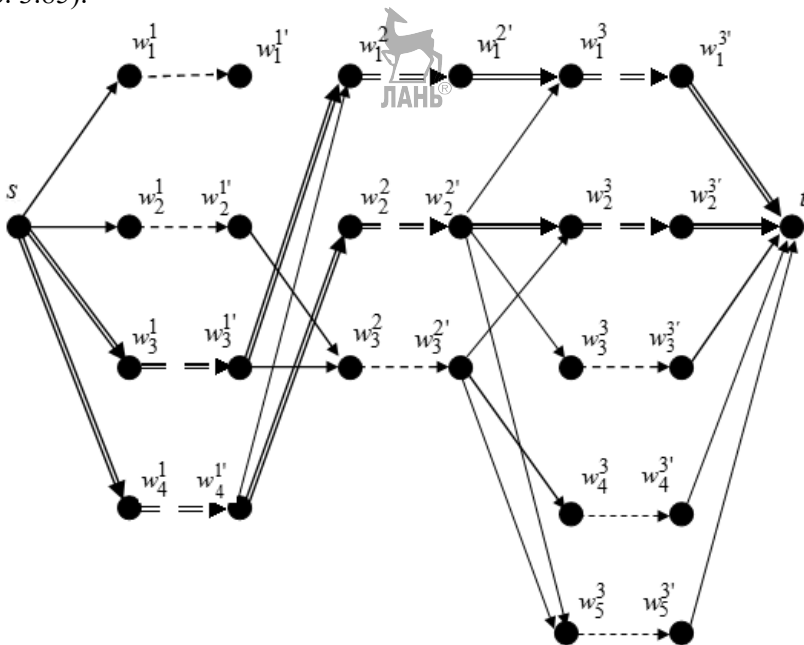


Рис. 3.85. Граф G_3^*

На третьем этапе $v_3 = 2$, максимальный поток равен двум, максимальное сочетание состоит из двух трехвершинных ансамблей:

$$(w_3^1, w_1^2), (w_1^2, w_1^3) \text{ и } (w_4^1, w_2^2), (w_2^2, w_2^3),$$

его вес равен 0,8.

Надежность увеличилась, но мощность сочетания уменьшилась.

Анализируя второй этап, получаем ответ: первый кандидат осваивает вторую программу и занимает третью должность, второй — осваивает первую программу и занимает первую должность, четвертый — осваивает третью программу и занимает пятую должность. Уверенность в том, что все они успешно справятся с исполнением обязанностей по своим должностям, равна 0,7.

Рассмотрим вторую из упомянутых в начале раздела задач. Снова рассмотрим трехдольный граф $G = (V, E)$ (например, рис. 3.78), в котором множество вершин $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$.

Пусть Z^3 — некоторое множество трехвершинных ансамблей на графе G . Будем предполагать, что ансамбли из Z^3 взвешенные. Требуется найти максимальное трехвершинное сочетание, каждый трехвершинный ансамбль которого является элементом множества Z^3 .

По графу G построим ориентированное дерево — граф $G^d = (W, \bar{E})$.

Множество вершин $W = W^1 \cup W^2 \cup W^3 \cup \{s\}$. Вершины из W^1 будем обозначать w_i^1 , вершины из множества W^2 будем обозначать w_{ij}^2 , вершины из множества W^3 — w_{ijk}^3 . Множества W^1, W^2, W^3 соответствуют этапам формирования трехвершинного ансамбля — на первом этапе отбирается элемент i из V_1 , на втором — к нему присоединяется элемент j из V_2 и на третьем — к ним присоединяется элемент k из V_3 .

Корень s связан единственной дугой (s, w_i^1) с каждой вершиной w_i^1 из W^1 , кроме того, имеются дуги (w_i^1, w_{ij}^2) , $(i, j) \in Z^2$, где Z^2 — множество таких дуг (i, j) , что $(i, j, k) \in Z^3$ при некотором $k \in V_3$. Дугами на G^d являются еще и дуги (w_{ij}^2, w_{ijk}^3) , $(i, j, k) \in Z^3$. Других дуг на G^d нет.

Трехвершинным ансамблем (в дальнейшем для краткости просто ансамблем) на графе G^d будем называть путь из двух дуг, путь с началом в вершине w_i^1 ($i \in W^1$) и концом в вершине w_{ijk}^3 . Так как любые две вершины

дерева соединяются единственным путем, то любой ансамбль на графе G^d однозначно определяется конечной вершиной соответствующего пути, поэтому ансамбль с началом в вершине w_i^1 и концом в вершине w_{ijk}^3 будем обозначать (i, j, k) .

Если граф G изображен на рисунке 3.86 и множество

$$Z^3 = \{(1,1,1), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,2,1), (2,2,2)\},$$

то граф G^d представлен на рисунке 3.87.

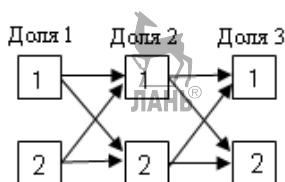


Рис. 3.86. Трехдольный граф G

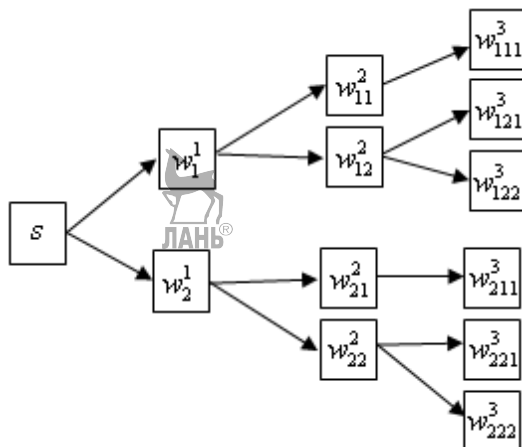


Рис. 3.87. Дерево G^d

Для любых $i \in V_1, j \in V_2, k \in V_3$ и таких, что $(i, j, k) \in Z^3$, известен вес (надежность) ансамбля (i, j, k)

Решать сформулированную задачу будем с использованием решения задачи о максимальном потоке. Для этого, прежде всего, по графу G^d построим транспортную сеть — взвешенный граф G^S .

Добавим к графу G^d следующие вершины:

— сток t ;

— промежуточные «стоки» $t_{\bullet j}$, $t'_{\bullet j}$ ($j=1,2,\dots,l_2$) и $t_{\bullet\bullet k}$ ($k=1,2,\dots,l_3$).

Здесь $t_{\bullet j}$ означает, что первый индекс принимает любые возможные значения из множества V_1 ; $t_{\bullet\bullet k}$ означает, что первый индекс принимает любые возможные значения из множества V_1 , а второй индекс принимает любые возможные значения из множества V_2 .

Соединим

— источник дугами (s, w_i^1) с вершинами w_i^1 , $i=1,2,\dots,l_1$ (они уже есть на G^d);

— вершину w_i^1 ($i=1,2,\dots,l_1$) дугами (w_i^1, w_{ij}^2) с вершинами w_{ij}^2 , $(i,j) \in Z^2$;

— вершину w_{ij}^2 дугой $(w_{ij}^2, t_{\bullet j})$ с вершиной $t_{\bullet j}$, $(i,j) \in Z^2$;

— вершину $t_{\bullet j}$, $(i,j) \in Z^2$ дугой $(t_{\bullet j}, t'_{\bullet j})$ с вершиной $t'_{\bullet j}$;

— вершину $t'_{\bullet j}$ дугой $(t'_{\bullet j}, w_{ijk}^3)$ с вершиной w_{ijk}^3 , $(i,j,k) \in Z^3$;

— вершину w_{ijk}^3 дугой $(w_{ijk}^3, t_{\bullet\bullet k})$ с вершиной $t_{\bullet\bullet k}$, $(i,j,k) \in Z^3$;

— вершину $t_{\bullet\bullet k}$ дугой $(t_{\bullet\bullet k}, t)$, $(i,j,k) \in Z^3$ с вершиной t (k такое, что найдутся такие i и j , что $(i,j,k) \in Z^3$).

Получившийся граф будем обозначать G^S . Для графа G^d с рисунка 3.86 граф G^S представлен на рисунке 3.88.

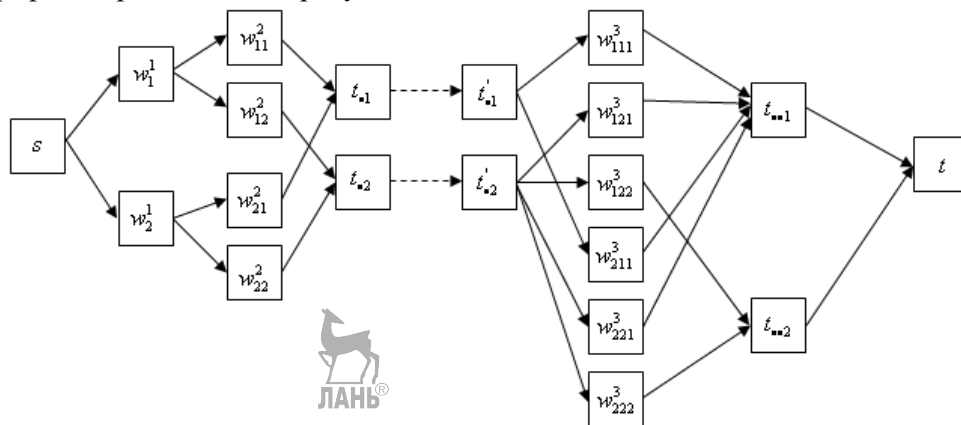


Рис. 3.88. Граф G^S

Для отыскания максимального трехвершинного сочетания с ансамблями из Z^3 на графе G^d решим задачу о максимальном потоке на сети, заданной

графом G^S , предполагая, что пропускная способность каждой дуги равна единице.

Пусть T — максимальный поток на графе G^S . Его дуги, поток по которым больше нуля (а значит, равен единице), назовем загруженными. Путь от источника до стока, все дуги которого загружены, назовем загруженным путем.

Замечание 3.15. Загруженные пути пересекаются только в вершинах s и t .

Действительно, если хотя бы два пути пересекаются, то у них есть общая вершина. Значит, есть вершина, являющаяся начальной минимум для двух дуг или конечной минимум для двух дуг. Но каждая из вершин графа G^S является либо начальной для точно одной дуги, либо конечной для точно одной дуги.

Следовательно, если в рассматриваемую вершину входит более одной дуги, то из нее выходит точно одна; если же из нее выходит несколько дуг, то входит точно одна. Но одним из условий потока является то, что все грузы, поступающие в промежуточную вершину, должны быть из нее вывезены. Следовательно, в рассматриваемую вершину может быть ввезена и вывезена только одна единица груза, соответственно, через нее может проходить только один загруженный путь.

Замечание 3.16. Любому ансамблю из Z^3 на графе G^S соответствует единственный путь из источника в сток. Рассмотрим ансамбль (i, j, k) . На графе G^d этому варианту соответствует вершина w_{ijk}^3 , а на графе G^S — единственный путь, проходящий через вершины $s, w_i^1, w_{ij}^2, t_{\bullet j}, t'_{\bullet j}, w_{ijk}^3, t_{\bullet k}, t$.

Замечание 3.17. Будем считать, что путь от источника до стока, проходящий через вершину w_{ijk}^3 соответствует ансамблю (i, j, k) , тогда любому пути от источника до стока на графе G^S соответствует единственный ансамбль.

Замечание 3.18. Общими вершинами путей от источника до стока на графе G^S , соответствующих непересекающимся ансамблям, являются только вершины s и t .

Рассмотрим два непересекающихся ансамбля (i, j, k) и (φ, ψ, γ) . По замечанию 3.13 им на графе G^S соответствуют пути:

$$s, w_i^1, w_{ij}^2, t_{\bullet j}, t'_{\bullet j}, w_{ijk}^3, t_{\bullet k}, t \text{ и } s, w_\varphi^1, w_{\varphi\psi}^2, t_{\bullet\psi}, t'_{\bullet\psi}, w_{\varphi\psi\gamma}^3, t_{\bullet\gamma}, t,$$

которые, очевидно, не пересекаются.

Замечание 3.19. Мощность максимального трехвершинного сочетания на графе G^d равна величине максимального потока на графе G^S .

Так как загруженные пути максимального потока, идущие от источника до стока, не пересекаются (замечание 3.15), то из того, что вершина w_{ijk}^3 лежит на одном из них, а вершина $w_{\varphi\psi\gamma}^3$ — на другом, следует, что $\{i, j, k\} \cap \{\varphi, \psi, \gamma\} = \emptyset$. Покажем это.

Так как первый загруженный путь проходит через вершину w_{ijk}^3 , то он проходит через вершины $s, w_i^1, w_{ij}^2, t_{\bullet j}, t'_{\bullet j}, w_{ijk}^3, t_{\bullet\bullet k}, t$. Второй загруженный путь проходит через вершины $s, w_{\varphi}^1, w_{\varphi\psi}^2, t_{\bullet\psi}, t'_{\bullet\psi}, w_{\varphi\psi\gamma}^3, t_{\bullet\bullet\gamma}, t$. Так как эти загруженные пути не пересекаются, то $t_{\bullet\bullet k} \neq t_{\bullet\bullet\gamma}$, следовательно, $k \neq \gamma$. Аналогично так как вершины w_i^1 и w_{φ}^1 лежат на разных загруженных путях, то $i \neq \varphi$.

Далее, если $j = \psi$, то оба эти пути проходят через вершину $t_{\bullet j} = t_{\bullet\varphi}$, но с этой вершины начинается только одна дуга (дуга $(t_{\bullet j}, t'_{\bullet j})$), следовательно, вывезти из нее можно только одну единицу груза, значит, и ввезти можно только одну. Следовательно, через эту вершину может проходить только один загруженный путь.

Значит, разным загруженным путям рассматриваемого максимального потока соответствуют непересекающиеся трехвершинные ансамбли. Таким образом, если мощность максимального трехвершинного сочетания, у которого все ансамбли из Z^3 , на графе G равна p , а величина максимального потока на графе G^S равна m , то $p \geq m$.

Замечание 3.20. Рассмотрим на графе G максимальное трехвершинное сочетание P , образованное ансамблями из Z^3 , пусть его мощность равна p . По замечанию 3.16 каждому ансамблю этого сочетания соответствует единственный путь от источника до стока на графе G^S , в силу замечания 3.17 эти пути пересекаются только в источнике и стоке. Следовательно, каждый из них может быть использован в некотором потоке, но тогда величина максимального потока не меньше мощности сочетания P . Значит, $p = m$.

Замечание 3.21. Если на графе G^d имеется путь, соответствующий ансамблю (i, j, k) , то этот путь останется и на графе, полученном из графа G^d

удалением из него вершины $w_{\varphi\psi\gamma}^3$, где $\{i, j, k\} \cap \{\varphi\psi\gamma\} = \emptyset$. Это следует из свойств дерева (каждая вершина дерева связана с его корнем одним путем).

Алгоритм решения рассматриваемой задачи состоит из нескольких этапов. На каждом из них строится в соответствии со списком разрешенных ансамблей граф G^S , для которого решается задача о максимальном потоке. Для полученного потока определяется наименее надежный загруженный путь, пусть его надежность равна δ . Запрещается использование путей, надежность которых не больше δ . Для этого на графе G^d убираются вершины $w_{\varphi\psi\gamma}^3$, для которых надежность соответствующих трехвершинных ансамблей не превосходит δ . По этому графу строится граф G^S и все повторяется. И так до тех пор, пока не получим максимальный поток, величина которого меньше величины потока, полученного для исходного графа G^S .

Рассматриваем поток, полученный на предпоследнем этапе. Его величина равна мощности максимального трехвершинного сочетания на исходном графе G^d , а его загруженные пути соответствуют трехвершинным ансамблям этого сочетания. Это сочетание является искомым.

Замечание 3.22. Вычислительная сложность предложенного алгоритма равна $O(mN)$.

Пример 3.22. Необходимо укомплектовать максимальное число формирований по одному специалисту 1, 2 и 3-й категорий в каждом. Всего имеются 3 специалиста 1-й категории (первая доля), 2 специалиста 2-й категории (вторая доля), 3 специалиста 3-й категории (третья доля). Надежности (степени истинности нечеткого высказывания «участники формирования психологически совместимы») разных вариантов указаны в таблице 3.18.

Таблица 3.18. Надежности разных вариантов формирований

Формирование	111	112*	113	121	122	123	211	212	213
Надежность	0,6	0,7	0,5	0,0	0,7	0,5	0,8	0,6	0,6
Формирование	221	222	223	311	312	313	321	322	323*
Надежность	0,5	0,7	0,6	0,9	0,8	0,8	0,5	0,0	0,7

Для условий примера под множеством Z^3 будем понимать множество разрешенных вариантов комплектования формирований, при этом вариант считается разрешенным, если его надежность больше нуля. Поэтому ансамбли (1,2,1) и (3,2,2) в состав множества Z^3 не входят.

По таблице 3.18 несложно сформировать граф G^d , аналогичный представленному на рисунке 3.87 (см. рис. 3.89).

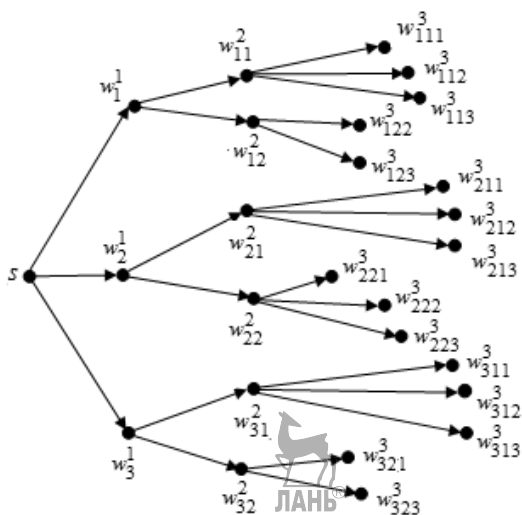


Рис. 3.89. Граф G^d по условиям примера 3.22

Результаты реализации первого этапа предложенного алгоритма приведены на рисунке 3.90.

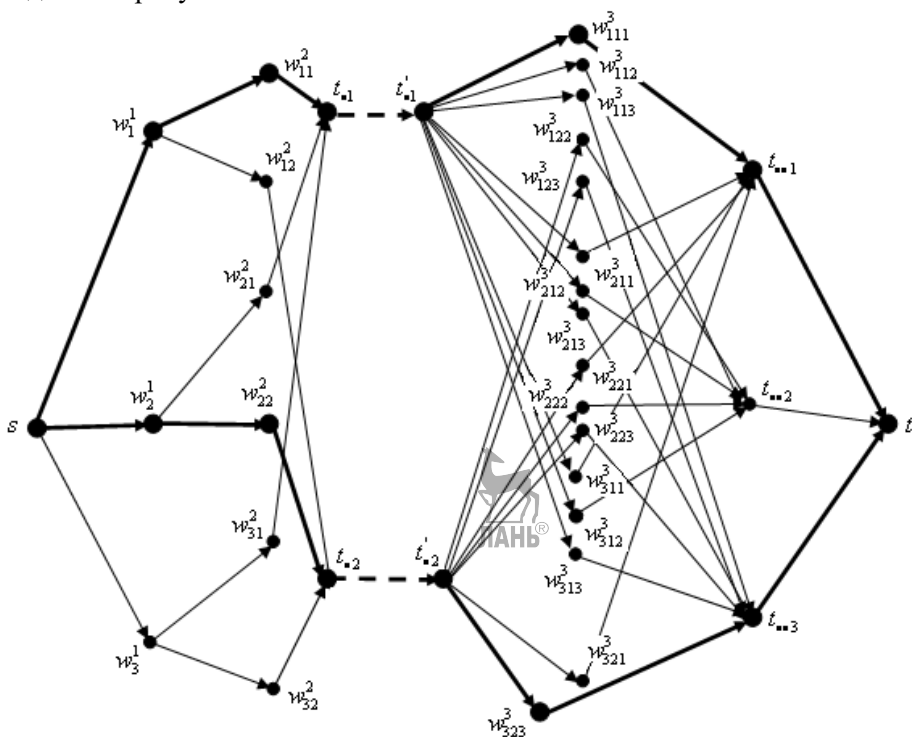


Рис. 3.90. Реализация алгоритма по данным таблицы (этап 1)

Здесь величина максимального потока равна двум, возможное максимальное трехвершинное сочетание состоит из ансамблей 1–1–1 и 2–2–3, а его надежность равна 0,6.

В рамках перехода к реализации второго этапа алгоритма убираем вершины, для которых надежность соответствующих ансамблей не превосходит 0,6. Результаты реализации второго этапа алгоритма приведены на рисунке 3.91. Здесь величина максимального потока равна двум, возможное максимальное трехвершинное сочетание состоит из ансамблей 1–1–2 и 3–2–3, а его надежность равна 0,7.

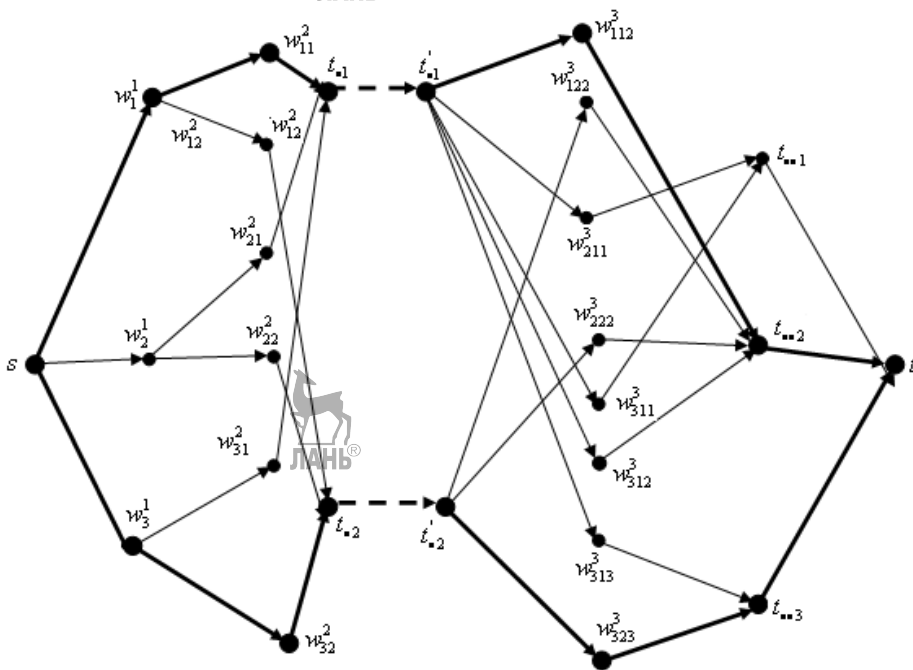


Рис. 3.91. Реализация 2-го этапа алгоритма

В рамках перехода к реализации третьего этапа алгоритма убираем вершины, соответствующие ансамблям, надежности которых не превосходят 0,7 (ансамбли 1–1–2 и 3–2–3). В результате реализации третьего этапа алгоритма получим граф, максимальный поток на котором равен единице, и, следовательно, оптимальное решение получено в рамках второго этапа алгоритма.

Таким образом, мы получили, что максимальное число формирований равно двум. Возможным вариантом является следующий: одно из

формирований состоит из первого специалиста первой категории, первого специалиста второй и второго специалиста третьей, другое формирование состоит из третьего специалиста первой категории, второго второй категории и третьего третьей категории. Степень истинности нечеткого высказывания «участники формирования психологически совместимы» для этого варианта максимальна и равна 0,7.



Глава 4.

ИГРЫ С НЕЧЕТКИМИ ВЫИГРЫШАМИ

4.1. Предмет и область применения теории игр

В условиях чрезвычайных ситуаций, экономике, теории переговоров и многих других областях достаточно часто встречаются ситуации, когда результат операции зависит от действий не одного, а нескольких участников, преследующих различные цели. Поэтому при анализе подобных ситуаций необходимо учитывать действия всех сторон. Подобные ситуации исследуются в теории игр.

Теория игр является теорией математических моделей принятия решений в условиях конфликта [88]–[91]. Под конфликтом понимается всякое явление, применительно к которому можно говорить о том, кто и как в этом явлении участвует, какие могут быть у этого явления исходы, кто в этих исходах заинтересован, в чем эта заинтересованность состоит. С точки зрения теории игр характерной особенностью конфликта является то, что в конфликте участвуют несколько сторон, интересы которых могут и не совпадать.

В терминах теории игр можно описать конкурентную борьбу фирм за рынки сбыта, с помощью кооперативных игр можно пытаться моделировать процессы слияния и раздела фирм. С помощью матричных игр описываются проблемы, связанные с антагонистическими конфликтами двух и более сторон.

К настоящему времени теория игр стала достаточно обширной и разветвленной теорией. Мы остановимся на одном, весьма общем, классе игр: на играх в нормальной форме.

Игрой в нормальной форме называется следующая модель: имеется несколько участников конфликта — *игроков*. Каждый игрок имеет определенный набор своих возможных действий — *стратегий*. Каждый игрок знает все возможные стратегии остальных игроков. Каждый игрок делает независимо от других игроков один ход, который состоит в выборе одной из его стратегий. После того как ход сделан каждым игроком, исход конфликта становится известным. В теории игр положение, когда каждый из игроков сделал свой ход, называется *ситуацией*. Заметим, что одному и тому же исходу конфликта могут соответствовать разные ситуации. Каждый игрок имеет *функцию выигрышей*, которая каждой ситуации соотносит выигрыш игрока в этой ситуации. Функция выигрыша каждого игрока также известна всем игрокам. Отметим, что для каждого игрока, чем больше его выигрыш, тем лучше.

Таким образом, чтобы задать игру в нормальной форме (в дальнейшем игру), необходимо указать всех игроков, участвующих в этой игре, полные списки их стратегий и функции выигрышей каждого из них.

Приведем один из первых примеров применения теории игр для выбора способа действия в ходе военного конфликта, упоминаемый в [88].

В критические дни борьбы за Новую Гвинею разведка США сообщила, что Япония собирается послать конвой с войсками и провиантом из порта Ребаул на восточной оконечности Новой Британии в Лаэ, находящийся в Новой Гвинее к западу от Новой Британии. Конвой мог пройти либо к северу от Новой Британии, где почти наверняка надо было ожидать плохой видимости из-за туманов, либо к югу от острова, где ожидалась ясная погода; в обоих случаях плавание заняло бы три дня. Командующий войсками США генерал Кенней мог сосредоточить основные силы своей разведывательной авиации либо на том, либо на другом направлении. После обнаружения конвоя его можно было бомбить до прибытия в Лаэ. Штаб Кеннея подготовил исходные данные, приведенные в таблице 4.1. В таблице для разных ситуаций указано количество дней, в течение которых американская авиация могла бы бомбить японский конвой.

Оптимальной стратегией для американцев с точки зрения теории игр является выбор северного маршрута, то же и для японцев.

Таблица 4.1. Исходные данные, подготовленные штабом Кеннея

Стратегии Кеннея	Стратегии японцев	
	Использовать северный маршрут	Использовать южный маршрут
Использовать северный маршрут	2	2
Использовать южный маршрут	1	3

Эти стратегии действительно и были выбраны; конвой был обнаружен примерно через день после его выхода в море, и японцы понесли тяжелые потери.

Проиллюстрируем на этом примере сложности, связанные с формулировкой самого понятия оптимальных стратегий. Если под оптимальной стратегией понимать стратегию, дающую игроку максимальный выигрыш, что, на первый взгляд, представляется весьма естественным, то оптимальной для США можно было бы признать стратегию, связанную с выбором южного маршрута, поскольку она может дать выигрыш, равный трем. Однако все дело в том, что эта стратегия может дать такой выигрыш, а может и не дать его, может

дать самый маленький выигрыш — единицу. Что в действительности выигрывают американцы, применяя эту стратегию, зависит не только от их действий, но и от действий японцев: выберут японцы южный маршрут, и американцы получат максимум возможного; выберут японцы северный маршрут, и американцы получат минимум возможного.

В теории игр уже создан целый спектр понятий оптимальности для разных классов игр. Задача лица, принимающего решение (ЛПР), соглашаться или нет с тем или иным из них. Теория игр не предписывает выбор принципа оптимальности, он целиком лежит в компетенции ЛПР, при этом, осуществляя свой выбор, ЛПР вносит в задачу дополнительную субъективную информацию. Теория же игр говорит только о том, что надо делать, если понятие оптимальности уже задано (разумеется, только для уже изученных понятий оптимальности).

В данной монографии рассматриваются четыре класса игр: матричные, бескоалиционные, кооперативные игры и так называемые игры с природой. Делается попытка сформулировать для этих игр еще один принцип оптимальности, базирующийся на использовании теории нечетких множеств.

4.2. Матричные игры и понятие оптимальных стратегий для них

Начнем с наиболее простого и наиболее изученного класса игр — с матричных игр [90], [92], которые являются частным случаем бескоалиционных игр.

Определение 4.1. *Матричной игрой* называется игра двух игроков с противоположными интересами и с конечным числом стратегий у каждого из них.

Примером матричной игры является рассмотренный ранее конфликт американцев и японцев.

Так как интересы игроков противоположны, то никакие переговоры или союзы между ними невозможны. Увеличение выигрыша одного из них неминуемо ведет к увеличению проигрыша другого, а это делает нереальными какие-либо соглашения между ними.

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — все стратегии первого игрока, а b_1, b_2, \dots, b_m — все стратегии второго игрока.

Числа n и m (число стратегий у первого и второго игрока соответственно) между собой никак не связаны.

Ситуацию, когда первый игрок выбирает стратегию a_i , а второй — стратегию b_j , будем обозначать (i, j) . Выигрыш первого игрока в ситуации

(i, j) обозначим через H_{ij} ; выигрыш второго игрока в этой ситуации будет тогда равен $-H_{ij}$, так как интересы игроков противоположны и выигрыш одного есть проигрыш другого.

Всю информацию о такой игре можно представить в виде таблицы (матрицы), откуда и произошло название «матричные игры» (табл. 4.2).

Таблица 4.2. Матрица выигрышей

	$b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m$
a_1	$H_{11} \ H_{12} \ \dots \ H_{1m}$
a_2	$H_{21} \ H_{22} \ \dots \ H_{2m}$
\dots	
a_n	$H_{n1} \ H_{n2} \ \dots \ H_{nm}$

Как уже отмечалось, принципиально новой проблемой, возникающей в теории игр, является формулировка понятия оптимальности. Для матричных игр предлагается следующее определение этого понятия. Скажем, что данная стратегия гарантирует игроку выигрыш c , если, применяя эту стратегию, игрок получает выигрыш не меньший c при любом действии противной стороны.

Определение 4.2. Стратегии a_i и b_j игроков называются **оптимальными**, если:

- 1) они обеспечивают игрокам максимальные гарантированные выигрыши;
- 2) каждая из них является наилучшим ответом на другую, т. е. если второму игроку становится известно, что первый будет использовать стратегию a_i , то ему лучше всего использовать стратегию b_j , и наоборот.

К сожалению, далеко не всегда среди стратегий игроков существуют оптимальные стратегии.

В [91] приводятся условия существования оптимальных стратегий и методы поиска таких стратегий.

4.3. Бескоалиционные игры

В п. 4.2 мы рассмотрели матричные игры, в которых интересы участников являются антагонистическими. Однако в реальной жизни возможны конфликты и с большим двух числом участников, что приводит к неантагонистическим конфликтам, да и в случае двух участников их интересы могут отчасти совпадать и не быть антагонистическими. Различают игры,

в которых соглашения (коалиции) между игроками возможны (кооперативные игры), и игры, в которых соглашения между игроками запрещены правилами (*бескоалиционные игры*). Напомним необходимые для дальнейшего понятия теории таких игр [90], [91].

Определение 4.3. Система $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$, в которой $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков, $\mu_{\hat{D}_1}(x, y)$ — множество стратегий игрока i (предполагается, что оно конечно), H_i — функция выигрыша игрока i , определенная на декартовом произведении множеств стратегий игроков $X = \prod_{i=1}^n X_i$ (X — множество ситуаций игры), называется *бескоалиционной игрой* n лиц.

Бескоалиционная игра n лиц происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают по одной из своих стратегий x_i из множества стратегий X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в результате чего в игре формируется ситуация $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. После этого каждый игрок получает выигрыш $H_i(x)$. На этом игра заканчивается.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ — произвольная ситуация в игре Γ . Построим ситуацию, которая отлична от x только тем, что стратегия x_i игрока i заменена на его стратегию x'_i . В результате мы получаем ситуацию $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, которую будем обозначать через $(x \| x'_i)$. Очевидно, что если x_i и x'_i совпадают, то $(x \| x'_i) = x$.

Определение 4.4. Ситуация $x^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$ называется *ситуацией равновесия* по Нэшу, если для всех $x_i \in X_i$ и $i = 1, 2, \dots, n$ имеет место неравенство

$$H_i(x^*) \geq H_i(x^* \| x_i).$$

Например, в [91] отмечается, что в случае антагонистической игры равновесные стратегии игроков совпадают с их оптимальными стратегиями. Для неантагонистических игр, напротив, понятие оптимальной стратегии игрока нередко вообще не имеет смысла: в таких играх оптимальными оказываются не стратегии отдельных игроков, а их сочетания (т. е. ситуации), и притом для множества всех игроков сразу.

Поэтому в общих бескоалиционных играх как оптимальные следует классифицировать не действия того или иного игрока, а совокупность действий всех игроков, исход игры, ситуацию в ней.

Интересным частным случаем бескоалиционных игр являются бескоалиционные игры двух игроков с конечным числом стратегий у каждого из них. Функцию выигрышей каждого из игроков можно задать матрицей, поэтому такие игры часто называют *биматричными*. Заметим, что биматричную игру с матрицами A и B можно задать матрицей (A, B) , каждый элемент которой есть пара (a_{ij}, b_{ij}) ($i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n$) m — число стратегий первого игрока, n — второго.

Пример 4.1. (Игра «Перекресток») [91]. Два автомобилиста двигаются по двум взаимно перпендикулярным дорогам и одновременно выезжают на перекресток. Каждый из них может остановиться (1-я стратегия) и ехать (2-я стратегия). Предполагается, что каждый из игроков предпочитает остановиться, а не пострадать в аварии, и проехать, если другой сделал остановку. Этот конфликт может быть формализован биматричной игрой. Пусть функции выигрышей игроков заданы таблицей 4.3.

Таблица 4.3. Выигрыши игроков в игре «Перекресток»

	b_1	b_2
a_1	(1, 1)	(1- ε , 2)
a_2	(2, 1- ε)	(0, 0)

Неотрицательное число ε соответствует неудовольствию от того, что игрок остановился и пропустил партнера.

Как и в антагонистической игре, в бескоалиционных играх естественно предполагать, что каждый из игроков стремится к достижению ситуации, в которой значение его функции выигрыша наибольшее. Однако, как и в антагонистических играх, ситуации, дающие большее значение выигрыша для одного игрока, могут не быть таковыми для других игроков. Таким образом, стремление игроков получить наибольший выигрыш носит конфликтный характер, и сама формулировка того, какое поведение является «хорошим» или оптимальным в игре, является проблематичной. Здесь имеется несколько подходов (см., например, [91]).

4.4. Игры с «природой»

В п. 4.2 мы рассмотрели игры двух лиц с противоположными интересами. В практике часто встречаются ситуации, похожие на такие игры и, однако, существенно от них отличающиеся. В матричных играх мы предполагали разумность поведения каждого из игроков, наличие интересов у каждой из сторон. В играх же человека с «природой» только одна сторона действует целенаправленно, преследуя свои интересы, другая же сторона не заинтересована в исходе конфликта и действует «слепо», эту сторону и принято именовать «природой» [88].

Весь круг задач, возникающий при исследовании игр человека с природой, можно разбить на три группы в соответствии со степенью определенности информации, имеющейся у ЛПП относительно поведения среды (природы):

- 1) поведение детерминировано;
- 2) известен закон распределения вероятностей использования возможных стратегий;
- 3) о возможном поведении ничего не известно кроме самого списка стратегий, имеющихся у природы.

В первом случае принимающий решение точно знает, как будет вести себя среда, и поэтому для выбора решения можно воспользоваться методами, например, математического программирования.

Более интересными в рассматриваемом здесь контексте являются второй и третий случаи.

Если закон распределения состояний среды априори задан, то при принятии решений руководствуются либо величиной математического ожидания выигрыша ЛПП, либо вероятностью того, что этот выигрыш будет не меньше заданной величины, либо, наконец, величиной выигрыша при заданной вероятности. Оптимальной считается стратегия ЛПП, дающая ему максимальное значение соответствующей величины. При решении таких задач используются методы стохастического программирования.

Пример 4.2. Необходимо выбрать район размещения запасов материальных средств с тем, чтобы эффективно обеспечивать население в таких средствах за счет резерва при возникновении такой потребности. Обстановка позволяет разместить резервы в одном из трех районов. Потребность в резервных запасах может возникнуть на одном из пяти направлений. Принято решение о том, что полезность различных ситуаций будет оцениваться временем движения от района размещения резервов до района, где возникает потребность в них. Поскольку для стороны, перевозящей

грузы (первого игрока), этот показатель выражает ее проигрыш, то в качестве выигрыша первого игрока возьмем время, сэкономленное по сравнению с некоторым нормативным. Будем предполагать, что второй игрок «планирует» свои действия (чрезвычайную ситуацию), практически не ориентируясь на информацию о том, где расположены наши резервы, тогда с точки зрения рассматриваемой проблемы мы имеем дело с игрой человека с природой. Данные об экономии времени на движение для разных ситуаций приведены в таблице 4.4 в графах 2–6 (в часах).

Таблица 4.4. Данные об экономии времени

Районы размещения запасов	Экономия времени в зависимости от района возникновения потребности					Мат. ожид. эконом. времени	Вероятность того, что экономия времени (в часах) будет			Экономия времени, достигаемая с вероятностью	
	1	2	3	4	5		≥ 0	≥ 2	≥ 4	≥ 0,8	≥ 1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Первый	3	2	0	-2	5	1,25	0,80	0,65	0,05	0	-2
Второй	1	4	1	-1	5	2,00	0,80	0,45	0,45	1	-1
Третий	-3	-1	1	3	2	-0,15	0,40	0,25	0,00	-1	-3
Вероятность возникновения потребности в районе	0,20	0,40	0,15	0,20	0,05						

Предположим, что нам известны вероятности возникновения потребности в резервных запасах в различных районах. Эти вероятности указаны в нижней строке таблицы. Так как мы исходим из того, что потребность может возникнуть в одном и только в одном районе, то сумма этих вероятностей должна равняться единице.

В седьмой графе таблицы указаны математические ожидания выигрыша первого игрока при выборе им различных стратегий.

Например, для первой стратегии получаем

$$3 \cdot 0,20 + 2 \cdot 0,40 + 0 \cdot 0,15 + (-2) \cdot 0,20 + 5 \cdot 0,05 = 1,25.$$

Анализ седьмой графы показывает, что если ориентироваться на математическое ожидание выигрыша (на средний выигрыш), то оптимальной следует признать вторую стратегию, т. е. резервы надо разместить во втором районе.

Если при выборе решения руководствоваться вероятностью того, что экономия времени по сравнению с нормативным будет не меньше заданной величины, то мы получим результаты, приведенные в графах 8–10 таблицы

(в графе 8 указаны вероятности того, что эта экономия составит не менее 0 часов, в графе 9 — не менее двух часов, в графе 10 — не менее четырех часов). Если нас интересует вероятность того, что экономия времени составит не меньше нуля часов, то нам следует выбрать первый или второй район для размещения резервов (все равно какой); вероятность того, что эта экономия не менее двух часов, максимальна при выборе первого района; вероятность того, что эта экономия не меньше четырех часов, максимальна при использовании второго района.

Наконец, если при выборе решения руководствоваться величиной выигрыша при заданной вероятности, то мы получим результаты, приведенные в графах 11, 12 таблицы для значений вероятности, равных соответственно 0,8 и 1. В этих графах указана экономия времени, достигаемая с вероятностью не меньшей 0,8 и 1 соответственно. При вероятности 0,8 оптимальной является вторая стратегия, она же является оптимальной и при вероятности единица.

Польза рассмотренных подходов заключается в том, что они позволяют взглянуть на проблему с других, может быть, более понятных для ЛПР сторон, что может помочь ему принять решение. Предлагаемые методы позволяют осуществить сжатие исходной информации, что, несомненно, полезно, когда таблицы исходных данных слишком велики для их восприятия ЛПР.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда решение приходится принимать в условиях полного отсутствия информации о возможном поведении среды (сам список возможных стратегий природы предполагается известным).

Пример 4.3. В целях автотранспортных перевозок, транспортная компания должна определить уровень предложения своих услуг так, чтобы удовлетворить потребности в установленный промежуток времени. Точная потребность в транспорте неизвестна, но предлагается ориентироваться на одно из четырех возможных ее значений: 200, 250, 300, 350 единиц, информация же о том, какое из этих значений реализуется, отсутствует.

В таблице 4.5 указана экономия в потерях транспортной организации по сравнению с некоторыми нормативными (допустимыми) потерями в различных ситуациях (в условных единицах).

Таблица 4.5. Экономия (условный доход)

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	8	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	23

Обозначения: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ — стратегии «природы» (потребность в автотранспорте), a_1, a_2, a_3, a_4 — уровни предложения.

Критерий Вальда (критерий осторожности). В соответствии с этим критерием оптимальной считается стратегия ЛПП, обеспечивающая ему максимальный гарантированный выигрыш. В теории матричных игр такая стратегия называется максиминной. Поясним, что стратегия гарантирует выигрыш c , если, применяя эту стратегию, ЛПП получит выигрыш не меньший c при любом действии природы. При применении критерия Вальда ЛПП исходит из того, что среда будет находиться в самом невыгодном для него состоянии. Этот критерий оказывается полезным в тех случаях, когда принимающий решение желает избежать риска.

В приведенном примере при выборе соответственно первого, второго, третьего или четвертого уровня предложения наихудшими состояниями среды будут $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_3$ соответственно, а соответствующие выигрыши будут 5, 7, 12, 19. Таким образом, по критерию Вальда, в качестве оптимального надо выбрать четвертый уровень предложения.

Критерий Гурвица. Этот критерий основан на следующем предположении: среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью α и в самом выгодном с вероятностью $(1-\alpha)$. Вероятность остальных состояний среды предполагается равной нулю. Заметим, что разным стратегиям ЛПП могут соответствовать разные наилучшие и наихудшие состояния среды. С учетом указанных ранее вероятностей различных состояний природы определяется математическое ожидание выигрыша ЛПП при применении им той или иной своей стратегии. Оптимальной считается стратегия, для которой это математическое ожидание максимально.

В нашем примере при выборе первого, второго, третьего и четвертого уровня предложения наихудшим состоянием среды будет соответственно $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_3$, а наилучшим — $\theta_4, \theta_4, \theta_1$ или θ_4, θ_1 , тогда математическое ожидание выигрыша равно:

- при выборе первого уровня предложения — $C_1 = 5\alpha + 25(1-\alpha)$;
- при выборе второго уровня предложения — $C_2 = 7\alpha + 23(1-\alpha)$;
- при выборе третьего уровня предложения — $C_3 = 12\alpha + 21(1-\alpha)$;
- при выборе четвертого уровня предложения — $C_4 = 19\alpha + 30(1-\alpha)$.

Оптимальные варианты действий по критерию Гурвица при различных значениях α отмечены в таблице 4.6 знаком «*».

У нас при любом значении α оптимальным по критерию Гурвица оказался четвертый уровень предложения. Заметим, что в общем случае при разных значениях α оптимальными могут оказаться разные стратегии.

Таблица 4.6. Решения по критерию Гурвица

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,6$	$\alpha = 0,8$	$\alpha = 1$
a_1	5	10	18	25	25	21	17	13	9	5
a_2	8	7	8	23	23	19,8	16,6	13,4	10,2	7
a_3	21	18	12	21	21	19,2	17,4	15,6	13,8	12
a_4	30	22	19	23	30*	27,8*	25,6*	23,4*	21,2*	19*

Отметим, что при $\alpha = 1$ мы получаем критерий Вальда, а при $\alpha = 0$ приходим к стратегии, ориентированной на наилучшее состояние среды, — так называемой стратегии «здорового оптимизма».

Критерий Лапласа. Все возможные состояния среды считаются равновероятными. Для рассматриваемого примера вероятность любого состояния «природы» тогда равна 0,25. Оптимальной считается стратегия, дающая ЛПП максимум математического ожидания выигрыша.

Для примера получаем следующие значения математических ожиданий:

— при выборе первого уровня предложения:

$$C_1 = 5 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,25 + 18 \cdot 0,25 + 25 \cdot 0,25 = 14,5;$$

— при выборе второго уровня предложения: $C_2 = 11,5$;

— при выборе третьего уровня предложения: $C_3 = 18$;

— при выборе четвертого уровня предложения: $C_4 = 23,5$.

Оптимальной стратегией следует признать выбор четвертого уровня предложения.

Критерий Сэвиджа (критерий минимизации сожалений). **Сожаление** — это величина, равная потере полезности, возникающей из-за неправильного выбора стратегии. Например, если в нашем примере истинное состояние природы θ_1 , то мы, правильно его предсказав, должны выбрать четвертый вариант, и тогда наши сожаления равны нулю; если же мы выберем первый вариант вместо четвертого, то наши потери полезности составят $30 - 5 = 25$ ед., при выборе второго варианта сожаление составит 22 ед., при выборе третьего — 9 ед. Для построения матрицы сожалений надо в каждой графе матрицы выигрышей найти максимальное число и вычесть из него соответствующие выигрыши рассматриваемой графы.

Матрица сожалений представлена в таблице 4.7. Оптимальной в соответствии с критерием Сэвиджа считается стратегия, при применении которой максимальное сожаление минимально.

Оптимальной, по критерию Сэвиджа, является четвертая стратегия.

Таблица 4.7. Матрица сожалений

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	Максимальное сожаление
a_1	25	12	1	0	25
a_2	22	15	11	2	22
a_3	9	4	7	4	9
a_4	0	0	0	2	2*

4.5. Кооперативные игры

Кооперативной игрой называется [91], [93] игра, в которой группы игроков (коалиции) могут объединять свои усилия. В этих играх допускается заключение взаимно обязывающих соглашений. Различаются кооперативные игры с **побочными платежами** и **без побочных платежей**. В первых из них суммарный выигрыш может распределяться между игроками в любых долях, во вторых — возможны не любые распределения. Остановимся на первом случае.

Определение 4.5. *Кооперативной игрой с побочными платежами* (в дальнейшем *кооперативной игрой*) называется пара (N, v) , где N — это множество игроков, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, а v — это функционал: $2^N \rightarrow R$, из множества всех коалиций в множество вещественных чисел (так называемая **характеристическая функция**), удовлетворяющий условиям:

- $v(\emptyset) = 0$;
- если $S \cap T = \emptyset$, то $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$;
- $v(\{i\}) \geq 0$ для любого i .

Второе условие связано со вполне естественным предположением о том, что, объединив свои усилия, коалиции могут получить не меньше того, что они получили бы, оставаясь разделенными.

Характеристическая функция описывает величину выгоды, которую данное подмножество игроков может достичь путем объединения в коалицию. Предполагается, что пустая коалиция зарабатывает ноль, то есть $v(\emptyset) = 0$. Понимается, что игроки принимают решение о создании коалиции в зависимости от размеров выплат внутри коалиции.

Цель такой игры — распределение между игроками наибольшего возможного выигрыша, который игроки могут получить совместно.

Заметим, что такая форма описания игры вполне может быть получена исходя из данного ранее определения игры в нормальной форме [90].

Решение может быть определено как для конкретной игры, так и для целого класса игр. Естественно, что наибольшей важностью обладают как раз те принципы, которые применимы в широком спектре случаев (то есть для обширного класса игр).

Свойства характеристической функции.

Монотонность — свойство, при котором у больших (в смысле включения) коалиций выплата больше: если $A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$.

Супераддитивность — свойство, при котором для любых двух непересекающихся коалиций A и B сумма их выгод по отдельности не больше их выгоды при объединении:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow v(A \cup B) \geq v(A) + v(B).$$

Выпуклость — характеристическая функция является выпуклой:

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) \geq v(A) + v(B).$$

В соответствии с определением кооперативной игры, множество игроков $N = \{1, 2, \dots, n\}$ в совокупности обладают некоторым количеством определенного блага, которое надлежит разделить между участниками. Принципы этого деления и называются решениями кооперативной игры. Возможные варианты такого деления представляются n -мерными векторами (n — число игроков), которые называются дележами.

Определение 4.6. *Дележом* называется n -мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условиям:

а) $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$;

б) $x_i \geq v(\{i\})$ для всех $i \in N$.

Выигрыш i -го игрока, $i \in N$, в дележе $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ равен x_i .

Часто рассматривают *игры в (0–1)-редуцированной форме* [91], когда $v(N) = 1$ и $v(\{i\}) = 0$ при любом i . Оправданием этому служит утверждение: каждая существенная кооперативная игра эквивалентна некоторой игре в (0–1)-редуцированной форме [94].

Игра называется существенной, если

$$\sum_{i=1}^n v(\{i\}) < v(N).$$

Решение может быть как однозначным (в этом случае для каждой игры решением является единственный дележ), так и многозначным (когда для каждой игры может быть определено некоторое множество дележей). Примерами однозначных решений служат N -ядро [95] и вектор Шепли [91], примерами многозначных — решение Неймана — Моргенштерна, S -ядро [90] и K -ядро [96].

Пример 4.4. Требуется реализовать некоторый проект. Заказчик готов истратить 1 000 000 рублей. Если удастся израсходовать денег меньше, то заказчик готов половину сэкономленных средств распределить среди фирм исполнителей в виде премий, оставшиеся средства оставить у себя. Для выполнения проекта можно привлечь несколько из трех имеющихся фирм. Если фирма одна выполняет проект, то ее издержки составят 1 000 000 руб. и никакой экономии не получится (для простоты считаем, что затраты одинаковы для любой из фирм). Если выполнять проект будут совместно первая и вторая фирмы, то их издержки составят 950 000 руб.; если первая и третья, то расходы будут равны 930 000 руб.; если вторая и третья, то 900 000 руб.; если все три, то 800 000 руб.

Чтобы минимизировать расходы на проект, заказчик должен заинтересовать фирмы в объединении, а для этого он должен предложить им обоснованное распределение получаемой экономии между ними.

Применяя теорию кооперативных игр, можно рассматривать фирмы как игроков в кооперативной игре с множеством игроков $N = \{1, 2, 3\}$ и характеристической функцией, значения которой равны премии, получаемой при образовании соответствующей коалиции: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 25000$, $v(\{1, 3\}) = 35000$, $v(\{2, 3\}) = 50000$, $v(\{1, 2, 3\}) = 100000$.

4.6. Биматричные игры с нечеткими множествами стратегий

Пусть X и Y — универсальные множества стратегий [9], которые первый и второй игроки могут использовать в игре. Допустимые стратегии игроков описываются нечеткими множествами с функциями принадлежности $\mu_1(x)$, $x \in X$ и $\mu_2(y)$, $y \in Y$. При выборе игроками «четких» стратегий $x \in X$ и $y \in Y$ в игре возникает ситуация (x, y) . На множестве всех возможных ситуаций заданы функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — выигрыши соответственно первого и второго игроков в ситуации (x, y) (оценки игроками этой ситуации). Универсальное множество выигрышей (числовую ось) будем обозначать R^1 .

Будем считать, что цель игрока с номером i ($i=1,2$) описывается нечетким множеством цели \hat{C}_i в универсальном множестве R^1 с функцией принадлежности $\bar{\mu}_{\hat{C}_i}(u), u \in R^1$. Если $u = f_i(x, y)$, $x \in X$ и $y \in Y$, то $\bar{\mu}_{\hat{C}_i}(u) = \bar{\mu}_{\hat{C}_i}(f_i(x, y))$. Введем обозначение:

$$\mu_{\hat{C}_i}(x, y) = \bar{\mu}_{\hat{C}_i}(f_i(x, y)).$$

В соответствии с подходом Беллмана — Заде введем нечеткие множества \hat{D}_i ($i=1,2$), каждое из которых является пересечением нечеткого множества стратегий соответствующего игрока и его нечеткого множества цели. Функцию принадлежности нечеткого множества \hat{D}_i обозначим $\mu_{\hat{D}_i}(x, y)$.

Имеем:

$$\mu_{\hat{D}_1}(x, y) = \min\{\mu_1(x), \mu_{\hat{C}_1}(x, y)\},$$

$$\mu_{\hat{D}_2}(x, y) = \min\{\mu_2(y), \mu_{\hat{C}_2}(x, y)\}.$$

Каждый игрок стремится к максимизации своей функции $\mu_{\hat{D}_i}(x, y)$.

Пусть множества стратегий игроков четкие, тогда, если x — стратегия первого игрока, то $\mu_1(x) = 1$, аналогично для второго игрока $\mu_2(y) = 1$, и тогда

$$\mu_{\hat{D}_1}(x, y) = \mu_{\hat{C}_1}(x, y),$$

$$\mu_{\hat{D}_2}(x, y) = \mu_{\hat{C}_2}(x, y).$$

При сделанных предположениях рассматриваемая игра формулируется следующим (четким) образом [9]: X и Y — множества стратегий игроков 1 и 2, $\mu_{\hat{D}_1}(x, y)$ и $\mu_{\hat{D}_2}(x, y)$ — их функции выигрышей.

При использовании принципа максимального гарантированного выигрыша игроки стремятся максимизировать выигрыш, не зависящий от действий противника. Максимальные гарантированные выигрыши игроков равны соответственно

$$M_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \mu_{\hat{D}_1}(x, y) \text{ и } M_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \mu_{\hat{D}_2}(x, y).$$

Пример 4.5. Рассмотрим пример из п. 4.1 (табл. 4.1). Обозначим:

a_1 — стратегия первого игрока: использовать северный маршрут;

a_2 — стратегия первого игрока: использовать южный маршрут;

b_1 — стратегия второго игрока: использовать северный маршрут;

b_2 — стратегия второго игрока: использовать южный маршрут.

Функция выигрышей первого игрока в исходной «четкой» игре $f_1(a_k, b_l)$ ($k = 1, 2; l = 1, 2$) задана таблицей 4.1. Функция выигрышей второго игрока $f_2(a_k, b_l) = -f_1(a_k, b_l)$. Будем предполагать, что функциями принадлежности нечетких целей игроков в рассматриваемой игре являются функции:

$$\mu_{\hat{C}_i}(a_k, b_l) = \frac{f_i(a_k, b_l) - \min_{u,v} f_i(a_u, b_v)}{\max_{u,v} f_i(a_u, b_v) - \min_{u,v} f_i(a_u, b_v)}, \quad i = 1, 2,$$

их значения указаны в таблице 4.8.

Таблица 4.8. Функции $\mu_{\hat{C}}^i(a_k, b_l)$

	b_1	b_2
a_1	(0,5; 0,5)	(0,5; 0,5)
a_2	(0,0; 0,5)	(1,0; 0,0)

Как это видно из последней таблицы, оптимальный уровень надежности для первого игрока равен 0,5 и оптимальной его стратегией является стратегия a_1 ; для второго игрока оптимальный уровень надежности равен 0,5 и оптимальными его стратегиями являются стратегии b_1 и b_2 .

4.7. Игры с «природой», когда множество ее стратегий нечеткое

Рассмотрим игру с природой (см. п. 4.4), в которой множество стратегий «природы» является нечетким. Такая игра является частным случаем игры, рассмотренной в предыдущем пункте.

Обозначим a_1, a_2, \dots, a_n — стратегии ЛПР (оперирующей стороны), Y — универсальное множество стратегий «природы», ее нечеткое множество стратегий задается функцией принадлежности $\mu(y), y \in Y$. Будем предполагать, что множество Y конечное и $Y = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

На множестве всех возможных ситуаций

$$(a_i, b_j), \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m,$$

задана функция $f(a_i, b_j)$ — выигрыш ЛПР в ситуации (a_i, b_j) (оценка оперирующей стороной этой ситуации).

Будем считать, что цель ЛПР (первого игрока) описывается нечетким множеством цели \hat{C} с функцией принадлежности $\bar{\mu}_{\hat{C}}(u), u \in R^1$. Если $u = f(a_i, b_j)$, то

$$\bar{\mu}_{\hat{C}}(u) = \bar{\mu}_{\hat{C}}(f(a_i, b_j)).$$

Обозначим:

$$\mu_{\hat{C}}(a_i, b_j) = \bar{\mu}_{\hat{C}}(f(a_i, b_j)).$$

Нечетким решением (нечетким множеством, формализующим нечеткое решение) \hat{D} будем считать пересечение нечеткого множества стратегий и нечеткого множества цели. Функцию принадлежности нечеткого решения \hat{D} обозначим $\mu_{\hat{D}}(a_i, b_j)$. Имеем:

$$\mu_{\hat{D}}(a_i, b_j) = \min\{\mu(b_j), \mu_{\hat{C}}(a_i, b_j)\}.$$

Оперирующая сторона (ЛПП) стремится к максимизации значения функции принадлежности своего решения.

Пример 4.6. В регионе необходимо выбрать один из трех районов размещения склада с материальными средствами. Эти районы отличаются друг от друга состоянием подъездных путей, зависящим от погодных условий. О будущем состоянии погоды точной информации нет. Рассматриваются три возможных состояния погоды: сухо, небольшие осадки, обильные осадки. Полезности выбора различных районов при возможных состояниях погоды указаны в таблице 4.9 (в условных единицах).

Таблица 4.9. Полезности выбора различных районов (функция $f(a_i, \theta_j)$)

Район размещения	Состояние погоды		
	Сухо (θ_1)	Небольшие осадки (θ_2)	Обильные осадки (θ_3)
Первый (a_1)	7	5	0
Второй (a_2)	6	4	3
Третий (a_3)	5	4	4

Решение. Рассмотрим универсальное множество Y — множество всех возможных состояний природы (по уровню влажности) и на нем нечеткое множество \hat{A} с функцией принадлежности $\mu_{\hat{A}}(u)$, $u \in Y$. Будем предполагать, что эта функция нам известна (табл. 4.10).

Таблица 4.10. Функция принадлежности $\mu_{\hat{A}}(u)$

Возможные состояния погоды	Сухо	Небольшие осадки	Обильные осадки	Прочие состояния
$\mu_{\hat{A}}(u)$	0,3	0,7	0,2	0

Вычисляем функцию принадлежности нечеткого множества цели (табл. 4.11), т. е. функцию $\mu_{\hat{C}}(a_i, b_j) = \bar{\mu}_{\hat{C}}(f(a_i, b_j))$, в принятых обозначениях это функция

$$\mu_{\hat{C}}(a_i, \theta_j) = \bar{\mu}_{\hat{C}}(f(a_i, \theta_j)).$$

Таблица 4.11. Функция $\mu_{\hat{C}}(a_i, b_j)$

Район размещения	Состояние погоды		
	Сухо (θ_1)	Небольшие осадки (θ_2)	Обильные осадки (θ_3)
Первый (a_1)	1	5/7	0
Второй (a_2)	6/7	4/7	3/7
Третий (a_3)	5/7	4/7	4/7

Если функция цели есть, например, нормированная полезность выбора, то

$$\mu_{\hat{C}}^i(a_i, b_j) = \frac{f_i(a_i, b_j) - \min_{u,v} f_i(a_u, b_v)}{\max_{u,v} f_i(a_u, b_v) - \min_{u,v} f_i(a_u, b_v)}.$$

Вычисляем функцию принадлежности нечеткого решения (табл. 4.12), т. е. функцию

$$\mu_{\hat{D}}(a_i, \theta_j) = \min\{\mu(\theta_j), \mu_{\hat{C}}(a_i, \theta_j)\}.$$

Таблица 4.12. Функция $\mu_{\hat{D}}(a_i, \theta_j)$

Район размещения	Состояние погоды		
	Сухо (θ_1)	Небольшие осадки (θ_2)	Обильные осадки (θ_3)
Первый (a_1)	0,3	0,7	0
Второй (a_2)	0,3	0,43	0,2
Третий (a_3)	0,3	0,43	0,2

Анализ таблицы 4.12 показывает, что в соответствии с критерием Вальда оптимальный уровень надежности для лица, принимающего решение, равен 0,2 и оптимальными способами действия для него являются выбор второго или третьего района. По критерию Лапласа оптимальной является первая стратегия при уровне надежности 0,33. По критерию Гурвица при $\alpha=0,5$ оптимальной оказывается первая стратегия, обеспечивающая уровень надежности 0,35, по критерию Сэвиджа — первая.

4.8. Кооперативные игры с нечеткими множествами стратегий игроков

Будем рассматривать кооперативные игры (см. п. 4.5), заданные с помощью характеристической функции $v(S)$, $S \in N$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков; $1, 2, \dots, n$ — игроки с соответствующими номерами. Буквой X будем обозначать множество дележей.

Используя различные способы действия, коалиция S может обеспечить себе получение любого дележа, дающего ей суммарный выигрыш не больший $v(S)$. Множеством всех дележей, обладающих указанным свойством, является множество

$$W_S = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0 \text{ при } i \in N, \sum_{i=1}^n x_i = v(N) \text{ и } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) \right\}.$$

Введем обозначение:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i.$$

Будем предполагать, что множества стратегий коалиций в рассматриваемой игре являются нечеткими, они порождают нечеткие множества дележей \hat{X}_S , которые коалиция S может себе обеспечить с той или иной степенью надежности. Функцию принадлежности нечеткого множества \hat{X}_S обозначим $\mu_S(x)$, $x \in X$.

Будем считать, что каждая коалиция имеет нечеткую цель, описываемую нечетким множеством \hat{C}_S с функцией принадлежности $\mu_{\hat{C}_S}(x)$.

Под нечетким решением всего множества игроков будем понимать нечеткое множество \hat{D}_N , равное пересечению нечетких множеств \hat{X}_S и нечетких целей коалиций. Его функция принадлежности

$$\mu_{\hat{D}_N}(x) = \min \left\{ \min_{S \subseteq N} \mu_S(x), \min_{S \subseteq N} \mu_{\hat{C}_S}(x) \right\}.$$

Решением игры предлагается считать дележ, для которого значение функции $\mu_{\hat{D}_N}(x)$ максимально.

Интересным представляется случай, когда для (0–1)-редуцированной игры (см. п. 4.5):

$$\mu_S(x) = 1 \text{ для любого } x$$

и

$$\mu_{\hat{C}_S}(x) = \begin{cases} 1 - (v(S) - x(S)), & \text{если } x(S) \leq v(S), \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $\mu_{\hat{C}_S}(x) = 1 - (v(S) - x(S))$, то функция $\mu_{\hat{C}_S}(x)$ очень похожа на эксцесс, введенный Д. Шмайдлером в [95] для рассматриваемых кооперативных игр в четкой постановке. Эксцессы для игр без побочных платежей и получающиеся при этом N -ядро исследовались В. Б. Вилковым [97].

Если считать, что $\mu_S(x) = 1$ и $\mu_{\hat{C}_S}(x) = 1 - (v(S) - x(S))$ для любого дележа x , то введенное нами решение игры содержит в себе N -ядро [95] «четкой» игры. Заметим, что предлагаемое решение может состоять и из целого множества дележей.

Если $\mu_S(x) = 1$ и $\mu_{\hat{C}_S}(x) = 1 - (v(S) - x(S))$ для любого дележа x , то, как уже отмечалось, N -ядро «четкой» игры является и решением рассматриваемой игры. Метод вычисления N -ядра приводится в [97].

Пример 4.7. В целях оперативного обеспечения материально-техническими средствами требуется обеспечить перевозку заданных объемов разногабаритных грузов. Для перевозки можно привлечь любую коалицию из трех разных фирм. Эти фирмы имеют разные парки автомобилей. Если задание выполняет одна (две) фирма, то она будет нести дополнительные расходы, связанные, например, с необходимостью перевозки мелких грузов тяжелыми автомобилями. Объединение фирм в коалиции уменьшает суммарные затраты. На выполнение работ заказчик выделяет $M = 1\,000\,000$ руб., что достаточно, даже если задачу решает одна фирма. При совместной работе нескольких фирм заказчик выплачивает им некоторую премию в пределах сэкономленной суммы.

Известно, что если перевозки будет осуществлять одна фирма, то ее затраты составят 1 000 000 руб. (для простоты считаем, что затраты любой фирмы, действующей в одиночку, одинаковые) и премии она не получит. Если перевозки будут осуществлять совместно первая и вторая фирмы, то они затратят 880 000 руб., и экономия составит 120 000 руб. Для коалиции из первой и третьей фирм расходы равны 860 000 руб., экономия — 140 000 руб.; для коалиции из второй и третьей фирм расходы равны 84 000 руб., экономия — 160 000 руб.; для коалиции из первой, второй и третьей фирм расходы равны 800 000 руб., экономия — 200 000 руб.

По окончании перевозок заказчик выплачивает их участникам премию в размере половины сэкономленной суммы. Как ее распределить между фирмами с тем, чтобы заинтересовать их в объединении (если все фирмы объединятся, то заказчик получит максимальную экономию в размере 200 000 руб.).

Будем моделировать предложенную ситуацию в форме кооперативной игры трех лиц, в которой множество игроков $N = \{1, 2, 3\}$ и значение

характеристической функции $v(S)$ равно премии (половине сэкономленной суммы).

Будем предполагать, что в рассматриваемой игре функции принадлежности $\mu_S(x)=1$ для любого S и любого множества X_S являются четкими и каждая коалиция S имеет нечеткую цель, описываемую нечетким множеством с функцией принадлежности $\mu_{\hat{C}_S}(x)$:

$$\mu_{\hat{C}_S}(x) = \begin{cases} 1 - (v(S) - x(S), & \text{если } x(S) \leq v(S), \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если за единицу измерения затрат взять 100 000 руб., то получим игру в редуцированной форме, что удобнее.

Для рассматриваемого случая $N = \{1, 2, 3\}$ и

$$v(\{1, 2\}) = 0,6, \quad v(\{1, 3\}) = 0,7, \quad v(\{2, 3\}) = 0,8.$$

Напомним, что для редуцированных игр

$$v(\{i\}) = 0 \text{ для любого } i \in N, \quad v(\{1, 2, 3\}) = 1.$$

Решением данной игры является дележ $x^* = \left(\frac{7}{30}; \frac{10}{30}; \frac{13}{30}\right)$. Значения функций принадлежности нечетких целей (значения функций $\mu_{\hat{C}_S}(x)$ при $x = x^*$) приведены в таблице 4.13, $\mu_{\hat{D}_N}(x) = 29/30$.

Таблица 4.13. Значения функций $\mu_{\hat{C}_S}(x)$

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1; 2\}$	$\{1; 3\}$	$\{2; 3\}$	$\{1; 2; 3\}$
$\mu_{\hat{C}_S}(x)$	1	1	1	29/30	29/30	29/30	1

Поясним то, как получены данные второй строки этой таблицы.

Так как $x^*(\{1\}) = 7/30 > 0 = v(\{1\})$, то $\mu_{\hat{C}_{\{1\}}}(x^*) = 1$, аналогично $\mu_{\hat{C}_{\{2\}}}(x^*) = 1$ и $\mu_{\hat{C}_{\{3\}}}(x^*) = 1$.

Для коалиции $\{1, 2, 3\}$ имеем: $x^*(\{1, 2, 3\}) = 1 = v(\{1, 2, 3\})$, тогда

$$\mu_{\hat{C}_{\{1, 2, 3\}}}(x^*) = 1 - (v(\{1, 2, 3\}) - x^*(\{1, 2, 3\})) = 1.$$

Для коалиции $\{1, 2\}$:

$$x^*(\{1, 2\}) = \frac{7}{30} + \frac{10}{30} = \frac{17}{30} \approx 0,57 < 0,6,$$

следовательно,

$$\mu_{\hat{C}_{\{1,2\}}}(x^*) = 1 - (v(\{1,2\}) - x^*(\{1,2\})) = 1 - \left(0,6 - \frac{17}{30}\right) = \frac{29}{30}.$$

Аналогично

$$\mu_{\hat{C}_{\{1,3\}}}(x^*) = \mu_{\hat{C}_{\{2,3\}}}(x^*) = \frac{29}{30}.$$

Мы утверждаем, что

$$\max_x \mu_{\hat{D}_N}(x) = \mu_{\hat{D}_N}(x^*) = \frac{29}{30}.$$

Это действительно так. Если для некоторого $x = (x_1, x_2, x_3)$ выполняется неравенство $\mu_{\hat{D}_N}(z) > 29/30$, то

$$\mu_{\hat{C}_{\{1,2\}}}(x) \geq \frac{29}{30}, \mu_{\hat{C}_{\{1,3\}}}(x) \geq \frac{29}{30}, \mu_{\hat{C}_{\{2,3\}}}(x) \geq \frac{29}{30}.$$

При этом одно из этих неравенств обязательно строгое. Пусть для определенности $\mu_{\hat{C}_{\{1,2\}}}(x) \geq \frac{29}{30}$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \mu_{\hat{C}_{\{1,2\}}}(x) + \mu_{\hat{C}_{\{1,3\}}}(x) + \mu_{\hat{C}_{\{2,3\}}}(x) = \\ & = [1 - (v(\{1,2\}) - (x_1 + x_2))] + [1 - (v(\{1,3\}) - (x_1 + x_3))] + \\ & + [1 - (v(\{2,3\}) - (x_2 + x_3))] > 3 \cdot \frac{29}{30} = 2,9. \end{aligned}$$

Отсюда

$$3 - (0,6 - (x_1 + x_2)) - (0,7 - (x_1 + x_3)) - (0,8 - (x_2 + x_3)) > 2,9$$

или

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 > 2,$$

и, значит, x не является дележом (для дележей в рассматриваемой игре сумма выигрышей всех игроков равна единице).

4.9. Матричные игры с нечеткими выигрышами

Напомним, что матричной игрой g называется игра двух игроков, в которой каждый из них имеет конечное число способов поведения (стратегий). Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают по стратегии, после чего каждый из них получает определенный выигрыш, при этом сумма полученных выигрышей равна нулю.

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — множество стратегий первого игрока в игре g , $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — множество стратегий второго игрока в этой же игре. Далее появится понятие смешанной стратегии, поэтому указанные стратегии порой будем называть чистыми. Выбор игроками по стратегии будем называть ситуацией. Если игроки выбрали стратегии a_i и b_j соответственно, то обозначать такую ситуацию будем (i, j) .

Для игры g на множестве ее ситуаций определена функция $H_g(i, j)$ — функция выигрыша первого игрока, выигрыш второго игрока в ситуации (i, j) равен $-H_g(i, j)$. Положим $H_{ij}(g) = H_g(i, j)$. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

Игра g однозначно задается матрицей выигрышей первого игрока:

$$A(g) = \begin{pmatrix} H_{11}(g) & H_{12}(g) & \dots & H_{1n}(g) \\ H_{21}(g) & H_{22}(g) & \dots & H_{2n}(g) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{m1}(g) & H_{m2}(g) & \dots & H_{mn}(g) \end{pmatrix}$$

Первый игрок всегда может гарантировать себе выигрыш, равный

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} H_{ij}(g).$$

Второй игрок всегда может гарантировать себе проигрыш, равный

$$\min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} H_{ij}(g).$$

Определение 4.7. В матричной игре g ситуация (i_0, j_0) называется *ситуацией равновесия или седловой точкой*, если

$$H_{ij_0}(g) \leq H_{i_0j_0}(g) \text{ и } H_{i_0j}(g) \geq H_{i_0j_0}(g)$$

при $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$.

Игры, имеющие ситуацию равновесия, называются вполне определенными. Выигрыш первого игрока в ситуации равновесия называется ценой игры, а стратегии, образующие седловую точку, называются оптимальными.

К сожалению, далеко не всякая игра является вполне определенной. Стремясь обойти этот недостаток, Нейман ввел понятие смешанных стратегий. Смешанная стратегия игрока есть распределение вероятностей по его стратегиям. Имеет место теорема.

Теорема 4.1. [90]. Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Пусть G есть множество всех матричных игр с m стратегиями у первого игрока и n стратегиями у второго. Это множество будем рассматривать как универсальное множество, на котором заданы нечеткие множества — нечеткие матричные игры, игры, в которых выигрыши являются нечеткими и задаются нечеткими числами (для простоты треугольными). Функцию принадлежности нечеткой матричной игры \hat{g} обозначим $\mu_{\hat{g}}(g), g \in G$. Поскольку матричная игра однозначно определяется матрицей выигрышей, то будем считать, что $g = A(g)$, и тогда $\mu_{\hat{g}}(g) = \mu_{\hat{g}}(A(g))$.

Рассмотрим нечеткую матричную игру \hat{g} с m стратегиями у первого игрока и n стратегиями у второго.

Пусть выигрыши первого игрока в ней являются нечеткими числами $\hat{D}_{ij}(\hat{g}) = \langle c_{ij}(\hat{g}), d_{ij}(\hat{g}), f_{ij}(\hat{g}) \rangle, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, с функциями принадлежности $\mu_{ij}^{\hat{g}}$:

$$\mu_{ij}^{\hat{g}}(u) = \begin{cases} \frac{u - c_{ij}(\hat{g})}{d_{ij}(\hat{g}) - c_{ij}(\hat{g})}, & \text{если } c_{ij}(\hat{g}) \leq u \leq d_{ij}(\hat{g}), \\ \frac{f_{ij}(\hat{g}) - u}{f_{ij}(\hat{g}) - d_{ij}(\hat{g})}, & \text{если } d_{ij}(\hat{g}) \leq u \leq f_{ij}(\hat{g}), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

если $c_{ij}(\hat{g}) < d_{ij}(\hat{g}) < f_{ij}(\hat{g})$; при других соотношениях между параметрами треугольных чисел (между $c_{ij}(\hat{g}), d_{ij}(\hat{g}), f_{ij}(\hat{g})$) функция $\mu_{\hat{g}}(g)$ определяется по аналогии с тем, как это сказано в определении 1.6 первой главы).

Рассмотрим игру $g \in G$ с матрицей выигрышей $A(g)$:

$$A(g) = \begin{pmatrix} H_{11}(g) & H_{12}(g) & \cdots & H_{1n}(g) \\ H_{21}(g) & H_{22}(g) & \cdots & H_{2n}(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(g) & H_{m2}(g) & \cdots & H_{mn}(g) \end{pmatrix}.$$

Значения функций принадлежности в нечеткой игре \hat{g} для выигрышей из $A(g)$ будем обозначать $h_{ij}^{\hat{g}}(g): h_{ij}^{\hat{g}}(g) = \mu_{ij}^{\hat{g}}(H_{ij}(g))$. Отметим, что равенство $h_{ij}^{\hat{g}}(g) = \mu_{ij}^{\hat{g}}(H_{ij}(g))$, рассматриваемое как уравнение относительно $H_{ij}(g)$,

кроме ситуации, когда $h_{ij}^{\hat{g}}(g)=1$, имеет два решения — одно больше $d_{ij}(\hat{g})$, другое меньше этого значения.

В соответствии с определением конъюнкции в нечеткой логике имеем:

$$\mu_{\hat{g}}(A(g)) = \min_{i,j} \mu_{ij}^{\hat{g}}(H_{ij}(g)).$$

Рассмотрим нечеткую матричную игру \hat{g} с нечеткой матрицей выигрышей $\hat{A}(\hat{g}) = \|\hat{D}_{ij}(\hat{g})\|_{i,j=1}^{m,n}$.

Обозначим через $\mathfrak{S}^{ij}(\hat{g})$ множество игр и через $F^{ij}(\hat{g})$ обозначим множество таких соответствующих этим играм матриц выигрышей, что в игре с матрицей $A^{ij}(\hat{g}) \in F^{ij}(\hat{g})$ ситуация (i, j) является седловой точкой.

Обозначим через $A_0^{ij}(\hat{g})$ матрицу выигрышей, для которой выполняется равенство

$$\mu_{\hat{g}}(A_0^{ij}(\hat{g})) = \max_{A \in F^{ij}(\hat{g})} \mu_{\hat{g}}(A).$$

Величину $\mu_{\hat{g}}(A_0^{ij}(\hat{g}))$ будем рассматривать как степень надежности того, что ситуация (i, j) в рассматриваемой нечеткой игре \hat{g} является седловой точкой, что следует из определения дизъюнкции в нечеткой логике.

Решением рассматриваемой нечеткой игры \hat{g} будем считать ситуацию (i, j) , для которой надежность того, что она является седловой точкой, максимальна.

Достоинством предлагаемого подхода является то, что любая игра имеет решение в чистых стратегиях, чего нельзя сказать о классическом подходе. Правда, искомая надежность может оказаться равной нулю. Но если пересечение всех носителей нечетких множеств, задающих выигрыши, не пусто и содержит более одной точки, то указанное значение будет больше нуля.

Следует отметить, что если дана игра с четкими выигрышами, имеющая седловую точку, то, рассматривая ее как игру с нечеткими выигрышами $\hat{D}_{ij} = \langle d_{ij}, d_{ij}, d_{ij} \rangle$, в качестве решения получим эту седловую точку.

На критическое замечание «Как можно считать оптимальной ситуацию, надежность которой меньше единицы?» можно ответить, что при классическом подходе решения в чистых стратегиях в таком случае вообще нет и приходится

прибегать к использованию смешанных стратегий, что часто имеет лишь теоретический интерес и для практики зачастую неприемлемо.

Задача по отысканию указанного решения игры сводится к серии задач математического программирования, по паре задач для каждой ситуации (в случае рассматриваемых функций принадлежности к задачам линейного программирования [35], [98]).

Рассмотрим нечеткую игру \hat{g} с нечеткой матрицей выигрышей $\hat{A}(g) = \|\hat{D}_{ij}(\hat{g})\|_{i,j=1}^{m,n}$ и ситуацию (i_0, j_0) .

Пусть

$$A_0^{i_0 j_0}(\hat{g}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

— такая матрица выигрышей в игре \hat{g} , что $\mu_{\hat{g}}(A_0^{i_0 j_0}(\hat{g}))$ есть максимальная степень надежности того, что ситуация (i_0, j_0) в рассматриваемой нечеткой игре \hat{g} является седловой точкой, и пусть $\mu_{\hat{g}}(A_0^{i_0 j_0}(\hat{g})) = u_0$.

Для того чтобы ситуация (i_0, j_0) была седловой точкой в игре с матрицей выигрышей $A_0^{i_0 j_0}(\hat{g})$, требуется, чтобы выполнялись неравенства:

$$\beta_{i_0 j_0} \leq \beta_{i_0 j}, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\beta_{i_0 j_0} \geq \beta_{ij_0}, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$u_0 \leq \mu_{ij}(\beta_{ij}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$c_{ij} \leq \beta_{ij} \leq f_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Достаточными требованиями для этого являются:

$u_0 = 0$ является решением или задачи (4.1), или задачи (4.2);

$$\beta_{ij} = d_{ij}(\hat{g}), i = 1, 2, \dots, m, i \neq i_0, j = 1, 2, \dots, n, j \neq j_0.$$



$$\begin{aligned}
 & u \rightarrow \max, \\
 u \leq & \frac{f_{i_0j}(\hat{g}) - \beta_{i_0j}}{f_{i_0j}(\hat{g}) - d_{i_0j}(\hat{g})}, j=1,2,\dots,n, j \neq j_0, \\
 & \frac{f_{i_0j}(\hat{g}) - \beta_{i_0j}}{f_{i_0j}(\hat{g}) - d_{i_0j}(\hat{g})} \leq 1, j=1,2,\dots,n, j \neq j_0, \\
 u \leq & \frac{\beta_{ij_0} - c_{ij_0}(\hat{g})}{d_{ij_0}(\hat{g}) - c_{ij_0}(\hat{g})}, i=1,2,\dots,m, i \neq i_0, \\
 & \frac{\beta_{ij_0} - c_{ij_0}(\hat{g})}{d_{ij_0}(\hat{g}) - c_{ij_0}(\hat{g})} \leq 1, i=1,2,\dots,m, i \neq i_0, \\
 & u \leq \frac{f_{i_0j_0}(\hat{g}) - \beta_{i_0j_0}}{f_{i_0j_0}(\hat{g}) - d_{i_0j_0}(\hat{g})}, \\
 & \frac{f_{i_0j_0}(\hat{g}) - \beta_{i_0j_0}}{f_{i_0j_0}(\hat{g}) - d_{i_0j_0}(\hat{g})} \leq 1, \\
 & \beta_{i_0j_0} \leq \beta_{i_0j}, j=1,2,\dots,n, j \neq j_0, \\
 & \beta_{i_0j_0} \geq \beta_{ij_0}, i=1,2,\dots,m, i \neq i_0, \\
 & c_{ij} \leq \beta_{ij} \leq f_{ij}, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 & u \rightarrow \max, \\
 u \leq & \frac{f_{i_0j}(\hat{g}) - \beta_{i_0j}}{f_{i_0j}(\hat{g}) - d_{i_0j}(\hat{g})}, j=1,2,\dots,n, j \neq j_0, \\
 & \frac{f_{i_0j}(\hat{g}) - \beta_{i_0j}}{f_{i_0j}(\hat{g}) - d_{i_0j}(\hat{g})} \leq 1, j=1,2,\dots,n, j \neq j_0, \\
 u \leq & \frac{\beta_{ij_0} - c_{ij_0}(\hat{g})}{d_{ij_0}(\hat{g}) - c_{ij_0}(\hat{g})}, i=1,2,\dots,m, i \neq i_0, \\
 & \frac{\beta_{ij_0} - c_{ij_0}(\hat{g})}{d_{ij_0}(\hat{g}) - c_{ij_0}(\hat{g})} \leq 1, i=1,2,\dots,m, i \neq i_0, \\
 & u \leq \frac{\beta_{i_0j_0} - c_{i_0j_0}(\hat{g})}{d_{i_0j_0}(\hat{g}) - c_{i_0j_0}(\hat{g})}, \\
 & \frac{\beta_{i_0j_0} - c_{i_0j_0}(\hat{g})}{d_{i_0j_0}(\hat{g}) - c_{i_0j_0}(\hat{g})} \leq 1, \\
 & \beta_{i_0j_0} \leq \beta_{i_0j}, j=1,2,\dots,n, j \neq j_0, \\
 & \beta_{i_0j_0} \geq \beta_{ij_0}, i=1,2,\dots,m, i \neq i_0, \\
 & c_{ij} \leq \beta_{ij} \leq f_{ij}, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Следует отметить, что две задачи возникают по той причине, что функции принадлежности линейно возрастают на интервалах $[c_{ij}(\hat{g}), d_{ij}(\hat{g})]$ и линейно убывают на интервалах $[d_{ij}(\hat{g}), f_{ij}(\hat{g})]$. При рассмотрении ситуации (i, j_0) при $i \neq i_0$ выигрыш в ней мы разве что увеличиваем и можно ограничиться интервалом $[d_{ij}(\hat{g}), f_{ij}(\hat{g})]$, что однозначно определяет вид соответствующего неравенства. Для ситуации (i_0, j) при $j \neq j_0$ выигрыш в ней разве что уменьшаем и можно ограничиться интервалом $[c_{ij}(\hat{g}), d_{ij}(\hat{g})]$. В ситуации же (i_0, j_0) выигрыш, может быть, надо увеличить, а может быть, уменьшить.

Пример 4.8. Дана нечеткая игра \hat{g} . Предполагается, что выигрыши игроков задаются нечеткими числами, для простоты треугольными. Дана матрица игры A , в ней указаны моды соответствующих нечетких чисел:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта игра не имеет седловой точки (в чистых стратегиях). Оптимальными смешанными стратегиями являются:

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \text{ для первого игрока и } Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ для второго,}$$

цена игры равна на интервалах 6.

Предполагается, что выигрыш первого игрока в ситуации (i, j) является нечетким числом $\hat{D}_{ij} = \langle c_{ij}, d_{ij}, f_{ij} \rangle$, значения чисел c_{ij} , d_{ij} , f_{ij} указаны в таблице 4.14.

Таблица 4.14. Характеристики нечетких выигрышей

\hat{D}_{ij}	c_{ij}	d_{ij}	f_{ij}
\hat{D}_{11}	4	5	8
\hat{D}_{12}	3	7	9
\hat{D}_{13}	5	10	13
\hat{D}_{21}	4	8	12
\hat{D}_{22}	2	4	7
\hat{D}_{23}	2	3	5

Функции принадлежности нечетких выигрышей указаны в таблице 4.15.

Таблица 4.15. Функции принадлежности

\hat{D}_{ij}	Функция на интервале	
	$[c_{ij}, d_{ij}]$	$[d_{ij}, f_{ij}]$
\hat{D}_{11}	$x - 4$	$(8 - x)/3$
\hat{D}_{12}	$(x - 3)/4$	$(9 - x)/2$
\hat{D}_{13}	$(x - 5)/5$	$(13 - x)/3$
\hat{D}_{21}	$(x - 4)/4$	$(12 - x)/4$
\hat{D}_{22}	$(x - 2)/2$	$(7 - x)/3$
\hat{D}_{23}	$x - 2$	$(5 - x)/2$

Для каждой ситуации (i, j) в игре \hat{g} найдем такое максимальное μ_{ij}^0 , что для него существует такая матрица выигрышей

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{pmatrix},$$

где $\mu_{kl}(\beta_{kl}) \geq \mu_{ij}^0$ для любой ситуации (k, l) , что ситуация (i, j) является седловой точкой в игре с этой матрицей выигрышей.

Заметим, что ситуация (i, j) является седловой в игре с матрицей выигрышей

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда β_{ij} не превосходит любого из элементов i -й строки матрицы и не меньше любого из элементов ее j -й графы.

Расчеты показали, что максимум степени надежности того, что игра, в которой ситуация $(1, 1)$ является равновесной, равен $4/7$, при этом $\beta_{11} = \beta_{21} = \frac{44}{7}$.

В качестве значений остальных β_{ij} можно взять соответствующие H_{ij} :

	b_1	b_2	b_3
a_1	$44/7^*$	7	10
a_2	$44/7$	4	3

Здесь и далее седловые точки отмечены звездочками.

Для ситуации (1,2) максимум степени надежности равен $5/7$, например в игре с матрицей

	b_1	b_2	b_3
a_1	$41/7$	$41/7^*$	10
a_2	8	4	3

Для ситуации (1,3) максимум степени надежности равен $3/8$, например в игре с матрицей



	b_1	b_2	b_3
a_1	$55/8$	7	$55/8^*$
a_2	8	4	3

Максимум степени надежности того, что игра, в которой ситуация (2,1) является равновесной, равен $1/6$, например:

	b_1	b_2	b_3
a_1	$25/6$	7	10
a_2	$14/3^*$	6,5	$14/3$

Для ситуации (2,2) максимум степени надежности равен $1/3$, например в игре с матрицей



	b_1	b_2	b_3
a_1	5	$13/3$	10
a_2	8	$13/3^*$	$13/3$

Максимум степени надежности того, что игра, в которой ситуация (2,3) является равновесной, равен 0, например:

	b_1	b_2	b_3
a_1	5	7	5
a_2	8	5	5^*

Сравнивая шесть полученных результатов, получаем окончательный ответ: ситуация (1,2) является седловой точкой с максимальной степенью надежности, которая равна 5/7.

Интересным может быть подход, основанный на идеях Беллмана и Заде [9], [34], при котором, кроме степени надежности того, что ситуация является равновесной, учитывается и ее «близость» к некоторой наиболее эффективной.

Рассмотрим нечеткое множество цели \hat{X}_u , определенное на универсальном множестве всех возможных ситуаций в игре. Будем рассматривать, насколько данная ситуация близка к равновесной (может быть, в смешанных стратегиях). Эту близость будем характеризовать нормированной абсолютной величиной разности между выигрышем первого игрока в этой ситуации и его выигрышем в равновесной ситуации (ценой игры) в «четкой» игре с матрицей выигрышей $A_0^{ij}(\hat{g})$. Саму эту игру обозначим через g^{ij} . Цену этой игры обозначим v^{ij} .

Функцию принадлежности нечеткого множества \hat{X}_u обозначим $\mu_{\hat{X}_u}$. Пусть, например:

$$\mu_{\hat{X}_u}((i, j)) = 1 - \frac{|H_{ij}(g^{ij}) - v^{ij}|}{\max_{(k,l)} H_{kl}(g^{ij}) - v^{ij}}.$$

Нечетким решением будем называть нечеткое множество \hat{X}_p с функцией принадлежности $\mu_{\hat{X}_p}$.

Будем считать, что ситуация (i, j) является элементом нечеткого решения, если существует такая матрица значений функций принадлежности:

$$M(u) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix},$$

что ситуацией равновесия в соответствующей игре (в игре с такими выигрышами β_{ij} , что $\mu_{ij}(\beta_{ij}) = u_{ij}$) является ситуация (i, j) .

В силу определения конъюнкции нечетких высказываний

$$\mu_{\hat{X}_p}((i, j)) = \min \left\{ \mu_{\hat{X}_u}((ij)), \min_{i,j} \mu_{ij}(\beta_{ij}) \right\}.$$

Оптимальной предлагается считать ситуацию (i_0, j_0) , для которой $\mu_{\hat{X}_p}$ максимально:

$$\mu_{\hat{X}_p}((i_0, j_0)) = \max_{i,j} \mu_{\hat{X}_p}(i, j).$$

Для рассмотренного примера необходимые результаты расчетов приведены в таблице 4.16 (с учетом того, что цена игры равна б).

Таблица 4.16. Результаты вычислений

Ситуация	$\mu_{\hat{g}}(A_0^{ij}(\hat{g}))$	Цена игры	$\mu_{\hat{X}_u}((i, j))$	$\mu_{\hat{X}_p}((i, j))$
(1,1)	4/7	44/7	1/14	13/14
(1,2)	5/7	41/7	1/28	27/28*
(1,3)	3/8	55/8	7/32	25/32
(1,3)	1/6	14/3	1/3	5/6
(2,2)	1/3	13/3	5/12	2/3
(2,3)	0	5	3/4	0

В соответствии с предлагаемым подходом оптимальной следует признать ситуацию (1,2).

Конечно, признание ситуации оптимальной во многом зависит от вида функции μ_{X_u} , выбор которой осуществляется лицом, принимающим решение.

4.10. Бескоалиционные игры с нечеткими выигрышами

Рассмотрим нечеткие бескоалиционные игры n лиц — бескоалиционные игры n лиц, в которых выигрыши игроков в любых ситуациях задаются нечеткими числами. Для этих игр с использованием нечетких множеств введем (по аналогии с матричными играми, рассмотренными в предыдущем параграфе) понятие нечеткого решения.

Необходимые для дальнейшего понятия теории бескоалиционных игр приведены в п. 4.3.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем рассматривать бескоалиционные игры n лиц с фиксированными конечными множествами стратегий игроков и таких, что для любого $k \in N$, любого $x \in X$ и любой игры

$g \in G$ выигрыш $H_k^g(x)$ игрока i в ситуации x в игре g лежит в некотором замкнутом промежутке $[a, b]$.

Пусть G есть множество всех таких игр. Множество G будем рассматривать как универсальное множество, на котором заданы нечеткие множества — нечеткие бескоалиционные игры, в которых выигрыши игроков являются нечеткими и задаются нечеткими числами. Функцию принадлежности нечеткой бескоалиционной игры \hat{g} обозначим $\mu_{\hat{g}}(g)$.

Выигрыш игрока k в игре g в ситуации x будем обозначать $H_k^g(x)$.

Рассмотрим нечеткую бескоалиционную игру \hat{g} . Обозначим через $\hat{D}_x^{\hat{g},k}$ нечеткое число, которое является выигрышем игрока с номером k в игре \hat{g} в ситуации

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n;$$

функцию принадлежности этого нечеткого числа будем обозначать

$$\mu_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{\hat{g},k} = \mu_x^{\hat{g},k}.$$

Пусть некоторым значением нечеткой игры \hat{g} является обычная («четкая») игра $g \in G$. Выигрыш игрока k в ситуации x в этом случае обозначим $\hat{D}_x^{\hat{g},k}(g)$, тогда $\hat{D}_x^{\hat{g},k}(g) = H_k^g(x)$.

Будем предполагать, что для любого $k \in N$ и любой $x \in X$:

$$\hat{D}_x^{\hat{g},k} = \langle c_x^{\hat{g},k}, d_x^{\hat{g},k}, f_x^{\hat{g},k} \rangle,$$

при этом

$$\begin{aligned} \mu_x^{\hat{g},k}(c_x^{\hat{g},k}) = \mu_x^{\hat{g},k}(f_x^{\hat{g},k}) = 0, \quad \mu_x^{\hat{g},k}(d_x^{\hat{g},k}) = 1. \\ \mu_x^{\hat{g},k}(v) = \begin{cases} p_x^{\hat{g},k}(v), & \text{если } c_x^{\hat{g},k} \leq v < d_x^{\hat{g},k}, \\ r_x^{\hat{g},k}, & \text{если } d_x^{\hat{g},k} \leq v \leq f_x^{\hat{g},k}, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

функции $p_x^{\hat{g},k}$ в (4.3) предполагаются строго возрастающими, а функции $r_x^{\hat{g},k}$ — строго убывающими для любой игры, любого игрока и любой ситуации.

Отметим, что равенство $\mu_x^{\hat{g},k} = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, кроме случая, когда $\alpha = 1$, имеет два решения — одно больше $d_x^{\hat{g},k}$, другое меньше $d_x^{\hat{g},k}$.

Отталкиваясь от понятия «ситуация равновесия по Нэшу», под решением игры будем понимать ситуацию, которая с максимальной надежностью является ситуацией равновесия по Нэшу.

Рассмотрим нечеткую игру \hat{g} и ее функцию принадлежности $\mu_{\hat{g}}(g)$.
Опираясь на формулу (1.4), будем исходить из того, что

$$\mu_{\hat{g}}(g) = \min_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x \in X}} \mu_x^{\hat{g},k}(H_k^g(x)).$$

Через g_x будем обозначать игру («четкую»), в которой ситуация x является ситуацией равновесия по Нэшу. Через g_x^{max} обозначим игру g_x , для которой надежность того, что ситуация x является равновесной по Нэшу, максимальна:

$$\mu_{\hat{g}}(g_x^{max}) = \max_{g_x \in G} \mu_{\hat{g}}(g_x). \quad (4.4)$$

Пусть $\mu_{\hat{g}}(g_x^{max}) = u_x$. Величина u_x — это максимальное значение степени надежности того, что ситуация x в рассматриваемой нечеткой игре является ситуацией равновесия по Нэшу. Формула (4.4) следует из определения дизъюнкции в нечеткой логике.

Решением рассматриваемой нечеткой игры \hat{g} будем считать ситуацию x_0 , для которой максимум степени надежности того, что она является ситуацией равновесия по Нэшу, максимален среди всех ситуаций, т. е. x_0 — это такая ситуация, что

$$\mu_{\hat{g}}(g_{x_0}^{max}) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{g}}(g_x^{max}).$$

Заметим, что в соответствии с предлагаемым подходом любая игра имеет решение в чистых стратегиях, чего нельзя сказать о классическом подходе. Следует отметить, что если дана игра с четкими выигрышами, имеющая ситуацию равновесия по Нэшу, то рассматривая ее как игру с нечеткими выигрышами, носителями которых являются моды, в качестве решения получим эту ситуацию равновесия.

Задача по отысканию указанного решения игры сводится к задачам математического программирования (в случае треугольных нечетких чисел — к задачам линейного программирования [35], [98]), по одной задаче для каждой ситуации.

Рассмотрим нечеткую игру \hat{g} и ситуацию x^0 . Пусть максимум степени надежности того, что ситуация x^0 в рассматриваемой игре является ситуацией равновесия по Нэшу, равен u_0 .

В силу сделанных ранее обозначений игра, на которой реализуется этот максимум, есть игра $g_{x_0}^{\max}$:

$$\mu_{\hat{g}}(g_{x_0}^{\max}) = u_0.$$

Для того чтобы ситуация x^0 являлась ситуацией равновесия по Нэшу, в игре $g \in G$ должны выполняться неравенства

$$H_k^g(x^0) \geq H_k^g(x^0 \| x'_k), k = 1, 2, \dots, n, x'_k \in X_k.$$

Для того чтобы ситуация x являлась ситуацией равновесия по Нэшу с надежностью u , в игре с множеством функций выигрышей, задаваемых нечеткими числами $\hat{D}_x^{\hat{g},k}$, должна найтись такая «четкая» игра g с функциями выигрышей $H_1^g, H_2^g, \dots, H_n^g$, что для нее выполняются следующие неравенства:

$$H_k^g(x) \geq H_k^g(x \| x'_k) \text{ для всех } x'_k \in X_k \text{ и } k = 1, 2, \dots, n,$$

$$u \leq \mu_x^{\hat{g},k}(H_k^g(x)) \text{ для всех } x \in X \text{ и } k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда требование о том, чтобы надежность u_0 того, что ситуация x_0 является ситуацией равновесия по Нэшу, была бы максимальной, эквивалентно требованию о том, что если $u_0 \neq 0$, то u_0 является решением задачи (4.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow \max, \\ u \leq p_{(x_0 \| x'_k)}^{\hat{g},k}(H_k((x_0 \| x'_k))), x'_k \in X_k, (x_0 \| x'_k) \neq x, k = 1, 2, \dots, n, \\ p_{(x_0 \| x'_k)}^{\hat{g},k}(H_k((x_0 \| x'_k))) \leq 1, x'_k \in X_k, (x_0 \| x'_k) \neq x_0, k = 1, 2, \dots, n, \\ u \leq r_{x_0}^{\hat{g},k}(H_k(x_0)), k = 1, 2, \dots, n, \\ r_{x_0}^{\hat{g},k}(H_k(x_0)) \leq 1, k = 1, 2, \dots, n, \\ H_k(x_0) \geq H_k((x_0 \| x'_k)), x'_k \in X_k, k = 1, 2, \dots, n, \\ c_x^{\hat{g},k} \leq H_k(x) \leq f_x^{\hat{g},k}, x = (x_0 \| x'_k), x'_k \in X_k, k = 1, 2, \dots, n, \\ H_k(x) = d_x^{\hat{g},k}, k = 1, 2, \dots, n, x \in X, x \neq x_0, x \neq (x_0 \| x'_k) \text{ при } x'_k \in X_k. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Здесь $H_k(x), x \in X, k = 1, 2, \dots, n$ — неизвестные, являющиеся выигрышами в искомой четкой игре g (являющейся четким значением игры \hat{g} , т. е. такой, что $(g, \mu_{\hat{g}}(g)) \in \hat{g}$).

Обсудим еще один подход к определению решения нечеткой бескоалиционной игры, базирующийся на идеях Заде — Беллмана [9], [34].

Рассмотрим нечеткую задачу математического программирования с нечетким множеством допустимых планов \hat{X} и нечеткой целью, задаваемой нечетким множеством $\hat{\Phi}$. Нечеткие множества \hat{X} и $\hat{\Phi}$ определены на универсальном множестве X (множестве ситуаций в рассматриваемой нечеткой игре) и имеют функции принадлежности $\mu_{\hat{X}}$ и $\mu_{\hat{\Phi}}$ соответственно:

$$\mu_{\hat{X}}(x) = \max_{g \in G_x} \mu_{\hat{g}}(g),$$

где G_x — множество игр из G , в которых ситуация x является ситуацией, равновесной по Нэшу.

Пусть g_x — игра, для которой

$$\mu_{\hat{X}}(x) = \mu_{\hat{g}}(g_x).$$

Положим

$$\mu_{\hat{\Phi}}(x) = f(g_x),$$

где $f(g)$ — степень уверенности в том, что равновесная по Нэшу ситуация в игре g является эффективной, т. е. выигрыши игроков в ситуации, равновесной по Нэшу, в игре g в совокупности «достаточно близки» к их выигрышам в ситуации равновесия, может быть в смешанных стратегиях, в игре g^* , в которой выигрыши равны $d_x^{\hat{g},k}$.

В качестве нечеткого решения предлагается рассматривать нечеткое множество \hat{Sol} на универсальном множестве X с функцией принадлежности $\mu_{\hat{Sol}}$:

$$\mu_{\hat{Sol}}(x) = \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{\Phi}}(x)\}.$$

Пусть y_0 — такая ситуация равновесия в некоторой игре g_0 , что

$$\mu_{\hat{Sol}}(y_0) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{Sol}}(x).$$

В качестве решения рассматриваемой нечеткой игры \hat{g} с учетом идей Заде — Беллмана предлагается рассматривать ситуацию y_0 .

Для нахождения ситуации y_0 для каждой $x \in X$ решим следующую задачу математического программирования:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u \rightarrow \max, \\
 u \leq p_x^{\hat{g},k}(H_k(x||x_k)), x_k \in X_k, (x||x_k) \neq x_0, k=1,2,\dots,n, \\
 p_x^{\hat{g},k}(H_k(x||x_k)) \leq 1, x_k \in X_k, (x||x_k) \neq x_0, k=1,2,\dots,n, \\
 u \leq r_{x'}^{\hat{g},k}(H_k(x')), k=1,2,\dots,n, \\
 r_{x'}^{\hat{g},k}(H_k(x')) \leq 1, k=1,2,\dots,n, \\
 u \leq f(g_{x'}), \\
 f(g_{x'}) \leq 1, \\
 H_k(x') \geq H_k(x||x_k), x_k \in X_k, k=1,2,\dots,n, \\
 c_x^k(\hat{g}) \leq H_k(x) \leq f_{\hat{g}}^k(\hat{g}), x \in X_k, k=1,2,\dots,n.
 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Здесь $H_k(x)$, $x \in X$, $k=1,2,\dots,n$ — выигрыши в некоторой четкой игре.

Решив задачу (4.6) для каждой $x' \in X$, в качестве искомого y_0 возьмем такую ситуацию x' , для которой оптимальное значение целевой функции задачи (4.6) максимально.

Пример 4.9. «Семейный спор». [88], [91]. Супругам надо выбрать, куда пойти вечером. Они могут посетить соревнование по боксу или пойти на балет. Муж заинтересован в посещении бокса значительно в большей степени, чем жена, жена же больше заинтересована в посещении балета. Полезности [90] разных выборов являются нечеткими, они заданы треугольными нечеткими числами $\langle 0, d_x^k, 1 \rangle$, моды которых d_x^k указаны в таблице 4.17.

Таблица 4.17. Моды нечетких выигрышей в игре «Семейный спор»

Выбор жены	Выбор мужа	
	Бокс (b_1)	Балет (b_2)
Бокс (a_1)	(0,2; 0,9)	(0,3; 0,2)
Балет (a_2)	(0,3;0,2)	(0,8; 0,1)

Таким образом, мы получаем бескоалиционную игру \hat{g} двух игроков: жена — первый игрок, муж — второй.

В игре с выигрышами из таблицы 4.17 имеется одна ситуация равновесия по Нэшу — ситуация (2,1).

1. Будем искать ситуацию y_0 , для которой максимум степени надежности того, что она является ситуацией равновесия по Нэшу, максимален среди всех ситуаций.

Рассмотрим ситуацию (1,1).

Решим для нее задачу (4.5), которая принимает вид:

$$\begin{cases}
 u \rightarrow \max, \\
 0,8u + H_{(1,1)}^1 \leq 1, \\
 0,3u - H_{(2,1)}^1 \leq 0, \\
 0,1u + H_{(1,1)}^2 \leq 1 \\
 0,2u - H_{12}^2 \leq 0, \\
 u \leq 1, \\
 H_{(1,1)}^1 - H_{(2,1)}^1 \geq 0, \\
 H_{(1,1)}^2 - H_{(1,2)}^2 \geq 0, \\
 H_{(1,1)}^1 \geq 0, \\
 H_{(2,1)}^1 \leq 0,3, \\
 H_{(1,1)}^2 \geq 0,9, \\
 H_{(1,2)}^2 \leq 0,2, \\
 u \geq 0, H_{(1,1)}^1 \geq 0, H_{(1,1)}^2 \geq 0, H_{(2,1)}^1 \geq 0, H_{(1,2)}^2 \geq 0, \\
 H_{(1,1)}^1 \leq 1, H_{(1,1)}^2 \leq 1, H_{(2,1)}^1 \leq 1, H_{(1,2)}^2 \leq 1.
 \end{cases} \quad (4.7)$$

Оказывается, что в оптимальном плане задачи (4.7):

$$u = 0,909, H_{(1,1)}^1 = 0,272, H_{(1,1)}^2 = 0,9, H_{(1,2)}^2 = 0,2, H_{(2,1)}^1 = 0,272.$$

Игра $g_{(1,1)}^{\max}$ может иметь следующую матрицу выигрышей:

$$\begin{pmatrix}
 0,272; 0,9 & 0,3; 0,2 \\
 0,272; 0,2 & 0,8; 0,1
 \end{pmatrix}, \mu_{\hat{X}}(1,1) = 0,909.$$

Аналогично находим, что

$$\mu_{\hat{X}}(1,2) = 0,588, \mu_{\hat{X}}(2,1) = 1, \mu_{\hat{X}}(2,2) = 0,909.$$

Итак, с максимальной надежностью, равной 1, равновесной по Нэшу ситуацией является ситуация (2,1), что и было сразу очевидно из анализа рассматриваемой игры.

Учтем нечеткую цель, заданную формулой

$$\mu_{\hat{\Phi}}(x) = f(g_x^{\max}) = \begin{cases} \min_{k=1,2} \frac{H_k^{g_x^{\max}}(x)}{w_k^*}, & \text{если } H_k^{g_x^{\max}} \leq w_k^*, \\ 1, & \text{если } H_k^{g_x^{\max}} > w_k^*, \end{cases}$$

где w_k^* — выигрыш игрока k в ситуации равновесия в игре g^* .

Получаем:

$$\mu_{\hat{\Phi}}(1,1) = 0,907, \mu_{\hat{\Phi}}(1,2) = 1, \mu_{\hat{\Phi}}(2,1) = 1, \mu_{\hat{\Phi}}(2,2) = 0,905.$$

Рассмотрим нечеткое решение — нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{\hat{Sol}}(x) = \min \{ \mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{\Phi}}(x) \}.$$

Для $g = g_k^{\max}$ получаем, что

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{Sol}}(g_k^{\max}) &= \min \{ \mu_{\hat{X}}(g_k^{\max}), \mu_{\hat{\Phi}}(g_k^{\max}) \}, \\ \mu_{\hat{X}}(1,1) &= 0,909, \\ \mu_{\hat{X}}(1,2) &= 0,588, \\ \mu_{\hat{X}}(2,1) &= 1, \\ \mu_{\hat{X}}(2,2) &= 0,909. \end{aligned}$$

Оптимальной является ситуация (2,1). Вариант возможной игры совпадает с представленным в таблице 4.17.

Оказалось, что при исходных данных из таблицы 4.17 супруги не готовы жертвовать своими интересами, муж предпочитает идти на бокс, жена — на балет.



Глава 5. НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Историческая справка

Основной задачей теории управления является задача отыскания устойчивых управлений. Процесс управления протекает во времени (или зависит от какого-то иного параметра), при этом управленческие решения могут приниматься в любой момент времени (непрерывные задачи) или в дискретные моменты (многоэтапные задачи).

Один из первых вопросов, с которым сталкиваются при разработке динамического объекта, — это выбор программы движения, при этом термин «движение» воспринимается предельно широко. Под движением можно понимать не только собственно механическое движение, но и вообще любое изменение или развитие. Отметим, что параметром, от которого зависит это движение (развитие), не обязательно должно быть время.

Пример 5.1. Рассмотрим прямолинейное движение автомобиля. В каждый момент времени состояние автомобиля характеризуется двумя числами: пройденным расстоянием s и скоростью движения v . Эти две величины изменяются с течением времени не самопроизвольно, а согласно воле водителя, который может управлять работой двигателя, изменяя развиваемую им силу p . Таким образом, имеются три связанных между собой параметра: s, v, p .

Величины, характеризующие состояние объекта, называются *фазовыми координатами*; величины, описывающие управленческие воздействия, называются *управляющими параметрами*.

В только что рассмотренном примере s, v — это фазовые координаты, p — управляющий параметр.

Пример 5.2. Если рассматривать движение автомобиля не по прямой, а на плоскости, то фазовых координат будет четыре (проекция положения и проекция скорости), а управляющих параметров — два: сила тяги двигателя и угол поворота руля.

Заметим, что в рассмотренных примерах аргумент (время) изменяется непрерывно, и для решения, например, задачи по отысканию управления, которое обеспечило бы переезд автомобиля из пункта A в пункт B (скажем, за минимальное время), надо использовать методы, предложенные школой

Понтрягина [99]. Эти примеры делают естественным следующее описание управляемого объекта.

Имеется некоторый объект, находящийся в движении (развитии). Состояние объекта в каждый момент времени задается значениями его фазовых координат $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ в этот момент. Движение объекта заключается в том, что его состояние с течением времени изменяется, т. е. фазовые координаты объекта являются функциями времени. Это движение происходит под воздействием управляющих параметров $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$, тоже являющихся функциями времени. Эти функции человек (другой орган управления), принимающий решение, выбирает по своему желанию (возможно, в некоторых пределах). Фазовое состояние $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ объекта в момент времени t зависит от его фазового состояния в начальный момент t_0 и значений управляющих параметров $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ в моменты времени от t_0 до t и, может быть, от влияния еще каких-то внешних факторов (параметров).

Если их нет или они имеют детерминированный характер, то мы имеем задачу управления детерминированным объектом (детерминированную систему управления); если эти факторы носят вероятностный характер, то получаем вероятностную систему управления; в случае же когда влияние внешних факторов носит нечеткий характер, получаем нечеткую систему управления.

Рассматривая значения управляющих параметров как функции времени, мы будем называть их **управляющими функциями**. В детерминированных системах управления предполагается, что, зная фазовое состояние объекта в начальный момент времени t_0 и значения управляющих параметров $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, мы можем однозначно определить фазовое состояние объекта в момент времени t_1 .

Каждое **фазовое состояние** $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является точкой, которая называется **фазовой точкой**, n -мерного пространства с координатами x_1, x_2, \dots, x_n , которое называется **фазовым пространством**.

Чтобы полностью задать движение объекта, надо задать его фазовое состояние в начальный момент времени t_0 и выбрать управляющие функции $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$, т. е. выбрать векторную функцию $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$. Эту векторную функцию мы будем называть **управлением**.

Движение объекта заключается в том, что фазовая точка $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, изображающая фазовое состояние объекта в фазовом пространстве, с течением времени перемещается в этом пространстве, описывая некоторую кривую, называемую **фазовой траекторией**. На рисунке 5.1 изображена фазовая траектория, получающаяся при движении автомобиля (см. пример 5.1) из пункта A в пункт B .

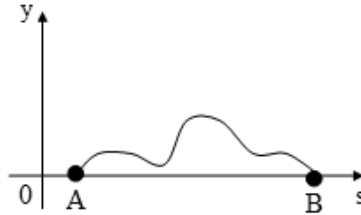


Рис. 5.1. Пример фазовой траектории

Пара векторных функций $(x(t), u(t))$ называется **процессом управления**.

Таким образом, чтобы решить задачу управления динамическим объектом, надо знать механизм определения фазового состояния объекта в следующие моменты времени по его текущему фазовому состоянию и управлению, ограничения, которым должны удовлетворять допустимые управления и фазовые состояния, начальные и конечные условия.

Приведем общую формулировку задачи управления для детерминированной системы управления: определить процесс управления $(x(t), u(t))$ при механизме движения, описываемом с помощью дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)), \quad (5.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, или с помощью разностных уравнений:

$$x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k) = f_i(x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k); u_1(t_k), u_2(t_k), \dots, u_m(t_k)), \quad (5.2)$$

где $i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, N$ (здесь N — число моментов времени, в которые возможно принятие управленческих решений), удовлетворяющий ограничениям вдоль траектории:

$$(x(t), u(t)) \in G, \quad (5.3)$$

начальным и конечным условиям:

$$x(t_0) \in E_0, x(t_1) \in E_1. \quad (5.4)$$

Отметим, что уравнения (5.1) или (5.2) есть уравнения движения, позволяющие по заданному начальному фазовому состоянию и управлению

найти фазовую траекторию. Смысл ограничений (5.3) состоит в том, что, вообще говоря, не любые фазовые состояния и управления возможны.

Для решения задач управления нечеткими системами управления в настоящее время достаточно успешно используется нечеткая логика (см. главу 1). При этом механизм движения описывается с помощью базы знаний, с помощью системы правил, в простейшем случае имеющих вид: если A , то B .

В настоящее время теория нечетких множеств широко применяется для решения задач управления сложными техническими системами. На ее основе получены решения большого числа задач анализа и управления. Системы, основанные на нечетких множествах, разработаны и успешно внедрены в таких областях, как: управление технологическими процессами, управление транспортом, медицинская диагностика, техническая диагностика, финансовый менеджмент, биржевое прогнозирование, распознавание образов. Практический опыт разработки систем нечеткого логического вывода свидетельствует, что сроки и стоимость их проектирования значительно меньше, чем при использовании традиционного математического аппарата, при этом обеспечивается требуемый уровень «помехоустойчивости и прозрачности моделей» [32]. О широком применении теории нечетких множеств речь идет, например, в [8], [29], [100]. Эта теория позволяет решать задачи управления в ситуациях, когда традиционные методы неэффективны или вообще неприемлемы по причине недостатка точной информации об объекте исследования.

Сейчас теория нечетких множеств является развитым научным направлением, на ее основе получены решения большого числа задач анализа и управления (см. [100]): автомобильным транспортом [56], системами коммуникации [101], [102], химическими реакторами [103]–[106], электрическими двигателями [107], [108], процессами сварки [109], [110], установками для очищения воды [111], холодильными агрегатами [112], [113], вентиляторами и кондиционерами [114], [115], нагревательными приборами [116], печами для сжигания мусора [117]–[119] и плавки стекла [120], [121], металлообрабатывающими станками [122], бойлерами [123], аккумуляторными агрегатами [124].

Расширяется использование теории нечетких множеств в экономике и управлении предприятиями. Об этом свидетельствует интенсивный рост в этой области исследований числа журнальных публикаций, появление монографий обобщающего характера [125]–[128] и специализированных журналов.

В практических приложениях наиболее активно используется алгоритм Мамдани, поэтому в данной главе мы рассмотрим несколько примеров

применения именно этого алгоритма для решения некоторых задач управления техническими системами. Напомним, что схема применения алгоритма Мамдани была рассмотрена в первой главе.

5.2. Управление смесителем воды

Начнем с простейшего примера — со случая, когда имеются одна входная переменная (один параметр) и одна выходная переменная (один показатель).

Пример 5.3. «Смеситель воды». Похожий пример рассмотрен в [8]. При работе душа используются холодная и горячая вода, подаваемая через смеситель. Наиболее комфортными условиями для человека, пользующегося душем, является вода с температурой в заданных пределах. Как показывает практика, температура воды в душе колеблется, не оставаясь постоянной. Требуется создать систему управления ручкой смесителя, обеспечивающую комфортные условия пользования душем. Поворот ручки вправо ведет к увеличению температуры поступающей воды, поворот влево — к уменьшению. Определить, на какой угол надо повернуть ручку, если текущая температура воды равна 55°C .

В качестве входной переменной (параметра) рассмотрим лингвистическую переменную «температура воды» с термами «горячая», «не очень горячая», «теплая», «не очень холодная», «холодная», формализуемыми нечеткими треугольными и трапецидальными числами, определенными на универсальном множестве различных значений температур — на интервале $[0^{\circ}\text{C}, 70^{\circ}\text{C}]$ (по нормативам на 2018 г.), графики функций принадлежности представлены на рисунке 5.2.

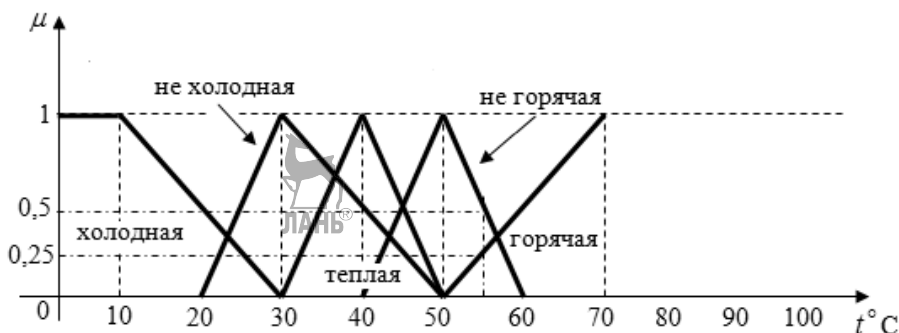


Рис. 5.2. Графики функций принадлежности термов лингвистической переменной «температура воды»

В качестве выходной переменной (в качестве показателя) рассмотрим лингвистическую переменную «ручка» с термами «влево», «немного влево», «не трогать», «немного вправо», «вправо», которые формализуются нечеткими треугольными числами, определенными на универсальном множестве мыслимых значений углов поворота ручки — на интервале $[-70^\circ; +70^\circ]$, их графики функций принадлежности представлены на рисунке 5.3. Угол поворота ручки будем обозначать буквой φ . Уменьшение градуса поворота ручки (порот влево) приводит к понижению температуры вытекающей воды.

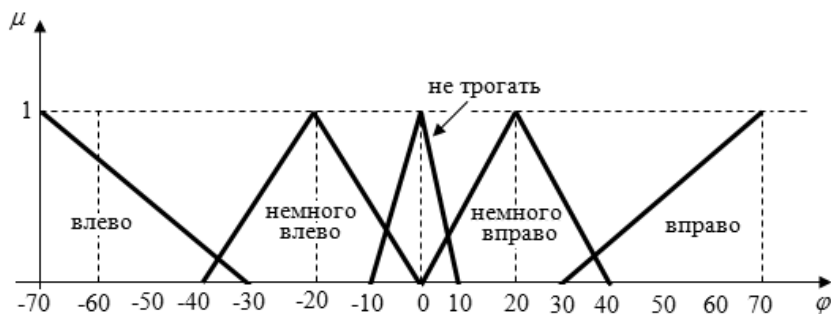


Рис. 5.3. Графики функций принадлежности термов лингвистической переменной «ручка»

Будем исходить из того, что пользователь руководствуется следующими правилами.

1. Если вода горячая, то повернуть ручку смесителя влево.
2. Если вода не горячая, то повернуть ручку немного влево.
3. Если вода теплая, то ручку не трогать.
4. Если вода не холодная, то повернуть ручку немного вправо.
5. Если вода холодная, то повернуть ручку вправо.

Введем обозначения:

A — лингвистическая переменная «температура воды»;

B — лингвистическая переменная «ручка».

Термы «холодная», «не холодная», «теплая», «не горячая», «горячая», будем обозначать соответственно A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

Термы «влево», «немного влево», «не трогать», «немного вправо», «вправо» будем обозначать соответственно B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 .

Для удобства сформируем базу знаний (таблицу нечетких правил) (табл. 5.1).

Запись, к примеру, B_2 в этой таблице означает следующее правило: «Если вода не горячая, то повернуть ручку немного влево».

Таблица 5.1. База знаний

Температура воды (A)	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
Ручка (B)	B ₅	B ₄	B ₃	B ₂	B ₁

Функции принадлежности термов $A_i, i=1,2,3,4,5$, будем обозначать μ_{A_i} , термов $B_j, j=1,2,3,4,5$ — μ_{B_j} .

Имеем:

$$\mu_{A_1}(55) = 0, \mu_{A_2}(55) = 0, \mu_{A_3}(55) = 0, \mu_{A_4}(55) = 0,50, \mu_{A_5}(55) = 0,25,$$

тогда

$$\mu_{B_1}(55) = 0,25, \mu_{B_2}(55) = 0,50, \mu_{B_3}(55) = 0, \mu_{B_4}(55) = 0, \mu_{B_5}(55) = 0.$$

Укажем значения функций принадлежности (с графика на рис. 5.3) термов B_1 и B_2 при значениях аргумента, изменяющихся с шагом 10°C. Результаты приведены в таблице 5.2. Рассматриваем только термы B_1 и B_2 , так как значения функций принадлежности для остальных термов равны нулю.

Таблица 5.2. Значения функций принадлежности термов B_4 и B_5

φ	-70	-60	-50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70
$\mu_{B_1}(\varphi)$	1	0,75	0,50	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{B_2}(\varphi)$	0	0	0	0	0,50	1	0,50	0	0	0	0	0	0	0	0

Определим значение переменной «ручка» при условии, что текущее значение температуры воды равно 55°C.

Введем два обозначения.

Через $\mu_{ij}(t, \varphi)$ обозначим функцию принадлежности нечеткого высказывания [(значение терма A_i равно t) И (значение терма B_j равно φ)],

тогда

$$\mu_{ij}(t, \varphi) = \min\{\mu_{A_i}(t), \mu_{B_j}(\varphi)\};$$

значения функций $\mu_{ij}(t, \varphi)$ для двух рассматриваемых ситуаций (для термов B_1 и B_2) указаны в двух верхних строках таблицы 5.3.

Таблица 5.3. Значения искомых функций принадлежности

φ	-70	-60	-50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70
$\mu_{51}(55, \varphi)$	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{42}(55, \varphi)$	0	0	0	0	0,50	0,50	0,50	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_B(55, \varphi)$	0,25	0,25	0,25	0,25	0,50	0,50	0,50	0	0	0	0	0	0	0	0

Через $\mu_B(t, \varphi)$ обозначим функцию принадлежности лингвистической переменной «ручка» при условии, что значением переменной «температура воды» является значение температуры, равное t :

$$\mu_B(t, \varphi) = \max_{(i,j)} \mu_{ij}(t, \varphi).$$

Значения этой функции указаны в нижней строке таблицы 5.3, они равны максимальному числу из чисел соответствующей графы.

Первая и последняя строки таблицы 5.3 задают функцию принадлежности нечеткого множества «угол поворота ручки при условии, что $t = 55^\circ\text{C}$ ».

Дефаззификация этого нечеткого множества, дает

$$\frac{-(0,25 \cdot (70 + 60 + 50 + 40) + 0,50 \cdot (30 + 20 + 10))}{0,25 \cdot 4 + 0,50 \cdot 3 + 0 \cdot 8} + \frac{0 \cdot (0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70)}{0,25 \cdot 4 + 0,50 \cdot 3 + 0 \cdot 8} = \frac{-85}{2,5} = -34.$$

Следовательно, ручку надо повернуть на 34° влево.

Для практического использования этого подхода необходимо организовать периодическое измерение температуры воды и, получив результат замера по приведенной схеме, определить угол поворота ручки и повернуть ее на этот угол. В конце концов получим воду нужной температуры. Понятно, что для ускорения получения желаемого результата надо уменьшать интервал времени между замерами.

5.3. Управление мобильным роботом

В настоящее время актуальной стала задача автоматического управления робототехническими системами. Рассмотрим процесс управления мобильным роботом и одну из встречающихся при этом задач: движущемуся с постоянной скоростью роботу необходимо обойти встречающееся на пути препятствие. Постановка такой задачи дается, например, в [129], [130], пример ее решения приводится в [131].

Введем две входные лингвистические переменные:

- «дистанция» (расстояние d до помехи) с термами «далеко», «средне», «близко», «очень близко» (рис. 5.4);
- «направление» (угол φ между продольной осью робота и направлением на помеху) с термами «слева», «прямо», «справа» (рис. 5.5).

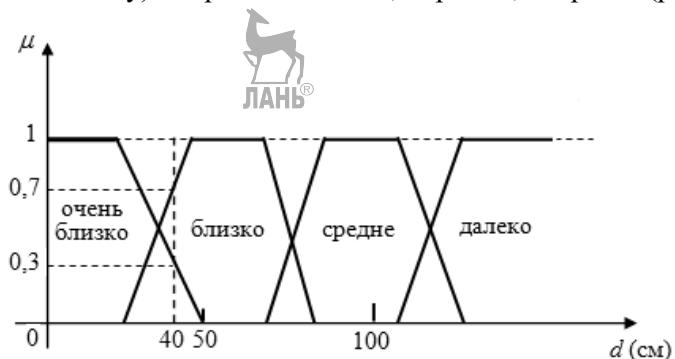


Рис. 5.4. Функции принадлежности термов переменной «дистанция»

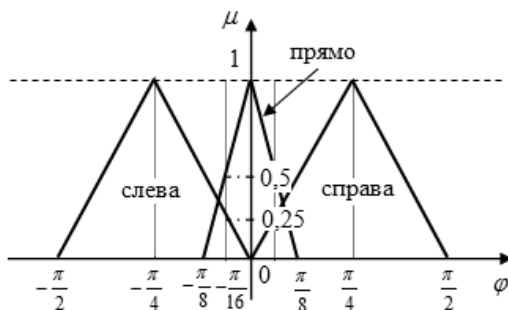


Рис. 5.5. Функции принадлежности термов переменной «направление»

Выходная переменная — «рулевой угол» (угол поворота руля) ψ с термами «резко влево», «влево», «прямо», «вправо», «резко вправо» (рис. 5.6).

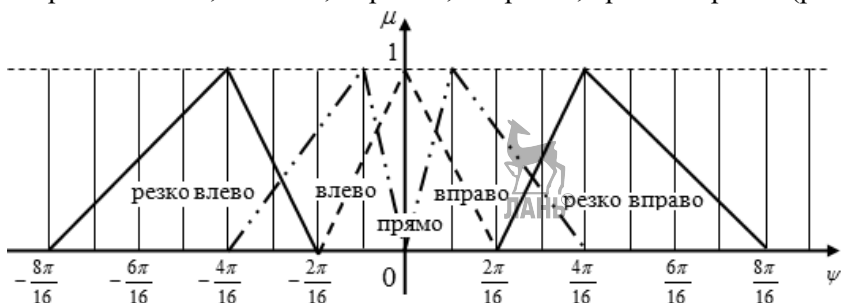


Рис. 5.6. Функции принадлежности термов выходной переменной

Зададим нечеткую базу знаний для рассматриваемого примера с помощью таблицы 5.4. Каждая запись в этой таблице соответствует своему нечеткому правилу, например:

ЕСЛИ «дистанция»=«близко» И «направление»=«справа», ТО «рулевой угол»=«влево».

Таблица 5.4. Таблица нечетких правил (база знаний)

Направление	Дистанция			
	Очень близко	Близко	Средне	Далеко
Справа	Влево	Влево	Прямо	Прямо
Прямо	Резко влево (резко вправо)	Влево (вправо)	Влево (вправо)	Прямо
Слева	Вправо	Вправо	Прямо	Прямо

Таким образом, мобильный робот с нечеткой логикой будет работать по следующему принципу: данные с сенсоров о расстоянии до помехи и направлении на нее будут фаззифицированы, обработаны согласно табличным правилам, дефаззифицированы и полученные данные в виде управляющих сигналов поступят на привод робота.

Пусть с сенсоров получены следующие данные: «дистанция» = 40 см, «направление» = $-\frac{\pi}{16}$.

Решение. Обозначения:

A — «направление», B — «дистанция», C — «рулевой угол»;

A_1 — «справа», A_2 — «прямо», A_3 — «слева»;

B_1 — «очень близко», B_2 — «близко», B_3 — «средне», B_4 — «далеко»;

D_1 — «резко влево», D_2 — «влево», D_3 — «прямо», D_4 — «вправо»,
 D_5 — «резко вправо»;

$E_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$ — нечеткое высказывание (ситуация)

[«направление» равно A_i и «дистанция» равна B_j] (табл. 5.5).

Таблица 5.5. Таблица нечетких правил в принятых обозначениях

Направление	Дистанция			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}
A_2	E_{21}	E_{22}	E_{23}	E_{24}
A_3	E_{31}	E_{32}	E_{33}	E_{34}

Функцию принадлежности этого нечеткого высказывания при заданных значениях φ и d входных переменных обозначим $\mu_{E_{ij}}(\varphi, d)$.

Обозначим $\mu_{A_i}(\varphi)$ — значение функции принадлежности нечеткого множества, формализующего терм A_i лингвистической переменной «направление» при ее значении, равном φ . Аналогично $\mu_{B_j}(d)$.

Имеем (рис. 5.4):

$$\mu_{B_1}(40) = 0,30, \mu_{B_2}(40) = 0,70, \mu_{B_3}(40) = 0,00, \mu_{B_4}(40) = 0,00.$$

Анализируя рисунок 5.5, видим, что

$$\mu_{A_1}\left(-\frac{\pi}{16}\right) = 0,00, \mu_{A_2}\left(-\frac{\pi}{16}\right) = 0,50, \mu_{A_3}\left(-\frac{\pi}{16}\right) = 0,25.$$

Из определения нечеткой логической операции И (формула (1.4)) следует, что

$$\mu_{E_{ij}}(\varphi, d) = \min\{\mu_{A_i}(\varphi), \mu_{B_j}(d)\}$$

В таблице 5.6 указаны значения функций принадлежности $\mu_{E_{ij}}(\varphi, d)$ при $\varphi = -\frac{\pi}{16}$ и $d = 40$ см.

Таблица 5.6. Значения функции принадлежности $\mu_{E_{ij}}\left(-\frac{\pi}{16}, 40\right)$

	$\mu_{B_j}\left(-\frac{\pi}{16}\right)$	B_1	B_2	B_3	B_4
$\mu_{A_i}(40)$		0,3	0,7	0	0
A_1	0	0	0	0	0
A_2	0,5	0,3	0,5	0	0
A_3	0,25	0,25	0,25	0	0

Из таблицы 5.6 следует, что рассматривать можно только четыре ситуации: $A_2 - B_1$, $A_2 - B_2$, $A_3 - B_1$, $A_3 - B_2$. В принятых обозначениях это соответственно $E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}$. Они означают: резко влево (резко вправо), влево (вправо), вправо, вправо. Так как преграда находится слева, то из двух возможностей в ситуациях E_{21}, E_{22} будем использовать повороты вправо. Ситуации E_{21} соответствует терм D_5 лингвистической переменной «рулевой угол», ситуации E_{22} соответствует терм D_4 , ситуации E_{31} — терм D_4 , ситуации E_{32} — D_4 .

В ситуациях E_{22}, E_{31}, E_{32} выходной терм один и тот же — D_4 . В соответствии с формулой (1.5), степень принадлежности $\mu_{D_4}\left(-\frac{\pi}{16}, 40\right)$ входного вектора $\left(-\frac{\pi}{16}, 40\right)$ выходному терму D_4 равна максимальному из значений истинности нечетких высказываний E_{22}, E_{31}, E_{32} , т. е. (см. табл. 5.6)

$$\mu_{D_4}\left(-\frac{\pi}{16}, 40\right) = \max\{0,5, 0,25, 0,25\} = 0,5.$$

Этот максимум достигается для ситуации E_{22} , поэтому в дальнейшем из трех ситуаций E_{22}, E_{31}, E_{32} достаточно рассматривать только ситуацию E_{22} . Следовательно, нас интересуют только две ситуации E_{21} и E_{22} .

Осталось определить угол поворота руля. Находить этот угол будем приближенно. Для этого будем менять угол поворота руля от 0 до $\frac{\pi}{2}$ с шагом $\frac{\pi}{16}$. Напомним, что угол поворота руля мы обозначили буквой ψ . Обозначим функцию принадлежности терма D_k , $k = 1, 2, 3, 4, 5$, лингвистической переменной «рулевой угол» через $\mu_{D_k}(\psi)$.

Результаты вычислений сведены в таблицы 5.7 и 5.8.

Таблица 5.7 заполнена на основании графиков функций принадлежности термов выходной переменной (рис. 5.6).

Таблица 5.7. Значения функций принадлежности $\mu_{D_k}(\psi)$ (степень уверенности в том, что, приняв решение D_k , следует повернуть на угол ψ)

ψ	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$8\frac{\pi}{16}$
$\mu_{D_5}(\psi)$	0	0	0	0,5	1	0,75	0,5	0,25	0
$\mu_{D_4}(\psi)$	0	1	0,67	0,33	0	0	0	0	0

Введем еще два обозначения.

Через $\mu_{ijk}(\varphi, d, \psi)$ обозначим функцию принадлежности нечеткого высказывания [(значение терма A_i равно φ) И (значение терма B_j равно d) И (значение терма D_k равно ψ)], тогда

$$\mu_{ijk}(\varphi, d, \psi) = \min\{\mu_{A_i}(\varphi), \mu_{B_j}(d), \mu_{D_k}(\psi)\}.$$

Значения функции $\mu_{ijk}(\varphi, d, \psi)$ для двух рассматриваемых ситуаций указаны во второй и третьей строках таблицы 5.8.

Таблица 5.8. Значения функции принадлежности $\mu_{ijk}(\varphi, d, \psi)$

ψ	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{2\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{4\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{6\pi}{16}$	$\frac{7\pi}{16}$	$8\frac{\pi}{16}$
$\mu_{224}\left(-\frac{\pi}{16}, 40, \psi\right)$	0,00	0,50	0,50	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\mu_{215}\left(-\frac{\pi}{16}, 40, \psi\right)$	0,00	0,00	0,00	0,30	0,30	0,30	0,30	0,25	0,00
$\mu_D\left(-\frac{\pi}{16}, 40, \psi\right)$	0,00	0,50	0,50	0,33	0,30	0,30	0,30	0,25	0,00

Через $\mu_D(\varphi, d, \psi)$ обозначим функцию принадлежности лингвистической переменной «рулевой угол» при условии, что значением лингвистической переменной «направление» является угол, равный φ , а значением лингвистической переменной «дистанция» является расстояние, равное d :

$$\mu_D(\varphi, d, \psi) = \max_{(i,j,k)} \mu_{ijk}(\varphi, d, \psi).$$

Значения этой функции указаны в четвертой строке таблицы 5.8, они равны максимальному числу из чисел соответствующей графы.

Первая и четвертая строки таблицы 5.8 задают функцию принадлежности нечеткого множества:

$$\text{«рулевой угол при условии, что } \varphi = -\frac{\pi}{16} \text{ и } d = 40\text{»}.$$

Осталось осуществить дефаззификацию этого нечеткого множества, т. е. преобразовать его в четкое число (определить, на какой же все-таки угол надо повернуть). Дефаззификация по методу «центр тяжести» дает:

$$\frac{0 \cdot 0 + \frac{\pi}{16} \cdot 0,50 + \frac{2\pi}{16} \cdot 0,50 + \frac{3\pi}{16} \cdot 0,33 + \frac{4\pi}{16} \cdot 0,30 + \frac{5\pi}{16} \cdot 0,30 + \frac{6\pi}{16} \cdot 0,30 + \frac{7\pi}{16} \cdot 0,25 + \frac{8\pi}{16} \cdot 0}{0 + 0,50 + 0,50 + 0,33 + 0,30 + 0,30 + 0,30 + 0,25 + 0} =$$

$$= \frac{8,75}{2,48} \cdot \frac{\pi}{16} \cong 3,53 \cdot \frac{\pi}{16}.$$

Следовательно, повернуть надо на угол $3,53 \cdot \frac{\pi}{16}$.

5.4. Парковка автомобиля

Быстрое развитие науки и техники ставят на повестку дня создание автоматических систем управления различными подсистемами автомобиля, автоматизацию различных режимов движения транспорта на дорогах и, наконец, создание системы управления автомобилем в целом.

В настоящее время разрабатываются (и уже разработаны) автоматические системы парковки автомобиля, его движением в пробках, имеются, правда пока еще на уровне опытных образцов, системы, осуществляющие движение автомобиля по дорогам (при соблюдении некоторых условий) в автоматическом режиме [132].

Рассмотрим процесс парковки автомобиля и алгоритм ее реализации (упоминается в [132]), построенный на основе приемов нечеткого логического вывода.

Будем считать, что нам необходимо, чтобы по окончании парковки автомобиль оказался в заданном месте с нулевой скоростью, т. е. чтобы его фазовым состоянием оказалась бы точка A фазового пространства с координатами $a, b, 0$, где a, b — координаты точки, в которой автомобиль должен оказаться в результате парковки, 0 — значение его скорости в момент окончания процесса парковки. Предполагается, что никаких помех рассматриваемому процессу нет. Автомобиль движется передним ходом и подъехать к заданной точке должен передом. Предполагается, что начальное состояние автомобиля (его положение и скорость) позволяет осуществить рассматриваемый маневр. Поскольку рассматриваемые скорости и возможные углы поворота руля достаточно малы, то предполагается, что решения об изменении скорости и угла поворота руля принимаются независимо одно от другого. Для простоты будем исходить из того, что в начальный момент автомобиль располагался относительно точки парковки так, как это показано на рисунке 5.7.

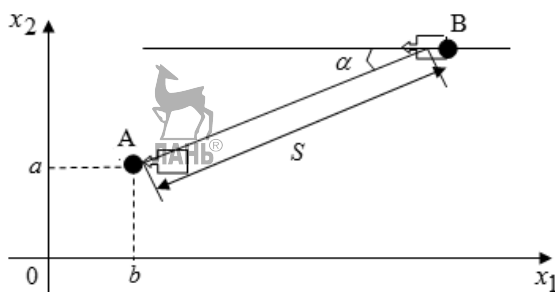


Рис. 5.7. Точка парковки и начальное положение автомобиля

Для построения требуемого алгоритма прежде всего введем необходимые лингвистические переменные — три входные и две выходные.

Входные переменные:

s — расстояние от автомобиля до точки парковки с термами «нуль», «малое», «среднее», «большое». Универсальным множеством, на котором заданы нечеткие множества, формализующие эти термы, является интервал от нуля до 10 м. Графики функций принадлежности этих нечетких множеств приведены на рисунке 5.8;

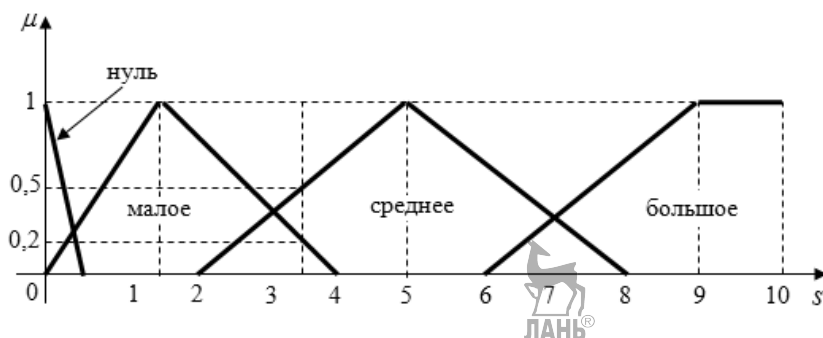


Рис. 5.8. Графики функций принадлежности термов переменной s

α — угол между текущим направлением движения автомобиля и направлением на точку парковки с термами «малый», «средний», «большой». Универсальным множеством, на котором заданы нечеткие множества, формализующие эти термы, является интервал от нуля до 20° . Графики функций принадлежности этих нечетких множеств приведены на рисунке 5.9;

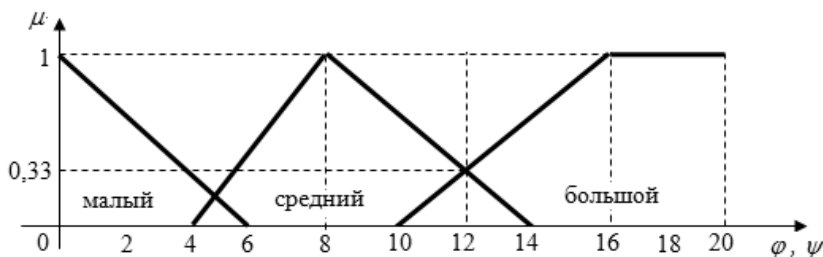


Рис. 5.9. Графики функций принадлежности термов переменных φ и ψ

v_{ex} — текущая скорость автомобиля с термами «нуль», «малая», «средняя», «большая». Универсальным множеством, на котором заданы нечеткие множества, формализующие эти термы, является интервал от нуля до 5 м/с. Графики функций принадлежности этих нечетких множеств приведены на рисунке 5.10.

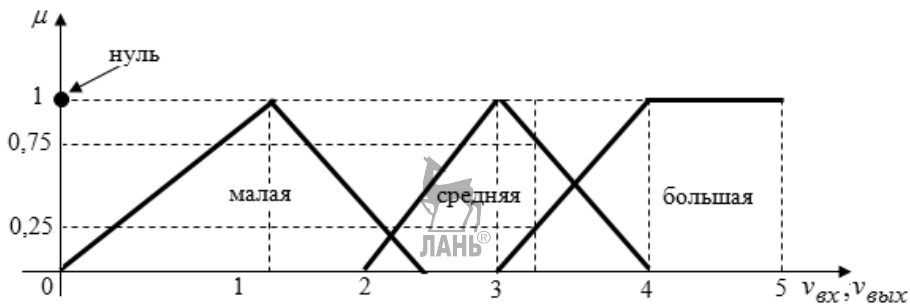


Рис. 5.10. Графики функций принадлежности термов переменных $v_{вх}$ и $v_{вых}$

Выходные переменные:

$v_{вых}$ — скорость автомобиля через время Δt после принятия очередного управленческого решения с такими же термами, как и для $v_{вх}$;

ψ — угол поворота руля относительно нейтрального положения с термами такими же, как и у переменной φ .

Управление процессом парковки осуществляется в дискретные моменты времени с интервалом Δt .

Будем обозначать термы «нуль», «малое», «среднее», «большое» лингвистической переменной s через A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно. Термы «малый», «средний», «большой» лингвистической переменной φ обозначим через B_1, B_2, B_3 . Термы «нуль», «малая», «средняя», «большая» лингвистической переменной $v_{вх}$ — через C_1, C_2, C_3, C_4 соответственно. Термы «нуль», «малая», «средняя», «большая» лингвистической переменной $v_{вых}$ — через D_1, D_2, D_3, D_4 . Термы «малый», «средний», «большой» лингвистической переменной ψ — через E_1, E_2, E_3 . Обозначать функции принадлежности соответствующих нечетких множеств будем μ_G , где G — один из перечисленных термов.

Зададим нечеткую базу знаний. В предыдущем примере мы задавали ее с помощью таблицы (табл. 5.4), но теперь нам потребовалась бы трехмерная таблица. К тому же теперь у нас две выходные переменные. Поэтому мы для каждого значения лингвистической переменной φ (угол между текущим направлением движения автомобиля и направлением на точку парковки) построим свою нечеткую базу знаний для каждой из выходных переменных с помощью обычной двумерной таблицы. Таким образом, нечеткая база знаний для рассматриваемого примера будет содержать по три таблицы для каждой из

выходных лингвистических переменных — таблицы 5.9: $B_1v_{вых}$, $B_2v_{вых}$, $B_3v_{вых}$, $B_1\psi$, $B_2\psi$, $B_3\psi$.

Таблица 5.9. $B_1v_{вых}$.

Таблица нечетких правил для выходной переменной $v_{вых}$ (φ = «малый»)

Расстояние (s)	Скорость ($v_{вх}$)			
	Нуль (C_1)	Малая (C_2)	Средняя (C_3)	Большая (C_4)
Нуль (A_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)
Малое (A_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)
Среднее (A_3)	Малая (D_2)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)
Большое (A_4)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)

Таблица 5.9. $B_2v_{вых}$.

Таблица нечетких правил для выходной переменной $v_{вых}$ (φ = «средний»)

Расстояние (s)	Скорость ($v_{вх}$)			
	Нуль (C_1)	Малая (C_2)	Средняя (C_3)	Большая (C_4)
Нуль (A_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)
Малое (A_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)
Среднее (A_3)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)
Большое (A_4)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)

Таблица 5.9. $B_3v_{вых}$.

Таблица нечетких правил для выходной переменной $v_{вых}$ (φ = «большой»)

Расстояние (s)	Скорость ($v_{вх}$)			
	Нуль (C_1)	Малая (C_2)	Средняя (C_3)	Большая (C_4)
Нуль (A_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)	Нуль (D_1)
Малое (A_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)
Среднее (A_3)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)	Малая (D_2)
Большое (A_4)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)	Средняя (D_3)

Таблица 5.9. В1ψТаблица нечетких правил для выходной переменной ψ (φ = «малый»)

Расстояние (s)	Скорость (v_{ex})			
	Нуль (C_1)	Малая (C_2)	Средняя (C_3)	Большая (C_4)
Нуль (A_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)
Малое (A_2)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)
Среднее (A_3)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)
Большое (A_4)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)

Таблица 5.9. В2ψТаблица нечетких правил для выходной переменной ψ (φ = «средний»)

Расстояние (s)	Скорость (v_{ex})			
	Нуль (C_1)	Малая (C_2)	Средняя (C_3)	Большая (C_4)
Нуль (A_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)
Малое (A_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)
Среднее (A_3)	Средний (E_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)
Большое (A_4)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)

Таблица 5.9. В3ψТаблица нечетких правил для выходной переменной ψ (φ = «большой»)

Расстояние (s)	Скорость (v_{ex})			
	Нуль (C_1)	Малая (C_2)	Средняя (C_3)	Большая (C_4)
Нуль (A_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)	Малый (E_1)
Малое (A_2)	Большой (E_3)	Большой (E_3)	Большой (E_3)	Большой (E_3)
Среднее (A_3)	Средний (E_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)
Большое (A_4)	Средний (E_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)	Средний (E_2)

Нечеткое множество (нечеткое высказывание), когда лингвистическая переменная s приняла значение $A_i, i = 1, 2, 3, 4$, лингвистическая переменная φ приняла значение $B_j, j = 1, 2, 3$, и лингвистическая переменная v_{ex} приняла

значение $C_k, k=1,2,3,4$, будем обозначать F_{ijk} . Через $\mu_{F_{ijk}}(x, \alpha, v)$ обозначим его функцию принадлежности, тогда

$$\mu_{F_{ijk}}(x, \alpha, v) = \min\{\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(\alpha), \mu_{C_k}(v)\}. \quad (5.5)$$

Через $\mu_{D_l}(x, \alpha, v)$ ($l=1,2,3,4$) обозначим функцию принадлежности нечеткого множества — множества наборов значений входных переменных, при которых значением выходной переменной $v_{\text{вых}}$ является терм D_l :

$$\mu_{D_l}(x, \alpha, v) = \max_{s=x \wedge \varphi = \alpha \wedge v_{\text{ex}} = v \Rightarrow D_l} \{\mu_{F_{ijk}}(v, \alpha, v)\}. \quad (5.6)$$

Аналогично

$$\mu_{E_l}(x, \alpha, v) = \max_{s=x \wedge \varphi = \alpha \wedge v_{\text{ex}} = v \Rightarrow E_l} \{\mu_{F_{ijk}}(v, \alpha, v)\}. \quad (5.7)$$

Через $\mu_{ijkl}^{v_{\text{вых}}}(x, \alpha, v, v_1)$ обозначим степень истинности нечеткого высказывания [(значение термина A_i равно x) И (значение термина B_j равно α) И (значение термина C_k равно v) И значение термина m^3 равно v_1], тогда

$$\mu_{ijkl}^{v_{\text{вых}}}(x, \alpha, v, v_1) = \min\{\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(\alpha), \mu_{C_k}(v), \mu_{D_l}(v_1)\}. \quad (5.8)$$

Через $\mu_{ijkl}^{\psi}(s, \varphi, v, \beta)$ обозначим степень истинности нечеткого высказывания [(значение термина A_i равно x) И (значение термина B_j равно α) И (значение термина C_k равно v) И значение термина E_l равно β], тогда

$$\mu_{ijkl}^{\psi}(x, \alpha, v, \beta) = \min\{\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(\alpha), \mu_{C_k}(v), \mu_{E_l}(\beta)\}. \quad (5.9)$$

В качестве примера найдем значения выходных показателей, если параметры равны соответственно

$$x = 3,5 \text{ м}, \alpha = 12^\circ, v = 3,25 \text{ м/с}.$$

В таблице 5.10 указаны степени истинности того, что значениями входных лингвистических переменных при $x=3,5$ м, $\alpha=12^\circ$, $v=3,25$ м/с являются конкретные термы. Рассматриваются только те случаи, когда значения соответствующих функций принадлежности больше нуля.

Таблица 5.10. Степень истинности нечетких высказываний при $x = 3,5$ м, $\alpha = 12^\circ$, $v = 3,25$ м/с

Высказывание	$s = A_2$	$s = A_3$	$\varphi = B_2$	$\varphi = B_3$	$v_{\text{ex}} = C_3$	$v_{\text{ex}} = C_4$
Степень истинности	0,2	0,5	0,33	0,33	0,75	0,25

Анализируя данные таблицы 5.10, видим, что ситуациями со степенью истинности больше нуля (при рассматриваемых значениях параметров) являются ситуации:

$$F_{223}, F_{224}, F_{233}, F_{234}, F_{323}, F_{324}, F_{333}, F_{334}.$$

Значения функций принадлежности $\mu_{F_{ijk}}(s, \varphi, v_{ex})$ при $x=3,5$ м, $\alpha=12^\circ$, $v=3,25$ м/с указаны в таблице 5.11.

Таблица 5.11. Значения функций принадлежности $\mu_{F_{ijk}}(3,5,12,3,25)$

Ситуации	F_{223}	F_{224}	F_{233}	F_{323}	F_{324}	F_{333}	F_{334}
$\mu_{F_{ijk}}$	0,20	0,20	0,20	0,33	0,25	0,33	0,25

Обозначим функцию принадлежности термина D_l , $l=1,2,3,4$ лингвистической переменной $v_{вых}$ через μ_{D_l} и функцию принадлежности термина E_l , $l=1,2,3$ лингвистической переменной ψ через μ_{E_l} .

Будем рассматривать только те ситуации, в которых при рассматриваемых значениях параметров степень истинности соответствующего высказывания больше нуля.

Для термина D_1 таких ситуаций нет.

Для термина D_2 это ситуации $F_{223}, F_{224}, F_{233}, F_{234}, F_{333}, F_{334}$.

Для термина D_3 это ситуации F_{323}, F_{324} .

Для термина D_4 таких ситуаций нет.

Для термина E_1 таких ситуаций нет.

Для термина E_2 это ситуации $F_{223}, F_{224}, F_{323}, F_{324}, F_{333}, F_{334}$.

Для термина E_3 это ситуации F_{233}, F_{234} .

С учетом сказанного получаем (см. (5.6)), что

$$\mu_{D_1}(3,5, 12, 3,25) = 0,$$

$$\mu_{D_2}(3,5, 12, 3,25) = 0,33 \text{ и это верно для ситуации } F_{333},$$

$$\mu_{D_3}(3,5, 12, 3,25) = 0,33 \text{ и это верно для ситуации } F_{323},$$

$$\mu_{D_1}(3,5, 12, 3,25) = 0,$$

$$\mu_{E_1}(3,5, 12, 3,25) = 0,$$

$$\mu_{E_2}(3,5, 12, 3,25) = 0,33 \text{ и это верно для ситуации } F_{323},$$

$\mu_{E_3}(3,5, 12, 3,25) = 0,20$ и это верно для ситуаций F_{233} и F_{234} , для определенности будем рассматривать F_{233} .

Определим теперь значения выходных переменных — значение переменных $v_{\text{вых}}$ и ψ . Находить их значения будем приближенно, меняя значение v переменной $v_{\text{вых}}$ с шагом 0,5 м/с и переменной ψ с шагом 2° . Напомним, что решения об изменении скорости и угла поворота руля принимаются независимо одно от другого.

Начнем с определения значения выходной переменной $v_{\text{вых}}$. Результаты вычислений сведены в таблицы 5.12 и 5.13.

Таблица 5.12. Значения функций принадлежности $\mu_{D_k}(v)$

	v										
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\mu_{D_2}(v)$	0	0	0	0	0	0,5	1,0	0,5	0	0	0
$\mu_{D_3}(v)$	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1,0	1,0	1,0

Таблица 5.13. Значения функций принадлежности

$$\mu_{ijkl}^{\text{вых}}(3,5, 12, 3,25, v_1) \text{ и } \mu_D(3,5, 12, 3,25, v_1)$$

	v										
	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\mu_{3332}^{\text{вых}}$	0	0	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0	0	0
$\mu_{3233}^{\text{вых}}$	0	0	0	0	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,3
μ_D	0	0	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33

Через $\mu_D(x, \alpha, v, v_1)$ обозначим функцию принадлежности нечеткого множества, формализующего нечеткое высказывание «скорость $v_{\text{вых}}$ при условии, что $x=3,5$ м, $\alpha=12^\circ$, $v=3,25$ м/с», тогда

$$\mu_D(x, \alpha, v, v_1) = \max_{(i,j,k,l)} \mu_{ijkl}^{\text{вых}}(x, \alpha, v, v_1);$$

значения этой функции указаны в нижней строке таблицы 5.13, они равны максимальному числу из чисел соответствующей графы.

Необходимые значения функций $\mu_{ijkl}^{\text{вых}}(x, \alpha, v, v_1)$ для D_2 и D_3 ($l=2, 3$) указаны в двух первых строках таблицы 5.13.

Аналогично строим функцию

$$\mu_E(x, \alpha, v, \beta) = \max_{(i,j,k,l)} \mu_{ijkl}^\psi(x, \alpha, v, \beta),$$

результаты в таблицах 5.14, 5.15.

Таблица 5.14. Значения функций принадлежности $\mu_{E_k}(\alpha)$

	α										
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\mu_{E_2}(\alpha)$	0	0	0	0,5	1,0	0,66	0,33	0	0	0	0
$\mu_{E_3}(\alpha)$	0	0	0	0	0	0	0,33	0,66	1,0	1,0	1,0

Дефаззификация полученных в таблицах 5.13 и 5.15 результатов по методу «центра тяжести» дает

$$v_{\text{вых}} = \frac{0,33 \cdot (2,5 + 3 + 3,5 + 4 + 4,5 + 5)}{0,33 \cdot 6} = \frac{22,5}{6} = 3,75,$$

$$\psi = \frac{0,33 \cdot (6 + 8 + 10 + 12) + 0,20(14 + 16 + 18 + 20)}{4 \cdot 0,33 + 4 \cdot 0,20} = \frac{25,48}{2,12} = 12,02.$$

Таблица 5.15. Значения функций принадлежности

$$\mu_{ijkl}^\psi(3,5, 12, 3,25, \beta) \text{ и } \mu_E(3,5, 12, 3,25, \beta)$$

	α										
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
μ_{3232}^ψ	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,33	0	0	0	0
μ_{2333}^ψ	0	0	0	0	0	0	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
μ_E	0	0	0	0,33	0,33	0,33	0,33	0,20	0,20	0,20	0,20

Следовательно, при текущих условиях движения, когда $x = 3,5$ м, $\alpha = 12^\circ$, $v = 3,25$, следует немного увеличить скорость и довести ее до 3,75 м/с, угол практически не менять.

5.5. Организационное управление

5.5.1. Оценка качества решения по его экономической и оперативной характеристикам

Рассмотрим случай, когда качество решения оценивается с помощью нескольких показателей. Такие задачи называются задачами векторной оптимизации.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу выбора оптимального варианта для перемещения групп людей в пункт оперативного предназначения каким-либо видом транспорта. Эффективность выбора будем оценивать с использованием двух показателей эффективности — «оперативная эффективность» и «экономическая эффективность» (две входные лингвистические переменные).

Термы для «оперативной эффективности»: «высокая» — B_1 , «средняя» — B_2 , «низкая» — B_3 . Термы для «экономической эффективности» (здесь и далее под ней будем понимать финансовые затраты на выполнение поставленной задачи): «очень дорого» — A_1 , «дорого» — A_2 , «не очень дорого» — A_3 , «дешево» — A_4 .

Пусть в зависимости от принимаемых решений затраты могут изменяться от минимального α до максимального значения β . Тогда расходы, связанные с конкретным решением, будут равны $(1 - \delta)\alpha + \delta\beta$, где δ — некоторое число от нуля до единицы. Множество значений этого δ будем рассматривать как универсальное множество, на котором заданы нечеткие множества, формализующие термы лингвистической переменной «экономической эффективности».

Оперативную эффективность будем характеризовать вероятностью выполнения задачи P . Будем предполагать, что эта вероятность лежит в пределах от 0,5 до 0,98. Тогда универсальным множеством для термов этой лингвистической переменной является отрезок $[0,5; 0,98]$.

Выходной является лингвистическая переменная «качество решения», пусть ее термами являются: «неудовлетворительное» — $C_1(2)$, «удовлетворительное» — $C_2(3)$, «хорошее» — $C_3(4)$, «отличное» — $C_4(5)$. Универсальным множеством здесь будет отрезок $[2; 5]$.

Для треугольных чисел, формализующих термы лингвистических переменных, в рассматриваемой задаче значения чисел a , b , c указаны в таблице 5.16. Графики функций принадлежности приведены на рисунках 5.11–5.13. Нечеткая база знаний представлена таблицей 5.17.

Если, например, принимается решение с экономической эффективностью «дорого», а оперативной — «высокая», то по таблице 5.17 находим, что качество этого решения имеет нечеткую оценку 3.

Для рассматриваемой задачи построим четкую оценку для варианта, при котором переменная δ , характеризующая расходы, имеет значение 0,6, а вероятность выполнения равна 0,9.

Таблица 5.16. Параметры нечетких треугольных чисел, формализующих рассматриваемые термины

	Термы лингвистической переменной «оперативная эффективность»			
	«низкая»	«средняя»	«высокая»	
<i>a</i>	0,50	0,58	0,82	
<i>b</i>	0,56	0,74	0,98	
<i>c</i>	0,72	0,94	0,98	
	Термы лингвистической переменной «экономическая эффективность»			
	«дешево»	«не очень дорого»	«дорого»	«очень дорого»
<i>a</i>	0	0,19	0,50	0,75
<i>b</i>	0,19	0,42	0,70	1,00
<i>c</i>	0,44	0,62	0,90	1,00
	Термы лингвистической переменной «качество решения»			
	«неудовлетв.»	«удовлетв.»	«хорошее»	«отличное»
<i>a</i>	2,00	2,375	2,750	3,75
<i>b</i>	2,00	3,000	4,00	5,00
<i>c</i>	3,00	3,400	5,00	5,00

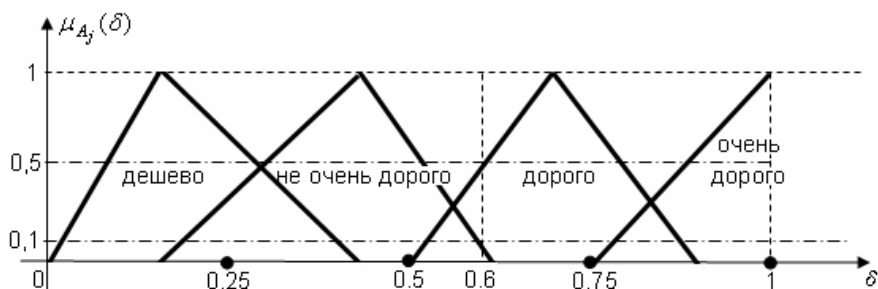


Рис. 5.11. Лингвистическая переменная «экономическая эффективность»

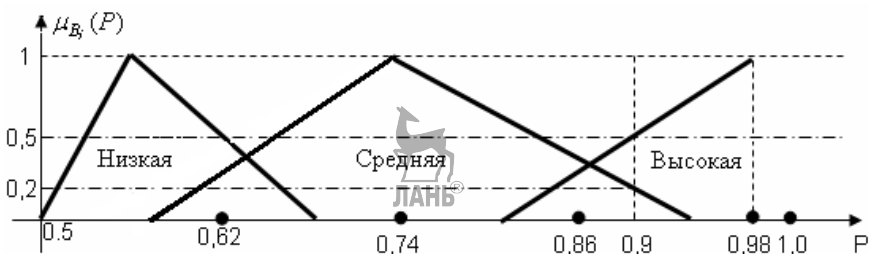


Рис. 5.12. Лингвистическая переменная «оперативная эффективность»

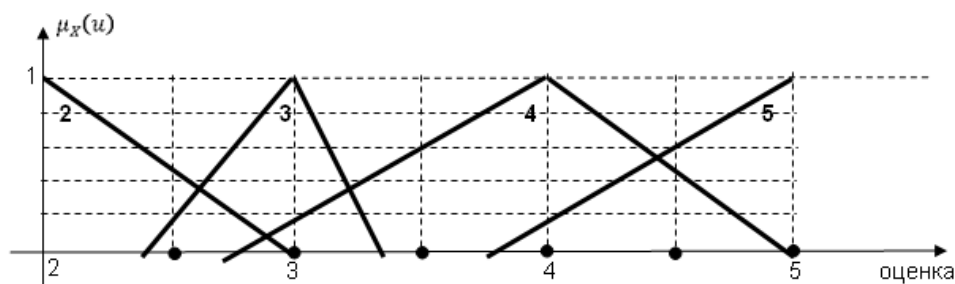


Рис. 5.13. Выходная лингвистическая переменная

Таблица 5.17. Нечеткая база знаний

	Очень дорого A_1	Дорого A_2	Не очень дорого A_3	Дешево A_4
Высокая B_1	2	3	4	5
Средняя B_2	2	2	2	4
Низкая B_3	2	2	2	2

В таблице 5.18 приведены значения функций принадлежности, сочетаний (конъюнкций) термов входных лингвистических переменных при $\delta = 0,6$ и $P = 0,9$.

Таблица 5.18. Степень принадлежности ситуации $\{\delta, P\} = \{0,6, 0,9\}$ разным сочетаниям значений входных лингвистических переменных

	$\mu_{B_i}(0,9)$	Очень дорого A_1	Дорого A_2	Не очень дорого A_3	Дешево A_4
1	2	3	4	5	6
$\mu_{A_j}(0,6)$	–	0	0,5	0,1	0
Высокая B_1	0,50	0	0,5	0,1	0
Средняя B_2	0,20	0	0,2	0,1	0
Низкая B_3	0	0	0	0	0

Третья строка и вторая графа таблицы 5.18 заполняются по формуле (1.3) с использованием данных таблицы 5.16 (или на основе графиков функций принадлежности, рис. 5.11 и 5.12). В остальных клетках указываются значения функции принадлежности (истинности) конъюнкций соответствующих термов входных лингвистических переменных при рассматриваемых значениях входных лингвистических переменных. Эти значения равны минимальным из значений в соответствующих клетках третьей строки и второй графы (формула (1.1)).

Для получения значения надежности (степени уверенности) выходного термина для рассматриваемого варианта значений входных параметров надо из указанных в таблице 5.18 значений надежности для этого термина взять максимальное (формула (1.5)). Результаты приведены в таблице 5.19.

Таблица 5.19. Надежность выходных термов для ситуации $\{\delta, P\} = \{0,6, 0,9\}$

Выходные термы	2	3	4	5
Надежность	0,2	0,5	0,1	0

Максимальные положительные значения функций принадлежности получились только для первых трех термов. Эти значения получены (см. табл. 5.18) для вариантов $B_2 - A_2$, $B_1 - A_2$, $B_1 - A_3$. Обозначим их соответственно C_{22} , C_{12} , C_{13} .

Определяем степень принадлежности различных значений показателя (выходной переменной) (с шагом 0,5) при сочетаниях C_{22} , C_{12} , C_{13} значений параметров (см. табл. 5.20, строки 2–4). Например, степень принадлежности числового значения 2 терму показателя «удовлетворительное» (C_2) равна нулю (см. рис. 5.13); аналогично степень принадлежности числового значения 2,5 терму показателя «удовлетворительное» равна 0,2 и т. д. В следующих трех строках даны степени принадлежности разных числовых значений показателя (выходной переменной) с учетом степени принадлежности соответствующего сочетания значений (термов) параметров (см. табл. 5.18).

Таблица 5.20. Вычисление степени принадлежности различных значений показателя, если параметры имеют значения 0,6 и 0,9

Значения показателя	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\mu_{C_{12}}(x)$	0	0,2	1,0	0	0	0	0
$\mu_{C_{13}}(x)$	0	0	0,2	0,6	1,0	0,5	0
$\mu_{C_{22}}(x)$	1,0	0,5	0	0	0	0	0
$e = (\mu_{A_2}(0,6) \wedge \mu_{B_1}(0,9)) \wedge \mu_{C_{12}}(x)$	0	0,2	0,5	0	0	0	0
$f = (\mu_{A_3}(0,6) \wedge \mu_{B_1}(0,9)) \wedge \mu_{C_{13}}(x)$	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0
$g = (\mu_{A_2}(0,6) \wedge \mu_{B_2}(0,9)) \wedge \mu_{C_{22}}(x)$	0,2	0,2	0	0	0	0	0
$e \vee f \vee g$	0,2	0,2	0,5	0,1	0,1	0,1	0

В последней строке таблицы 5.20 указаны значения функции принадлежности $\mu_{y(X)}(u)$ нечеткого множества «значение показателя (выходной переменной) $y(X)$ при наборе значений параметров $X = (0,6; 0,9)$ »,

равные максимальным из чисел соответствующей графы (формула (1.5)), т. е. степень уверенности в том, что рассматриваемый вариант заслуживает соответствующей оценки.

Для получения окончательной оценки предлагается несколько подходов [7], [10], [32].

Отметим два из них.

В качестве оценки используется «центр тяжести», т. е. отношение суммы произведений элементов первой строки таблицы 5.20 на соответствующие элементы ее последней строки к сумме элементов ее последней строки. Для нашей задачи получаем:

$$\frac{2 \cdot 0,2 + 2,5 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,5 + 3,5 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 + 4,5 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0}{0,2 + 0,2 + 0,5 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0} = 3.$$

Другой подход связан с выбором оценки, степень уверенности относительно которой максимальна. У нас это тоже тройка (удовлетворительное).

5.5.2. Выбор оптимального маршрута доставки грузов при нечетко заданных условиях движения

Автомобильным транспортом в РФ перевозится около 85% всего объема грузов внутри страны. Одной из важнейших задач при доставке грузов является выбор маршрута.

Итак, имеется некоторая совокупность маршрутов, свойства которых характеризуются рядом параметров (входных переменных). Известны значения каждого из этих параметров для каждого маршрута. Качество маршрута описывается некоторым показателем (выходной переменной). Требуется найти маршрут, для которого значение выходной переменной минимально.

Метод решения этой задачи состоит в следующем.

Используя подход, описанный в [13], [133] и базирующийся на идеях нечеткого логического вывода, изложенных Мамдани в [4], для каждого из рассматриваемых маршрутов по заданным значениям входных переменных определяется значение выходной переменной. Из полученных значений выбирается минимальное, соответствующий маршрут признается наилучшим.

Рассмотрим задачу по выбору наилучшего по критерию «расход горючего» маршрута доставки грузов для часто встречающейся на практике

ситуации, когда зависимость значений критерия от условия движения (расстояние и время движения) определена неточно, задана нечетко.

Пример 5.4. Из трех имеющихся маршрутов, связывающих два заданных пункта, требуется выбрать наилучший для организации перевозок грузов КамАЗ.

Данные об этих маршрутах:

— расстояние равно соответственно 52, 60 и 45 км;

— время движения — 52, 47 и 70 мин.

Качество маршрута будем описывать лингвистической переменной m — «расход горючего» (выходная переменная) с терминами: «маленький» — M_1 , «средний» — M_2 , «большой» — M_3 , «очень большой» — M_4 (табл. 5.21).

Таблица 5.21. Значения параметров нечетких чисел

Лингвистические переменные	Термы	Параметры		
		a	b	c
Расстояние (s)	Небольшое	35	45	55
	Среднее	45	65	75
	Большое	65	85	90
Время движения (t)	Быстро	35	50	65
	Среднее	45	70	80
	Большое	65	100	120
Расход горючего (m)	Маленький	20	30	35
	Средний	30	35	45
	Большой	40	45	50
	Очень большой	45	55	65

Предполагается, что на расход горючего в основном влияют два параметра (входные переменные), которые формализуются двумя лингвистическими переменными:

s — «расстояние» с терминами: «небольшое» — S_1 , «среднее» — S_2 , «большое» — S_3 ;

t — «время движения» с терминами: «быстро» — T_1 , «среднее» — T_2 , «большое» — T_3 .

Все перечисленные термы формализуются нечеткими множествами — треугольными нечеткими числами.

Параметры a, b, c нечетких треугольных чисел, формализующих термы рассматриваемых лингвистических переменных, указаны в таблице 5.21.

Универсальным множеством для термов переменной «расход горючего» является отрезок $[20, 65]$, единицей измерения — литр; для термов переменной «расстояние» — отрезок $[35, 90]$, единицей измерения — километр; для термов переменной «время движения» — отрезок $[35, 120]$, единицей измерения — минута.

Функции принадлежности рассматриваемых нечетких чисел приведены в таблице 5.22.

Графики функций принадлежности нечетких множеств, формализующих термы лингвистических переменных, представлены на рисунках 5.14–5.16.

Таблица 5.22. Функции принадлежности

Лингвистическая переменная	Термы	Интервал	
		$x \in (a, b)$	$x \in (b, c)$
Расстояние (s)	Небольшое	$(x - 35)/10$	$(55 - x)/10$
	Среднее	$(x - 45)/20$	$(75 - x)/10$
	Большое	$(x - 65)/20$	$(90 - x)/5$
Время движения (t)	Быстро	$(x - 35)/15$	$(65 - x)/15$
	Среднее	$(x - 45)/25$	$(80 - x)/10$
	Большое	$(x - 65)/35$	$(120 - x)/20$
Расход горючего (m)	Маленький	$(x - 20)/10$	$(35 - x)/5$
	Средний	$(x - 30)/5$	$(45 - x)/10$
	Большой	$(x - 40)/5$	$(50 - x)/5$
	Очень большой	$(x - 45)/10$	$(65 - x)/10$

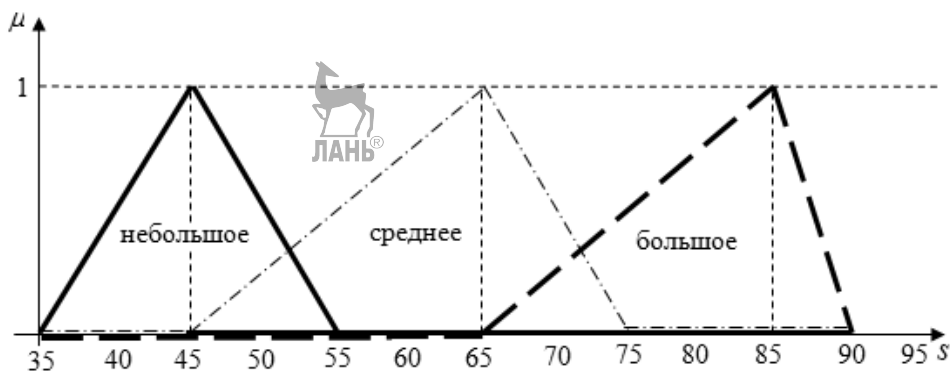


Рис. 5.14. Функции принадлежности термов переменной «расстояние»

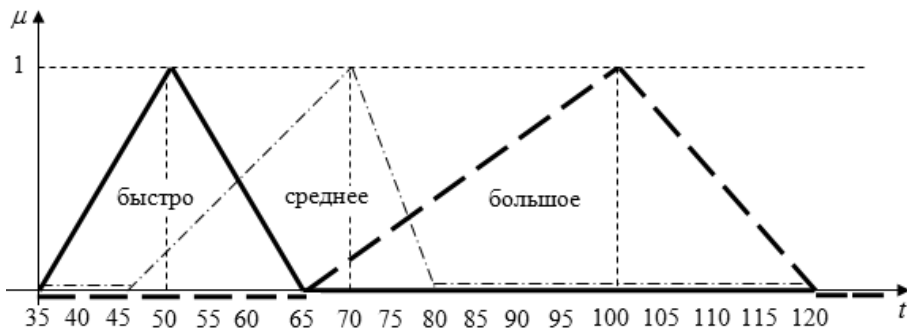


Рис. 5.15. Функции принадлежности термов переменной «время движения»

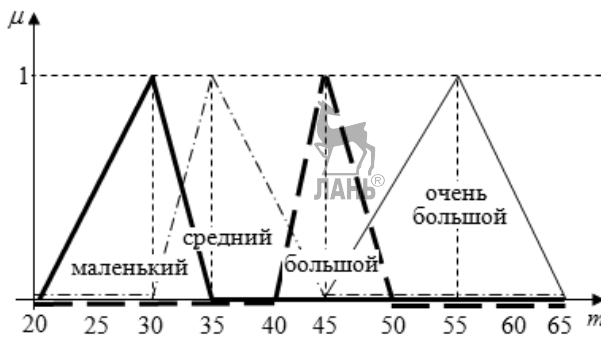


Рис. 5.16. Функции принадлежности термов переменной «расход горючего»

В таблице 5.23 представлена база знаний, позволяющая по сочетанию термов, являющихся значениями входных переменных, определить терм — значение выходной переменной.

Если, например, рассматривается маршрут с расстоянием «небольшое» и временем движения «большое», то по таблице 5.23 находим, что расход горючего для него будет «средний».

Таблица 5.23. База знаний

(расход горючего в зависимости от расстояния и времени движения)

Расстояние	Время движения		
	Быстро	Среднее	Большое
Небольшое	Маленький (M_1)	Маленький (M_1)	Средний (M_2)
Среднее	Средний (M_2)	Средний (M_2)	Большой (M_3)
Большое	Средний (M_2)	Большой (M_3)	Очень большой (M_4)

Обозначим через:

$\mu_{S_i}(s), i = 1,2,3$, функцию принадлежности терма S_i ;

$\mu_{T_i}(t), i = 1,2,3$, функцию принадлежности терма T_i ;

$\mu_{M_i}(m), i = 1,2,3,4$, функцию принадлежности терма M_i .

Рассмотрим первый маршрут, для него расстояние равно 52 км, время движения — 52 мин. Сочетания различных термов входных лингвистических переменных при $s = 52$ и $t = 52$ имеют значения функции принадлежности, указанные в таблице 5.24.

Таблица 5.24. Степень принадлежности ситуации $\{s, t\} = \{52, 52\}$ разным сочетаниям значений входных переменных

	$\mu_{s_i}(52)$	Быстро	Среднее	Большое
$\mu_{t_i}(52)$	0,30	0,87	0,28	0
Небольшое	0,30	0,30	0,28	0
Среднее	0,35	0,35	0,28	0
Большое	0	0	0	0

Вторая строка и вторая графы таблицы 5.24 заполняются по соответствующим формулам из таблицы 5.22 (или на основе графиков функций принадлежности — рис. 5.14, 5.15).

При заполнении второй графы таблицы 5.24 при $s = 52$ по таблице 5.21 находим, что это расстояние, например, соответствует терму «среднее», т. е. S_2 , при этом оно меньше моды этого терма, т. е. $52 \in (a, b)$. Из таблицы 5.22 видим, что в этом случае $\mu_{S_2}(x) = (x - 45)/20$, тогда $\mu_{S_2}(52) = (52 - 45)/20$. Аналогично значения функций принадлежности остальных термов переменной «расстояние» при $s = 52$ равны $\mu_{S_1}(x) = 0,30$, $\mu_{S_3}(x) = 0$.

При заполнении второй строки таблицы 5.24 при $t = 52$ по таблице 5.21 находим, что это время соответствует термам «быстро» и «среднее», т. е. термам T_1 и T_2 , при этом оно больше моды терма T_1 (принадлежит (b, c)) и меньше моды терма T_2 (принадлежит (a, b)). Используя таблицу 5.22, находим, что $\mu_{T_1}(52) = (65 - 52)/15 \approx 0,87$, $\mu_{T_2}(52) = (52 - 45)/25 \approx 0,28$.

Очевидно, что $\mu_{T_3}(52) = 0$.

В остальных клетках таблицы 5.24 указываются степени истинности конъюнкций соответствующих термов входных переменных при указанных значениях входных переменных. Эти значения равны минимальным из

значений в соответствующих клетках второй строки и второй графы (формула (1.4)). Например, степень истинности конъюнкции термов S_1 и T_2 , т. е. нечеткого высказывания («расстояние» = «небольшое» И «время движения» = «среднее»), при условии, что $s = 52$ и $t = 52$, равна

$$\min\{\mu_{S_1}(52), \mu_{T_2}(52)\} = 0,28.$$

Для получения значения степени истинности выходного терма для рассматриваемого варианта значений входных переменных надо из указанных в таблице 5.24 значений степени истинности для этого терма взять максимальное (формула (1.5)). Так, например, высказывание «выходным термом является «маленький»» есть дизъюнкция высказываний «входными термами являются S_1 И T_1 » И «входными термами являются S_1 И T_2 ».

В таблице 5.24 терму «маленький» переменной «расход горючего» соответствуют две ситуации: S_1-T_1 и S_1-T_2 и соответственно два значения — 0,30 и 0,28, большее из них 0,30. Следовательно, степень истинности терма M_1 («маленький») выходной переменной для рассматриваемого варианта значений параметров равна 0,30, что соответствует ситуации S_1-T_1 .

Терму «средний» тоже соответствуют две ситуации: S_2-T_1 и S_2-T_2 и соответственно значения 0,35 и 0,28, большее из них 0,35. Следовательно, степень истинности терма M_2 («средний») равна 0,35, что соответствует ситуации S_2-T_1 .

Определяем степень принадлежности различных значений выходной переменной (с шагом 5 л) при сочетаниях S_1-T_1 и S_2-T_1 значений входных переменных, т. е. при термах выходной переменной, равных M_1 и M_2 (см. табл. 5.25, вторая и третья строки). Интересующие нас значения можно получить, используя таблицу 5.22 или рисунок 5.16.

Таблица 5.25. Степень принадлежности различных значений выходной переменной, если входные имеют значения 0,6 и 0,9

m	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
$\mu_{M_1}(m)$	0	0,50	1,0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{M_2}(m)$	0	0	0	1,0	0,5	0	0	0	0	0
$\min\{\mu_{S_1}(52), \mu_{T_1}(52), \mu_{M_1}(m)\}$	0	0,30	0,30	0	0	0	0	0	0	0
$\min\{\mu_{S_2}(52), \mu_{T_2}(52), \mu_{M_2}(m)\}$	0	0	0	0,35	0,35	0	0	0	0	0
$\mu(m, 52, 52)$	0	0,30	0,30	0,35	0,35	0	0	0	0	0

Заметим, что высказывание «расход горючего при заданных условиях равен m_0 » эквивалентно высказыванию [«лингвистическая переменная „расход горючего“ приняла при заданных условиях значение „маленький“ (M_1) И расход составил m_0 литров» ИЛИ «лингвистическая переменная „расход горючего“ приняла при заданных условиях значение „средний“ (M_2) И расход составил m_0 литров»]. Тогда в силу формул (1.4), (1.5) и сказанного ранее степень истинности $\mu(m_0, 52, 52)$ нечеткого высказывания «расход горючего при заданных условиях равен m_0 » определяется равенством

$$\begin{aligned} & \mu(m_0, 52, 52) = \\ & = \max\{\min\{\mu_{S_1}(52), \mu_{T_1}(52), \mu_{M_1}(m_0)\}, \min\{\mu_{S_2}(52), \mu_{T_1}(52), \mu_{M_2}(m_0)\}\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

В первой строке таблицы 5.25 указаны возможные расходы горючего с шагом 5 л.

Во второй и третьей — степени принадлежности этих значений терму M_1 («маленькие») и терму M_2 («средние») соответственно. Например, степень принадлежности числового значения 20 терму M_1 равна нулю (см. табл. 5.22 или рис. 5.16); аналогично степень принадлежности значения 25 терму M_1 равна 0,5.

В последней строке таблицы 5.25 указаны значения функции принадлежности $\mu_M(m)$ нечеткого множества «значение выходной переменной при наборе значений входных переменных (52; 52)» (максимальное из чисел четвертой и пятой строк соответствующей графы таблицы), т. е. степень уверенности в том, что рассматриваемый вариант заслуживает соответствующей оценки.

Для получения окончательной оценки используем «центр тяжести», т. е. отношение суммы произведений элементов первой строки таблицы 5.25 на соответствующие элементы ее последней строки к сумме элементов ее последней строки. Для нашего примера получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{0 \cdot 20 + 0,3 \cdot 25 + 0,3 \cdot 30 + 0,35 \cdot 35 + 0,35 \cdot 40 + 0 \cdot 45 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 55 + 0 \cdot 60 + 0 \cdot 65}{0 + 0,3 + 0,3 + 0,35 + 0,35 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0} = \\ & = \frac{42,75}{1,3} \cong 32,88 \text{ л.} \end{aligned}$$

Аналогичные расчеты для второго маршрута дают 37 л, для третьего — 29,78 л.

Следовательно, оптимальным по расходу горючего является третий маршрут.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ



Стремительное развитие средств вычислительной техники, происходящее в настоящее время, открывает все новые и новые возможности повышения оперативности и обоснованности решений, вырабатываемых в процессе управления в рамках сложных организационных систем. Поэтому создание методов, моделей и алгоритмов, реализуемых на основе современного специального программного обеспечения, используемых информационных систем, функционирующих в реальном режиме времени, является, по нашему мнению, весьма актуальным.

В монографии рассмотрена проблема применения методов нахождения оптимальных решений в задачах исследования операций, теории графов и теории игр в случаях, когда решение приходится принимать при недостаточно четко определенных условиях.

В настоящее время эти разделы математики приобретают все большую популярность.

Подходы к решению указанной проблемы иллюстрируются на ряде примеров.

Владение методами разделов математики, исследуемых в монографии, является необходимой составной частью образования различных специалистов. Успехи применения математического аппарата этих разделов, в состав которого могут быть интегрированы предложенные модели и алгоритмы, реализованные в условиях использования нечетких исходных данных, можно объяснить тем, что он является удобным языком для формулировки и эффективным инструментом для решения задач, относящихся к весьма широкому кругу научных и управленческих проблем.

Уместно упомянуть в этой связи вопросы проектирования сложных систем, управления большими организационными и техническими системами, задачи обеспечения безопасности жизнедеятельности, экономики, социологии, информатики.

Подчеркнем, что практический опыт разработки систем нечеткого логического вывода свидетельствует, что сроки и стоимость их проектирования значительно меньше, чем при использовании традиционного математического аппарата, при этом обеспечивается требуемый уровень робастности и прозрачности моделей.

Вне рамок данной монографии остался достаточно обширный круг задач исследования операций, теории графов и теории игр, исходные данные

в которых целесообразно рассматривать как заданные нечетко. Укажем некоторые из них, исследование которых, по нашему мнению, представляет несомненный интерес: задача о назначении при ее рассмотрении в терминах многодольных графов; многополюсные максимальные потоки; многополюсные кратчайшие цепи; задача коммивояжера, в которой характеристикой коммуникации является ее надежность.

В заключение отметим, что постановки некоторых задач сформулированы в виде, представляющем интерес для ЛПР. Однако в целях недопущения навязывания своего мнения по порядку использования задач монографии не для всех рассмотренных задач предложены подобные постановки.



ЛИТЕРАТУРА

1. *Zadeh, L. A.* Fuzzy sets // *Information and Control*. — 1965. — Vol. 8, № 3. — P. 338–353.
2. *Kosko, B.* Fuzzy systems as universal approximators // *IEEE Transactions on Computers*. — 1994. — Vol. 43, № 11. — P. 1329–1333.
3. *Аверкин, А. Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин, И. З. Батыршин, А. Ф. Блишун, В. Б. Силов, В. Б. Тарасов ; под ред. Д. А. Поспелова. — М. : Наука. 1986. — 312 с.
4. *Mamdani, E. H.* An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller / E. H. Mamdani, S. Assilian // *International Journal of Man-Machine Studies*. — 1975. — Vol. 7. — P. 1–13.
5. *Борисов, А. Н.* Принятие решений на основе нечетких моделей: примеры использования / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. — Рига : Зинатне, 1990. — 184 с.
6. *Заде, Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М. : Мир, 1976. — 166 с.
7. *Кофман, А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М. : Радио и связь, 1982. — 429 с.
8. *Леоненков, А. В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 725 с.
9. *Орловский, С. А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М. : Наука, 1981. — 206 с.
10. *Яхьяева, Г. Э.* Нечеткие множества и нейронные сети. — М. : Бинوم, 2006. — 315 с.
11. *Zadeh, L. A.* Fuzzy algorithms // *Inf. Contr.* — 1988. — Vol. 12. — P. 94–102.
12. *Черных, А. К.* Вопросы прогнозирования материально-технического обеспечения с использованием нечетких математических моделей / А. К. Черных, И. В. Козлова, В. Б. Вилков // Проблемы управления рисками в техносфере. — 2015. — № 4 (36). — С. 107–117.
13. *Вилков, В. Б.* Оценка качества решений на применение внутренних войск на основе многокритериальной оптимизации / В. Б. Вилков, А. К. Черных, А. Ю. Гарькушев, А. М. Сазыкин // Вопросы оборонной техники. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму. — 2016. — № 1–2 (91–92). — С. 43–50.

14. *Вилков, В. Б.* Теория и практика оптимизации решений на основе нечетких множеств и нечеткой логики : монография / В. Б. Вилков, А. К. Черных, А. В. Флегонтов. — СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. — 160 с.
15. *Черных, А. К.* Управление безопасностью транспортных перевозок при организации материального обеспечения сил и средств МЧС России в условиях чрезвычайной ситуации / ИАНК Черных, В. Б. Вилков // Пожаровзрывобезопасность. — 2016. — Т. 25, № 9. — С. 52–59.
16. *Черных, А. К.* Теоретические положения прогнозирования наличия материальных средств в ходе выполнения служебно-боевых задач на основе нечетких множеств // Современные проблемы науки и образования во внутренних войсках МВД России. — СПб., 2015. — С. 249–252.
17. *Вилков, В. Б.* Алгоритм поиска оптимального маршрута выдвижения подразделения войск национальной гвардии / В. Б. Вилков, А. К. Черных, А. Ю. Гарькушев, А. И. Зайцев // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. — 2017. — № 1 (96). — С. 29–33.
18. *Вилков, В. Б.* Теория и практика оптимизации управленческих решений в условиях ЧС на транспорте : монография / В. Б. Вилков, А. К. Черных. — СПб. : СПб ун-т ГПС МЧС России, 2016. — 160 с.
19. *Вилков, В. Б.* Задачи на графах с нечетко заданными весами : монография / В. Б. Вилков, А. К. Черных, А. В. Флегонтов. — СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. — 160 с.
20. *Вилков, В. Б.* К вопросу о надежности транспортной сети в условиях чрезвычайной ситуации / В. Б. Вилков, А. Ю. Гарькушев, А. М. Сазыкин, А. К. Черных // Вопросы оборонной техники. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму. — 2017. — № 11–12 (113–114). — С. 88–93.
21. *Вилков, В. Б.* О выборе оптимального плана осуществления программы дополнительного образования или переподготовки / В. Б. Вилков, А. В. Флегонтов, А. К. Черных // Письма в Эмиссия.Оффлайн: электрон. науч. журн. ART 2553. — 2017. — Вып. 8.
22. *Вилков, В. Б.* Некоторые задачи нечеткого моделирования / В. Б. Вилков, А. К. Черных, А. В. Флегонтов, С. В. Соловьев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. — СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. — С. 248–251.
23. *Vilkov, V. B.* Transportation management of facilities for rescue operations upon disaster mitigation / V. B. Vilkov, A. K. Chernykh, S. A. Nefed'yev, Y. D. Motorygin, V. N. Gromov, V. I. Komashinskiy // International Journal of

Civil Engineering and Technology (IJCET). — 2018. — Vol. 9, is. 1. — P. 676–687.

24. *Вилков, В. Б.* Математическое обеспечение информационной технологии выбора безопасных коммуникаций в условиях чрезвычайной ситуации / В. Б. Вилков, А. В. Зыков, А. К. Черных // Вопросы оборонной техники. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму. — 2018. — № 1–2 (115–116). — С. 10–16.
25. *Vilkov, V. B.* The choice of an optimal methodology for the retraining organization of psychologists based on the use of mathematical methods / V. B. Vilkov, O. I. Shcherbakova, A. K. Chernykh, V. P. Andreev, T. L. Khudyakova, S. N. Kazakova // Revista ESPACIOS. ISSN 0798 1015. — 2018. — Vol. 39, № 20 [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.revistaespacios.com/a18v39n20/a18v39n20p16.pdf>.
26. *Zadeh, L. A.* Fuzzy sets and information granularity // Advances in Fuzzy Set Theory and Applications / ed. M. Gupta, R. Ragade, R. Yager. — Amsterdam : North-Holland Publishing Co, 1979. — P. 3–18.
27. *Kruse, R.* Foundations of Fuzzy Systems / R. Kruse, J. Gebhard, F. Klawonn. — N. Y. : John Wiley and Sons Inc., 1994. — 407 p.
28. *Zadeh, L. A.* Outline a new approach to the analysis of complex systems and decision processes // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1973. — Vol. 3, is. 1. — P. 28–44.
29. *Пегат, А.* Нечеткое моделирование и управление. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 798 с.
30. *Вилков, В. Б.* К вопросу об обосновании операций пересечения и объединения нечетких множеств. — Деп. в Центральном СПФ МО РФ 24.07.2015, инв. № В7695 ; сб. реф. деп. рук., сер. Б, вып. 112. — М. : ЦВНИ МО РФ, 2015.
31. *Тэрано, Т.* Прикладные нечеткие системы / Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. — М. : Мир, 1993. — 368 с.
32. *Штовба, С. Д.* Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. — Винница : УНИВЕРСУМ-Винница, 2001. — 71 с.
33. *Штовба, С. Д.* Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. — М. : Горячая линия — Телеком, 2007. — 288 с.
34. *Zadeh, L. A.* Decision-making in a fuzzy environment / L. A. Zadeh, R. E. Bellman // Management. Sci. — 1970. — Vol. 17. — P. 141–164.
35. *Ашманов, С. А.* Линейное программирование. — М. : Наука, 1981. — 304 с.
36. *Абрамов, Л. М.* Математическое программирование / Л. М. Абрамов, В. Ф. Капустин. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1981. — 328 с.

-
37. *Канторович, Л. В.* Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков / Л. В. Канторович, М. К. Гавурин // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. — 1949. — 301 с.
 38. *Ляшенко, И. Н.* Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черников, Н. З. Шор. — Киев : Вища школа, 1975. — 372 с.
 39. *Черных, А. К.* Прогнозирование управления перевозками в условиях чрезвычайной ситуации регионального масштаба на транспорте / А. К. Черных, Е. В. Копкин, А. А. Скопцов // Проблемы управления рисками в техносфере. — 2015. — № 2 (34). — С. 56–65.
 40. *Ху, Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М. : Мир, 1974. — 519 с.
 41. *Кривошеев, А. З.* Основы математического моделирования / А. З. Кривошеев, Ю. Н. Волков, В. Б. Вилков, Ю. Н. Савченко, Н. Г. Федоров. — СПб. : ВАТТ, 1996. — 272 с.
 42. *Vilkov, V. B.* Transportation management of facilities for rescue operations upon disaster mitigation / V. B. Vilkov, A. K. Chernykh, S. A. Nefed'yev, Yu. D. Motorygin, V. N. Gromov, V. I. Komashinskiy // International J. of Civil Engineering and Technology (IJCIET). — 2018. — Vol. 9, is. 1. — P. 676–687.
 43. *Беллман, Р.* Динамическое программирование. — М. : Изд-во иностр. лит., 1960. — 368 с.
 44. *Орлов, О. Ю.* Математическое моделирование задач материально-технического обеспечения / О. Ю. Орлов, В. Ю. Беляев, В. Б. Вилков [и др.]. — СПб. : ВАТТ, 2010. — 198 с.
 45. *Рыжиков, Ю. И.* Управление запасами. — М. : Наука, 1969. — 344 с.
 46. *Сакович, В. А.* Модели управления запасами. — Минск : Наука и техника, 1986. — 319 с.
 47. *Канторович, Л. В.* Оптимальные решения в экономике / Л. В. Канторович, А. Б. Горстко. — М. : Наука, 1972. — 229 с.
 48. *Канторович, Л. В.* Математические методы организации планирования производства. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1939. — 67 с.
 49. *Канторович, Л. В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М. : Изв. АН СССР, 1960. — 350 с.
 50. *Карманов, В. Г.* Математическое программирование. — М. : Наука, 1975. — 272 с.
 51. *Акентьев, В. С.* Методы исследования операций : учеб. пособие / В. С. Акентьев, В. Б. Вилков, Г. Н. Дубровин [и др.]. — Л. : ВАТТ, 1980. — 210 с.

-
52. *Лотоцкий, В. А.* Модели и методы управления запасами / В. А. Лотоцкий, М. С. Мандель. — М. : Наука, 1991. — 192 с.
53. *Кини, Р. Л.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р. Л. Кини, Х. Райфа. — М. : Радио и связь, 1981. — 560 с.
54. *Подиновский, В. В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. — М. : Наука, 1982. — 256 с.
55. *Гермейер, Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. — М. : Наука, 1971. — 383 с.
56. *Вилков, В. Б.* Прогнозирование оптимальных вариантов подвоза материально-технических средств в условиях чрезвычайных ситуаций регионального характера на основе теории нечетких множеств / В. Б. Вилков, И. В. Козлова // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). — 2015. — № 3. — С. 10–17.
57. *Вилков, В. Б.* Нечеткие множества в задачах моделирования оптимальных вариантов подвоза материально-технических средств / В. Б. Вилков, В. Г. Редько // Вопросы оборонной техники. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму. — 2015. — № 3–4. — С. 79–82.
58. *Башкирцев, В. Г.* Решение транспортных задач с использованием теории нечетких множеств / В. Г. Башкирцев, В. Б. Вилков // Весна науки. — СПб. : ИВЭСЭП, 2015. — С. 303.
59. *Беллман, Р.* Вопросы принятия решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М. : Мир, 1976. — 385 с.
60. *Маслаков, М. Д.* Об одном подходе к оценке эффективности математических моделей / М. Д. Маслаков, С. А. Багрецов, А. К. Черных // Проблемы управления рисками в техносфере. — 2013. — № 3 (27). — С. 67–73.
61. *Flegontov, A. V.* The evaluation of the efficiency of control systems for organizational systems / A. V. Flegontov, A. Chernykh, P. Klykov // International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP). — 2015. — P. 558–559.
62. *Асанов, М. О.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. — Ижевск : НИЦ «РХД», 2001. — 288 с.
63. *Вагнер, Г.* Основы исследования операций. — М. : Мир, 1973. — Т. 1. — 340 с.



-
64. Венгерский алгоритм решения задачи о назначениях [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://e-maxx.ru/algorithm/assignment_hungary (дата обращения: 10.12.2018).
 65. Вилков, В. Б. Вопросы информационной безопасности систем связи / В. Б. Вилков, С. Е. Сычев, А. К. Черных // Региональная информатика и информационная безопасность. Санкт-Петербургское общество информатики, вычислительной техники, систем связи и управления. — 2017. — С. 111–115.
 66. Вилков, В. Б. Об оптимальном подходе к формированию штатов силовых структур / В. Б. Вилков, А. А. Колупаев, А. К. Черных // Перспективы развития научной и образовательной деятельности в военных образовательных организациях высшего образования войск национальной гвардии Российской Федерации. — СПб., 2017. — С. 165–172.
 67. Белоусов, А. И. Дискретная математика / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев. — М. : МГТУ, 2006. — С. 79–82.
 68. Берж, К. Теория графов и ее применения. — М. : ИЛ, 1962. — 320 с.
 69. Оре, О. Теория графов. — М. : Наука, 1968. — 352 с.
 70. Кормен, Т. Х. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн. — М. : Вильямс, 2012. — 1296 с.
 71. Таха, Т. Введение в исследование операций. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.
 72. Зуховицкий, С. И. Математические методы сетевого планирования / С. И. Зуховицкий, И. А. Радчик. — М. : Наука, 1965. — 296 с.
 73. Филлипс, Д. Методы анализа сетей / Д. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. — М. : Мир, 1984, — 496 с.
 74. Dijkstra, E. W. A Note on Two Problems in Connection with Graphs, Num. Math. — 1959. — № 1. — P. 269–271.
 75. Kruskal, B. On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem // Proc. AMS. — 1956. — Vol. 7, № 1. — P. 48–50.
 76. Dei Rossi, J. A. A Cost Analysis of Minimum Distance TV Networking for Broadcasting Medical Information / J. A. Dei Rossi, R. S. Heiser, N. S. King. — Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1970 [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www.rand.org/pubs/research_memoranda/RM6204.html.
 77. Кристофидес, Н. Теория графов: Алгоритмический подход. — М. : Мир, 1978. — 434 с.

-
78. *Емеличев, В. А.* Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. — М. : Наука, 1990. — 384 с.
79. *Ford, L. R.* Maximal Flow Through a Network / L. R. Ford, D. R. Fulkerson // *Canadian J. of Math.* — 1956. — № 8 (3). — P. 399–404.
80. *Kuhn, H. W.* The Hungarian Method for the assignment problem, *Naval Research Logistics Quarterly.* — 1955. — № 2. — P. 83–97.
81. Алгоритм Куна нахождения наибольшего паросочетания в двудольном графе [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://e-maxx.ru/algo/kuhn_matching (дата обращения: 10.12.2018).
82. *Левитин, А. В.* Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. — М. : Вильямс, 2006. — 576 с.
83. *Верников, Б. М.* Лекция 8: Алгоритмы для задач о паросочетаниях / Б. М. Верников, А. Н. Шур [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://kadm.imkn.urfu.ru/files/tgr08.pdf> (дата обращения: 10.12.2018).
84. *Ловас, Л.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / Л. Ловас, М. Пламмер. — М. : Мир, 1998. — 653 с.
85. *Пивкин, В. Я.* Нечеткие множества в системах управления: метод. пособие / В. Я. Пивкин, Д. И. Бакулин, Д. И. Кореньков [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://coolnew.ru/d-i-korenekov-nechetkie-mnojestva-v-sistemah-upravleniya-pod-r.html> (дата обращения: 10.12.2018).
86. *Кини, Р. Л.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р. Л. Кини, Х. Райфа. — М. : Радио и связь, 1981. — 560 с.
87. *Ford, L. R.* A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and Application to the Hitchcock Problem / L. R. Ford, D. R. Fulkerson // *Canadian J. of Math.* — 1957. — № 9 (2). — P. 210–218.
88. *Льюс, Р.* Игры и решения / Р. Льюс, Х. Райфа. — М. : Иностран. лит., 1961. — 642 с.
89. *Бондарева, О. Н.* Обзор советских работ по теории кооперативных игр / О. Н. Бондарева, В. Б. Вилков [и др.] // *Исследование операций и статистическое моделирование.* — Л., 1977. — Вып. 4. — С. 81–126.
90. *Нейман, Дж.* Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. — М. : Наука, 1970. — 708 с.
91. *Петросян, Л. А.* Теория игр: учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, У. А. Семина. — М. : Высш. шк., 1998. — 301 с.
92. *Партхасаратхи, Т.* Некоторые вопросы теории игр двух лиц / Т. Партхасаратхи, Т. Рагхаван. — М. : Мир, 1974. — 296 с.

-
93. Оуэн, Г. Теория игр. — М. : Мир, 1971. — 230 с.
94. Воробьев, Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М. : Наука, 1985. — 273 с.
95. Schmeidler, D. The Nucleolus of a Characteristic Function Games // SIAM J. App. Math. — 1969. — Vol. 17, № 6. — P. 1163–1170.
96. Davis, M. The kernel of a cooperative game. Naval Research Logistics Quarterly / M. Davis, M. Maschler. — 1965. — Vol. 12. — P. 223–259.
97. Вилков, В. Б. N-ядро в кооперативных играх без побочных платежей // Вычислительная математика и математическая физика. — 1974. — Т. 14, № 5. — С. 1327–1331.
98. Владимирский, Б. М. Математика / M. Davis, M. Maschler. — СПб. : Лань, 2006. — 954 с.
99. Болтянский, В. Г. Математические методы оптимального управления. — М. : Наука, 1969. — 264 с.
100. Дилигенский, Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. — М. : Машиностроение, 2004. — 397 с.
101. Sasaki, T. Traffic control process of expressway by fuzzy logic / T. Sasaki, T. Akiyama // Fuzzy Sets and Systems. — 1988. — Vol. 26. — P. 165–178.
102. Voit, F. Fuzzy Control versus konventionelle Regelung am Beispiel der Metro Mailand // Automatisierungstechnik. — 1994. — Vol. 42, № 9. — P. 400–410.
103. Bork, P. Fuzzy control zur Optimierung der Kuhlwasseraufbereitung an Heiner Chemie-Reaktoranlage / P. Bork, M. Selig, H. Krummen, E. Schiller // Automatisierungstechnische Praxis. — 1993. — Vol. 35, № 5. — P. 306–309.
104. Hanakuma, Y. Ethylen plant distillation column button temperature control // Keisi. — 1989. — Vol. 32, № 8. — P. 28–39.
105. Kolios, G. Regelung eines instationar betriebenen Festbettreaktors mit Fuzzy-Kontrollregeln / G. Kolios, Ph. Aichele, U. Nieken, G. Eingenberger // Proc. Int. Conf. 4. Dortmunder Fuzzy Tage. — Dortmund, BRD, 1994. — P. 429–436.
106. Roffel, B. Fuzzy control of a polymerization reactor / B. Roffel, P. F. Chin // Hydrocarbon Processing. — 1991. — № 6. — P. 47–50.
107. Kawai, H. Engine control system // Proc. Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. — Iizuka, Japan, 1990. — P. 929–973.
108. Lee, K. C. An adaptive fuzzy current controller with neural network for field-oriented controlled induction machine / K. C. Lee, S. S. Min, J. W. Song, K. B. Cho // Proc. 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. — Iizuka, Japan, 1992. — P. 449–452.

-
109. *Murakani, S.* Weld-line tracking control of arc welding robot using fuzzy logic controller // *Fuzzy Sets and Systems*. — 1989. — Vol. 32. — P. 221–237.
 110. *Rehfeld, D.* Schweißprozessanalyse und Qualitätssicherung mit Fuzzy-Logic / D. Rehfeld, Th. Schmitz // *Proc. Int. Conf. 4. Dortmunder Fuzzy-Tage*. — Dortmund, BRD, 1994. — P. 189–197.
 111. *Altrock, C.* Fuzzy logic. Bd. 3 : Werkzeuge. — München, BRD : R. Oldenburg Verlag GmbH. — 1995. — 287 s.
 112. *Becker, M.* Verfahren zur bedarfsgesteuerten Abtauerkennung in Kalteanlagen unter Einsatz eines Fuzzy Entscheiders / M. Becker, S. von Recum // *Proc. 39 Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*. — Ilmenau, BRD, 1994. — S. 316–323.
 113. *Hakata, T.* Fuzzy control of cooling system utilizing heat storage / T. Hakata, J. Masuda // *Proc. Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks*. — Iizuka, Japan, 1990. — P. 77–80.
 114. *Tobi, T.* A practical application of fuzzy control for an airconditioning system / T. Tobi, T. Hanafusa // *International Journal of Approximate Reasoning*. — 1991. — № 5. — P. 331–348.
 115. *Watanabe, T.* AI and fuzzy-based tunnel ventilation control system // *Proc. Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks*. — Iizuka, Japan, 1990. — P. 71–75.
 116. *Heider, H.* Energiesparen durch einen adaptiven Fuzzy-Regler für Heizungsanlagen / H. Heider, V. Tryba // *Proc. Conf. 4. Dortmunder Fuzzy-Tage*. — Dortmund, BRD, 1994. — S. 282–288.
 117. *Altrock, C.* Fuzzy logic. Bd. 1 : Technologie. — München, BRD : R. Oldenburg Verlag GmbH, 1993. — 475 s.
 118. *Fujiyoshi, M.* A fuzzy automatic-combustion-control-system of refuse incineration plant / M. Fujiyoshi, T. A. Shiraki // *Proc. 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks*. — Iizuka, Japan, 1992. — P. 469–472.
 119. *Ohnishi, T.* A self-learning fuzzy control system for an urban refuse incineration plant // *Japanese Journal of Fuzzy Theory and Systems*. — 1991. — Vol. 3, № 2. — P. 187–200.
 120. *Aoki, S.* Application of fuzzy control for dead-time processes in a glass melting furnace / S. Aoki, S. Kawachi // *Fuzzy Sets and Systems*. — 1990. — Vol. 38, № 5. — P. 251–256.
 121. *Hishida, N.* Development of the operator support system applying fuzzy algorithms for glass tube molding equipment // *Proc. 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks*. — Iizuka, Japan, 1992. — P. 1097–1100.

122. *Hsieh, L. H.* Fuzzy Sensordatenauswertung für das automatisierte Entgraten / L. H. Hsieh, H. C. Groth // Proc. Conf. 4. Dortmunder Fuzzy-Tage. — Dortmund, BRD, 1994. — S. 173–180.
123. *Bien, Z.* An automatic start-up and shutdown control of drum-type boiler using fuzzy logic / Z. Bien, D. H. Hwang, J. H. Lee, H. K. Ryu // Proc. 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks. II Zuka. — Japan. — 1992. — P. 465–468.
124. *Altrock, C.* Fuzzy logic. Bd. 2 : Technologie. — München, BRD : R. Oldenburg Verlag GmbH, 1994. — 375 s.
125. *Kaufmann, A.* Gil Introduccion de la teoria de los subconjuntos borrosos a la gestion de las empresas / A. Kaufmann, J. Aluja. — Santiago de Compostela : Milladoiro, 1986. — 198 p.
126. *Borisov, A. N.* A theory of possibility for decision-making / A. N. Borisov, O. A. Krumberg // Fuzzy Sets and Systems. — 1983. — Vol. 9, № 1. — P. 34–38.
127. *Хил Лафуенте, А. М.* Финансовый анализ в условиях неопределенности. — Минск : Технология, 1998. — 150 с.
128. *Кофман, А.* Введение в теорию нечетких множеств в управлении предприятием / А. Кофман, Х. Алуха. — Минск : Высш. шк., 1992. — 223 с.
129. *Костыгов, А. М.* Нечеткая система управления движением мобильного робота / А. М. Костыгов, Д. А. Даденков, А. А. Каверин // Современные проблемы науки и образования : электрон. науч. журн. — 2013. — № 5. — 7 с.
130. Энциклопедия технологий и методик — Базовые понятия нечеткой логики Fuzzy Logic [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://patlah.ru/etm/etm-05/stir%20mahina/stir_mahina/stir_mahina-2-05.htm.
131. Нечеткая логика — новое слово в науке [Электронный ресурс]. — Режим доступа: www.fuzzyfly.chat.ru (дата обращения: 10.12.2018).
132. Система автоматического управления автомобилем [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://systemsauto.ru/another/automatic_driving.html (дата обращения: 10.12.2018).
133. *Башкирцев, В. Г.* Выбор оптимального маршрута доставки грузов при нечетко заданной взаимосвязи условий движения / В. Г. Башкирцев, В. Б. Вилков // Весна науки. — СПб ИВЕСЕП, 2017. — С. 245–257.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ	7
1.1. Историческая справка.....	7
1.2. Нечеткие множества и действия с ними.....	9
1.3. Фаззификация и дефаззификация нечеткого множества.....	18
1.4. Элементы нечеткой логики.....	21
1.5. Нечеткая задача математического программирования.....	22
1.6. Нечеткая задача векторной оптимизации.....	24
1.7. Нечеткий логический вывод.....	24
ГЛАВА 2. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ.....	34
2.1. Вводные замечания.....	34
2.2. Задача линейного программирования.....	35
2.3. Транспортная задача линейного программирования.....	40
2.4. Задача о ранце.....	42
2.5. Элементы теории управления запасами.....	44
2.6. Задача векторной оптимизации.....	51
2.7. Постановка транспортной задачи линейного программирования с нечетко заданными потребностями в материальных средствах.....	54
2.8. Математическая модель транспортной задачи с нечеткими потребностями.....	56
2.9. Алгоритм отыскания оптимального плана.....	60
2.10. Пример решения транспортной задачи с нечеткими потребностями.....	60
2.11. Задача о доставке труб для газопровода «Сила Сибири».....	65
2.12. Случай дефицита запасов.....	71
2.13. Задача о загрузке транспортного средства штучными грузами.....	76
2.14. Об одном свойстве оптимального плана задачи (2.44).....	79
2.15. Алгоритм решения задачи.....	83

2.16. Пример загрузки самолета	84
2.17. Нечеткие множества в теории управления запасами	86
2.18. Об одном свойстве оптимального плана задачи.....	90
2.19. Алгоритм и пример решения задачи.....	91
2.20. Задача по определению необходимого числа запасных деталей.....	95
2.21. Задачи векторной оптимизации с нечеткими исходными данными.....	97
ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ С НЕЧЕТКИМИ ВЕСАМИ	110
3.1. Вводные замечания.....	110
3.2. Теория сетевого планирования и управления, ее применение.....	111
3.3. Задача о кратчайшем расстоянии на ориентированной сети без циклов	115
3.4. Задача о кратчайшем маршруте на смешанном графе.....	117
3.5. Задача о кратчайшем соединении	123
3.6. Задача о максимальном потоке.....	126
3.7. Паросочетания в графах	135
3.8. Сетевой график с нечеткими продолжительностями работ	152
3.9. Задача о кратчайшем маршруте с нечетко заданным временем движения по коммуникациям	164
3.10. Задача о кратчайшем соединении с нечетко определенной экономической эффективностью коммуникаций	175
3.11. Задача о максимальном потоке с нечетко заданными пропускными способностями коммуникаций.....	186
3.12. Задача о назначении с нечетко заданными затратами	192
3.13. К вопросу об определении надежности коммуникации	196
3.14. Задача о наиболее надежном маршруте	204
3.15. Задача о наиболее надежном покрытии	212
3.16. Задача о наиболее надежном потоке заданной величины и о максимальном потоке заданной надежности.....	217
3.17. Задача о наиболее надежном назначении на произвольном графе.....	219
3.18. Трехдольные графы с нечеткими вершинами.....	224

ГЛАВА 4. ИГРЫ С НЕЧЕТКИМИ ВЫИГРЫШАМИ	242
4.1. Предмет и область применения теории игр	242
4.2. Матричные игры и понятие оптимальных стратегий для них	244
4.3. Бескоалиционные игры	245
4.4. Игры с «природой»	248
4.5. Кооперативные игры	253
4.6. Биматричные игры с нечеткими множествами стратегий	255
4.7. Игры с «природой», когда множество ее стратегий нечеткое	257
4.8. Кооперативные игры с нечеткими множествами стратегий игроков	260
4.9. Матричные игры с нечеткими выигрышами	263
4.10. Бескоалиционные игры с нечеткими выигрышами	273
ГЛАВА 5. НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ	281
5.1. Историческая справка	281
5.2. Управление смесителем воды	285
5.3. Управление мобильным роботом	288
5.4. Парковка автомобиля	294
5.5. Организационное управление	302
5.5.1. Оценка качества решения по его экономической и оперативной характеристикам	302
5.5.2. Выбор оптимального маршрута доставки грузов при нечетко заданных условиях движения	307
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	314
ЛИТЕРАТУРА	316

*Александр Владимирович ФЛЕГОНТОВ,
Валерий Борисович ВИЛКОВ,
Андрей Климентьевич ЧЕРНЫХ*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
ПРИ НЕЧЕТКИХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**

Монография



Зав. редакцией
литературы по информационным технологиям
и системам связи *О. Е. Гайнутдинова*
Ответственный редактор *Т. С. Спирина*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д. 1, лит. А
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71



Подписано в печать 11.11.19.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100^{1/16}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 26,98. Тираж 100 экз.

Заказ № 021-20.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.