

ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Вейвлеты и их использование

И.М. Дремин, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло

Цель этого обзора состоит в том, чтобы дать полезное пособие тем, кто собирается применять дискретное вейвлет-преобразование в практических расчетах. Введено понятие вейвлетов и кратко описано их использование в практических вычислениях и различных приложениях без строгих доказательств математических утверждений, ссылки на которые приведены в цитируемой литературе. Многомасштабный анализ и быстрое вейвлет-преобразование стали практически синонимом дискретного вейвлет-преобразования. Правильный выбор вейвлета и использование нестандартного матричного умножения оказываются зачастую весьма существенными для решения поставленной задачи. Анализ различных функций с помощью вейвлетов позволяет выявить фрактальные свойства, особенности функции и т.п. Вейвлет-преобразование операторных выражений помогает в решении некоторых уравнений. В практических приложениях приходится часто иметь дело с дискретными наборами чисел, и тогда возникает проблема устойчивости вейвлет-преобразования и соответствующих численных алгоритмов. После обсуждения всех этих вопросов мы переходим к практическим применениям вейвлет-анализа. Они столь многочисленны, что нам приходится ограничить себя несколькими примерами. Мы будем благодарны всем за конкретные предложения, которые позволили бы приблизиться к цели, сформулированной в первой фразе аннотации.

PACS numbers: 02.60. – x, 02.70. – c, 05.40. – a, 87.57. – s \

Содержание

1. Введение (465).
2. Вейвлеты для начинающих (467).
3. Основные понятия и вейвлеты Хаара (469).
4. Многомасштабный анализ и вейвлеты Добеши (472).
5. Быстрое вейвлет-преобразование и койфлеты (475).
6. Выбор вейвлета (476).
7. Многомерные вейвлеты (478).
8. Преобразование Фурье и вейвлет-преобразование (479).
9. Вейвлеты и операторы (481).
10. Нестандартное матричное умножение (482).
11. Регулярность и дифференцируемость (483).
12. Дважды микролокальный анализ (484).
13. Вейвлеты и фракталы (487).
14. Дискретизация и устойчивость (488).
15. Некоторые применения (490).
 - 15.1. Физика.
 - 15.2. Авиация (турбины).
 - 15.3. Медицина и биология.
 - 15.4. Сжатие данных.
 - 15.5. Фокусировка микроскопа.
16. Заключение (498).
17. Приложение (499).

- 17.1. Многомасштабный анализ.
 - 17.2. Операторы Калдерона – Зигмунда.
 - 17.3. Связь с разложением Литтлвуда – Пали.
- Список литературы (500).

1. Введение

Вейвлеты стали необходимым математическим инструментом во многих исследованиях. Их используют в тех случаях, когда результат анализа некоего сигнала¹ должен содержать не только простое перечисление его характерных частот (масштабов), но и сведения об определенных локальных координатах, при которых эти частоты проявляют себя. Таким образом, анализ и обработка нестационарных (во времени) или неоднородных (в пространстве) сигналов разных типов представляют собой основное поле применений вейвлет-анализа. Общий принцип построения базиса вейвлет-преобразования состоит в использовании масштабного преобразования и смещений. Любой из наиболее часто применяемых вейвлетов порождает полную ортонормированную систему функций с конечным носителем,

И.М. Дремин, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 117924 Москва, Ленинский просп. 53, Российская Федерация
Тел. (095) 132-29-29. Факс (095) 135-85-53
E-mail: dremin@lpi.ru

Статья поступила 13 декабря 2000 г.

¹ Термин "сигнал" применяется нами для обозначения любого упорядоченного набора численно зафиксированной информации о каком-либо процессе, объекте, функции и т.п. Сигнал может быть функцией каких-либо переменных, будь то время, пространственные координаты или какие-то другие (вообще говоря, n -мерные) величины. Под "анализом" сигнала имеется в виду не только его чисто математическое преобразование (в частности, вейвлет-преобразование), но и получение на основе этого преобразования выводов о специфике соответствующего процесса или объекта.

построенных с использованием масштабного преобразования и сдвигов. Именно за счет изменения масштабов вейвлеты способны выявить различие в характеристиках на разных шкалах, а путем сдвига проанализировать свойства сигнала в разных точках на всем изучаемом интервале. В силу свойства полноты этой системы возможно сделать обратное преобразование. При анализе нестационарных сигналов за счет свойства локальности вейвлеты получают существенное преимущество перед преобразованием Фурье, которое дает нам только глобальные сведения о частотах (масштабах) исследуемого сигнала, поскольку используемая при этом система функций (синусы, косинусы или комплексные экспоненты) определена на бесконечном интервале². Однако, как мы увидим в дальнейшем, используются и более общие определения вейвлетов и их разные модификации, допускающие применение довольно широкого класса функций. Согласно И. Мейеру [1], "вейвлет-базисы обладают универсальной применимостью: "все, что попадает под руку", будь то обычная или обобщенная функция, представимо в виде вейвлет-ряда, и, в отличие от ситуации с рядами Фурье, коэффициенты вейвлет-рядов передают свойства функции или распределения просто, точно и надежно".

Литература, посвященная вейвлетам, весьма обширна, и нетрудно получить огромное количество ссылок на нее, посплав соответствующий запрос в Интернет. Математические проблемы подробно рассмотрены во многих монографиях (см., например, [1–5]). Вводные курсы по вейвлетам читатель может найти в книгах [6–9]. Прекрасная обзорная статья, ориентированная на начинающих заниматься этим предметом и интересующихся его применением, с демонстрацией вейвлет-преобразований некоторых сигналов, была опубликована в этом журнале около четырех лет тому назад [10] и вызвала широкий интерес. Однако в ней были рассмотрены в основном лишь непрерывные вейвлет-преобразования, а дискретные упомянуты только вскользь³. Такой выбор был продиктован тем, что непрерывные вейвлеты допускают несколько более наглядное и зрелищное представление результатов анализа данного сигнала в виде локальных максимумов и скелетонных графиков вейвлет-коэффициентов при непрерывных переменных.

В то же время в основной своей массе статьи, касающиеся практического использования вейвлет-преобразования, содержат результаты расчетов, в которых применяются дискретные вейвлеты. Именно они и будут являться предметом этой статьи. Такое предпочтение, отдаваемое дискретным вейвлетам, связано с тем, что обычно используемые базисы на основе непрерывных вейвлетов не являются, строго говоря, ортонормированными, поскольку элементы базиса бесконечно дифференцируемы и экспоненциально спадают на бесконечности,

что противоречит строгой ортонормируемости. С дискретными вейвлетами этих проблем не возникает. В силу этого дискретные вейвлеты приводят обычно к более точному преобразованию и представлению сигнала и в особенности к его обратному восстановлению после процедуры сжатия. Более того, они лучше подходят для теории и практики передачи информации. Эти замечания отнюдь не означают, что мы настаиваем на использовании только дискретных вейвлетов для анализа сигналов. Наоборот, иногда непрерывные вейвлеты приводят к более ясному и аналитически представимым результатам при анализе сигналов, нежели дискретные вейвлеты.

Выбор конкретного вейвлета, будь то дискретный или непрерывный, зависит от данного анализируемого сигнала. Разные функции удается анализировать тем или иным способом, и критерием успеха обычно является простота получаемого разложения. Интуиция и практический опыт исследователя оказываются при этом решающим фактором. В качестве аналога зачастую приводится пример с использованием систем исчисления. Применение десятиричной либо двоичной системы, либо системы с натуральным логарифмом в качестве основания определяется удобством и традициями. Однако применение римских цифр, например, оказывается абсолютно исключенным, когда начинают иметь дело с умножением чисел. В то же время решение разных задач и их графическое представление может потребовать больших или меньших усилий в зависимости от правильности выбора соответствующей системы, и наша интуиция при этом играет важную роль.

Программы, в которых употребляются вейвлеты, находят широкое применение не только в научных разработках, но и в чисто коммерческих проектах. Некоторые из них уже описаны в книгах (см., например, [11]). В то же время прямой переход от чистой математики к компьютерным программам и практическим приложениям отнюдь не тривиален и зачастую требует как индивидуального подхода к изучаемой задаче, так и правильного выбора используемого вейвлета. Наша основная цель здесь состоит в том, чтобы описать подходящим способом тот "мост", который соединяет математическое конструирование вейвлетов и построение базисов вейвлет-преобразований с практической обработкой сигналов. Именно практические приложения, рассмотренные А. Гроссманом и Ж. Морле [12, 13], привели к быстрому прогрессу в теории вейвлетов, связанному с работами И. Мейера, И. Добеши и др.

Дискретные вейвлеты выглядят вначале несколько необычными для тех, кто привык иметь дело с аналитическими вычислениями, потому что они не могут быть записаны в аналитической форме (кроме простейшего из них) или же представлены в виде решений каких-то дифференциальных уравнений, а характеризуются набором численных коэффициентов в некоторых функциональных уравнениях, содержащих изменение масштаба и сдвиг аргументов. Более того, в практических вычислениях конкретная форма вейвлетов даже не выписывается, а используются только величины этих коэффициентов функциональных уравнений. Вейвлет-базис задается с помощью итерационного алгоритма с изменением масштаба и сдвигом единственной функции. Это приводит к исключительно важной процедуре многомасштабного анализа, который в свою очередь делает возможными быстрые численные расчеты локальных

² Сравнение вейвлет-преобразования с так называемым оконным (на конечном интервале) преобразованием Фурье будет обсуждено кратко в дальнейшем.

³ В целях краткости изложения мы будем в дальнейшем употреблять термины "дискретные" и "непрерывные" вейвлеты, всегда подразумеваемая под этим "вейвлеты, служащие для проведения дискретных и непрерывных преобразований". Хотя "дискретные" вейвлеты могут обладать достаточно высокой степенью гладкости, это не приведет к неоднозначности, так как мы будем использовать словосочетание "непрерывные вейвлеты" только в указанном выше смысле.

характеристик на разных масштабах. Каждая шкала содержит независимую неперекрывающуюся информацию о сигнале в виде вейвлет-коэффициентов, которые легко вычисляются с помощью итерационной процедуры, известной под названием *быстрого вейвлет-преобразования*. В совокупности они решают проблему полного анализа сигнала и соответственно существенно упрощают *диагноз* вызвавшего его процесса.

После того как такой анализ проведен, можно, если необходимо, *сжать* полученные данные, отбросив некоторую несущественную часть *закодированной* информации. Это делается с помощью так называемой процедуры *квантования*, в процессе которой обычно приписываются разные весовые множители различным полученным вейвлет-коэффициентам. Это помогает, в частности, удалить некоторые статистические флуктуации и повысить роль динамических характеристик сигнала. В то же время это может привести к неправильному диагностированию, если сжатие информации проведено неаккуратно. Аккуратно проведенная процедура приводит обычно к существенному сокращению необходимой компьютерной *памяти* и требований к *передаче* информации, а значит, и к заметному уменьшению расходов. Число нулевых моментов у вейвлетов играет важную роль на этом этапе. К сожалению, при сжатии неизбежно появляются систематические ошибки. Получающиеся погрешности пропорциональны величине отброшенных вейвлет-коэффициентов, и потому становится особенно существенным знание нерегулярностей в поведении сигнала. Конечно, качество воспроизводства сигнала после процедуры сжатия уже не может быть идеальным. Ясно, что эти две цели являются антагонистическими. Тем не менее обратное преобразование (*синтез*) все еще остается достаточно устойчивым и воспроизводит наиболее важные характеристики начального исследуемого сигнала, если используются правильные методы. Свойства регулярности используемых вейвлетов становятся особенно существенными на этапе восстановления сигнала. Искажения в реконструированном сигнале, возникающие в результате квантования, можно сделать сравнительно небольшими даже при весьма заметном сжатии. Поскольку та часть сигнала, которая при этом не воспроизводится, часто является шумом, оказывается, что в результате такой операции мы избавляемся от шумовых помех. Именно на этом этапе преимущество дискретных вейвлетов проявляется особенно ярко.

Таким образом, задачи обработки сигналов состоят в точном преобразовании, эффективном сжатии, быстрой передаче и, наконец, аккуратном восстановлении начального сигнала в точке его назначения. Иногда для решения поставленной задачи и достижения цели достаточно только первого этапа преобразования сигнала с последующей интерпретацией полученных результатов (диагностикой).

Было доказано, что любую функцию можно представить в виде суперпозиции вейвлетов, и существует устойчивый численный алгоритм вычисления коэффициентов при таком разложении. Более того, эти коэффициенты полностью характеризуют функцию, и ее можно восстановить численно устойчивым способом непосредственно по этим коэффициентам. Из-за их уникальных свойств вейвлеты нашли применение в функциональном анализе в математике, при изучении (мульти)фрактальных характеристик, сингулярностей и

сильных локальных осцилляций функций, для решения некоторых дифференциальных уравнений, в распознавании образов, при сжатии изображений и звука, при цифровой обработке геометрических объектов, для решения многих задач в физике, биологии, медицине, технике и других областях (см. недавно опубликованные книги [11, 14–17]). Этот список, конечно, неполон.

Следует, однако, подчеркнуть, что несмотря на мощь этого метода цели вейвлет-анализа довольно скромные. Он помогает распознать и описать некоторые до сих пор скрытые характеристики сигнала, в частности, его симметрии, но не претендует на объяснение лежащей в их основе динамики и физической природы, хотя и может дать некоторые ценные указания в этом направлении. Вейвлеты предоставляют новые возможности в оптимизации такого описания, поскольку во многих случаях дают нам наилучшее из известных представление сигнала. С помощью вейвлетов мы просто начинаем видеть привычные вещи несколько отчетливее. Для описания же динамики при обычном подходе разрабатываются модели процесса, которые по своей идее должны содержать основные механизмы, приводящие к наблюдаемым эффектам. С целью выявления оптимальных алгоритмов вейвлет-преобразования были разработаны некоторые (все еще дебатированные) энергетические и энтропийные критерии. Они являются внутренними критериями по отношению к самим алгоритмам. Однако выбор наилучшего алгоритма обусловлен также объективно поставленной целью его практического применения, т.е. некоторыми внешними критериями. Именно поэтому при практическом использовании того или иного "теоретически идеального алгоритма" необходимо проверить его работоспособность, подвергнув его всесторонней оценке экспертов и пользователей для выяснения его преимуществ по сравнению с использовавшимися ранее методами.

Несмотря на очень активные исследования и полученные впечатляющие результаты разнообразие подходов при вейвлет-анализе наводит на мысль, что, возможно, эти исследования еще не вошли в завершающую стадию. Мы попытаемся описать ситуацию в ее *status nascendi*.

Основная часть этой обзорной статьи (разделы 2–14) посвящена описанию общих свойств вейвлетов и использованию вейвлет-преобразования в компьютерных расчетах. Некоторые применения к решению разнообразных задач приведены в разделе 15.

2. Вейвлеты для начинающих

Каждый сигнал можно охарактеризовать его средними (по некоторым интервалам) значениями (в англоязычной литературе при этом говорят о "тренде") и его изменениями вокруг тренда. Эти колебания вокруг усредненных значений мы будем называть *флуктуациями* независимо от причины их появления, будь они вызваны динамическими, стохастическими, психологическими, физиологическими или какими-то другими факторами. При обработке сигнала обычно интересуются величиной флуктуаций на разных масштабах, потому что по ним можно получить сведения о происхождении этих флуктуаций. Цель вейвлет-анализа как раз и состоит в том, чтобы предоставить средства для проведения такого исследования.

На самом деле физики, имеющие дело с экспериментальными гистограммами, анализируют полученные данные на разных масштабах, проводя усреднение по интервалам с разными размерами. Именно такой упрощенный конкретный пример вейвлет-анализа и рассматривается в этом разделе. Для определенности вообразим ситуацию, когда некоторый экспериментатор измеряет определенную зависимость $f(x)$ на интервале $0 \leq x \leq 1$, и наилучшее разрешение по x , допустимое используемым им прибором, ограничено $1/16$ -й от всего интервала. Таким образом, полученный результат состоит из 16 чисел, представляющих усредненные значения $f(x)$ в каждом из этих интервалов и может быть изображен в виде гистограммы с 16 отрезками, показанной в верхней части рис. 1. Она описывается следующей формулой:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{15} s_{4,k} \varphi_{4,k}(x), \tag{2.1}$$

где $s_{4,k} = f(k/16)/4$ и $\varphi_{4,k}$ определяется как "ступенька" с единичной нормой (т.е. высотой 4) и шириной $1/16$,

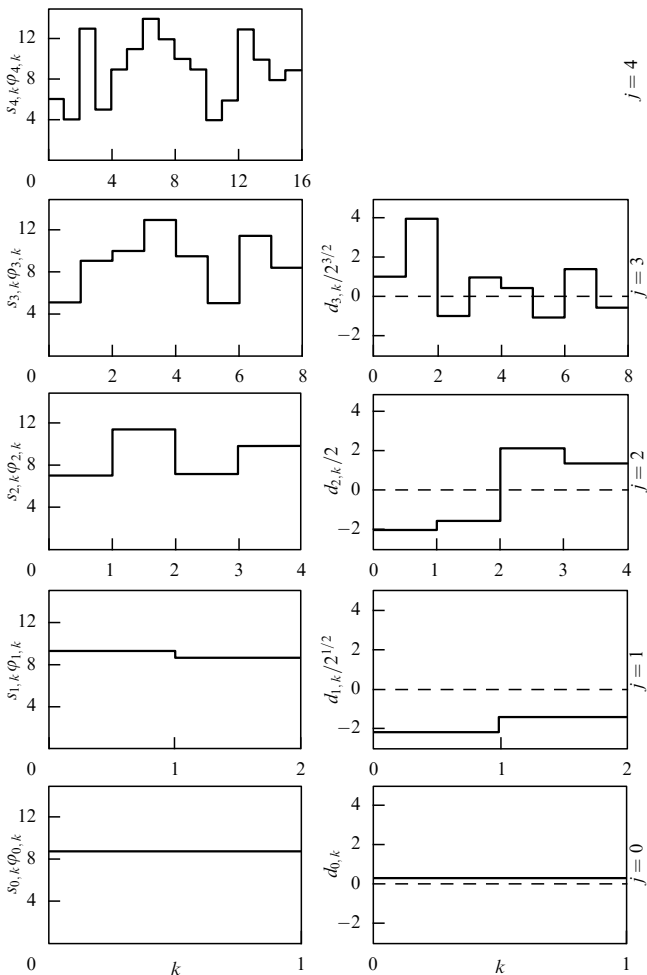


Рис. 1. Гистограмма и ее вейвлет-разложение. Начальная гистограмма показана в верхней части рисунка. Она соответствует уровню $j = 4$ с 16 интервалами (формула (2.1)). Следующий уровень $j = 3$ показан ниже. Средние значения по двум соседним интервалам предыдущего уровня приведены слева. Они отвечают восьми членам первой суммы в формуле (2.4). Справа показаны вейвлет-коэффициенты $d_{3,k}$. Остальные рисунки для уровней $j = 2, 1, 0$ получаются тем же способом.

отличная от нуля только на k -м отрезке. При произвольном j это условие записывается в виде $\int |\varphi_{j,k}|^2 dx = 1$, где интегрирование ведется по интервалам длины $\Delta x_j = 1/2^j$. Соответственно функции $\varphi_{j,k}$ имеют вид $\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$, где функция φ представляется "ступенькой" единичной высоты на таком интервале. Индекс $j = 4$ связан с полным числом шагов в выбранном примере при последующей процедуре усреднения. На следующем уровне изучения поведения функции в интервалах длины $1/8$ проводится усреднение по двум соседним интервалам начальной гистограммы, как это показано на гистограмме, приведенной на рис. 1 под начальной гистограммой. С точностью до нормировочного множителя полученные средние значения задаются коэффициентами $s_{3,k}$, а разность между этими уровнями, показанная справа от второй гистограммы, обозначается как $d_{3,k}$. В общем случае при произвольном j запишем нормированные суммы и разности в виде

$$s_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [s_{j,2k} + s_{j,2k+1}], \quad d_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} [s_{j,2k} - s_{j,2k+1}], \tag{2.2}$$

или, для обратного преобразования (синтеза),

$$s_{j,2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (s_{j-1,k} + d_{j-1,k}), \quad s_{j,2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (s_{j-1,k} - d_{j-1,k}). \tag{2.3}$$

Поскольку при попарном разбиении интервалов эта нормированная разность имеет противоположные знаки в соседних интервалах начального уровня, введем функцию ψ , равную 1 и -1 соответственно в этих интервалах, а также нормированные функции $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$. Это позволит записать ту же самую функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^7 s_{3,k} \varphi_{3,k}(x) + \sum_{k=0}^7 d_{3,k} \psi_{3,k}(x). \tag{2.4}$$

Последовательно перейдем тем же способом к более "широким" уровням $j = 2, 1, 0$, проводя усреднения в интервалах длины $1/4, 1/2$ и 1 соответственно, как это указано на рис. 1, где всюду справа приводятся соответствующие разности. На уровне с наибольшей шириной 1 имеется только одно среднее значение по всему интервалу, которое обозначается как $s_{0,0}$, и функция $f(x)$ переписывается в виде

$$f(x) = s_{0,0} \varphi_{0,0}(x) + d_{0,0}(x) \psi_{0,0}(x) + \sum_{k=0}^1 d_{1,k} \psi_{1,k}(x) + \sum_{k=0}^3 d_{2,k} \psi_{2,k}(x) + \sum_{k=0}^7 d_{3,k} \psi_{3,k}(x). \tag{2.5}$$

Функции $\varphi_{0,0}(x)$ и $\psi_{0,0}(x)$ приведены на рис. 2. Функции $\varphi_{j,k}(x)$ и $\psi_{j,k}(x)$ описывают нормированные условием сохранения нормы, сжатые в 2^j раз и смещенные по оси x модификации этих функций. В следующем разделе мы приведем явные формулы для них в этом частном случае, назвав их скейлинг-функциями (или масштабными функциями) и вейвлетами Хаара. При практическом анализе сигналов они (и их более сложные варианты) называются широкополосными и узкополосными фильтрами соответственно, потому что они отфильтровывают компоненты сигнала на больших и малых масштабах. Последующие слагаемые в уравнении (2.5) указывают на флуктуации (разности $d_{j,k}$) во все

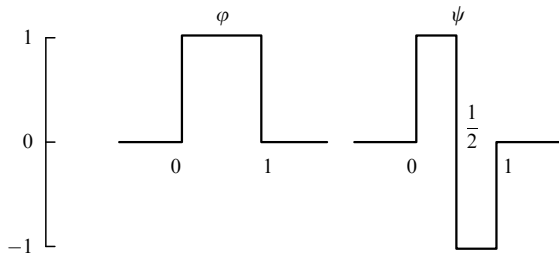


Рис. 2. Скейлинг-функция $\varphi(x) \equiv \varphi_{0,0}(x)$ и "материнский вейвлет" $\psi(x) \equiv \psi_{0,0}(x)$ Хаара.

более мелких интервалах с большими j . Во всех случаях (2.1)–(2.5) остается ровно 16 коэффициентов, описывающих одну и ту же функцию. В общем случае всего имеется 2^j коэффициентов $s_{j,k}$ и $2^{j_n} - 2^j$ коэффициентов $d_{j,k}$, где j_n обозначает начальный уровень с наименьшими интервалами (в приведенном выше примере $j_n = 4$).

Все эти записи функции $f(x)$ (соотношения (2.1)–(2.5)) абсолютно эквивалентны математически. Однако последняя из них, представляющая результат вейвлет-преобразования изучаемой функции, напрямую вскрывает флуктуационную структуру сигнала на разных масштабах j и в разных точках k , содержащуюся в наборе коэффициентов $d_{j,k}$, тогда как начальная гистограмма (2.1) скрывает флуктуационную картину под большим фоном общего тренда. Окончательная формула (2.5) содержит общую среднюю величину сигнала по всему интервалу, представленную коэффициентом $s_{0,0}$, и все его флуктуации с четко указанным масштабом и положением каждой из них в 15 нормированных коэффициентах $d_{j,k}$, а начальная гистограмма указывает только на нормированные средние величины $s_{j,k}$ в 16 изученных интервалах. Более того, при практическом использовании последнее вейвлет-представление предпочтительнее, так как для достаточно гладких функций, сильно меняющихся только при некоторых дискретных значениях их аргументов, многие из d -коэффициентов в соотношениях типа формулы (2.5) при большом разрешении j оказываются очень маленькими по сравнению с "информативными" d -коэффициентами и ими можно пренебречь, что упрощает расчеты и хранение информации. Полосы нулей (или близких к нулю значений коэффициентов) указывают те области, где функция достаточно гладкая.

На первый взгляд этот упрощенный пример кажется довольно тривиальным. Однако для более сложных функций при большом числе измеренных значений с использованием некоторых более сложных вейвлетов такая процедура приводит к детальному анализу сигнала с возможностью впоследствии сжать полученную информацию, а затем и воспроизвести сигнал с хорошей точностью. Этот пример служит также хорошей иллюстрацией подхода с рассмотрением последовательных приближений к f на разных масштабах, носящего название *многомасштабного анализа* и обсуждаемого подробнее в дальнейшем.

3. Основные понятия и вейвлеты Хаара

При анализе любого сигнала надо прежде всего выбрать соответствующий базис, т.е. систему функций, которые будут играть роль "функциональных координат". В

большинстве случаев нам приходится иметь дело с сигналами, которые представлены квадратично-интегрируемыми функциями, определенными на вещественной оси (или квадратично-суммируемыми последовательностями комплексных чисел). Они образуют бесконечномерное гильбертово пространство $L^2(R)$ ($l^2(Z)$). Для них определено скалярное произведение в виде

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}(x) dx, \quad (3.1)$$

где черта сверху обозначает операцию комплексного сопряжения. Гильбертово пространство всегда имеет ортонормальные базисы, т.е. семейства векторов (или функций) e_n таких, что

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}, \quad (3.2)$$

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx = \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2. \quad (3.3)$$

В гильбертовом пространстве существуют и более общие семейства линейно независимых базисных векторов, носящие название базиса Рисса (Riesz), для которых условие (3.3) обобщается на два неравенства

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \beta \|f\|^2 \quad (3.4)$$

с $\alpha > 0$, $\beta < \infty$. Это безусловные базисы в том смысле, что для них порядок размещения векторов не играет никакой роли. Любой ограниченный оператор, у которого его обратный оператор также ограничен, преобразует ортонормальный базис в общем случае в базис Рисса.

Кроме того, иногда мы будем рассматривать и пространства $L^p(R)$ ($1 \leq p < \infty$; $p \neq 2$), у которых норма определена как

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int |f(x)|^p dx \right]^{1/p}, \quad (3.5)$$

а также и некоторые другие банаховы пространства⁴ (см. разделы 11, 12).

Преобразование Фурье с его бесконечно протяженным тригонометрическим базисом хорошо подходит для анализа стационарных сигналов. При этом норму $\|f\|$ часто называют энергией. Для нестационарных сигналов оказывается, например, важным определить момент времени, когда та или иная частотная характеристика внезапно изменилась. Поэтому базисные функции должны иметь конечную область определения. Как раз такими функциями и являются вейвлеты. С их помощью можно покрыть все пространство, используя смещение по-разному сжатых вариантов одной-единственной функции. Именно благодаря этому можно каждый

⁴ Это линейные пространства, у которых норма определена, но не выводится непосредственно из скалярного произведения. Они обладают свойством полноты по отношению к норме (пространства $L^p(R)$ ($1 \leq p < \infty$; $p \neq 2$) являются, в частности, представителями таких пространств).

сигнал разложить в вейвлет-ряд (или интеграл). При этом каждая частотная компонента изучается с разрешением, отвечающим исследуемому масштабу. Описанная выше процедура нормировки функций $\varphi_{j,k}$ непосредственно связана с требованием сохранения нормы сигнала при разных формах его разложения.

Однако выбор анализирующего вейвлета не определен заранее. Его следует выбирать в соответствии с решаемой проблемой. Простота оперирования с вейвлетом (в частности, численных расчетов) и представления результатов (минимизация используемых параметров) играет важную роль. Неудачный выбор конкретной формы вейвлета может даже привести к невозможности решения задачи, как это было продемонстрировано в указанном выше примере с римскими цифрами. Имеется несколько методов оценки того, насколько хорошо выбранная функция подходит для решения данной проблемы (см. раздел 6).

Теперь же давайте попытаемся построить функции, удовлетворяющие выдвинутым выше критериям. "Интеллектуальная догадка" подскажет нам, что хорошо было бы связать эту функцию $\varphi(x)$ с ее же сдвинутыми и сжатыми модификациями. Простейшее линейное соотношение с числом коэффициентов $2M$ можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \varphi(2x - k) \quad (3.6)$$

с двоичным изменением масштаба (фактор 2) и целочисленными трансляциями k . На первый взгляд выбранная нормировка коэффициентов h_k с выделением множителя $\sqrt{2}$ выглядит весьма произвольной. В действительности же она определяется *a posteriori* традиционной формой быстрых алгоритмов для их вычисления (см. ниже уравнения (5.2) и (5.3)), а также нормировкой функций $\varphi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x)$. Она используется во всех упомянутых выше монографиях. Однако иногда (см. [2, гл. 7]) она заменяется на $c_k = \sqrt{2}h_k$.

При дискретных значениях параметров сжатия и сдвига получаем дискретные вейвлеты. Величина масштабирующего множителя определяет размер ячеек выбранной решетки. Целое число M определяет число коэффициентов h_k и длину области задания вейвлета. Они взаимосвязаны, потому что из определения h_k для ортонормальных базисов

$$h_k = \sqrt{2} \int \varphi(x) \bar{\varphi}(2x - k) dx \quad (3.7)$$

следует, что только конечное число коэффициентов h_k отличны от нуля, если φ заданы на конечном интервале. Условие нормировки задается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (3.8)$$

Функция $\varphi(x)$, получаемая из решения уравнения (3.6), называется *скейлинг-функцией* или *масштабной функцией*⁵. Если она уже известна, то можно построить

базисный вейвлет (или "материнский вейвлет") $\psi(x)$ по формуле

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \varphi(2x - k), \quad (3.9)$$

где

$$g_k = (-1)^k h_{2M-k-1}. \quad (3.10)$$

Простейший пример, естественно, получается при $M = 1$ с двумя отличными от нуля коэффициентами h_k , равными $1/\sqrt{2}$, т.е. при уравнении, приводящем к скейлинг-функции Хаара $\varphi_H(x)$:

$$\varphi_H(x) = \varphi_H(2x) + \varphi_H(2x - 1). \quad (3.11)$$

Решением этого функционального уравнения является функция

$$\varphi_H(x) = \theta(x) \theta(1 - x), \quad (3.12)$$

где $\theta(x)$ обозначает функцию Хевисайда, равную 1 при положительных значениях аргумента и 0 при отрицательных. Условия на границах имеют вид $\varphi_H(0) = 1, \varphi_H(1) = 0$. Эти условия оказываются важными для упрощения численных расчетов вейвлет-коэффициентов, когда рассматриваются два соседних интервала.

"Материнский вейвлет" выглядит как

$$\psi_H(x) = \theta(x) \theta(1 - 2x) - \theta(2x - 1) \theta(1 - x) \quad (3.13)$$

с условиями на границах $\psi_H(0) = 1, \psi_H(1/2) = -1, \psi_H(1) = 0$. Это и есть *вейвлет Хаара* [18], известный с 1910 г. и широко использовавшийся в функциональном анализе. Именно этот пример и был рассмотрен в предыдущем разделе при разложении гистограмм. Скейлинг-функция $\varphi_H(x)$ и "материнский вейвлет" $\psi_H(x)$ показаны на рис. 2. Это — первые вейвлеты из семейства вейвлетов с конечным носителем $M\psi: \psi_H = {}_1\psi$. Вейвлет обладает свойством локальности, так как его область задания ограничена, поскольку $2M - 1 = 1$.

Масштабированные и смещенные версии скейлинг-функции φ и "материнского вейвлета" ψ выглядят как

$$\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad (3.14)$$

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k). \quad (3.15)$$

Они образуют ортонормальный базис, как это можно (и нетрудно в случае вейвлетов Хаара) проверить⁶. Выбор в качестве масштабирующего множителя 2^j с целочисленными значениями j приводит к однозначной и самосогласованной процедуре вычисления вейвлет-коэффициентов. В принципе существует алгоритм получения вейвлетов с конечным носителем для произвольного рационального числа вместо 2. Однако только для этого множителя удалось показать, что имеется такой алгоритм, при котором гладкость вейвлета линейно растет с ростом его носителя. Например, при множе-

⁵ Очень часто ее называют также "отцовским вейвлетом", но мы не будем пользоваться этим термином.

⁶ Мы опять перешли к общему случаю и потому опустили индекс H , поскольку те же формулы будут использоваться и для других вейвлетов.

ле 3 эта гладкость возрастает лишь логарифмически с ростом области задания. По-видимому, фактор 2 здесь выделен так же, как в музыке, где октавы играют определяющую роль. Если масштабный множитель равен 2, то фурье-образ "материнского вейвлета" сосредоточен в основном на интервале от π до 2π . Однако в некоторых практических приложениях бывает необходимо получить лучшую локализацию по частоте, и потому полезно иметь вейвлет-базисы с более узкой частотной полосой. Одним из решений этой проблемы является использование вейвлетов с дробными масштабными множителями, но существуют и другие возможности.

Как и всякий вейвлет, вейвлет Хаара знакопеременен, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (3.16)$$

Это условие является общим для всех вейвлетов. Оно называется *условием осцилляций* или *знакопеременности*. Из него становится понятным выбор названия "вейвлет", переводимого на русский язык как "маленькая волна". Вейвлет можно представить себе как некоторую функцию, осциллирующую в ограниченном интервале подобно волне и затухающую вне него. Это — абсолютно необходимое условие для построения безусловного устойчивого базиса. Мы приходим к заключению, что при специальном выборе коэффициентов h_k получаются "материнские вейвлеты" конкретного вида, образующие ортонормальный базис.

Любую функцию f из $L^2(\mathbb{R})$ можно разложить на некотором заданном уровне разрешения j_n в ряд вида

$$f = \sum_k s_{j_n, k} \varphi_{j_n, k} + \sum_{j \geq j_n, k} d_{j, k} \psi_{j, k}. \quad (3.17)$$

На самом детальном уровне $j_n = j_{\max}$ остаются только s -коэффициенты и получается так называемое представление скейлинг-функцией

$$f(x) = \sum_k s_{j_{\max}, k} \varphi_{j_{\max}, k}. \quad (3.18)$$

В случае вейвлетов Хаара оно в точности совпадает с изначальной экспериментальной гистограммой при наилучшем доступном разрешении. Поскольку мы заинтересованы в анализе этой гистограммы на разных уровнях разрешения, такое представление используется только в качестве начального условия. Конечное представление тех же самых данных в виде (3.17) выявляет все флуктуации, имеющиеся в сигнале. Вейвлет-коэффициенты $s_{j, k}$ и $d_{j, k}$ можно вычислить по формулам

$$s_{j, k} = \int f(x) \varphi_{j, k}(x) dx, \quad (3.19)$$

$$d_{j, k} = \int f(x) \psi_{j, k}(x) dx. \quad (3.20)$$

Однако при этом компьютерные расчеты занимают довольно длительное время, и потому на практике их значения находят с помощью быстрого вейвлет-преобразования, обсуждаемого ниже.

Со ссылкой на конкретный частный случай вейвлетов Хаара эти коэффициенты зачастую называют суммами (s) и разностями (d), связывая со средними значениями и флуктуациями соответственно.

Физики, знакомые с экспериментальными гистограммами, легко признают здесь обобщение того частного примера, который был рассмотрен в предыдущем разделе. Первая сумма в (3.17) со скейлинг-функциями $\varphi_{j, k}$ содержит средние⁷ значения f по диадным интервалам $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. Второй член содержит все флуктуации f на данном интервале. Эти флуктуации проистекают из всех меньших интервалов, заключенных внутри данного и соответствующих большим значениям параметра масштабирования j . Можно сказать, что этот член как бы "фокусирует" наше внимание на все более тонких деталях изучаемого сигнала. Это последовательное изучение свойств сигнала происходит через равные промежутки, как следует из постоянства масштабирующего множителя, причем детали размером 2^{-j} располагаются в точках $k2^{-j}$. На низшем уровне разрешения j_0 (наиболее широких интервалах) первая сумма содержит всего один член, дающий общее усредненное взвешенное значение сигнала $\langle f \rangle = s_{j_0, k_0}$, где k_0 обозначает центр гистограммы. Вторая сумма в (3.17) показывает флуктуации на всех без исключения уровнях. На следующем уровне с более мелким разбиением $j_1 > j_0$ в первой сумме содержатся два члена, отвечающих за средние значения f в полуинтервалах с центрами, расположенными в k_1, k_2 . Число членов во второй сумме уменьшается на единицу — исчезает член, который раньше показывал величину флуктуаций на половинном масштабе. Общее число членов в разложении остается неизменным. Здесь же мы только вкратце упомянем, что согласно формуле (3.17) число членов в каждой сумме зависит от выбранного уровня разрешения. Меняя на единицу этот уровень, мы передвигаем некоторые члены в другую сумму, причем каждое из этих представлений является "истинным" представлением исходной гистограммы на разных уровнях разрешения.

Формально эту процедуру можно провести и в обратном направлении, переходя ко все более широким интервалам усреднения, т.е. к уровням разрешения $j < j_0$. Даже если мы "исчерпали" всю область задания f , можно попытаться продолжить этот "трюк" с усреднением. Тогда среднее значение уменьшается, и в L^2 -смысле можно пренебречь первой суммой в формуле (3.17), потому что ее L^2 -норма (3.3) стремится к нулю. В примере с гистограммой оно падает как $|\langle f \rangle| \propto N^{-1}$ и $|\langle f \rangle|^2 \propto N^{-2}$, тогда как область интегрирования пропорциональна N , т.е.

$$||\langle f \rangle||^2 \propto N^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Вот почему зачастую рассматривается только вторая сумма в (3.17) и результат называют вейвлет-разложением f . Это справедливо также и для функций f из пространств $L^p(\mathbb{R})$ с $1 < p < \infty$, но неприменимо к функциям из $L^1(\mathbb{R})$ или $L^\infty(\mathbb{R})$. Например, если $f \equiv 1$, то все вейвлет-коэффициенты $d_{j, k}$ равны нулю, и остается только первая сумма. На языке гистограмм отбрасывание этой суммы означает, что нас интересует не среднее значение, а только форма функции, задаваемая ее флуктуациями вокруг этого среднего на всевозможных уровнях разрешения. Любую функцию можно аппроксимировать с точностью $2^{j/2}$ (т.е. с произвольно высокой точностью при $j \rightarrow -\infty$) конечной линейной комбинацией вейвлетов Хаара.

⁷ Усреднение проводится с весовыми функциями $\varphi_{j, k}(x)$.

Вейвлеты Хаара хорошо подходят также и для изучения функций, принадлежащих к пространствам L^p , т.е. обладающих достаточно высокими моментами.

Хотя вейвлеты Хаара служат хорошим "обучающим примером" ортонормальных базисов, у них имеется слишком много недостатков, которые мешают их широкому применению. Одним из них являются плохие аналитические свойства с резким перепадом на границах интервалов, т.е. их плохая гладкость. При этом все моменты конечного ранга для вейвлетов Хаара отличны от нуля и только нулевой момент, т.е. интеграл (3.16) от самого вейвлета, обращается в нуль. Это означает, что они не ортогональны никаким полиномам, кроме тривиальной константы. Вейвлеты Хаара не обладают достаточно хорошей локализацией по частоте. Их фурье-образ падает всего лишь как $|\omega|^{-1}$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Желательно построить вейвлеты, обладающие лучшей регулярностью. По сравнению с вейвлетами Хаара они приводили бы к меньшему числу заметно отличных от нуля вейвлет-коэффициентов, которые надо было бы учитывать, и были бы применимы в большем числе функциональных пространств, а не только в L^2 . Первый из этих результатов следует из того факта, что вейвлет-коэффициенты существенно отличны от нуля лишь вблизи сингулярностей f (сильные флуктуации). Поэтому вейвлет-ряды обычных гладких функций очень "разрежены", в отличие от рядов Фурье, которые довольно плотные для достаточно регулярных функций. Последнее свойство позволяет нам детально исследовать локальные и глобальные особенности изучаемых функций. Путь к реализации этой программы был открыт с развитием многомасштабного анализа.

4. Многомасштабный анализ и вейвлеты Добеши

Соотношение (3.17) означает, что произвольная функция f может быть аппроксимирована набором очень простых функций $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}$. Рассмотренный выше пример показал, что функции Хаара локальны и полностью покрывают пространство $L^2(\mathbb{R})$ за счет смещений k . Они ортогональны на разных уровнях j . Переход от j к $j+1$ эквивалентен замене x на $2x$, т.е. перемасштабированию, приводящему к анализу на разных уровнях разрешения.

Однако вейвлеты Хаара оказались чересчур упрощенными и потому недостаточно гладкими. Наша цель заключается в том, чтобы найти общий класс таких функций, которые удовлетворяли бы требованиям локальности, регулярности и знакопеременности (с не всегда обязательным свойством ортонормальности). Они должны быть достаточно простыми в том смысле, что представляемы простыми алгоритмами и довольно регулярны для того, чтобы они полностью определялись их значениями на решетке с шагом, определенным множителем 2^j .

Общий подход, учитывающий эти требования, известен под названием *многомасштабного (multiresolution) анализа*. Он определен более строго математически в разделе 17.1. Здесь же мы вкратце опишем только основные идеи.

Многомасштабный анализ проводится с помощью набора последовательных аппроксимирующих пространств V_j , которые представляют собой отмасштабированные и инвариантные относительно смещений на

целые числа разновидности одного центрального функционального пространства V_0 . Для иллюстрации этого положения на простом примере мы показываем на рис. 3, как выглядели бы проекции некоторой функции на пространства Хаара V_0, V_1 . В них легко распознать гистограммное приближение к этой функции. Сопоставление гистограмм на этих двух уровнях показывает, что первая сумма в соотношении (3.17) приводит к "размытому изображению", или к "сглаженным средним" функции $f(x)$ на каждом интервале, тогда как вторая сумма в этом соотношении добавляет все более подробные детали на все меньших интервалах. При этом общее распределение разлагается на последовательность правильно расположенных флуктуаций с формой, соответствующей выбранным вейвлетам.

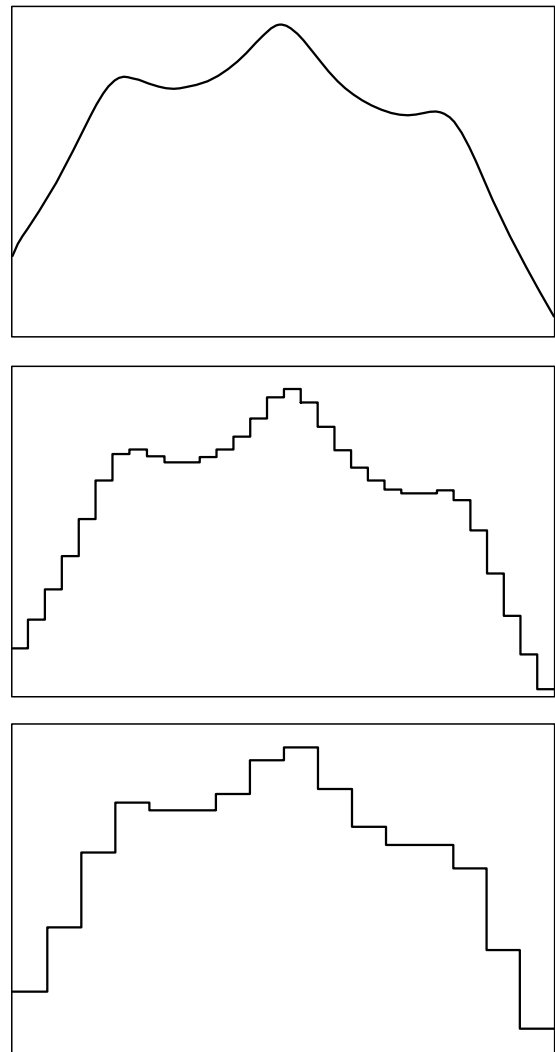


Рис. 3. Анализируемая функция (вверху) и ее хааровские проекции на два последовательных пространства Хаара, V_0 и V_1 .

Функции $\varphi_{j,k}$ образуют ортонормальный базис V_j . Ортогональное дополнение V_j в V_{j+1} называется W_j . Подпространства W_j образуют взаимно ортогональный набор. Последовательность $\psi_{j,k}$ формирует ортонормальный базис W_j при любом заданном j . Полный набор функций $\psi_{j,k}$ и $\varphi_{j,k}$ при всех j образует ортонормальный базис $L^2(\mathbb{R})$. Все это убеждает нас в том, что

разработан подход с многомасштабным анализом и функции $\psi_{j,k}$ и $\varphi_{j,k}$ служат высокочастотными и низкочастотными фильтрами соответственно. Графически всю процедуру можно было бы представить так, как это изображено на рис. 4.

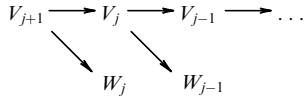


Рис. 4. Графическое представление многомасштабного анализа с разложением пространства V_{j+1} на его подпространство V_j и ортогональное дополнение W_j с итерацией на более низкие уровни.

В согласии с поставленной выше целью можно дать определение понятия вейвлетов (см. раздел 17.1) таким образом, что функции $2^{j/2}\psi(2^jx - k)$ являются вейвлетами, порожденными одним "материнским вейвлетом" ψ (основным вейвлетом), обладающим свойствами, ответственными за регулярность, локальность и знакопеременность.

На первый взгляд, из нашего примера с вейвлетами Хаара можно сделать вывод, что коэффициенты h_k можно выбирать по собственному желанию. Это впечатление, однако, полностью ошибочно. Общие свойства скейлинг-функций и вейвлетов однозначно определяют эти коэффициенты в рамках многомасштабного анализа.

Покажем, как эта программа многомасштабного анализа работает на практике при ее использовании для определения коэффициентов любого фильтра h_k и g_k . Их можно вычислить непосредственно, зная определения и свойства дискретных вейвлетов. Напомним определение этих коэффициентов (3.6) и (3.9):

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k), \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2x - k), \tag{4.1}$$

где $\sum_k |h_k|^2 < \infty$. Из свойства ортогональности масштабных функций

$$\int \varphi(x) \varphi(x - m) dx = \delta_{0m} \tag{4.2}$$

получаем следующее уравнение на коэффициенты:

$$\sum_k h_k h_{k+2m} = \delta_{0m}. \tag{4.3}$$

Ортогональность вейвлетов масштабным функциям

$$\int \psi(x) \varphi(x - m) dx = 0 \tag{4.4}$$

дает уравнение

$$\sum_k h_k g_{k+2m} = 0, \tag{4.5}$$

решением которого является следующее выражение:

$$g_k = (-1)^k h_{2M-1-k}. \tag{4.6}$$

Таким образом, коэффициенты g_k для вейвлетов однозначно определяются коэффициентами h_k для скейлинг-функции.

Условие ортогональности вейвлета полиномам до степени $M - 1$, определяющее его гладкость и знакопеременность,

$$\int x^n \psi(x) dx = 0, \quad n = 0, \dots, M - 1, \tag{4.7}$$

сводится к соотношению

$$\sum_k k^n g_k = 0, \tag{4.8}$$

или, с учетом (4.6), к

$$\sum_k (-1)^k k^n h_k = 0. \tag{4.9}$$

Условие нормировки

$$\int \varphi(x) dx = 1 \tag{4.10}$$

дает еще одно уравнение на h_k :

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}. \tag{4.11}$$

Выпишем теперь уравнения (4.3), (4.9), (4.11) для $M = 2$ в явном виде:

$$\begin{aligned} h_0 h_2 + h_1 h_3 &= 0, \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 &= 0, \\ -h_1 + 2h_2 - 3h_3 &= 0, \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Решением этой системы будет

$$\begin{aligned} h_3 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 \pm \sqrt{3}), \quad h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} + h_3, \\ h_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} - h_3, \quad h_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} - h_3, \end{aligned} \tag{4.12}$$

что в случае знака минус приводит к хорошо известному фильтру

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 + \sqrt{3}), \quad h_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} (3 + \sqrt{3}), \\ h_2 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (3 - \sqrt{3}), \quad h_3 = \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 - \sqrt{3}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Эти коэффициенты определяют простейший вейвлет D^4 (или ${}_2\psi$) из известного семейства ортонормальных вейвлетов Добеши с конечным носителем. Он показан в верхней части рис. 5 штриховой линией, а соответствующая скейлинг-функция — сплошной линией. Некоторые вейвлеты высшего порядка также приведены на этом рисунке. Из него отчетливо видно, что вейвлеты (особенно D^4) оказываются более гладкими в одних точках по сравнению с другими. Выбор знака плюс в выражении для h_3 не изменит общего вида скейлинг-функции и вейвлета D^4 , а только перенумерует коэффициенты. В результате получатся функции, отличающиеся от первоначальных тем, как если бы были изменены на противоположные знаки по горизонтальной и вертикальной

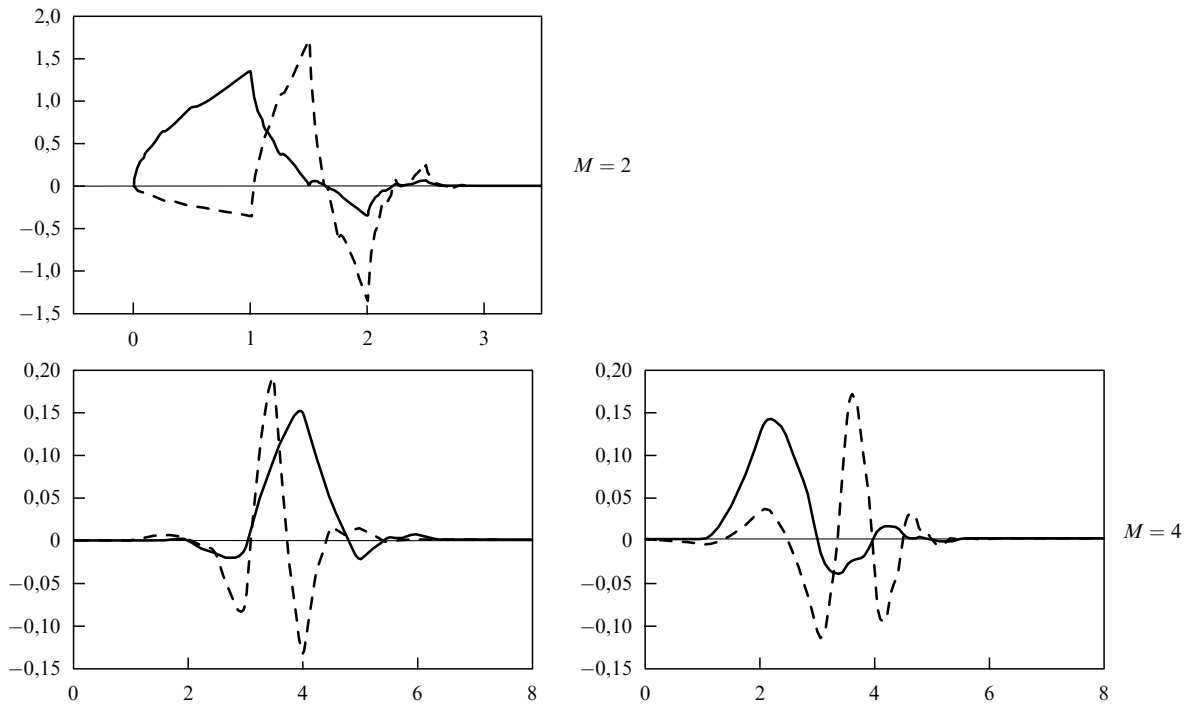


Рис. 5. Скейлинг-функции (сплошные линии) и вейвлеты Добеши (штриховые линии) при $M = 2, 4$.

осям соответственно. Однако для вейвлетов более высокого порядка выбор того или иного знака уже сказывается на их форме. Набор всех возможностей задает полную систему вейвлетов данного порядка. Приведенный пример показывает, что вейвлеты с компактным носителем определяются однозначно для данного многомасштабного анализа с точностью до сдвига аргумента (смещения), который и так уже содержится в них. Масштабный множитель должен быть числом рациональным в рамках многомасштабного анализа. Заметим, что ${}_2\varphi$ непрерывен по Гельдеру с глобальным показателем $\alpha = 0,55$ (см. условие (11.1) ниже) и имеет разные локальные показатели Гельдера на определенных фрактальных множествах. Обычно вейвлеты более регулярны на одних наборах точек и менее — на других.

Коэффициенты для фильтров более высокого порядка по M , т.е. для вейвлетов Добеши более высокого порядка, могут быть получены аналогично. Однако из-за необходимости решать уравнение M -й степени в общем случае для них можно выписать лишь численные значения, хотя и с любой заданной точностью. Область задания вейвлета равна $2M - 1$. Она шире, чем у вейвлетов Хаара. Однако и регулярность этих вейвлетов выше. Вейвлеты более высокого порядка более гладкие по сравнению с D^4 , как это видно на рис. 5. Вейвлеты Добеши с M нулевыми моментами имеют μM непрерывных производных, где при больших M имеем $\mu \approx 0,2$, как было выяснено с помощью численных расчетов⁸. Это значит, что около 70–80 % нулевых моментов "уходит

впустую". По мере роста гладкости вейвлета обычно увеличивается и размер его области определения. Для достаточно гладких функций вейвлет-коэффициенты Добеши намного меньше (в 2^{Mj} раз) вейвлет-коэффициентов Хаара, т.е. сигнал можно сжать намного сильнее при помощи вейвлетов Добеши. Поскольку эти вейвлеты и заметно более гладкие, обратное преобразование (синтез) также проходит эффективнее.

Можно задать вопрос: что важнее — свойство гладкости или число зануляющихся моментов? Ответ зависит от конкретного использования вейвлета и не всегда ясен. Вероятно, число нулевых моментов более важно для достижения более сильного сжатия сигнала (изображения), которое увеличивается при большом числе нулевых моментов, тогда как гладкость вейвлета становится важнее при обратном преобразовании (синтезе), когда необходимо сгладить ошибки, вызванные сжатием (отбрасыванием малых вейвлет-коэффициентов).

В принципе, решая функциональное уравнение (3.6), можно найти явный вид скейлинг-функции и с учетом соотношения (3.9) определить вид "материнского вейвлета". Для компактно заданных вейвлетов $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не удастся написать замкнутые аналитические выражения (за исключением вейвлетов Хаара). Тем не менее можно построить графики $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в случае, если они непрерывны, с любой наперед заданной точностью, используя каскадный алгоритм с вейвлет-разложением $\varphi(x)$, который является частным случаем процедуры усреднения (более подробно см. в [2]). Вместо каскадного алгоритма можно вычислить непосредственно $\varphi(2^{-j}k)$ из уравнения (3.9), начиная с подходящих $\varphi(n)$.

Однако в практических приложениях используются только вейвлет-коэффициенты h_k , без вычисления конкретной формы вейвлета.

За исключением вейвлетов Хаара все вещественные ортонормальные вейвлеты с компактным носителем

⁸ Эта асимптотическая оценка снизу получена с помощью преобразования Фурье [2]. Более точные методы при конечных значениях M позволяют найти связь гладкости с числом нулевых моментов. В области максимальных практически используемых значений $6 < M < 12$ линейная интерполяция дает $\mu \approx 0,275$.

асимметричны, т.е. у них нет ни оси симметрии, ни оси антисимметрии (см. рис. 5). Отклонение формы вейвлета от симметричной проверяется тем, насколько сильно отклоняется от линейной зависимости фаза выражения $m_0(\omega) = \sum_k h_k \exp(-ik\omega)$. "Наименее асимметричные" вейвлеты получаются при минимизации этой фазы. Лучшая симметрия вейвлета неизбежно влечет за собой более симметричные коэффициенты h_k , но обратное утверждение не всегда оказывается верным.

5. Быстрое вейвлет-преобразование и койфлеты

После того как вычислены коэффициенты h_k и g_k , т.е. выбран определенный вейвлет, можно проводить вейвлет-преобразование сигнала $f(x)$, поскольку задан ортонормальный вейвлет-базис $(\psi_{j,k}, \varphi_{j,k})$. Любая функция $f \in L^2(R)$ полностью характеризуется ее вейвлет-коэффициентами разложения по этому базису и потому может быть представлена формулой (3.17). Зададим все пределы суммирования в этой формуле. Функцию $f(x)$ можно рассматривать на любом n -м уровне разрешения j_n . Тогда разделение между ее усредненными значениями на этом уровне и флуктуациями вокруг них выглядит как

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{j_n,k} \varphi_{j_n,k}(x) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (5.1)$$

На бесконечном интервале первая сумма может быть опущена, как мы уже обсуждали выше, и в результате получается "чистое" вейвлет-разложение. Как мы уже подчеркивали, коэффициенты $s_{j,k}$ и $d_{j,k}$ содержат информацию о составе сигнала на разных масштабах. Их можно вычислить, непосредственно используя формулы (3.19), (3.20). Однако этот алгоритм неудобен, так как при вычислении потребуется провести много (N^2) операций, где N обозначает число имеющихся значений функции. Мы опишем намного более быстрый алгоритм. Он пояснен на рис. 6, а соответствующие формулы для быстрого алгоритма приводятся ниже.

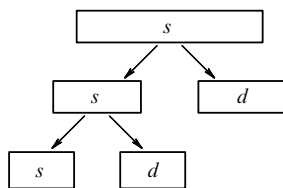


Рис. 6. Алгоритм быстрого вейвлет-преобразования.

В реальных ситуациях с оцифрованным сигналом мы всегда имеем дело с конечным набором цифр (точек). Поэтому всегда существует наилучший уровень разрешения, когда каждый интервал содержит по одному числу. Соответственно и суммирование по k будет идти в конечных пределах. Удобно изменить шкалу разрешения (или шкалу f), приписав значение $j=0$ этому наилучшему уровню разрешения. В этом случае легко вычислить вейвлет-коэффициенты для более усредненных уровней $j \geq 1$.

Многомасштабный анализ приводит естественным путем к иерархической и быстрой схеме вычисления

вейвлет-коэффициентов заданной функции. Функциональные уравнения (3.6), (3.9) и формулы для вейвлет-коэффициентов (3.19), (3.20) приводят (например, для вейвлетов Хаара) к соотношениям (2.2) или, для обратного преобразования (синтеза), (2.3).

В общем случае итерационные формулы быстрого вейвлет-преобразования имеют вид

$$s_{j+1,k} = \sum_m h_m s_{j,2k+m}, \quad (5.2)$$

$$d_{j+1,k} = \sum_m g_m s_{j,2k+m} \quad (5.3)$$

с

$$s_{0,k} = \int f(x) \varphi(x-k) dx. \quad (5.4)$$

Эти уравнения обеспечивают быстрые алгоритмы (так называемые пирамидальные алгоритмы) вычисления вейвлет-коэффициентов, поскольку требуют теперь только $O(N)$ операций для своего завершения. Начав с $s_{0,k}$, мы вычислим все другие вейвлет-коэффициенты, если параметры вейвлета h_m, g_m известны. Явный вид вейвлета при этом не используется. Простая форма полученных итерационных уравнений служит единственным оправданием введения множителя $\sqrt{2}$ в функциональное уравнение (3.6). В принципе коэффициенты h_m, g_m можно было бы перенормировать. Однако уравнения (5.2), (5.3) используются на практике заметно чаще других, и потому эту нормировку не изменяют. После того как выбран определенный вейвлет, т.е. выбраны коэффициенты h_m, g_m , для вычисления вейвлет-коэффициентов используются только уравнения (5.2), (5.3). Поэтому любые дополнительные множители в них могут привести лишь к усложнению численных расчетов.

Остающиеся проблемы связаны с начальными данными. Если известен явный вид функции $f(x)$, то коэффициенты $s_{0,k}$ можно вычислить, используя формулу (5.4). Но ситуация отличается от этой, если доступны только дискретные значения $f(x)$. Чтобы достичь высокой точности, хорошо бы задать очень малые интервалы (плотную решетку), но это зачастую недоступно из-за конечности интервалов сбора информации. В таком случае простейшее принимаемое решение состоит в непосредственном использовании величин $f(k)$ из доступного набора данных в виде коэффициентов $s_{0,k}$ и применении быстрого вейвлет-преобразования с использованием формул (5.2), (5.3). Это безопасная операция, так как пирамидальный алгоритм обеспечивает полную реконструкцию сигнала, а коэффициенты $s_{0,k}$ по сути представляют собой локальные средние значения сигнала, взвешенные со скейлинг-функцией.

В общем случае можно выбрать

$$s_{0,k} = \sum_m c_m f(k-m). \quad (5.5)$$

Рассмотренная выше ситуация отвечает условию $s_{0,k} = f(k)$, что соответствует $c_m = \delta_{0m}$. Это условие может оказаться практически точным при некотором специфическом выборе скейлинг-функции, приводящем к койфлетам (этот термин предложен в честь Р. Койфмана, идеи которого побудили И. Добеши построить такие вейвлеты). Оказывается, можно провести многомасштаб-

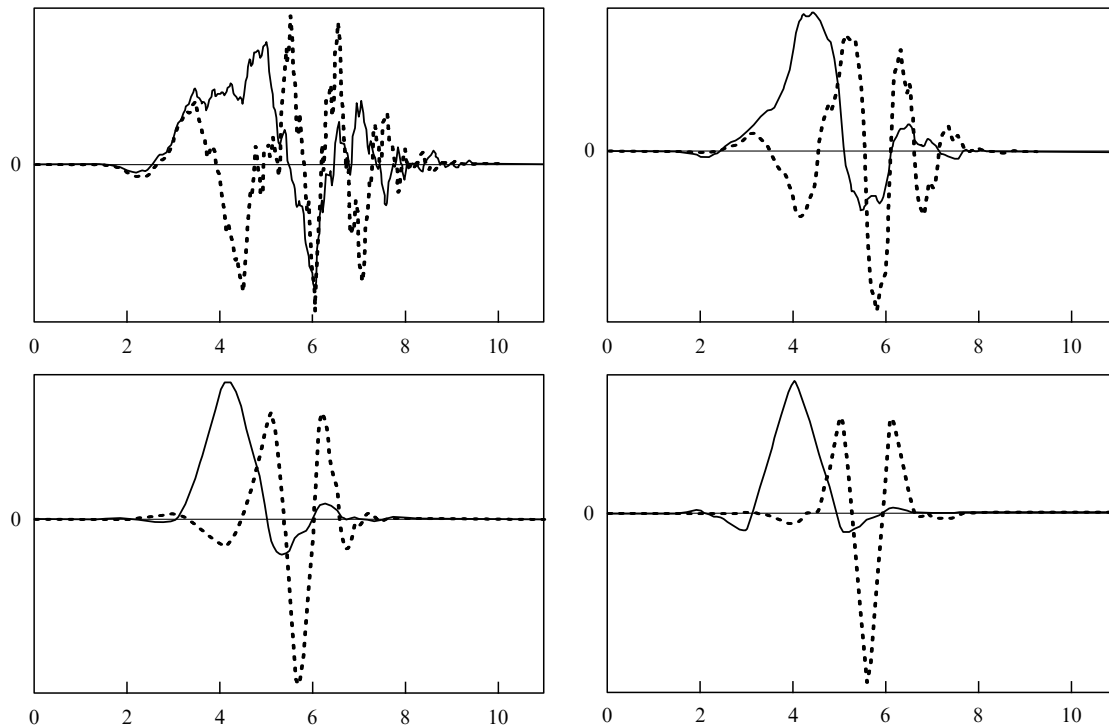


Рис. 7. Койфлеты (штриховые линии) и их скейлинг-функции (сплошные линии) при $M = 4$.

ный анализ со скейлинг-функцией, обладающей набором нулевых моментов, т.е. такой, что

$$\int x^m \varphi(x) dx = 0, \quad 0 < m < M. \quad (5.6)$$

Для построения таких вейвлетов (койфлетов) надо добавить к прежним условиям для определения коэффициентов h_k еще дополнительные требования

$$\sum_k h_k k^m = 0, \quad 0 < m < M, \quad (5.7)$$

вытекающие из условий (5.6).

Койфлеты более симметричны, нежели вейвлеты Добеши, как это наглядно видно из рис. 7, если сравнить его с рис. 5. Последние не удовлетворяют условиям (5.6). Цена, которую приходится платить за это новое требование, состоит в том, что койфлеты длиннее, чем вейвлеты Добеши. Если для последних длина области задания равна $2M - 1$, то для койфлетов она становится равной $3M - 1$. Ошибка в оценке коэффициентов $s_{j,k}$ уменьшается с ростом числа нулевых моментов как $O(2^{-jM})$. В то же время разброс по гладкости у койфлетов данного порядка больше, чем у вейвлетов Добеши того же порядка.

Существуют другие предложения улучшить первый шаг в этой итерационной процедуре быстрого вейвлет-преобразования, например, сформулированное для T -полиномов Свелденсом [19] и с использованием так называемых "ленивых" вейвлетов, предложенные Гоекером и Ивановым [20]. Последнее наиболее удобно при одновременном анализе на разных уровнях разрешения, в частности для неоднородных решеток.

Обратное быстрое вейвлет-преобразование позволяет реконструировать функцию по значениям ее вейвлет-коэффициентов.

6. Выбор вейвлета

Выше мы продемонстрировали три примера дискретных ортонормальных вейвлетов с компактным носителем. Свойство регулярности, число нулевых моментов и число вейвлет-коэффициентов, превышающих некоторое пороговое значение, были предложены в качестве возможных критериев для выбора конкретного вейвлета, не говоря уже о требуемых вычислительных затратах. Иногда для выбора используется так называемый функционал информационной ценности. Пытаются минимизировать его и таким способом отобрать оптимальный базис. В частности, рассматривается энтропийный критерий вероятностного распределения вейвлет-коэффициентов [4, 11]. Энтропия функции f по отношению к вейвлет-базису отражает число существенных членов в разложении (3.17). Она определяется как $\exp(-\sum_{j,k} |d_{j,k}|^2 \log |d_{j,k}|^2)$. Если мы имеем набор ортонормальных базисов, то выберем для анализа функции f тот, который приводит к наименьшей энтропии.

Число возможных вейвлетов в нашем распоряжении намного больше, чем приведено в предыдущих примерах. Мы не будем обсуждать все, а лишь упомянем некоторые, отсылая читателя к процитированным монограммам.

- Во-первых, следует упомянуть сплайны, которые приводят к вейвлетам с некомпактным носителем, но с экспоненциальным спадом на бесконечности и с некоторым (ограниченным) числом непрерывных производных. Там используется специальный прием ортогонализации. По сути дела сплайны тесно связаны с обсуждавшимися выше интерполяционными схемами нахождения более точных начальных значений $s_{0,k}$ посредством связи их с некоторыми линейными комбинациями оцифрованного набора $f(x)$.

• Чтобы обеспечить полную симметрию и точную реконструкцию одновременно, применяют так называемые биортогональные вейвлеты. При этом используется два дуальных вейвлет-базиса, $\psi_{j,k}$ и $\tilde{\psi}_{j,k}$, связанных с двумя разными многомасштабными лестницами. Их свойства регулярности могут заметно отличаться друг от друга. Функция f может быть записана в двух видах, абсолютно эквивалентных до тех пор, пока не производится компрессия:

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}, \tag{6.1}$$

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \tag{6.2}$$

где вейвлет ψ и дуальный ему удовлетворяют требованию биортогональности $\langle \psi_{j,k} | \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle = \delta_{j,k;j',k'}$. В отличие от вейвлетов Добеши, у которых их регулярность тесно связана с числом обращаемых в нуль моментов, биортогональные вейвлеты обладают большей свободой выбора. Если один из них обладает гладкостью порядка r , то дуальный ему вейвлет автоматически имеет по крайней мере r нулевых моментов. Если $\tilde{\psi}_{j,k}$ оказывается намного более регулярной функцией, то $\psi_{j,k}$ имеет намного больше нулевых моментов, чем $\tilde{\psi}_{j,k}$. Это позволяет нам выбрать, например, $\tilde{\psi}_{j,k}$ в виде очень гладкой функции и иметь $\psi_{j,k}$ с большим числом нулевых моментов. Большое число нулевых моментов у $\psi_{j,k}$ приводит к лучшим результатам при сжатии информации для достаточно гладкой f . Если же сжатие было проведено, то формула (6.1) оказывается заметно полезнее формулы (6.2). Число существенных членов в ней намного меньше, и, более того, лучшая гладкость $\tilde{\psi}_{j,k}$ помогает восстановить f с более высокой точностью. Биортогональные базисы близки к ортонормальному базису. Оба вейвлета можно сделать симметричными. Симметричные биортогональные вейвлеты, близкие к ортонормальному базису, похожи на койфлеты. Построение биортогональных вейвлет-базисов обычно оказывается более простым, чем соответствующая процедура для ортонормальных базисов.

• Наличие соотношений на двух масштабах является характерной чертой построения вейвлет-пакетов. Основная идея их создания состоит в последовательном итерировании расщепления полосы частот при сохранении одной и той же пары фильтров. Введенная выше скейлинг-функция приобретает наименование w_0 , а сам пакет строится исходя из нее с помощью соотношений

$$w_{2n}(x) = \sum_k h_k w_n(2x - k), \tag{6.3}$$

$$w_{2n+1}(x) = \sum_k g_k w_n(2x - k). \tag{6.4}$$

Обычный "материнский вейвлет" записан как w_1 . Это семейство вейвлетов образует ортонормальный базис в $L^2(R)$, который называется *базисом вейвлет-пакетов* с фиксированным масштабом. Построение вейвлет-пакетов показано на рис. 8.

• Можно отказаться от свойства ортонормальности и сконструировать неортогональные вейвлеты, которые называются *фреймами*. Важный особый класс фреймов представлен базисами Рисса в $L^2(R)$. Базис Рисса

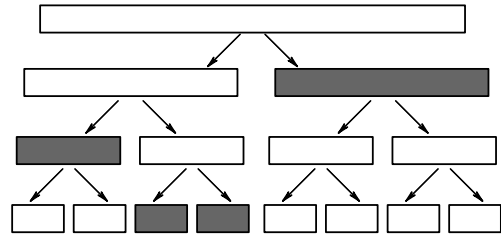


Рис. 8. Построение вейвлет-пакетов.

является фреймом, но обратное утверждение неверно. Фреймы удовлетворяют следующему требованию:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \tag{6.5}$$

Постоянные A и B называются *границами фрейма*. При $A = B$ говорят о *жестких фреймах*. Случай $A = B = 1$ соответствует *ортонормальным вейвлетам*.

• При действии (сингулярными) операторами зачастую получаются бесконечные выражения, если использовать обычные вейвлеты. В этих случаях можно подобрать некую сглаживающую функцию $b(x)$, чтобы наложить дополнительные условия, которые будут необходимы и достаточны для того, чтобы результат воздействия (сингулярного интегрального) оператора оказался непрерывным на пространстве L^2 . В этом случае выбирают так называемые вейвлеты, подогнанные под b . Любая функция f снова разлагается по формуле

$$f(x) = \sum_{\lambda} a(\lambda) \psi_{\lambda}^{(b)}(x), \tag{6.6}$$

но вейвлет-коэффициенты вычисляются теперь следующим образом:

$$a_{\lambda} = \int b(x) f(x) \psi_{\lambda}^{(b)}(x) dx. \tag{6.7}$$

Они удовлетворяют условию нормировки

$$\int b(x) \psi_{\lambda}^{(b)}(x) \psi_{\lambda'}^{(b)}(x) dx = \delta_{\lambda, \lambda'}. \tag{6.8}$$

Условие на знакопеременность выглядит при этом так:

$$\int b(x) \psi_{\lambda}^{(b)}(x) dx = 0. \tag{6.9}$$

Как мы видим, осцилляции вейвлета также подогнаны под функцию b (вообще говоря, под "комплексную меру" $b(x) dx$).

• До сих пор мы рассматривали вейвлеты с масштабным множителем, равным 2. Они наиболее удобны для численных расчетов. Однако можно доказать [2, 21], что в рамках многомасштабного анализа этот множитель должен быть рациональным числом и никаких других требований не налагается. Поэтому можно построить схемы с другими целыми или дробными масштабными множителями. Иногда их использование может привести к лучшей локализации по частоте. Для вейвлетов с масштабным множителем 2 их фурье-образ сосредоточен в основном в пределах одной октавы между π и 2π , тогда как вейвлет базисы с дробными множителями

могут иметь ширину полосы пропускания, более узкую, чем октава.

• Более того, можно использовать непрерывные вейвлеты, как это подробнее описано в обзоре [10]. Тогда элемент вейвлет-базиса записывается в виде

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right). \quad (6.10)$$

Прямое и обратное вейвлет-преобразования выглядят так:

$$W_{a,b} = |a|^{-1/2} \int f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (6.11)$$

$$f(x) = C_\psi^{-1} \int W_{a,b} \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2}. \quad (6.12)$$

Здесь

$$C_\psi = \int |\psi(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} = \left| \int \exp(-ix\omega) \psi(x) dx \right|^2 \frac{d\omega}{|\omega|}. \quad (6.13)$$

Отсюда легко распознать, что знакопеременность вейвлетов, требуемая условием (3.16), является их общим свойством. Обращение в нуль фурье-образа вейвлета $\psi(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$, что полностью отвечает условию (3.16), обеспечивает конечность значения C_ψ в формуле (6.13). Одним из специальных и часто используемых примеров непрерывных вейвлетов является вторая производная гауссовой функции, известная здесь под названием "мексиканская шляпа" (МНАТ) из-за ее формы. В действительности, как было показано Добеши, ее можно рассматривать как некий специальный фрейм. Процедура восстановления (синтеза) может оказаться, однако, неустойчивой в этом случае. Тем не менее ее часто используют для анализа сигналов. Формула (6.11) представляет нечто вроде свертки. Именно поэтому общая теория так называемых операторов Калдерона – Зигмунда [3] (см. раздел 17.2) применима, в частности, к проблемам разложения по вейвлетам.

7. Многомерные вейвлеты

Многомасштабный анализ можно проводить и с многомерными функциями. Существует два способа [4] обобщить его, скажем, на двумерный случай, но мы рассмотрим наиболее часто используемое построение, заданное тензорными произведениями. Метод тензорного произведения предоставляет непосредственный путь к развитию r -регулярного многомасштабного разложения, которое приводит к появлению многомерных вейвлетов с компактными носителями. Это дает нам возможность проанализировать любое пространство обычных или обобщенных функций в n измерениях с регулярностью вплоть до r .

Тривиальный путь построения двумерного ортонормального базиса исходя из одномерного ортонормального вейвлет-базиса $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ состоит в том, чтобы путем тензорного произведения образовать соответствующие функции из двух одномерных базисов:

$$\Psi_{j_1, k_1; j_2, k_2}(x_1, x_2) = \psi_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2). \quad (7.1)$$

В этом базисе две переменные, x_1 и x_2 , сжимаются по-разному.

Большой интерес для многих приложений имеет другая конструкция, в которой масштабирование полученного ортонормального вейвлет-базиса происходит по обоим переменным одинаковым образом и двумерные вейвлеты задаются следующим выражением:

$$2^j \Psi(2^j x - k, 2^j y - l), \quad j, k, l \in \mathbb{Z}, \quad (7.2)$$

но Ψ уже не является единственной функцией, наоборот, она будет сформирована из трех элементарных вейвлетов. Чтобы создать ортонормальный базис W_0 , теперь придется использовать три семейства,

$$\varphi(x-k)\psi(y-l), \quad \psi(x-k)\varphi(y-l), \quad \psi(x-k)\psi(y-l).$$

Тогда двумерные вейвлеты запишутся в виде

$$2^j \varphi(2^j x - k) \psi(2^j y - l), \quad 2^j \psi(2^j x - k) \varphi(2^j y - l),$$

$$2^j \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - l).$$

На двумерной плоскости происходит анализ по горизонталям, вертикалям и диагоналям с одинаковым разрешением в соответствии с тремя выписанными выше вейвлетами.

Рисунок 9 демонстрирует, как выглядит вся эта конструкция. Схематическое представление такой процедуры на рисунке показывает, как распределены соответствующие вейвлет-коэффициенты при разных уровнях разрешения ($j=1$ и $j=2$). На рисунке приведено разложение по двум уровням некоторого набора геометрических объектов. Ясно видно, как вертикальные, горизонтальные и диагональные структуры подчеркиваются в соответствующих областях. Следует также обратить внимание на то, как горизонтальная полоса на этом рисунке расщепляется на две полосы при соответствующем разрешении на определенном уровне.

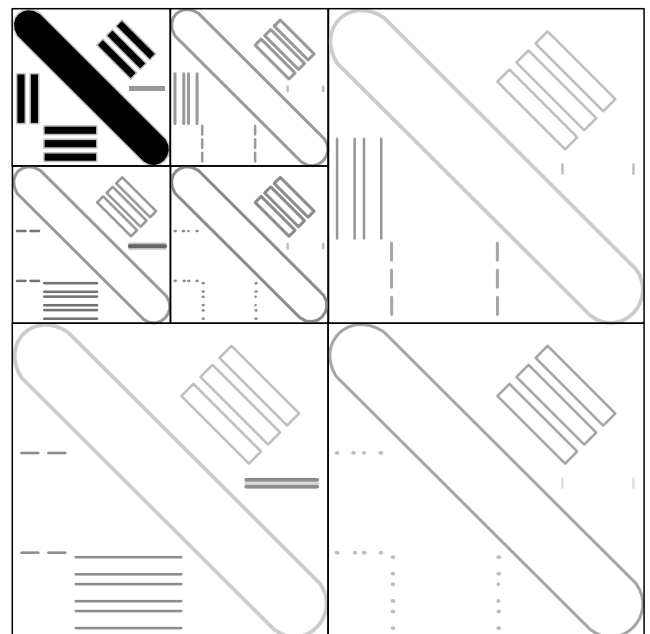


Рис. 9. Пример вейвлет-анализа двумерного изображения. Видно, что либо горизонтальные, либо вертикальные детали рисунка выделяются наиболее четко соответствующими вейвлет-коэффициентами. В зависимости от выбранного уровня разрешения также лучше разрешаются крупные или мелкие детали.

В общем n -мерном случае существует $2^n - 1$ функций, образующих ортонормальный базис и осуществляющих многомасштабный анализ любой функции из $L^2(\mathbb{R}^n)$. Нормировочный множитель равен $2^{nj/2}$, как нетрудно догадаться уже из приведенных выше выражений для двумерного случая, где этот множитель равен 2^j , в отличие от одномерного случая, где он равен $2^{j/2}$.

Существует и метод построения вейвлет-базисов, не сводимых к тензорным произведениям одномерных вейвлетов (см. [4]). В одномерном случае каждый ортонормальный вейвлет-базис появляется в результате многомасштабного разложения. При числе размерностей, превышающем единицу, оказывается возможным построить ортонормальный базис такой, что не существует никакого r -регулярного ($r \geq 1$) многомасштабного разложения, с помощью которого удалось бы получить эти вейвлеты [3].

8. Преобразование Фурье и вейвлет-преобразование

Во многих приложениях (особенно для нестационарных сигналов) интересуются частотным содержанием сигнала, локальным во времени, т.е. стремятся узнать, какие частоты важны в данный момент времени. Как уже подчеркивалось, вейвлет-преобразование имеет преимущество перед преобразованием Фурье прежде всего за счет наличия свойства локальности у вейвлетов. При фурье-анализе в качестве основных базисных функций используются синусы, косинусы и комплексные экспоненты. Они простираются вдоль всей вещественной оси. В то же время вейвлеты строго локализованы. Это позволяет анализировать локальные свойства сигнала, тогда как преобразование Фурье не даст никакой информации, скажем, о том месте, где частота сигнала изменилась. Необходимость использования других функций подчеркивалась Л.И. Мандельштамом еще в 20-х годах, когда он говорил, что "физическое значение разложения Фурье в большой мере связано с резонансными свойствами линейных систем с постоянными параметрами; при переходе к линейным системам с переменными параметрами разложение Фурье перестает быть целесообразным и место функций \cos и \sin должны занять другие функции"⁹. Разложение по вейвлетам позволяет определить положение особенностей функции, наблюдая за теми местами, где вейвлет-коэффициенты принимают большие значения. Очевидно, что ничего подобного невозможно сделать, используя преобразование Фурье. Как только вейвлеты сконструированы, они работают намного эффективнее в тех ситуациях, когда ряды и интегралы Фурье требуют нетривиальных математических подходов или сложных численных расчетов. Однако вейвлет-анализ не всегда может подменить фурье-анализ. Действительно, последний часто используется, например, для построения ортонормальных вейвлет-базисов, необходимых для проведения многомасштабного анализа. Многие теоремы вейвлет-анализа доказываются с помощью разложения Фурье. Таким образом, эти два типа анализа являются скорее дополнительными друг к другу, нежели соревнующимися в приложениях.

Фурье-спектр f_ω одномерного сигнала $f(t)$ с конечной энергией (т.е. квадратично-интегрируемого) задается формулой

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (8.1)$$

Обратное преобразование обеспечивает восстановление сигнала:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \exp(i\omega t) d\omega. \quad (8.2)$$

Это преобразование унитарно:

$$\int |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |f_\omega|^2 d\omega. \quad (8.3)$$

Формула (8.3) называется *тождеством Парсеваля* и указывает на сохранение энергии при переходе от временной области к частотной. Формула (8.1) требует сведений о сигнале $f(t)$ как из прошлого, так и из будущего. Она применима лишь к стационарным сигналам, у которых частота не меняется со временем. Таким образом, частотно-временная полоса оказывается хорошо локализованной по частоте и практически неограниченной по оси времени, т.е. формула (8.1) описывает частотное содержание сигнала, но не его локальные свойства на оси времени. Более того, как видно из той же формулы, сигнал $f(t)$ должен достаточно быстро спадать на бесконечности в прошлом и в будущем.

Попытки преодоления этих трудностей и улучшения понимания локальных свойств сигнала с помощью того же набора базисных функций предпринимаются в рамках так называемого *оконного преобразования Фурье*. Сигнал $f(t)$ анализируется лишь внутри некоторого окна. На практике приходится поиски оптимального окна ограничивать выбором из наиболее доступных и легко генерируемых. Простейший выбор состоит, например, в том, чтобы умножить $f(t)$ на функцию с компактным носителем $g_w = \theta(t - t_i)\theta(t_f - t)$, где θ — обычная ступенчатая функция, отличная от нуля только при положительных значениях аргумента, t_i, t_f — моменты начала и конца сигнала, задаваемые выбором окна (используются и более сложные квадратично-интегрируемые функции g , например, гауссова функция или канонические когерентные состояния¹⁰). Тогда для оконного фурье-образа сигнала получим

$$f_{\omega,w} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (8.4)$$

В дискретизированной форме можно записать

$$f_{\omega,w} = \int f(t) g(t - nt_0) \exp(-im\omega_0 t) dt, \quad (8.5)$$

где $\omega_0, t_0 > 0$ фиксированы, а m, n — некоторые числа, определяющие масштаб и положение.

Сигнал оказывается локализованным во времени, но при оконном преобразовании Фурье окно имеет фиксированный размер, не зависящий от рассматриваемого масштаба, и, более того, оно определяется разными функциями по шкалам времени и частот. Ортонормиро-

⁹ Мы благодарны Е.Л. Фейнбергу, который указал нам на это высказывание.

¹⁰ В квантовой механике они вводятся при квантовании классического гармонического осциллятора. При анализе сигналов их знают под названием *функции Габора*.

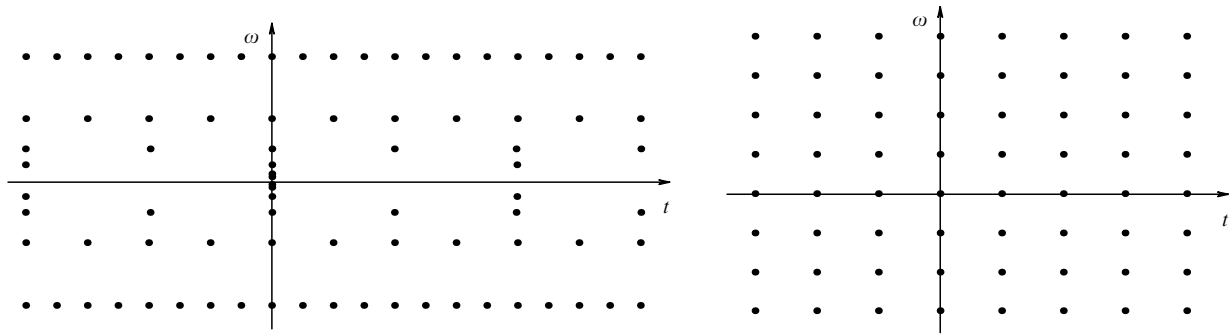


Рис. 10. Решетки пространственно-временной локализации для вейвлет-преобразования (слева) и для оконного преобразования Фурье (справа).

ванный базис оконного преобразования Фурье можно построить только для так называемой плотности Найквиста, соответствующей условию $\omega_0 t_0 = 2\pi$ (см. раздел 14), тогда как для вейвлет-преобразования таких ограничений нет. При этом критическом значении можно использовать фреймы, но все применяемые функции оказываются либо плохо локализованными, либо обладают плохой регулярностью. Этот результат известен под названием явления Баляна–Лоу. При практическом использовании оконного преобразования Фурье приходится выбирать $\omega_0 t_0 < 2\pi$ для того, чтобы улучшить локализацию, но при этом нарушается ортонормированность.

Различие между вейвлет-анализом и оконным преобразованием Фурье состоит в выборе анализирующих функций ψ и g , имеющих разный вид. Все g независимо от значения ω имеют одинаковую ширину. В отличие от этого вейвлет-анализ с функциями ψ приводит автоматически к эффективному окну по времени (или по пространственной протяженности), подстроенному под исследуемый сигнал, т.е. под его основные частоты (масштабы). Конкретно, пусть t_0 , δ и ω_0 , δ_ω обозначают положение центров и эффективные ширины базисной вейвлет-функции $\psi(t)$ и ее фурье-образа соответственно. Тогда для $\psi_{j,k}(t)$ (3.15) и для вейвлет-коэффициентов центром и шириной окна вдоль оси t будут соответственно $2^j(t_0 + k)$ и $2^j\delta$. Вдоль оси ω соответствующими величинами будут соответственно $2^{-j}\omega_0$ и $2^{-j}\delta_\omega$. Как видно, теперь ширины зависят от разрешения j . Однако отношения ширин к положениям центров окна вдоль каждой из осей не зависят от изучаемого масштаба. Это означает, что вейвлет-окно разрешает положение и частоту в фиксированной пропорции от их центральных значений. Для высокочастотных компонент сигнала оно имеет довольно большую ширину по оси частот, но сжимает полосу по шкале времени, не нарушая, таким образом, соотношение неопределенности Гейзенберга. Именно благодаря этому свойству вейвлет-окна принято называть *окнами Гейзенберга*. Соответственно низкочастотные сигналы не требуют при их изучении малых временных интервалов и потому допускают окна с большой протяженностью по временной оси и малой — по оси частот. Таким образом, вейвлеты хорошо локализуют низкочастотные "детали" по оси частот и высокочастотные характеристики по временной оси. Эта способность вейвлетов найти идеальный компромисс между локализацией по времени и по частоте путем автоматического выбора и подгонки под исследуемый сигнал ширины окна по обеим осям, соразмеряя их с положениями

центров, является решающей характеристикой для их успешного использования при анализе сигналов сложной формы. Вейвлет-преобразование расчленяет сигнал (функцию, оператор и т.п.) на отдельные частотные компоненты, что дает возможность изучать каждую из этих компонент с разрешением, соответствующим ее масштабу, и, таким образом, получать хорошую частотно-временную (масштаб-положение) локализацию. Именно благодаря этой черте вейвлеты могут "сфокусироваться" на сингулярностях или резких перепадах сигнала (т.е. на предельных версиях очень коротко живущих высокочастотных характеристик), тогда как оконные преобразования Фурье для этого не подходят. В терминах традиционного анализа сигналов фильтры, связанные с оконным преобразованием Фурье, называют *фильтрами с постоянной полосой пропускания*, тогда как вейвлеты можно рассматривать как *фильтры с постоянной относительной полосой пропускания*, поскольку их ширины по обеим переменным линейно зависят от их положения.

На рисунке 10 показано, как проявляются различия между разными подходами. Здесь ясно видно постоянство формы области оконного преобразования Фурье и изменчивость формы (при постоянстве площади) области вейвлет-преобразования. Плотность центров локализации однородна при оконном преобразовании Фурье, тогда как при вейвлет-преобразовании она меняется таким образом, что при низких частотах эти центры далеко разнесены друг от друга по оси времени и заметно сближаются при высоких частотах.

С математической точки зрения весьма важным обстоятельством является то, что ортонормированные вейвлеты приводят к хорошим безусловным¹¹ базисам также и для пространств, отличных от пространства квадратично-интегрируемых функций. В этом отношении они существенно расширяют возможности анализа по сравнению с фурье-базисом. В последующих разделах такой анализ используется для характеристики функций по абсолютным значениям их вейвлет-коэффициентов. Другими словами, изучая лишь абсолютные величины вейвлет-коэффициентов, мы можем определить, к какому пространству функций относится анализируемый сигнал. Совокупность изучаемых таким образом пространств оказывается при этом намного шире,

¹¹ Для безусловных базисов не важно, в каком порядке выбраны базисные векторы. Все известные построения безусловных базисов с помощью вейвлетов полностью основываются на концепции много-масштабного анализа.

нежели для случая преобразования Фурье, когда удается полностью охарактеризовать лишь пространства Соболева¹².

Как мы уже упоминали, вейвлет-анализ "сосредоточивается" вблизи сингулярностей исследуемой функции. Соответствующие вейвлет-коэффициенты пренебрежимо малы в тех областях, где эта функция гладкая. Именно поэтому вейвлет-ряды со множеством ненулевых коэффициентов отвечают "патологическим" функциям, тогда как "нормальные" функции приводят к "разреженным" рядам, которые легко сжать. В свою очередь ряды Фурье обычных функций обладают множеством ненулевых коэффициентов, а "разреженные" ряды Фурье соответствуют "патологическим" функциям. Заметим в заключение, что преобразование Фурье, тем не менее, постоянно используется при доказательстве многих теорем математического аппарата вейвлет-преобразований. Это и не удивительно, поскольку вейвлеты можно рассматривать сами по себе как стационарные сигналы.

9. Вейвлеты и операторы

Исследование многих операторов, действующих в пространстве обычных или обобщенных функций, заметно упрощается, если используется подходящий вейвлет-базис, потому что соответствующие матрицы становятся почти диагональными по отношению к разложению по этому базису. Ортонормальные вейвлет-базисы являют собой уникальный пример базисов с нетривиальными диагональными или почти диагональными операторами. Действие оператора на вейвлет-ряды, представляющие данную функцию, не приводит к каким-либо неконтролируемым последствиям, т.е. вейвлет-разложение устойчиво. Можно точно предсказать, что произойдет с начальным рядом при воздействии на него оператором и как этот ряд будет преобразован. В определенном смысле вейвлеты устойчивы относительно операций интегрирования и дифференцирования. Вот почему вейвлеты, используемые в качестве базисных функций, помогают решать дифференциальные уравнения, характеризующиеся наличием набора заметно различающихся масштабов длины. Такие уравнения часто встречаются в физике и химии (см., например, раздел 15.1.1). Более того, вейвлеты сами появляются в виде собственных функций некоторых операторов.

Для работы с операторами в вейвлет-базисе удобно, как обычно, использовать их матричное представление. Заданный оператор T описывается набором его матричных элементов по вейвлет-базису:

$$T_{j,k;j',k'} = \langle \psi_{j,k}^* | T | \psi_{j',k'} \rangle. \tag{9.1}$$

Для линейных однородных операторов их матричное представление можно выписать в явном виде [22].

Весьма важно, что для этого достаточно на первом этапе вычислить лишь матричные элементы на некотором заданном (j -м) уровне разрешения. Все другие матричные элементы могут быть получены из них с помощью стандартных рекуррентных соотношений.

¹² Функция f принадлежит пространству Соболева $W^s(R)$, если для ее фурье-образа оказываются конечными интегралы вида $\int (1 + |\omega|^2)^s |f(\omega)|^2 d\omega$.

Выпишем явный вид матричного элемента $r_{j,l;j,l'}$ оператора T с однородностью порядка α :

$$r_{j,l;j,l'} = \langle \varphi_{j,l} | T | \varphi_{j,l'} \rangle. \tag{9.2}$$

Используя рекуррентные соотношения между скейлинг-функциями на заданном и на более мелком уровне разрешения, получим следующее уравнение, связывающее матричные элементы на соседних уровнях:

$$\begin{aligned} r_{j,l;j,l'} &= \left\langle \left(\sum_k h_k \varphi_{j+1,2l-k} \right) | T | \left(\sum_{k'} h_{k'} \varphi_{j+1,2l'-k'} \right) \right\rangle = \\ &= \sum_k \sum_{k'} h_k h_{k'} r_{j+1,2l-k;j+1,2l'-k'}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

В случае оператора T с показателем однородности α имеем

$$r_{j,l;j,l'} = 2^\alpha \sum_k \sum_{k'} h_k h_{k'} r_{j,2l-k;j,2l'-k'}. \tag{9.4}$$

Решение этого уравнения определяет искомые коэффициенты с точностью до нормировочного множителя, который легко получить из результатов воздействия оператора T на полином заданной степени. При нецелочисленных значениях α получается бесконечная система уравнений.

Уравнение для оператора дифференцирования n -го порядка можно записать в явном виде как

$$\begin{aligned} r_k^{(n)} &= \left\langle \varphi(x) \left| \frac{d^n}{dx^n} \right| \varphi(x-k) \right\rangle = \\ &= \sum_{i,m} h_i h_m \left\langle \varphi(2x+i) \left| \frac{d^n}{dx^n} \right| \varphi(2x+m-k) \right\rangle = \\ &= 2^n \sum_{i,m} h_i h_m r_{2k-i-m}^{(n)}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Оно приводит к конечной системе линейных уравнений для r_k (индекс n мы опускаем)

$$2r_k = r_{2k} + \sum_m a_{2m+1} (r_{2k-2m+1} + (-1)^n r_{2k+2m-1}), \tag{9.6}$$

где как r_k , так и $a_m = \sum_i h_i h_{i+m}$ ($a_0 = 1$) являются рациональными числами в случае вейвлетов Добеши. Вейвлет-коэффициенты определяются из этих уравнений с точностью до нормировочной постоянной. Условие нормировки выглядит так [22]:

$$\sum_k k^n r_k = n!. \tag{9.7}$$

При области задания вейвлета длиной L коэффициенты r_k отличны от нуля только при $-L+2 \leq k \leq L-2$, и решение существует при $L \geq n+1$. Эти коэффициенты обладают следующими свойствами симметрии:

$$r_k = r_{-k} \tag{9.8}$$

для четных k и

$$r_k = -r_{-k} \tag{9.9}$$

для нечетных значений k .

В качестве примера приведем таблицу матричных элементов дифференциальных операторов первого и второго порядка в базисе вейвлетов Добеши с четырьмя нулевыми моментами (D^8).

k	h_k	$\langle \varphi(x) \nabla \varphi(x-k) \rangle$	$\langle \varphi(x) \nabla^2 \varphi(x-k) \rangle$
-6	0	0,00000084	0,00001592
-5	0	-0,00017220	-0,00163037
-4	0	-0,00222404	-0,01057272
-3	0	0,03358020	0,15097289
-2	-0,07576571	-0,19199897	-0,69786910
-1	-0,02963552	0,79300950	2,64207020
0	0,49761866	0	-4,16597364
1	0,80373875	-0,79300950	2,64207020
2	0,29785779	0,19199897	-0,69786910
3	-0,09921954	-0,03358020	0,15097289
4	-0,01260396	0,00222404	-0,01057272
5	0,03222310	0,00017220	-0,00163037
6	0	-0,00000084	0,00001592

Для непрерывного линейного оператора T , представленного сингулярным интегралом

$$Tf(x) = \int K(x, y)f(y) dy, \quad (9.10)$$

при некоторых дополнительных условиях на ядро K (см. раздел 17.2) доказана важная теорема (носящая название $T(1)$ -теоремы), которая определяет необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот оператор являлся непрерывным линейным оператором как раз на пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ (дальнейшие подробности и изящное вейвлет-доказательство этой теоремы приведены в книге [3]).

Отметим, что стандартной проблемой для любого спектрального метода является представление оператора умножения на функцию. (В качестве примера для физиков укажем на оператор потенциальной энергии в уравнении Шрёдингера.) Однако в обычном пространстве, как мы хорошо знаем, эта операция тривиальна. Поэтому все операции, связанные с умножением на функцию, производятся в обычном пространстве. И только после этого выполняется переход к вейвлет-преобразованию. Такой алгоритм потребует только $O(N)$ операций.

10. Нестандартное матричное умножение

Существует два возможных способа воздействовать оператором на функцию в рамках вейвлет-теории. Они называются *стандартным* и *нестандартным* матричным умножением.

У достаточно гладких функций большинство их вейвлет-коэффициентов довольно маленькие. Для широкого класса операторов большинство их матричных элементов также оказываются небольшими. Рассмотрим структуру тех элементов матричного представления некоторого оператора T , которые достаточно велики. Матричные элементы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$T_{j,k;j',k'} \rightarrow 0 \text{ при } |k - k'| \rightarrow \infty, \quad (10.1)$$

$$T_{j,k;j',k'} \rightarrow 0 \text{ при } |j - j'| \rightarrow \infty. \quad (10.2)$$

Топология распределения этих матричных элементов внутри матрицы может оказаться весьма запутанной. Цель приведения этих матриц к нестандартной форме состоит в замене последнего из приведенных выше условий (10.2) более простым:

$$T_{j,k;j',k'} = 0 \text{ при } j \neq j'. \quad (10.3)$$

При этом условии исчезают матричные элементы между разными уровнями разрешения. Однако чтобы перейти к такому условию, приходится рассматривать вместо вейвлет-пространства другое переопределенное пространство с базисом, состоящим как из вейвлетов, так и из скейлинг-функций на разных уровнях разрешения.

Рассмотрим действие оператора T на функцию f , которое превращает ее в функцию g :

$$g = Tf. \quad (10.4)$$

Как g , так и f могут быть представлены в виде вейвлет-рядов с вейвлет-коэффициентами $(f_{j,k}, g_{j,k})$ и $(g_{j,k}, d_{j,k})$. На наиболее детальном уровне разрешения j_n отличны от нуля только s -коэффициенты, и преобразование имеет вид

$$g_{j_n,k} = \sum_{k'} T_{SS}(j_n, k; j_n, k') f_{j_n,k'}. \quad (10.5)$$

На следующем уровне как в стандартном, так и в нестандартном подходе мы получим

$$g_{j_n-1,k} = \sum_{k'} T_{SS}(j_n-1, k; j_n-1, k') f_{j_n-1,k'} + \sum_{k'} T_{SD}(j_n-1, k; j_n-1, k') d_{j_n-1,k'}, \quad (10.6)$$

$$g_{j_n-1,k} = \sum_{k'} T_{DS}(j_n-1, k; j_n-1, k') f_{j_n-1,k'} + \sum_{k'} T_{DD}(j_n-1, k; j_n-1, k') d_{j_n-1,k'}, \quad (10.7)$$

где

$$T_{SS}(j_n, k; j_n, k') = \int \bar{\varphi}_{j_n,k}(x) T \varphi_{j_n,k'}(x) dx$$

и замена нижних индексов $S \rightarrow D$ соответствует подстановке $\varphi \rightarrow \psi$ под знаком интеграла.

Имеется связь между разными уровнями, потому что все s -коэффициенты на этом $(j_n - 1)$ -м уровне должны быть разложены с помощью быстрого вейвлет-преобразования на s - и d -коэффициенты более высоких уровней. Поэтому, даже имея почти диагональный вид на начальном этапе, стандартная матрица приобретает затем довольно сложный вид, как это демонстрируется на рис. 11 для операций на четырех уровнях (число уровней специально выбрано таким же, как и в подробно обсуждавшемся выше случае вейвлетов Хаара). Это явно неудобно для проведения численных расчетов.

Как видно из рис. 11, на конечном этапе в стандартном подходе нам приходится иметь дело с вейвлет-представлением, описываемым формулой (3.17), в которой в векторах остается только один s -коэффициент,

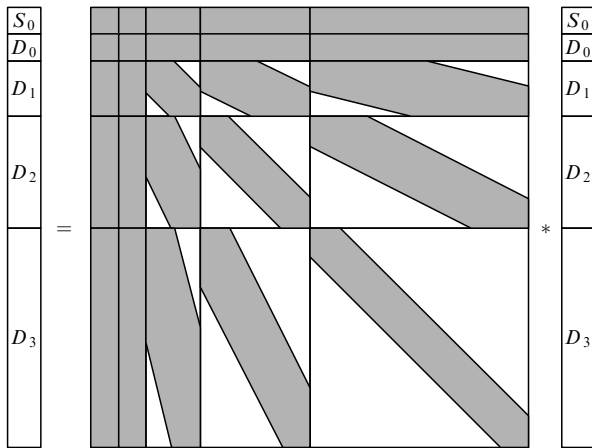


Рис. 11. Матричное представление при стандартном подходе к вейвлет-анализу. Части матрицы с ненулевыми вейвлет-коэффициентами заштрихованы.

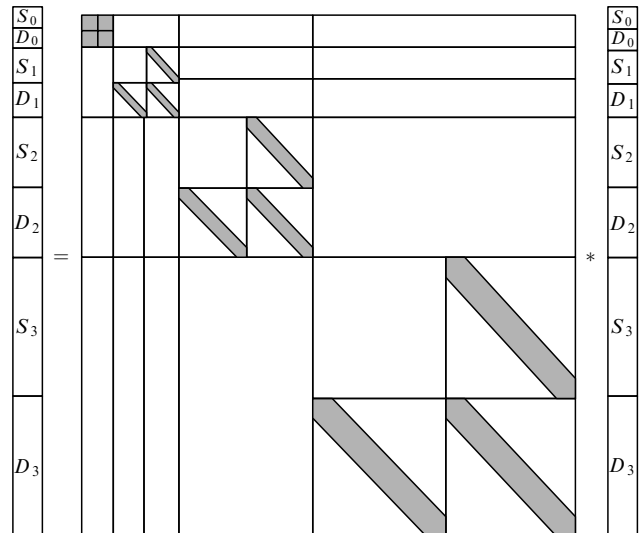


Рис. 12. Нестандартное матричное умножение при вейвлет-анализе.

представляющий взвешенное среднее функции по всему интервалу ее задания, а SS -переход от f к g описывается верхним левым квадратиком на этом рисунке. В то же время на пути к этой формуле от скейлинг-представления (3.18), (2.1) нам приходилось иметь дело со средними величинами на промежуточных уровнях, разлагая их затем на каждом этапе на части, s и d , последующих уровней разрешения. Эти промежуточные s -коэффициенты были опущены, поскольку мы заменяли их на s - и d -коэффициенты последующих уровней. Именно поэтому окончательная матрица в стандартном подходе приобретает такой сложный вид.

С целью упрощения вида матричного представления было предложено [23] использовать переопределенный набор вейвлет-коэффициентов. Давайте же теперь сохраним эти усредненные величины в виде соответствующих промежуточных s -коэффициентов как в начальных, так и в конечных векторах, представляющих функции f и g . Конечно, нам придется иметь дело с приводимыми векторами, которые намного больше требуемых для конечного ответа. Однако это не должно смущать, поскольку нам известен алгоритм приведения этих переопределенных выражений к окончательной непереопределенной форме. В то же время этот "трюк" существенно упрощает вид матрицы преобразования и численные расчеты. Эта нестандартная форма матричного умножения приведена на рис. 12. Различные уровни оказались полностью развязанными, потому что в матрице теперь полностью отсутствуют блоки, которые ранее перепутывали их. Блок с SS -элементами извлечен, а на его место вставлена нулевая матрица. Полная матрица соответственно искусственным образом увеличилась. Вместе с ней увеличились и векторы, характеризующие функции f и g . Теперь здесь удерживаются все промежуточные s -коэффициенты вейвлет-разложения функции f (сравните правые части рис. 11 и рис. 12). Каждый блок S_{j+1} получается из S_j и D_j . Вот, где теперь сохраняется связь разных уровней. В матрице преобразования равны нулю все SS -элементы за исключением их величин на низшем уровне S_0S_0 . Все остальные SD -, DS -, DD -матрицы почти диагональны вследствие конечности области задания вейвлетов и скейлинг-функций. Приве-

денная на рис. 12 форма функции g преобразуется в ее обычное вейвлет-представление из рис. 11 путем разделения каждого S_j в S_{j-1} и D_{j-1} стандартным методом. Затем эти S_{j-1} и D_{j-1} добавляются в соответствующие компоненты вектора. Эта процедура итерируется, начиная теперь уже с S_{j-1} , вплоть до S_0 , когда мы приходим к обычному вейвлет-представлению функции g . Таким способом мы избавляемся от всех s -коэффициентов за исключением s_0 . Вычисления можно проделать теперь очень быстро.

11. Регулярность и дифференцируемость

Анализ любого сигнала предполагает нахождение областей, в которых его поведение характеризуется либо регулярностью, либо наличием особенностей. Одним из основных преимуществ вейвлет-анализа является его способность к очень точному анализу свойств регулярности в поведении сигнала. Представляя сигнал в виде вейвлет-разложения, мы должны знать, сходится ли (и при каких условиях) соответствующий ряд и, значит, описывается ли он дифференцируемой функцией и где проявляют себя его особенности. Для некоторых сингулярных функций вся существенная информация заключена в ограниченном числе их вейвлет-коэффициентов. Знание этой информации может быть использовано при разработке оптимальных вычислительных алгоритмов. Мы начнем изложение с традиционного условия регулярности, предложенного Гельдером, а в следующем разделе перейдем к его обобщению, следуя работе [24].

Гельдеровское определение *точечной регулярности* в точке x_0 вещественной функции f , заданной на пространстве R^n , устанавливает, что эта функция принадлежит пространству $C^\alpha(x_0)$ при $\alpha > -n$, если существует полином P порядка по крайней мере α , когда выполняется условие

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha, \tag{11.1}$$

где C — некая постоянная.

Верхняя граница всех значений α , при которых выполнено условие (11.1), называется *показателем* (или

экспонентой) Гёльдера¹³ функции f в точке x_0 и обозначается $\alpha(x_0)$.

Соответственно точка x_0 называется *сильной α -сингулярностью* функции f при $-n < \alpha \leq 1$, если на малых интервалах справедливо неравенство

$$|f(x) - f(y)| \geq C|x - y|^\alpha \quad (11.2)$$

для относительно большого набора значений точек x и y , близких к точке x_0 .

Такие определения работают сравнительно хорошо для относительно гладких функций. Однако в случае функций, заметно флуктуирующих от точки к точке, их трудно применять в каждой точке, потому что, например, производная функции f может оказаться нерегулярной в точке x_0 , условие (11.1) может не выполняться при действии некоторых операторов типа преобразования Гильберта и т.п. Обобщенное определение локальной (точечной) регулярности будет дано в следующем разделе при введении так называемых двумерных микролокальных пространств. Здесь же мы сконцентрируемся на свойстве однородной регулярности функции f .

Однородная регулярность функции f при положительных нецелых значениях α состоит в требовании, чтобы условие (11.1) выполнялось для всех вещественных n -мерных значений x_0 при едином значении постоянной C . На первый взгляд, это условие выглядит довольно тривиальным, потому что однородная регулярность достаточно гладкой функции совпадает с ее точечной регулярностью, которая одинакова в этом случае во всех точках. Понять нетривиальность этого условия можно, рассмотрев, например, такую функцию, как $f(x) = x \sin(1/x)$, у которой точечные показатели Гёльдера равны $\alpha(0) = 1$, $\alpha(x_0) = \infty$ для всех фиксированных значений x_0 , отличных от нуля, а однородный показатель Гёльдера отличен от них и равен $\alpha = 1/2$, будучи определен набором точек $x_0 \propto |x - x_0|^{1/2} \gg |x - x_0|$.

Требование определенной однородной регулярности функции $f(x)$ на всей вещественной оси при положительных нецелочисленных значениях α может быть выражено в терминах вейвлет-коэффициентов в виде неравенства

$$|d_{j,k}| \leq C2^{-(n/2+\alpha)j}. \quad (11.3)$$

Таким образом, по масштабному поведению вейвлет-коэффициентов удастся получить некоторые сведения о свойстве однородной регулярности функции. В частности, линейная зависимость логарифма вейвлет-коэффициентов от масштаба j указывала бы на проявление масштабно-инвариантных свойств сигнала, т.е. на фрактальное поведение, детальные характеристики которого в принципе можно узнать по зависимости высших моментов вейвлет-коэффициентов от их ранга (см. ниже). Что касается точечной регулярности, определяемой локальными характеристиками функции, подобное условие будет сформулировано в следующем разделе.

¹³ В принципе выражение $|x - x_0|^\alpha$ в правой части (11.1) можно заменить при выполнении некоторых условий на функции более общего вида, определяющие так называемый модуль непрерывности. Вообще, модуль непрерывности определяет наибольшее отклонение от наилучшей полиномиальной аппроксимации функции f , которая характеризуется набором наименьших отклонений по сравнению с другими полиномиальными аппроксимациями. Однако мы будем придерживаться данного выше определения.

А теперь сформулируем условия, при которых вейвлет-ряды сходятся в заданных точках, т.е. дифференцируемы. Было доказано, что:

- если функция f квадратично интегрируема, то ее вейвлет-ряд сходится почти везде;
- вейвлет-ряд функции f сходится на последовательности точек, эквипотентной R , если

$$|d_{j,k}| = 2^{-j/2}\eta_j, \quad (11.4)$$

где η_j стремится к нулю при j , стремящемся к $+\infty$;

- функция f дифференцируема почти всюду, и почленная производная ее вейвлет-ряда сходится почти всюду к ее производной f' , если выполнено условие

$$\sum_j |d_{j,k}|^2 2^{2j} \leq \infty; \quad (11.5)$$

- функция f дифференцируема на наборе точек, эквипотентном R , и в этих точках производная ее вейвлет-ряда сходится к f' , если

$$|d_{j,k}| \leq 2^{-3j/2}\eta_j, \quad (11.6)$$

где η_j стремится к нулю при j , стремящемся к $+\infty$.

Ограничения, наложенные на вейвлет-коэффициенты, обобщаются при учете точечной регулярности с помощью рассмотрения двумерных микролокальных пространств. Получаемые при этом оценки уже не только оказываются верными в случае однородной регулярности, но и действуют локально (возможно, за исключением некоей подпоследовательности точек с малой размерностью Хаусдорфа, которую можно найти с помощью вейвлет-анализа).

В заключение отметим, что однородную регулярность f можно анализировать и с помощью оконного преобразования Фурье, изучая спадание по ω коэффициентов Фурье, если выбрать подходящую достаточно гладкую функцию g . Однако в большинстве случаев полученные ограничения на показатель Гёльдера не будут оптимальными. И уж тем более ничего не удастся узнать таким способом о локальных свойствах сигнала, тогда как масштабный вейвлет-анализ позволяет добиваться значительных успехов в этом направлении, что и будет обсуждаться ниже.

12. Дважды микролокальный анализ

Цель дважды микролокального анализа состоит в определении поведения любой функции в конкретных точках по свойствам ее вейвлет-коэффициентов. Таким способом устанавливается локальная гладкость функции.

Скалярное произведение анализируемой одномерной функции и вейвлета преобразует эту функцию в двумерные вейвлет-коэффициенты, которые характеризуют как масштабные (частотные), так и локальные (временные) свойства сигнала. В приведенных выше определениях точечной регулярности функции при $x = x_0$, характеризующей показателем Гёльдера, учитываются только локальные, а не масштабные свойства сигнала. Проблема нахождения точного показателя Гёльдера данной функции легко решается в том случае, когда ее регулярность всюду одинакова, потому что тогда он обычно совпадает с однородным показателем. Определение

точечной регулярности Гёльдера становится, однако, заметно более сложной задачей, если функция катастрофически изменяется от точки к точке, т.е. если ее масштабные (частотные) характеристики существенным образом зависят от данной точки (момента времени). В этом случае мы имеем дело с очень нестационарным сигналом. При описании сингулярности $f(x)$ в точке x_0 только с помощью гёльдеровского показателя $\alpha(x_0) \leq 1$ мы обычно следим за порядком величины модуля разности $|f(x) - f(x_0)|$ при стремлении x к x_0 и не обращаем внимания, например, на возможные быстрые осцилляции $f(x) - f(x_0)$ вблизи этой точки, т.е. на масштабные характеристики изучаемого сигнала.

Свойства вейвлет-коэффициентов как функций и от шкалы, и от положения точки¹⁴ предоставляют уникальную возможность описания точечных сингулярностей. Этот метод является более общим по сравнению с подходом Гёльдера, потому что он позволяет исследовать, характеризовать и легко различать некоторые специфические локальные свойства (обобщенных) функций, такие, как приблизительное самоподобие и очень сильные осцилляции, проявляющиеся, например, у переменных осциллирующих функций, представленных, скажем, так называемыми чирпами (chirps), имеющими вид $x^z \sin(1/x^b)$ (они напоминают чирикание или звуки, издаваемые летучими мышами или дельфинами, с характерными быстрыми осцилляциями, ускоряющимися в некоторый момент времени). Чирпы известны тем, кто занимается технологическими проблемами радаров или проблемами передачи звука. В физике их проявления встречались авторам, например, при теоретическом анализе излучения темной материи или же гравитационных волн. Иногда подобные зависимости проявляются и при более традиционном корреляционном анализе [25–27]. Они характерны, прежде всего, тем, что вторая производная от фазы частотно-модулированного сигнала принимает очень большие значения. Такие специфические черты с частотно-модулированными закономерностями, скрытыми в данном сигнале, удается выявить [24] с помощью дважды микролокального анализа. В действительности не существует общепринятого определения чирпов. Например, иногда чирпом называют любой синус от нелинейного полинома времени.

Двумерное микролокальное пространство $C^{s,s'}(x_0)$ вещественных n -мерных (обобщенных) функций f определяется с помощью следующего простого условия, наложенного на их вейвлет-коэффициенты $d_{j,k}$:

$$|d_{j,k}(x_0)| \leq C 2^{-(n/2+s)j} (1 + |2^j x_0 - k|)^{-s'}, \quad (12.1)$$

где s и s' — два вещественных числа. Это неравенство является весьма существенным расширением условий Гёльдера, будучи непосредственно связанным с условием точечной регулярности (11.1). Оно показывает, например, как сингулярное поведение самой функции f в точке x_0 отражается на поведении ее вейвлет-коэффициентов в этой самой точке. Приведенная оценка устойчива относительно процедур дифференцирования и почленного интегрирования.

¹⁴ Заметим, что термин "положение" (и соответственно "шкала") не означает ограничения только одномерным сигналом, а применим к положению (и размеру или частоте) в любом n -мерном пространстве.

При $s' = 0$ определенное таким способом двумерное микролокальное пространство переходит в полное пространство Гёльдера $C^s(R^n)$.

При $s' > 0$ эти условия оказываются более слабыми вблизи x_0 , нежели вдали от этой точки, как это легко следует из формулы (12.1), и потому ситуация отвечает описанию поведения функции, сингулярной в точке x_0 при довольно гладком окружении, т.е. гладкость функции f ухудшается по мере того как x приближается к x_0 . При положительном показателе s' неравенство (12.1) приводит к условию

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-(n/2+s)j},$$

которое показывает, что f принадлежит пространству $C^s(R^n)$. Гёльдеровские нормы не дают при этом никакой информации о наличии сингулярности, потому что их приходится рассматривать в областях с выкинутой точкой x_0 , а условие гёльдеровской регулярности не работает, когда x стремится к x_0 . Вот почему приходится использовать условие однородной регулярности при $s > 0$. При положительном s и $s' > -s$ пространство $C^{s,s'}(x_0)$ содержится в $C^s(x_0)$.

При $s' < 0$ проявляется обратная ситуация, когда точка x_0 оказывается регулярной в весьма "неспокойном" окружении.

Таким образом, уравнение (12.1) проясняет связь между точечной регулярностью данной функции и ограничениями на величину ее вейвлет-коэффициентов. Можно доказать, что элементы пространства $C^{s,s'}(x_0)$ при $s' > -s$ являются обычными функциями, а элементы пространства $C^{s,-s}(x_0)$ представляют собой чаще всего уже обобщенные функции (и, более того, зачастую ведущие себя настолько нерегулярным образом, что локальное условие Гёльдера (11.1) не может быть использовано, а надо обобщить его, умножив правую часть на множитель $\log(1/|x - x_0|)$). Однако если функция f принадлежит пространству $C^s(x_0)$, то она принадлежит и $C^{s,-s}(x_0)$. В частности, если при x , близком к x_0 , выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq C|x - x_0|^s \quad \text{при } s \leq 0,$$

ограничивающее характер сингулярности в этой точке, то для вейвлет-коэффициентов этой функции справедлива оценка:

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-(n/2+s)j} |k - 2^j x_0|^s, \quad (12.2)$$

если область задания функции $\psi_{j,k}$ находится от точки x_0 по крайней мере на расстоянии 2^{-j} , и

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-(n/2+s)j}, \quad (12.3)$$

если эта область расположена от точки x_0 на расстоянии, меньшем 2^{-j} . Эти оценки оправдывают сделанное выше утверждение.

Двумерные микролокальные пространства обладают определенной устойчивостью. В частности, псевдодифференциальные операторы нулевого порядка (например, преобразование Гильберта) непрерывны на этих пространствах (в отличие от обычного точечного условия регулярности Гёльдера, которое не сохраняется после воздействия этих операторов). Положение точек регу-

лярности функции f , принадлежащей пространству $C^{s,s'}(x_0)$, не изменяется под действием сингулярных интегральных операторов, таких, как преобразование Гильберта. Это свойство приводит к выводу о точечной регулярности решений дифференциальных уравнений в частных производных, который дается в [24] следующей теоремой.

Пусть A является эллиптическим (в точке x_0) дифференциальным оператором порядка m с гладкими коэффициентами. Если $Af = g$ и g принадлежит пространству $C^{s,s'}(x_0)$, то f принадлежит $C^{s+m,s'}(x_0)$.

Таким образом, если $Af = g$ и если g принадлежит пространству $C^s(x_0)$, то существует такой полином P степени, меньшей, чем $s + m$, что при $|x - x_0| \leq 1$ выполняется следующее условие:

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^{s+m}.$$

Все полученные выше условия выглядят таким образом, как если бы вейвлеты были собственными векторами дифференциальных операторов d^α , $|\alpha| \leq r$, с соответствующими собственными значениями $2^{j|\alpha|}$.

Более общие пространства, в которых допустимы и степенные зависимости от шкалы j , задаваемые неким дополнительным параметром p , рассмотрены в [24], в частности, там рассмотрены пространства Соболева, в которых условие интегрируемости вплоть до некоторой степени p накладывается как на саму функцию, так и на все ее производные вплоть до некоторой кратности s . При этом в правой части неравенства (11.1) появляется дополнительный сомножитель $j^{2/p}$, или, другими словами, в показателе к линейному члену добавляется логарифмически зависящее слагаемое. Вейвлет-анализ позволяет определить фрактальные размерности наборов точек, в которых функция f сингулярна.

Для непрерывных вейвлетов условие, эквивалентное (11.1), имеет вид

$$|W(a, b)| \leq Ca^s \left(1 + \frac{|b - x_0|}{a}\right)^{-s}. \quad (12.4)$$

Определенные ограничения сверху на значения $|W(a, b)|$ можно получить и в случае, когда функция f интегрируема в окрестности начала координат (см. [24]). Однако они выглядят довольно сложно, и мы приводить их здесь не будем.

Полезно обсудить смысл условий типа (12.4). Рассмотрим конус в полуплоскости (b, a) , заданный уравнением $|b - x_0| < a$. Внутри этого конуса имеем $|W(a, b)| = O(a^s)$ при $a \rightarrow 0$. Вне конуса поведение определяется расстоянием от точки b до точки x_0 . Эти два типа поведения, вообще говоря, различны и их надо изучать по отдельности. Однако в работе [28] было показано, что неосциллирующие сингулярности можно охарактеризовать поведением модулей их вейвлет-коэффициентов внутри конуса. Там же показано, что быстро осциллирующие сингулярности, к описанию которых мы сейчас и переходим, нельзя описать, изучая поведение их вейвлет-преобразования только внутри конуса.

Методы дважды микролокального анализа оказались очень успешными при анализе осциллирующих тригонометрических и логарифмических чирпов.

Простейшее определение тригонометрических чирпов в начале координат $x = 0$ можно записать в виде

$$f(x) = x^\alpha g(x^{-\beta}), \quad (12.5)$$

где g есть 2π -периодическая функция пространства C^r с равным нулю интегралом от нее. Это приводит к определенному разложению непрерывных вейвлет-коэффициентов при малых и положительных значениях $b \leq \delta$ на кривых $a = \lambda b^{1+\beta}$:

$$W(\lambda b^{1+\beta}, b) = b^\alpha m_\lambda(b^{-\beta}), \quad (12.6)$$

где m_λ является 2π -периодической функцией с определенной конечной нормой. Это условие показывает, что быстро осциллирующие сингулярности не могут быть описаны поведением их вейвлет-преобразования в пределах конуса, как это имело место в предыдущих примерах. В данном случае надо внимательно рассматривать вейвлет-коэффициенты не в конусе, а на некоторых определенных кривых, поскольку они сосредоточены именно на таких "хребтах". На достаточно малых масштабах такой "хребет" расположен вне области конуса влияния обычной сингулярности. Типичным примером служит функция $f(x) = \sin(1/x)$, у которой частота осцилляций стремится к бесконечности при $x \rightarrow 0$. Модули вейвлет-коэффициентов максимальны на кривой, описываемой уравнением $b = Ca^2$ при постоянной C , зависящей только от вида вейвлета, и, как мы видим, эта кривая не есть конус. Поэтому для характеристики такой специфической сингулярности недостаточно знать поведение вейвлет-коэффициентов только внутри конуса. Отметим, что в случае зашумленных сигналов вклад динамической составляющей сигнала, как можно ожидать, будет больше шумовой составляющей именно около "хребтов" вейвлет-преобразования, потому что вейвлет-преобразование шума распределено более равномерно по всей (j, k) -плоскости. Это можно использовать для удаления шумов из сигнала.

Логарифмические чирпы обладают вблизи x_0 приближенной масштабной инвариантностью. Функция f является логарифмическим чирпом порядка (α, λ) и регулярности $\gamma \geq 0$ в начале координат $x = 0$, если в его окрестности при $x > 0$ существует такая $\log \lambda$ -периодичная функция $G(\log x)$ в $C^\gamma(R)$, что

$$f(x) - P(x) = x^\alpha G(\log x). \quad (12.7)$$

Непрерывные вейвлет-коэффициенты этой функции удовлетворяют условию

$$W(a, b) = a^\alpha H\left(\log a, \frac{b}{a}\right), \quad (12.8)$$

где H является $\log \lambda$ -периодичной по первому аргументу, а ее поведение по b/a ограничено некоторыми условиями спадания. Другими словами, это можно описать, как наличие характерного масштабного поведения

$$C(\lambda a, \lambda b) = \lambda^\alpha C(a, b) \quad (12.9)$$

при $\lambda < 1$ и достаточно малых a и b . В этом случае функция f обладает логарифмическим чирпом порядка (α, λ) . Мы несколько упростили общие определения и условия теорем в целях краткости изложения. Более полные и точные формулировки можно найти в [24]. Таким образом, тип и поведение чирпа можно узнать по поведению его вейвлет-коэффициентов.

В качестве примера применения указанных условий упомянем непрерывную периодическую функцию $\sigma(x)$,

представляемую римановским рядом

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(\pi n^2 x), \quad (12.10)$$

которая принадлежит пространству $C^{1/2}$. Ее лучше всего анализировать, используя специальный комплексный вейвлет $\psi(x) = (x+i)^{-2}$, предложенный Н.Н. Лузиным в 1930-е годы в функциональном анализе. В этом случае вейвлет-преобразование приводит к хорошо известной θ -функции Якоби. Поведение вейвлет-коэффициентов определяет тип чирпа и его параметры. С помощью дважды микролокального анализа удалось показать, что функция $\sigma(x)$ обладает тригонометрическими чирпами в некоторых рациональных точках x_0 , являющихся отношениями двух нечетных чисел (при этом ее первая производная существует только в этих точках), и логарифмическими чирпами в квадратичных иррациональных точках (вблизи этих точек вейвлет-преобразование функции обладает свойством масштабной инвариантности).

Однако в реальных ситуациях может оказаться, что для достаточно точного определения показателя Гельдера с помощью указанных выше формул потребуются очень большие значения j . В случае однородного показателя не требуется знания свойств регулярности самих вейвлетов, в то время как при нахождении локального показателя Гельдера необходим более аккуратный подход.

Прекрасная иллюстрация применения вейвлет-анализа к изучению свойств локальной регулярности функции $f(x)$ приведена в книге [2] для

$$\begin{aligned} f(x) = & 2 \exp(-|x|) \theta(-x-1) + \\ & + \exp(-|x|) \theta(x+1) \theta(1-x) + \\ & + \exp(-x) [(x-1)^2 + 1] \theta(x-1), \end{aligned} \quad (12.11)$$

которая бесконечно дифференцируема всюду, кроме точек $x = -1, 0, 1$, где соответственно терпят разрыв f, f', f'' . В каждой из этих трех точек вычисляются максимальные значения вейвлет-коэффициентов $A_j = \max_k |W_{j,k}|$ для разных уровней разрешения $3 < j < 10$ и строится график зависимости $\log A_j / \log 2$ от j . Линейная зависимость от j была найдена в этих точках. Величины наклонов при $x = -1, 0, 1$ оказались соответственно равными $-0,505; -1,495; -2,462$, что позволяет оценить с достаточно хорошей точностью в 1,5% истинные значения показателей Гельдера для этой функции, равные 0, 1, 2.

Еще лучшей точности в определении локальных свойств регулярности сигнала можно достичь с помощью приводимых семейств вейвлетов (frames), у которых трансляционная неинвариантность выражена слабее, регулярность самих вейвлетов играет меньшую роль, а важно лишь число нулевых моментов.

Если же используются ортонормированные вейвлеты, то их регулярность может оказаться существенной. Обычно они являются непрерывными функциями с нецелым однородным показателем Гельдера и различными локальными показателями в разных точках. В действительности существует целая иерархия (фрактальных) множеств, на которых эти вейвлеты имеют разные показатели Гельдера. Существует прямая связь между регулярностью функции ψ и числом ее нулевых

моментов: чем больше моментов зануляется, тем более гладкой является функция ψ . Например, для широко используемых вейвлетов с конечным носителем степень регулярности линейно растет с максимальным числом зануленных моментов M при большом M , как μM с $\mu \approx 0,2$, т.е. соответственно и с ростом области задания вейвлета (см. раздел 4). Эти свойства оправдывают название "математический микроскоп", которое часто употребляется в отношении вейвлетов. Подчеркнем, однако, что выбор коэффициентов h_k , приводящий к наилучшей гладкости вейвлета, может отличаться от того выбора, который надо сделать для получения максимального числа нулевых моментов у ψ . Насколько хорошо проекция многомасштабного приближения V_j сходится к данной функции f , зависит от регулярности функций в V_0 .

Существует специальный класс вейвлетов, названных *вагулетами* (vaguelets). Они должны обладать свойством регулярности, налагающим условия

$$|\psi_{j,k}(x)| \leq C 2^{nj/2} (1 + |2^j x - k|)^{-n-\alpha}, \quad (12.12)$$

$$|\psi_{j,k}(x') - \psi_{j,k}(x)| \leq C 2^{j(n/2+\beta)} |x' - x|^\beta \quad (12.13)$$

с ограничением $0 < \beta < \alpha < 1$ и постоянной C . Конечно, при этом должно выполняться и общее для всех вейвлетов условие знакопеременности (3.16). Норма любой функции f в этом случае ограничена величиной ее вейвлет-коэффициентов:

$$\|f\| \leq C' \left(\sum_{j,k} |d_{j,k}|^2 \right)^{1/2}, \quad (12.14)$$

при постоянной C' . Любой непрерывный оператор T на пространстве L^2 , удовлетворяющий условию $T(1) = 0$, преобразует ортонормальный вейвлет-базис в вагулеты.

На практике регулярность вейвлета может оказаться принципиально важной в процессе синтеза, когда после отбрасывания малых вейвлет-коэффициентов предпочтительно работать со сравнительно гладкой функцией ψ , чтобы уменьшить возможные неточности на уровне обратного преобразования. В отличие от этого для анализа представляется более важным иметь дело с вейвлетами, имеющими много нулевых моментов, чтобы оказалось возможным "отбросить" гладкие полиномиальные зависимости и вскрыть потенциально присутствующие сингулярности. Кроме того, наличие большого числа нулевых моментов приводит к лучшему сжатию, хотя и может увеличить ошибки при обратной процедуре реконструкции сигнала из-за ухудшившейся гладкости вейвлетов. На этом этапе очень помогает применение биортогональных вейвлетов, потому что из двух используемых дуальных вейвлетов один обладает большим количеством нулевых моментов, тогда как второй характеризуется довольно хорошими свойствами регулярности. Путем выбора соответствующей пары биортогональных вейвлетов можно минимизировать возможные ошибки.

13. Вейвлеты и фракталы

Некоторые сигналы (объекты) обладают свойством самоподобия (фрактальности). Это означает, что при изменении масштаба на новой шкале проявляются

характеристики, подобные замеченным ранее на других масштабах (см., например, [29–32]). Это свойство приводит к степенным зависимостям. Формальное определение (моно)фрактальной хаусдорфовой размерности D_F геометрического объекта дается условием

$$0 < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^{D_F} < \infty, \quad (13.1)$$

которое означает, что значение D_F является единственным, при котором остается конечным произведение минимального числа гиперкубов $N(\varepsilon)$ с линейным размером $l = \varepsilon$, покрывающих полностью этот объект, и множителя ε^{D_F} в случае, когда ε стремится к нулю. В обычной школьной геометрии однородных объектов она совпадает с топологической размерностью. Вероятность $p_i(\varepsilon)$ попасть в один из гиперкубов $N_i(\varepsilon)$ пропорциональна ε^{D_F} , и сумма моментов равна

$$\sum_i p_i^q(\varepsilon) \propto \varepsilon^{qD_F}. \quad (13.2)$$

Фрактальная размерность напрямую связана с показателями Гёльдера.

В более общем случае объектов, обладающих мультифрактальными свойствами, "фрактальные показатели" $\alpha(x_0)$ (см. условие (11.1)) меняются от точки к точке. Хаусдорфова размерность совокупности точек x_0 , на которой выполнено равенство $\alpha(x_0) = \alpha_0$, задается функцией $d(\alpha_0)$, поведение которой определяет мультифрактальные свойства сигнала, будь то броуновское движение, полностью развитая турбулентность или же чисто математическая конструкция римановского ряда. Веса, с которыми входят в мультифрактал различные фрактальные размерности, различаются у разных мультифракталов. Поэтому для мультифракталов величина D_F заменяется на D_{q+1} , которая явно зависит от q и называется *размерностью Реньи* [33] (или же *обобщенной размерностью*). В общем случае это падающая функция q . Фрактальная (хаусдорфова), информационная и корреляционная размерности являются частными случаями обобщенной размерности соответственно при $q = -1, 0, 1$. Разница между топологической и обобщенной размерностями называется *аномальной размерностью* (или *коразмерностью*). Фракталы и мультифракталы хорошо известны как среди чисто математических построений (канторово множество, ковер Серпинского и т.п.), так и в природе (облака, легкие и т.п.).

Точечные показатели Гёльдера определяются теперь с помощью вейвлетов. Как мы отмечали выше, все вейвлеты данного семейства $\psi_{j,k}(x)$ подобны своему базисному вейвлету $\psi(x)$ и получаются из него с помощью сжатий и сдвигов. Поскольку вейвлет-анализ как раз и состоит в изучении поведения сигналов на разных масштабах путем вычисления скалярного произведения анализирующего вейвлета на исследуемый сигнал, он более всего подходит для исследования фрактального поведения. В терминах вейвлет-коэффициентов это подразумевает степенное поведение их высших моментов при изменении масштаба. Вейвлет-коэффициенты менее чувствительны к шуму, потому что они измеряют на разных масштабах средние флуктуации сигнала.

Конкретно, рассмотрим сумму Z_q q -х моментов коэффициентов вейвлет-преобразования на разных

масштабах j

$$Z_q(j) = \sum_k |d_{j,k}|^q, \quad (13.3)$$

где суммируются максимальные значения $|d_{j,k}|$. Было показано [34, 35], что в случае фрактального сигнала эта сумма должна вести себя как

$$Z_q(j) \propto 2^{j[\tau(q)+q/2]}, \quad (13.4)$$

т.е.

$$\log Z_q(j) \propto j \left[\tau(q) + \frac{q}{2} \right]. \quad (13.5)$$

Таким образом, необходимым условием того, что сигнал обладает свойствами самоподобия, является линейная зависимость $\log Z_q(j)$ от номера уровня j . Если это требование удовлетворено, то зависимость функции τ от ранга момента q определяет, является данный сигнал монофрактальным или мультифрактальным. Монофрактальные сигналы характеризуются одной размерностью, тогда как для описания мультифрактальных сигналов необходим целый набор таких размерностей. Монофрактальные сигналы однородны в том смысле, что они обладают одними и теми же свойствами скейлинга на всем их протяжении. С другой стороны, мультифрактальные сигналы можно разложить на "подсигналы", каждый из которых характеризуется своей локальной размерностью, задаваемой определенной весовой функцией. При выборе вейвлета с достаточным числом нулевых моментов вейвлет-преобразование нечувствительно к низшим полиномам, которые могут воспрепятствовать количественному описанию локального скейлинга сигнала при традиционном подходе путем подсчета на отдельных интервалах. Функция $\tau(q)$ может рассматриваться как масштабно-независимая мера фрактального сигнала. Ее нетрудно связать с размерностью Реньи, показателями Хёрста и Гёльдера (подробнее см. в [36, 37]). Область применимости мультифрактального формализма при исследовании функций можно выяснить [38] с помощью методов дважды микролокального анализа, обобщенных на случай высших моментов вейвлет-коэффициентов. Таким образом, вейвлет-анализ выходит далеко за пределы традиционных методов анализа, использующих язык корреляционных функций [36], и позволяет исследовать более глубокие корреляционные уровни и более тонкие характеристики.

Заметим, что сумма вторых моментов $Z_2(j)$ представляет собой дисперсию вейвлет-коэффициентов при равном нулю их среднем значении. При положительных значениях q функция $Z_q(j)$ описывает скейлинг больших флуктуаций и сильных сингулярностей, а при отрицательных q она отвечает за скейлинг малых флуктуаций и слабых особенностей, проявляя тем самым свою чувствительность к разным аспектам динамики, лежащей в основе исследуемого сигнала.

14. Дискретизация и устойчивость

При анализе сигналов в случае практических применений обычно имеют дело не с аналитически заданными функциями, а только лишь с наборами последователь-

ностей чисел, получаемых в процессе дискретизации непрерывного во времени сигнала. Эта процедура называется *оцифровкой* (английский термин *sampling*) аналогового сигнала. Ниже мы рассмотрим некоторые последствия такой операции. На первый взгляд, представляется, будто в этом случае понятие сингулярностей и показателей Гельдера теряет смысл. Тем не менее можно утверждать, что поведение вейвлет-коэффициентов в функции от масштаба дает хороший способ описания регулярности функций, заданных наборами чисел при определенном разрешении.

Вначале рассмотрим бесконечную в обе стороны последовательность

$$f^{(d)} = \{f_n\} = \{f(n\Delta t)\} \quad (-\infty < n < \infty),$$

полученную путем дискретизации непрерывного сигнала в регулярно расположенных точках $t_n = n\Delta t$. Если в каждом малом n -м интервале Δt функцию f можно аппроксимировать постоянной $f(n\Delta t)$, то для достаточно малых интервалов Δt получим

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \approx \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \exp(-in\omega \Delta t). \quad (14.1)$$

Обратное преобразование приводит к

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \exp(in\omega \Delta t) d\omega. \quad (14.2)$$

Функция f_ω периодическая с периодом $2\pi/\Delta t$. Это означает, что можно рассматривать ее только на интервале $[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$. Более того, для вещественных сигналов достаточен и интервал $[0, \pi/\Delta t]$. В случае ограниченных во времени сигналов суммирование в формуле (14.1) ведется от $n_{\min} = 0$ до $n_{\max} = N - 1$ при N набранных значениях сигнала. В случае алгоритма быстрого преобразования Фурье потребуется всего $O(N \log N)$ вычислительных операций.

Для установления связи между преобразованиями Фурье непрерывного сигнала f и дискретного набора $f^{(d)}$ перепишем формулу (14.2) в виде

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi/\Delta t}^{(2k+1)\pi/\Delta t} f_\omega \exp(in\omega \Delta t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\omega+2k\pi/\Delta t} \exp(in\omega \Delta t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} f_\omega^{(d)} \exp(in\omega \Delta t) d\omega, \end{aligned} \quad (14.3)$$

откуда имеем

$$f_\omega^{(d)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\omega+2k\pi/\Delta t}. \quad (14.4)$$

Таким образом, фурье-образ дискретного набора содержит, вообще говоря, вклады от фурье-образов непрерывного сигнала не только с той же частотой ω , но и с бесконечным счетным множеством частот $\omega + 2k\pi/\Delta t$. Эти частоты называются *спутниками частоты* ω . Тогда для "недобранного" набора проявляется примесь паразитных высокочастотных компо-

нент к более низким частотам. Частота $\omega_{(N)} = \pi/\Delta t$ называется *частотой Найквиста*. Для улучшения сходимости рядов надо производить набор данных с частотой, превышающей частоту Найквиста.

Функция f с ограниченной полосой частот может быть восстановлена по набору f_n , если частота набора $\omega_s \propto (\Delta t)^{-1}$ не менее предельной частоты этой полосы ω_f , т.е. когда $\omega_s \geq \omega_f$. (Это утверждение известно как *теорема Котельникова-Шеннона*.)

В этом случае паразитные частоты не проявляются, поскольку только одна из частот попадает в эту полосу $[-\omega_f, \omega_f]$. Если $\omega_s < \omega_f$, то функция f не может быть восстановлена без дополнительных предположений.

Теорема имеет строгое доказательство, однако уже из интуитивных соображений совершенно ясно, что нельзя восстановить высокочастотную компоненту сигнала, отбирая его значения с малой частотой. Поэтому для того чтобы исследовать высокочастотную составляющую, следует регистрировать сигнал с частотой, превышающей все частоты, существенные для данного физического процесса. Только тогда можно добиться устойчивого восстановления сигнала. Можно уменьшать частоту набора ω_s вплоть до предельной частоты ω_f , не теряя при этом информации. Это позволяет сэкономить на наборе сигналов, сохраняя меньшие наборы данных, т.е. более короткие дискретные сигналы.

В случае вейвлет-анализа устойчивые алгоритмы восстановления f по коэффициентам $d_{j,k}$ получаются, когда есть уверенность в том, что $\psi_{j,k}$ образуют фреймы. Для лучшей сходимости надо выбирать фреймы, близкие к так называемым строгим (английский термин *tight*) фреймам, т.е. удовлетворяющие условию $(B/A - 1) \ll 1$. Ортонормированные вейвлеты обладают хорошей локализацией и по времени, и по частоте. Вообще, если сама ψ хорошо локализована по времени и частоте, то и образуемый ею фрейм будет обладать этим свойством.

Дискретные вейвлеты хорошо приспособлены к описанию функций по их усредненным значениям в равноудаленных точках. Однако в реальных практических приложениях помимо такой проекции функции приходится учитывать, что она задана на некотором конечном интервале и надо изучать конечное число уровней разрешения. Как уже упоминалось в разделе 5, обычно нумерацию уровней изменяют таким образом, что уровень с самыми детальными сведениями о функции $f(x)$ принимают за нулевой ($j = 0$), а уровни, на которых уже проводится усреднение и анализ, нумеруют положительными целыми значениями $1 \leq j \leq J$. На начальном уровне коэффициенты определяются по измеренным значениям анализируемой функции $s_{0,k} = f(k)$, т.е. вместо функции $f(x)$ рассматривается ее проекция $P_0 f$. На более высоких уровнях коэффициенты находят с помощью итерационных соотношений (5.2), (5.3), т.е. с помощью быстрого вейвлет-преобразования, не прибегая к явному вычислению интегралов $\int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$ и $\int f(x) \varphi_{j,k}(x) dx$. Таким образом, аппроксимация функции $f(x)$, по существу совпадающая с перенумерованными соотношениями (2.5) и (3.17), может быть записана в виде

$$f(x) \approx P_0 f = \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k} + \sum_k s_{J,k} \varphi_{J,k}, \quad (14.5)$$

где сумма по k ограничена интервалом задания функции $f(x)$. Более того, с целью экономии машинного времени можно использовать не весь набор вейвлет-коэффициентов $d_{j,k}$, а всего лишь часть их, опуская маленькие коэффициенты, не превышающие некоторого порогового значения ε . Этот стандартный метод оценок называется *оценкой по пороговым коэффициентам*. Если суммирование в формуле (14.5) ведется только по таким коэффициентам $|d_{j,k}| > \varepsilon$ и число отброшенных коэффициентов равно n_0 , то функция f_ε , которая аппроксимирует $f(x)$ в этой ситуации, отличается по норме от $f(x)$ следующим образом:

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon n_0^{1/2}. \quad (14.6)$$

Итак, для функции, которая достаточно гладкая в основной части ее области определения и существенно изменяется только на очень малых интервалах, большое число вейвлет-коэффициентов очень малы, и потому можно выбирать очень малые пороговые значения ε при сохранении высокой точности в аппроксимации $f(x)$. Вместо этой процедуры — так называемого *жесткого сжатия* — иногда используют [39] *пороги с мягким сжатием*, когда после выбрасывания всех коэффициентов, не достигших порога по своему абсолютному значению, сдвигают все оставшиеся коэффициенты к их общему началу, т.е. заменяют все невыброшенные $d_{j,k}$ в формуле (14.5) на значения

$$d_{j,k}^{(\varepsilon)} = \text{sign}(d_{j,k})(|d_{j,k}| - \varepsilon). \quad (14.7)$$

Было доказано, что такой подход приводит к оптимальным оценкам.

Коэффициенты разложения в формуле (14.5) можно найти с помощью быстрого вейвлет-преобразования, поскольку коэффициенты $s_{0,k}$ заданы дискретными значениями $f(x)$. Однако в итерационных схемах ошибка накапливается и их точность может оказаться недостаточной. Намного лучшей точности удается добиться с использованием интерполяционных вейвлетов. В этом случае значения функции на однородной решетке $f(k)$ принимаются за s -коэффициенты для интерполяционного базиса, а начальные значения $s_{0,k}$ находятся в виде некоторых их линейных комбинаций, коэффициенты в которых определяются из решения уравнений, зависящих от вида выбранных вейвлетов.

Зачастую вместо этой упрощенной процедуры отбора вейвлет-коэффициентов по их превышению над пороговым значением используется несколько более сложная процедура, называемая *квантованием* (см. также раздел 15.4). Согласно оценкам экспертов, в соответствии с ролью тех или иных коэффициентов им с самого начала приписываются разные весовые множители. Эти множители зависят от той конечной цели, которая поставлена перед процедурой сжатия. И только после этого производится сжатие. Многие ортогональные вейвлет-базисы намного более устойчивы по отношению к такой процедуре квантования, нежели тригонометрический базис преобразования Фурье. Несмотря на это, отсутствие симметрии у вейвлетов Добеши с компактной областью задания не всегда удовлетворяет экспертов из-за появления некоторых видимых дефектов. Эта проблема может быть разрешена путем использования симметричных биортогональных вейвлетов с компактной областью определения.

15. Некоторые применения

В этом разделе мы опишем те применения вейвлет-анализа, которые наиболее близки к нашим собственным интересам (краткое изложение см. в статье [40], а также на Web site www.awavelet.com). Даже среди них нам придется выбрать те, в которых, по нашему мнению, использование вейвлетов было существенным шагом в получении новой информации, недоступной при других подходах.

15.1. Физика

Применения вейвлетов в физике столь многочисленны, что здесь невозможно описать основные из них даже вкратце (см., например, [10, 14, 41, 42, 43]). Вейвлеты используются и в чисто теоретических работах в функциональном анализе (при регуляризации калибровочных теорий, в конформной теории поля, в нелинейной теории хаоса), и при анализе наблюдательных данных (в экспериментальных и прикладных работах по квазикристаллам, метеорологии, акустике, сейсмологии, нелинейной динамике в ускорителях, динамике жидкости и турбулентности, строению поверхностей, потокам космических лучей, солнечному ветру, строению галактик, флуктуациям плотности в космологии, свойствам темной материи, гравитационным волнам и т.п.). Этот список нетрудно продолжить. Здесь мы обсудим две проблемы, связанные с использованием вейвлетов для решения дифференциальных уравнений с целью изучения электронной структуры исключительно сложной системы, а также для распознавания образов в процессах множественного рождения частиц при соударениях с высокой энергией.

15.1.1. Твердое тело и молекулы. Точное решение задачи многих тел не существует, и потому обычно применяют какие-либо приближенные методы для решения проблем в теории твердых тел, например, используют теорию функционала плотности [44]. Однако электронные спектры сложных атомных систем настолько причудливы, что даже с этими упрощениями расшифровать их невозможно при помощи обычно используемых методов. Например, для описания эффективного потенциала атома урана понадобилось бы вычислить около 2^{100} коэффициентов Фурье (и еще больше в случае димера урана). Ясно, что такая задача непреодолима. В то же время с помощью вейвлет-преобразования удается решить эту проблему [20, 45]. Потенциал димера урана является весьма сингулярной функцией. Он меняется более чем на 10 порядков по величине. Но теперь и его восстановление стало реальной задачей. С помощью вейвлет-анализа удалось вычислить его с высокой надежностью и точностью. Результат показан на рис. 13.

Несколькими группами теоретиков были развиты вейвлет-методы [46–50] решения уравнений теории функционала плотности. Метод, описанный в работах [49, 50], был применен к большому набору разных веществ. Он обладает хорошими свойствами сходимости, как это видно из рис. 14 и рис. 15. На них показано, сколь быстро спадают ошибки в энергии (в волновой функции) в зависимости от числа проделанных итераций (см. рис. 14) или абсолютные значения вейвлет-коэффициентов (см. рис. 15) в функции от их номера (который им приписывается при упорядочении коэффициентов по их

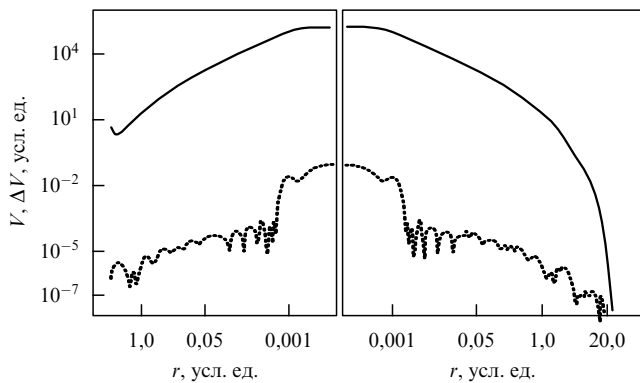


Рис. 13. Кулоновский потенциал V (сплошная линия) в функции от расстояния и точность его расчета ΔV (штриховая линия) для димера урана в произвольных единицах. Левый график — для направления от одного атома на другой, правый — противоположное направление. Видна полная симметрия при большей шкале расстояний в правой части.

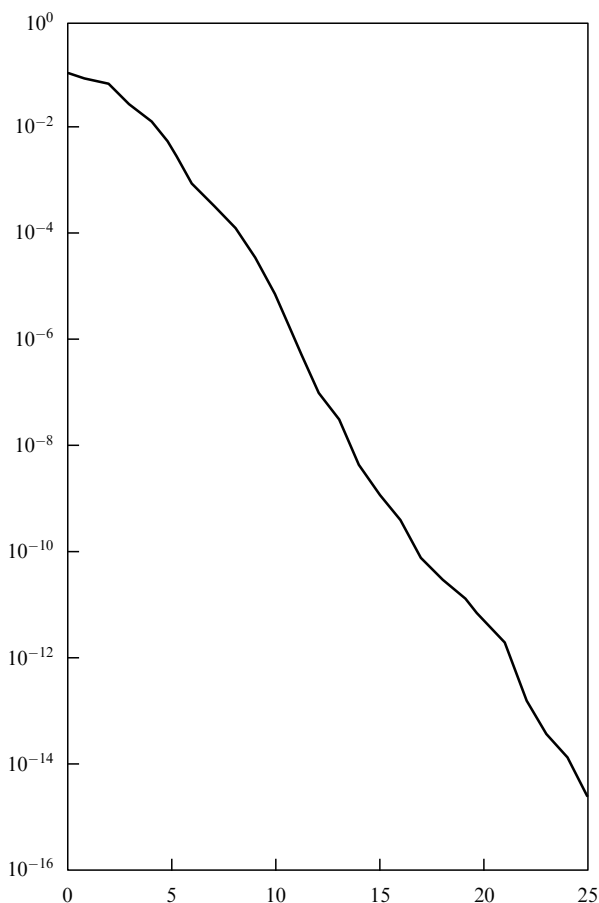


Рис. 14. Быстрое падение невязки энергии с ростом числа итераций показывает хорошую сходимость решения уравнений теории функционала плотности вейвлет-методом.

величине). Столь быстрое спадание позволяет рассматривать теперь намного более сложные системы, нежели доступные ранее. Этот метод был успешно проверен на кристаллах твердого водорода при высоких давлениях, на молекулах марганца и водорода [49, 50], на 3d-металлах и их молекулах и т.д. Матрицу плотности

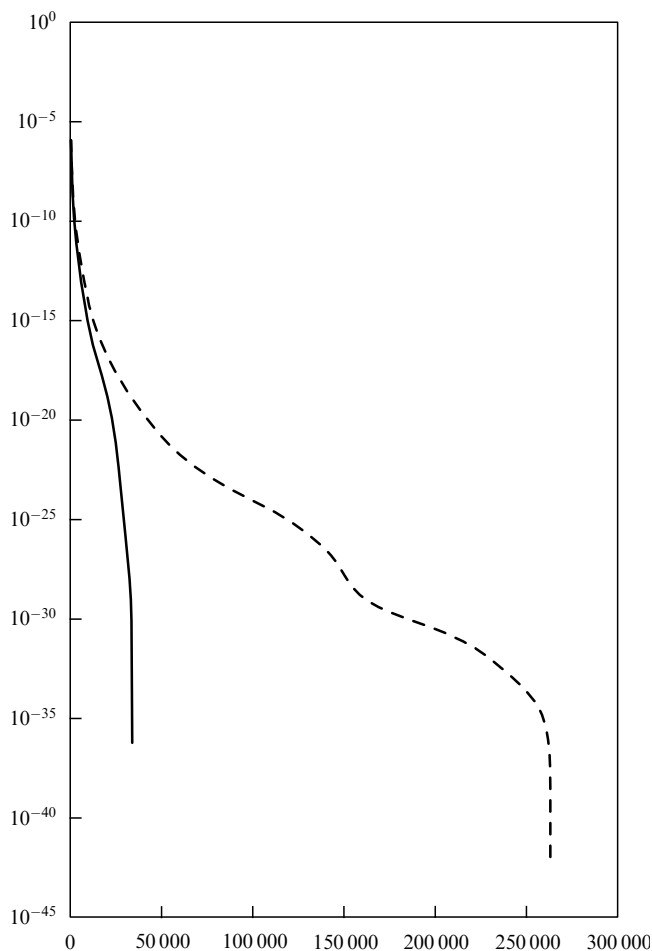


Рис. 15. То же, что на рис. 14, но для абсолютных значений вейвлет-коэффициентов.

можно эффективно записать с помощью вейвлетов Добеши [51].

15.1.2. Множественное рождение частиц. Первые попытки применить вейвлет-анализ к процессам множественного рождения частиц восходят к П. Каррузерсу [52–54], который использовал вейвлет-преобразование для диагонализации корреляционных матриц в упрощенных каскадных моделях. Затем с помощью вейвлетов предлагалось [55, 56] изучать корреляции частиц в множественном рождении, а также, в частности, особые корреляции, типичные для дезориентированного кирального конденсата [57, 58]. Было предложено [59] применить вейвлет-анализ и для распознавания образов в фазовом пространстве отдельных событий множественного рождения, наблюдаемых на эксперименте.

Соударения частиц высоких энергий приводят к рождению множества новых частиц в отдельном событии. Каждую вновь рожденную частицу можно представить кинематически ее вектором импульса, т.е. в виде точки в трехмерном фазовом пространстве. Различные конфигурации, образованные этими точками в фазовом пространстве, соответствуют разным динамикам взаимодействия. Понимание этой динамики является основной целью всех работ, ведущихся на ускорителях и в космических лучах. Особенно интригующей выглядит сейчас проблема кварк-глюонной плазмы — состояния

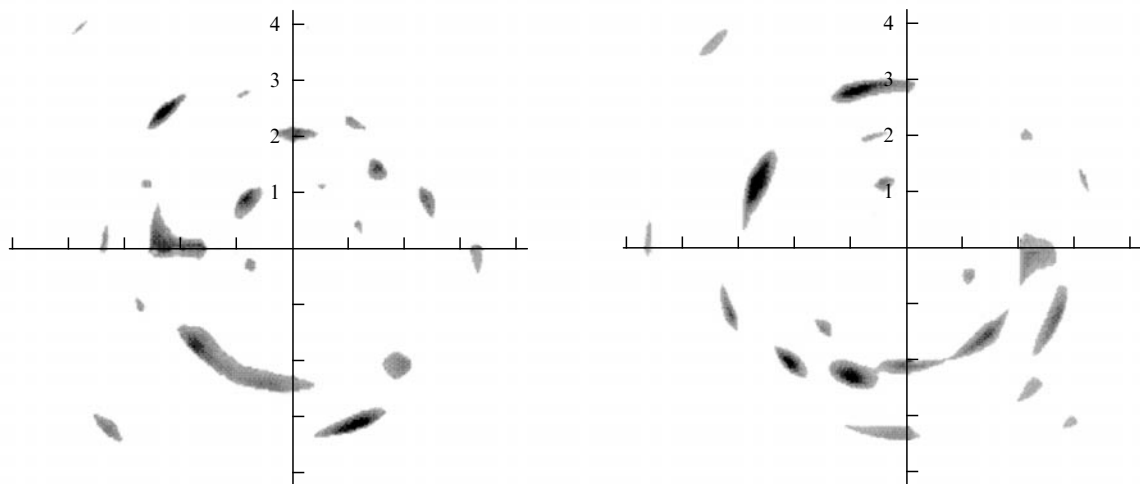


Рис. 16. Восстановленные изображения дальних корреляций на экспериментальных мишенных диаграммах показывают типичные кольцевые структуры в некоторых событиях центральных взаимодействий ядер свинца.

вещества с освободившимися от удержания кварками и глюонами, которое могло бы существовать в течение довольно короткого времени. Есть надежда получить такое состояние в соударениях тяжелых ядер при высоких энергиях и даже имеются первые указания в пользу этого. Сейчас уже получены данные о соударениях ядер свинца, в которых рождаются свыше 1000 частиц. Мы ожидаем событий с множественностью до 20 000 рожденных частиц на ускорителях RHIC в Брукхевене и LHC в ЦЕРНе, но пока не знаем, какие картины нарисует природа из этих точек. Таким образом, задача распознавания образов в фазовом пространстве становится актуальной даже при изучении отдельного события. Мы надеемся, что детальное исследование отдельных событий может помочь вскрыть новые редкие явления, и получаемые при этом выводы будут статистически значимы из-за большого числа частиц, рожденных в отдельно взятом событии.

При рассмотрении глазами отдельного события явно проявляется тенденция выделять особые области разных типов — с плотными кластерами (спайками) и с разреженными пустотами. В сочетании с поисками максимумов (пиков) в распределении псевдобыстрот¹⁵ (полярных углов) этот подход привел к выделению отдельных событий с так называемой кольцевой структурой (в плоскости полярных + азимутальных углов) в событиях, наблюдаемых в космических лучах [60–64] и на ускорителях [65, 66]. Однако такие эффекты зачастую обусловлены чисто статистическими флуктуациями. С целью устранения статистического фона был предложен метод факториальных моментов [67], но его трудно применить при анализе индивидуального события. Вейвлет-анализ нечувствителен к гладким полиномиальным зависимостям и подчеркивает флуктуационную структуру события. Отбирая сильные флуктуации, можно надеяться получить сведения о тех флуктуациях, которые не получаются за счет чисто статистических закономерностей.

Впервые для изучения структуры фазового объема отдельного события вейвлеты были применены [59] к процессам с большой множественностью в соударениях ядер свинца при энергии 158 ГэВ на нуклон. Эмульсионная методика, используемая в эксперименте, зачастую ограничивает сведения о событии только углами вылета частиц, и потому рассматривается лишь двумерное фазовое пространство. При этом экспериментальная статистика сравнительно невелика, но надежность и точность регистрации высоки, что весьма важно для правильного распознавания образа. С целью упрощения анализа двумерная мишенная диаграмма, изображающая полярные и азимутальные углы рожденных заряженных частиц, была разбита на 24 равных сектора по азимуту (каждый по $\pi/12$), и в каждом из них частицы были спроектированы на полярную ось θ . Таким способом были получены 24 одномерных распределения частиц по полярному углу. Для всех из них были вычислены соответствующие вейвлет-коэффициенты, которые затем были связаны вместе (использовался непрерывный МНАТ-вейвлет). Полученная картина соответствовала тому, что многие частицы концентрируются в областях с близкими по величине полярными углами, т.е. образуют кольцевые структуры на мишенной диаграмме. Особый интерес к таким образованиям связан с тем фактом, что они могут появляться за счет испускания так называемых черенковских глюонов [68, 69] или, в более общем случае, при тормозном излучении глюонов для конечной длины свободного пробега в кварк-глюонной среде (в частности, в плазме).

Более полный двумерный анализ с использованием вейвлетов Добеши (D^8) без процедуры усреднения был проведен недавно [70] и подтвердил полученные выводы о том, что имеются области концентрации частиц (струи), проявляющие тенденцию к образованию кольцевых структур. Это видно, например, на рис. 16, где темные области соответствуют большим вейвлет-коэффициентам распределения частиц (здесь приведены только два из исследованных события). Были сохранены вейвлет-коэффициенты только на уровнях разрешения $6 \leq j \leq 10$ после проведения вейвлет-анализа событий с целью сохранить лишь дальние корреляции частиц и

¹⁵ Псевдобыстрота определяется как $\eta = -\log \tan(\theta/2)$, где θ — полярный угол вылета частицы.

освободиться от ближних корреляций и статистического шума. После этого было проведено обратное вейвлет-преобразование для восстановления образов этих событий под воздействием только дальних динамических корреляций. Именно они и приводятся на рис. 16. Струйная (пятнистая) структура события становится более заметной, и кольцевые корреляции этих струйных областей проявляются четче. При увеличении статистики можно будет сказать, соответствует ли распределение этих колец теоретическим ожиданиям. Предварительные результаты [70] позволяют надеяться на положительный ответ. Именно благодаря проведенному двумерному вейвлет-анализу впервые удалось показать флуктуационную структуру отдельного события способом, аналогичным представлению на мишенной диаграмме в виде двумерной картинке.

Ранее предпринимались попытки [60, 71, 72] изучения таких событий другими методами с традиционными проекциями и корреляционными характеристиками. Они тоже указали на то, что такие структуры приводят к пикам в распределениях по полярному углу (псевдобыстроте) и при этом характеризуются струйной структурой. Монте-карловские схемы процесса также сопоставлялись с экспериментальными данными и не смогли достаточно полно воспроизвести эту структуру. Более полный анализ [73, 74] данных об адрон-адронных взаимодействиях с большой статистикой (однако, к сожалению, при относительно малой множественности) позволил выделить плотные изолированные группы частиц и заметить "аномалию" в угловом распределении этих групп, ожидаемую из теоретических предсказаний. Необходим дальнейший анализ с использованием вейвлет-преобразования, когда будет накоплено много событий с большой множественностью. Более подробное обсуждение этой темы см. в обзоре [75].

15.2. Авиация (двигатели)

Многомасштабный метод вейвлет-анализа оказался весьма полезным математическим методом анализа сложных физических сигналов на разных масштабах в точно определенных точках. Естественно начать с сигналов, зависящих от одной переменной¹⁶. Одним из таких сигналов является изменение со временем давления в компрессоре авиационного двигателя. Цель такого исследования определяется желанием найти предвестники очень опасного явления¹⁷, приводящего зачастую к разрушению двигателя.

В аксиальном многоступенчатом компрессоре может развиваться помпаж, вызванный возмущениями в потоке поступающего в него воздуха во время маневра самолета (вертолета) или за счет каких-то турбулентностей в воздухе. Сначала сказывается газодинамическая неустойчивость в областях за лопатками турбины. Пузыри неустойчивости отрываются от лопаток (stall) и вращаются, отставая от них, со скоростью примерно в 60 % от скорости ротора. Таким образом, лопатки догоняют и пересекают их примерно за 1,6 полных оборота. Это

резко снижает приток воздуха, а значит, и давление в расположенной за компрессором камере сгорания, где за счет сжигания топлива образуется реактивная струя. Высокое давление, образовавшееся ранее в камере сгорания, стремится создать поток в обратном направлении (surge) через компрессор. Когда такой поток возникает, во многих случаях это приводит к выбросу пламени спереди двигателя. Поэтому помпаж может привести к сокращению срока службы двигателя или даже к его поломке, не говоря уже о возможных катастрофических последствиях для самолета и его пассажиров. Именно поэтому поиск предвестников столь опасных явлений весьма важен. Попытки предсказать помпаж по измерениям скоростей с помощью анемометров [76] дали указание на появление возможных предвестников всего лишь за 10 мс, чего явно недостаточно для проведения каких-либо действий по предупреждению аварии.

Многомасштабный вейвлет-анализ изменения давления в компрессоре газотурбинного двигателя позволяет обнаружить намного раньше проявляющие себя признаки неустойчивости и развития помпажа [77]. Сигналы с восьми датчиков, расположенных в разных местах компрессора газотурбинного двигателя, были записаны, оцифрованы и затем проанализированы при трех режимах работы двигателя (76, 81 и 100 % от номинальной скорости вращения турбины) в стационарных условиях с интервалами 1 мс в течение 5–6 с перед началом помпажа. Неустойчивость вызывалась плавной инъекцией добавочного воздуха в компрессор. Через несколько минут возникала сильно развитая неустойчивость. Интервал времени за 5–6 с перед помпажом был подвергнут вейвлет-анализу. Поскольку сигнал флуктуирует во времени, флуктуируют и вейвлет-коэффициенты. Естественной мерой этих флуктуаций служат дисперсии распределений на разных масштабах. На масштабе $j = 5$ было обнаружено заметное резкое падение дисперсии распределения вейвлет-коэффициентов, происходящее примерно за 1–2 с до того, как проявятся нарушения в работе двигателя. Дисперсия вычислялась по стандартной формуле

$$\sigma(j, M) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} [d_{j,k} - \langle d_{j,k} \rangle]^2}, \quad (15.1)$$

где M означает число вейвлет-коэффициентов на уровне j в заданном временном интервале.

Сильно изломанная линия на рис. 17 показывает изменение со временем давления в компрессоре при одном из изученных режимов. Большие флуктуации в правой части рисунка указывают на появление помпажа. По виду предшествующей части кривой вряд ли можно догадаться о его приближении. С использованием вейвлетов Добеши (D^8) были вычислены вейвлет-коэффициенты этой кривой. Штриховая кривая на рис. 17 показывает поведение дисперсии распределения вейвлет-коэффициентов в зависимости от времени на масштабе $j = 5$, который оказался наиболее чувствительным к появлению и развитию неустойчивости¹⁸. Предвестник помпажа проявляется в виде максимума и последующего

¹⁶ Но можно проделать одномерный анализ и с двумерными функциями, сводя их к набору одномерных, как это было продемонстрировано в предыдущем разделе на примере из физики частиц.

¹⁷ У нас используется термин "помпаж", а в англоязычной литературе — два термина, stall и surge, для обозначения разных этапов этого процесса.

¹⁸ Этот масштаб показывает, что корреляции последовательных значений зарегистрированного сигнала, вероятнее всего, появляются на интервалах порядка 30 мс. Отметим, что подобные корреляционные длины характерны также и для человеческой речи.

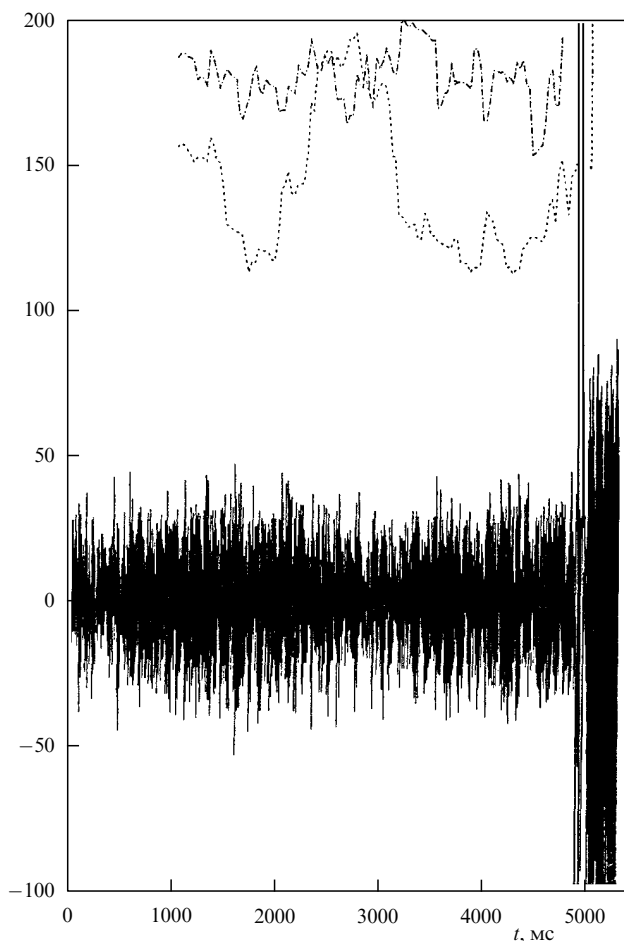


Рис. 17. Сигнал с датчика давления (сплошная линия) и кривая дисперсии вейвлет-коэффициентов (штриховая линия). Изменение во времени давления в компрессоре авиационной турбины (быстро меняющаяся кривая) было подвергнуто вейвлет-анализу. Дисперсия вейвлет-коэффициентов (штриховая линия) обнаруживает максимум и заметное падение задолго до того, как давление начинает катастрофически расти, и тем самым служит предвестником этого роста. При перемешивании этого набора данных не получается такого эффекта для дисперсии соответствующих вейвлет-коэффициентов (штрихпунктирная кривая), что указывает на динамическую природу обнаруженного эффекта.

заметного (около 40 %) падения дисперсии примерно за 1–2 с до начала помпажа, т.е. до резкого роста флуктуаций давления и дисперсии в правой части рисунка. Отсутствие точек на кривой дисперсии в левой стороне связано с выбором интервала усреднения в формуле для дисперсии, равным 1 с, что необходимо для накопления достаточно предвостановительного начального распределения, эволюция которого во времени фактически и служит предметом исследования.

С помощью счетчика случайных чисел набор значений давления был перемешан на временной оси и новый набор был подвергнут такому же анализу. Он не показывает падения дисперсии, как это видно из штрихпунктирной кривой на рис. 17. Это свидетельствует о динамической природе эффекта. Другие проанализированные особенности (фрактальность, высшие моменты распределения) обсуждаются в работе [77]. Не было обнаружено фрактальных свойств сигнала. Масштаб $j = 5$ нарушает линейность поведения суммы $Z_q(j)$ в функции от j , что является необходимым условием самоподобия. Заме-

тим, что мультифрактальное поведение может нарушаться из-за сгущения точек, в которых проявляются резкие осцилляции, напоминающие чирпы. Если выпадение шкалы $j = 5$ связано именно с такой особенностью поведения сигнала, то это может служить подсказкой на пути раскрытия динамики столь сложного процесса. Временные интервалы до и после появления предвестников были проанализированы по отдельности. Высшие моменты вейвлет-коэффициентов как функции их ранга q ведут себя по-разному в областях до и после предвестника. Это указывает на различие динамики в этих двух областях.

Такой же метод вейвлет-анализа можно применять для анализа работы других моторов, турбин, компрессоров, двигателей и т.п. Он позволит заметно улучшить диагностику режимов работы двигателей, что важно для предотвращения их выхода из строя и в конечном счете для снижения экономических потерь. В частности, на стационарных энергетических установках, где борьба с вибрационным горением приводит к необходимости резко ограничивать режим эксплуатации турбины, заметно снижается коэффициент полезного действия. Вейвлет-диагностика может помочь в его увеличении. Авторами работы [77] уже получены два патента на диагностику и автоматическую регулировку работы двигателя с датой приоритета 19.03.99.

15.3. Медицина и биология

Применение вейвлет-анализа в медицине и биологии (см., например, [17, 78, 79]) фактически следует тем же процедурам, что и использованные выше. Они заключаются либо в расшифровке информации, заключенной в функциях одной переменной (анализ интервалов сердцебиений, ЭКГ, ЭЭГ, последовательностей ДНК и т.п.), либо в распознавании образов (форма биологических объектов, классификация клеток крови и т.п.).

15.3.1. Сердце. Интересные результаты были получены [80] с использованием вейвлет-анализа для преобразования последовательности временных интервалов между биениями человеческого сердца. Было заявлено, что найдена *клинически* значимая мера нарушения в работе сердца просто из анализа только интервалов между сердцебиениями, без обращения к электрокардиограмме, тогда как все предшествующие методы использовали лишь *статистически* значимые характеристики. У каждого из 27 обследованных пациентов регистрировалась последовательность примерно 70 000 интервалов между сердцебиениями. Эти последовательности представлялись в виде функций от номера интервала. Флуктуации сигналов подвергались вейвлет-преобразованию и вычислялась дисперсия вейвлет-коэффициентов на разных масштабах подобно тому, как описано выше для случая авиационных турбин, но с разницей в том, что усреднение проводилось по всему времени наблюдения за пациентом, поскольку не требовалось следить за эволюцией процесса на столь коротком отрезке времени. В результате каждый пациент был охарактеризован одним числом (дисперсией) при каждом масштабе. Оказалось, что наборы этих чисел для здоровых и больных пациентов не перекрывались на масштабе¹⁹

¹⁹ Случайно масштаб оказался тем же, что и для авиационных двигателей.

$j = 4$, как это видно из рис. 18. Эта специфическая черта рассматривается как клинически важная характеристика, в отличие от статистически значимых особенностей, когда соответствующие наборы частично перекрываются. Дисперсии выше у здоровых людей, что, видимо, служит проявлением большей приспособляемости здорового сердца. Флуктуации больного сердца слабее антикоррелированы, чем у здорового сердца.

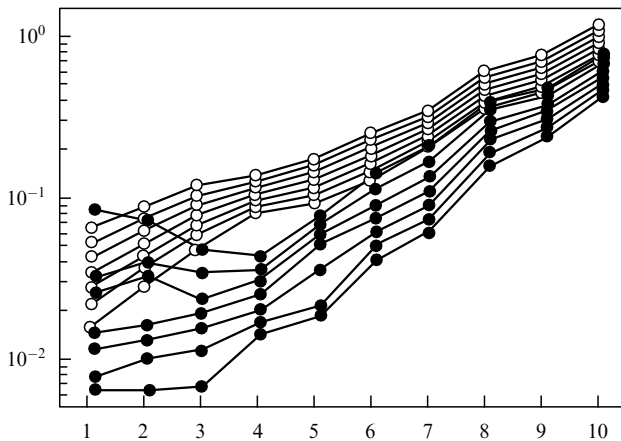


Рис. 18. Наборы значений дисперсии вейвлет-коэффициентов для интервалов сердцебиений здоровых (светлые кружки) и больных (черные кружки) пациентов. Они не перекрываются при $j = 4$.

Этот анализ был подвергнут сомнению другими исследователями [81, 82], которые утверждают, что полученные результаты по зависящему от масштаба разделению пациентов на здоровых и больных сами зависят не только от набора обследуемых пациентов, но даже и от выбранного вейвлета. Они предложили использовать новую характеристику, которая не зависит от шкалы, а именно значения показателя экспоненты, определяющей поведение статистической суммы вейвлет-коэффициентов записей интервалов между сердцебиениями. Эти показатели отражают мультифрактальное поведение сердцебиений здоровых сердец и потерю мультифрактальности в случае болезни сердца. Это различие приписывается нелинейности динамики для здорового сердца. Авторы этих работ утверждают, что мультифрактальный подход к вейвлет-анализу проблемы уверенно различает здоровое и больное сердце. По нашему мнению, здесь необходимы дополнительные независимые исследования.

Ранее фурье-анализ изменчивости частоты сердечных сокращений вскрыл частотный спектр этого процесса. Он определяется тремя основными частотными интервалами. Высокочастотный пик находится около 0,2 Гц, а низкочастотный — вблизи 0,1 Гц. Сверхнизкочастотная компонента напоминает $1/f$ -шум с амплитудой, резко растущей при стремящихся к нулю частотах. Были предприняты попытки [83] создания теоретической модели этого процесса с помощью вейвлет-преобразования.

Вейвлет-анализ одномерных сигналов оказался эффективным и при расшифровке электрокардиограмм (ЭКГ) и электроэнцефалограмм (ЭЭГ). Анализируемые там функции имеют более сложный вид, нежели рассмотренные выше. При их анализе уже были получены

многообещающие результаты. В частности, было показано, что аномальные эффекты в ЭКГ проявляются в основном на довольно больших масштабах (низких частотах), тогда как нормальные структуры характеризуются сравнительно малыми масштабами (высокими частотами). Это соответствует полученным выше результатам анализа частоты сердечных сокращений. Частотно-временной анализ ЭКГ был проделан, например, в работе [84]. Мы не будем пока обсуждать его здесь, поскольку работа находится лишь в самом начальном этапе своего развития. Применение вейвлет-анализа к расшифровке ЭЭГ можно найти, например, в работе [85]. С его помощью удастся определить положение источника эпилептической активности и отследить ее распространение в мозге. Используется вейвлет-анализ и при описании развития плода во время беременности. Общее описание методов ЭЭГ можно найти в работах [86, 87].

Вейвлет-анализ применялся также для диагностики состояния зародыша в период беременности [79]. Был развит специальный подгочный метод для наилучшего воспроизведения свойств сигнала.

15.3.2. Последовательности ДНК. Вейвлет-преобразование использовалось также для анализа последовательностей ДНК [88, 89] с целью выявить природу и происхождение дальних корреляций в этих последовательностях. До сих пор дискутируется вопрос о том, различаются ли эти корреляции в последовательностях нуклеотидов, кодирующих (экзонные) и не кодирующих (интронные, межгенные) протеин. Для графического изображения этих последовательностей в виде одномерных кривых использовался так называемый анализ "ДНК-блужданий" с превращением 4-буквенного текста в бинарную систему [90]. Применив вейвлет-преобразование к 121 последовательности (с 47 кодирующими и 74 некодирующими областями), отобранной в геноме человека, авторы работ [88, 89] показывают, что действительно имеется различие между этими двумя подпоследовательностями. Она заключается в наличии дальних корреляций в некодирующих последовательностях, тогда как кодирующие последовательности напоминают процессы случайного некоррелированного (броуновского) блуждания. Для демонстрации этого утверждения были вычислены усредненные производящие функции (статистические суммы) вейвлет-коэффициентов (см. уравнение (13.3)) для этих двух статистических наборов. Было показано, что обе они масштабируются с показателем экспоненты, предсказываемым в случае однородного дробного броуновского блуждания, т.е. $\tau(q) = qH - 1$. Основное отличие некодирующих последовательностей от кодирующих проявляется в значениях показателя H , а именно $H_{nc} = 0,59 \pm 0,02$ и $H_c = 0,51 \pm 0,02$, демонстрирующую разницу между коррелированными и некоррелированными наборами. Более того, было показано, что спектры $\tau(q)$, полученные для этих двух подпоследовательностей, находятся в удивительно хорошем согласии с теоретическими предсказаниями для гауссовских процессов, если отложить на графике функции плотностей вероятности вейвлет-коэффициентов на заданном масштабе в зависимости от величины этих коэффициентов, нормированной на их среднеквадратичные значения на тех же масштабах. Результаты вейвлет-анализа ясно показывают, что относительное содержание в ДНК

пурина (*A, G*) и пиримидина (*C, T*)²⁰, вероятнее всего, связано с дальними корреляциями, наблюдавшимися в последовательностях ДНК.

15.3.3. Клетки крови. Распознавание различных форм биологических объектов представляет собой еще одну задачу, которую можно решать с помощью вейвлет-анализа. В такой постановке эта задача имеет широчайшее поле применимости. Здесь мы опишем только схему автоматической классификации клеток крови, разработанную нами, и продемонстрируем, в частности, ее использование для классификации разных форм эритроцитов. Автоматический поиск, надежность определения разных форм клеток и высокая скорость обработки сигнала достигаются при компьютерном вейвлет-анализе. Основная идея метода заключается в том, что на определенной шкале разрешения вейвлет-анализ четко выделяет границы клеток крови. Это позволяет классифицировать их. На рисунке 19 мы показываем, насколько удалось улучшить качество разрешения таким способом. Снимок клеток крови довольно плохого качества был подвергнут вейвлет-анализу, и полученный вейвлет-образ этого снимка дает намного более четкое изображение границ клеток.

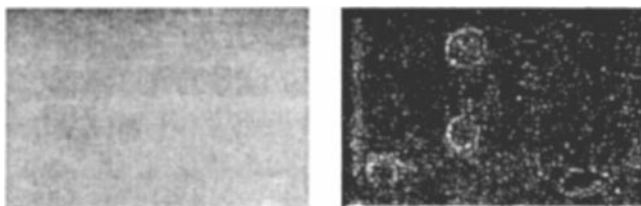


Рис. 19. Фотография клеток крови, снятая с микроскопа (слева). Та же фотография после обработки вейвлетами (справа). Нечеткое изображение клеток крови становится намного более распознаваемым после вейвлет-преобразования.

Эритроциты разных типов отличаются своими очертаниями. По их геометрической форме можно определить, к какому типу относятся те или иные клетки, на какие заболевания организма они указывают. Поэтому важно уметь распознавать клетки, отличающиеся своими очертаниями. С помощью микроскопа проводится традиционная фиксация всех клеток в сухом мазке крови и записанные на компьютер данные подвергаются вейвлет-анализу.

Случайные резкие неоднородности в отдельных точках контура клетки, вызванные, скажем, либо каким-то дефектом изображения, либо прилипшей грязью и т.п., могут помешать правильной идентификации типа клетки. Чтобы избежать этого, была разработана процедура сглаживания контура, при которой такие точки обходятся, но при этом не теряются основные особенности, характерные для конкретного типа клеток. Только после этого набор зарегистрированных клеток со слегка сглаженными контурами готов для вейвлет-анализа. Избранная процедура анализа основана на разном поведении корреляционных вейвлет-коэффициентов в зависимости от формы клетки. Вначале некий стандарт-

ный набор клеток, уже расклассифицированный экспертами, был подвергнут корреляционному вейвлет-анализу, и по нему были определены конкретные величины тех или иных корреляционных вейвлет-характеристик, описывающих различные классы клеток. Эти значения были вставлены в программу по автоматическому распознаванию клеток разных типов, которая и использовалась затем для классификации клеток крови других пациентов. Результаты вновь были подвергнуты проверке экспертами, и их положительные заключения оказались весьма обнадеживающими. Вся процедура занимает мало времени, потому что проходит в автоматическом режиме, без какого-либо вмешательства человека. На рисунке 20 показаны некоторые типы классифицируемых эритроцитов.

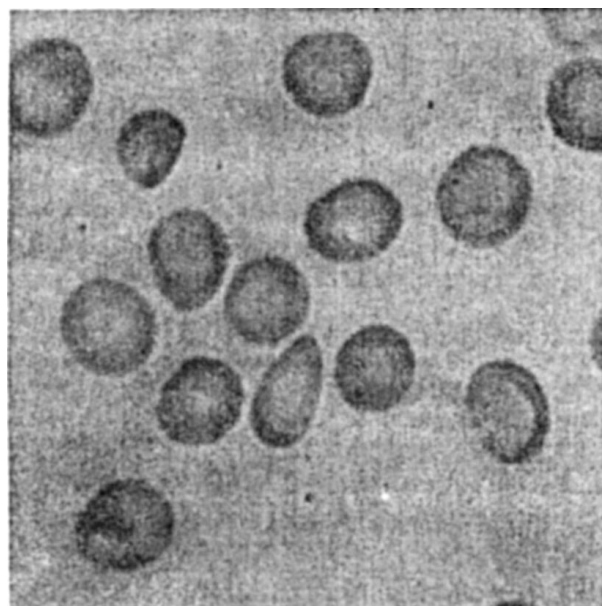


Рис. 20. Классификация клеток эритроцитов.

15.4. Сжатие данных

Сжимать те или иные данные приходится, например, если надо хранить их в компьютере с ограниченной памятью или же если требуется передать большой объем информации через линию связи с ограниченной пропускной способностью. Хорошо известен пример, когда ФБР использовало вейвлет-анализ для сжатия информации, в результате чего удалось хранить большое количество отпечатков пальцев в сравнительно небольших компьютерах, что в свою очередь позволило сэкономить заметные средства. Это становится возможным за счет отбрасывания небольших вейвлет-коэффициентов после того, как проведено прямое вейвлет-преобразование. Конечно, при обратном восстановлении информации надо быть уверенным в устойчивости этой процедуры и хорошем качестве получаемого результата. Таким образом, для сжатия сигнала и его последующей реконструкции необходимо использовать как прямое, так и обратное преобразования. Выше было продемонстрировано, насколько успешным может быть прямое вейвлет-преобразование в применении к разным проблемам. Полнота системы вейвлетов позволяет не менее успешно использовать их и в тех задачах, где

²⁰ *A, C, G, T* обозначают обычный алфавит 4-буквенного кода ДНК: аденин, цитозин, гуанин, тимидин.

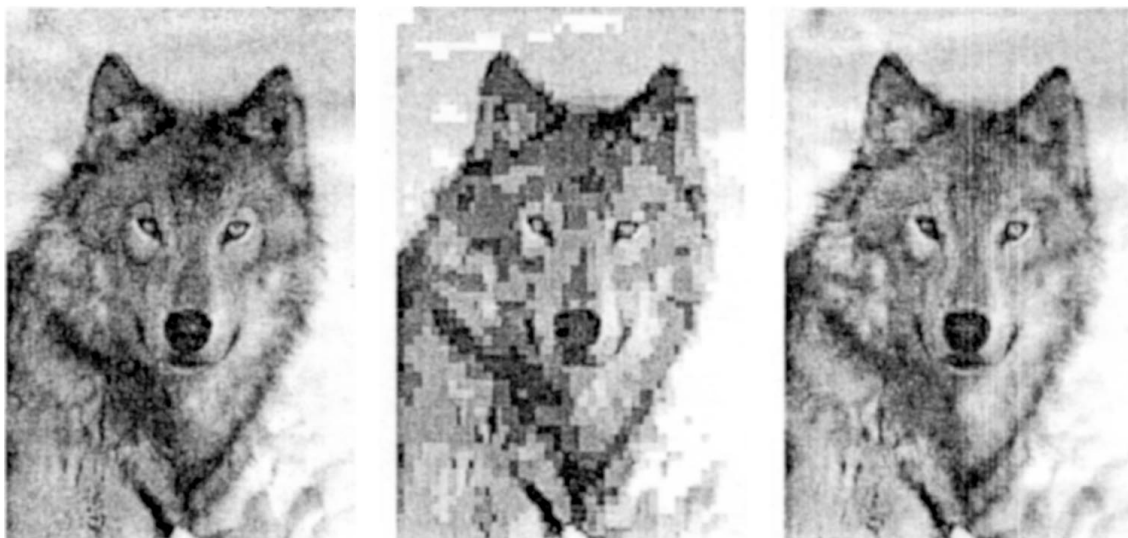


Рис. 21. Оригинальная фотография (размер файла 461 760 байт) (слева). Фотография, восстановленная после сжатия по JPEG-алгоритму (размер файла 3511 байт) (посередине). Фотография, восстановленная после сжатия по вейвлет-алгоритму (размер файла 3519 байт) (справа). Четко заметно лучшее качество при вейвлет-преобразовании, когда сопоставляются начальное изображение (слева) и два изображения, полученных путем одинакового сжатия и восстановления с помощью оконного преобразования Фурье (в середине) и вейвлет-преобразования (справа).

необходимо обратное преобразование, т.е. восстановление (синтез) сигнала (см., например, [91]).

Подход к решению проблемы существенно зависит от тех требований, которые предъявляются к конечному результату. Можно представить себе по крайней мере три ситуации. Если пытаться сохранить качество изображения (картины, фильма и т.п.), т.е. сделать изображение практически неотличимым от начального, сжатие не будет очень сильным. Это потребует, к примеру, тогда, когда нужно, чтобы даже эксперты не смогли отличить сжатую копию фильма от оригинала при показе на двух экранах, расположенных рядом. Другие условия возникают, когда, наоборот, требуется возможно более сильное сжатие, при котором сигнал (объект) удастся, тем не менее, еще распознать. Например, это требуется при передаче информации по линиям, допускающим лишь ограниченный объем ее. Наконец, может оказаться необходимым всю процедуру анализа и синтеза проделывать за возможно кратчайшее время, когда важно передавать информацию немедленно и по возможности дешевле. В разных ситуациях требуется выбрать разные вейвлеты для оптимизации всей процедуры анализа и синтеза. В любом случае вейвлет-анализ имеет преимущество по сравнению с методами кодирования, использующими (оконное) преобразование Фурье, но количественные оценки этого выигрыша зависят от решаемой задачи.

Напомним, что любое изображение, вводимое в компьютер, оцифровывается и хранится в нем в виде так называемой битовой карты (bitmap) или, иначе говоря, матрицы, каждый элемент которой описывает цвет точки на исходном изображении. Количество элементов матрицы (точек изображения) зависит от разрешения, выбранного при оцифровке. Именно битовая карта используется для последующего воспроизведения "картинки" на экране, печатающем устройстве и т.п. Однако хранить ее в таком виде невыгодно из-за использования большого количества компьютерной

памяти. Поэтому в настоящее время разработаны многочисленные алгоритмы кодирования (сжатия) битовой карты, эффективность которых зависит от свойств изображения²¹. Все эти алгоритмы делятся на две группы: кодирование без потери (когда исходная битовая карта полностью восстанавливается в результате процедуры декодирования) и с потерей информации. В более общем применении алгоритмы первой группы часто называются *архивацией данных*.

В качестве иллюстрации рассмотрим более подробно алгоритм сжатия изображений с потерей информации. Потеря информации в данном случае означает, что восстановленная картинка не будет абсолютно точно совпадать с исходной, однако различия будут практически незаметны для человеческого глаза²².

В настоящее время большинство хранящихся на компьютерах изображений (в том числе используемых в Интернете) с непрерывным цветовым тоном (continuous tone images)²³ кодируются с помощью алгоритма JPEG (подробное описание см. в работе [92]). Основные стадии этого алгоритма следующие. Изображение разбивается на шаблоны 8×8 точек. Для каждого шаблона (матрицы) выполняется дискретное косинус-преобразование. Далее из получившихся частот с помощью специальной весовой таблицы отбираются наиболее существенные

²¹ Очевидно, что для хранения "Черного квадрата" вовсе не обязательно хранить матрицу черных точек, а вполне достаточно хранить три числа: ширину, высоту и цвет. Это и есть простейший пример сжатия изображения.

²² В таких случаях обычно "качество сжатия" задается параметром с возможными значениями от 0 до 100, где 100 обозначает минимальное сжатие (наилучшее качество), и восстановленное изображение практически неотлично от исходного, тогда как 0 — максимальное сжатие, при котором в восстановленном изображении все еще можно различить основные детали исходного.

²³ То есть изображений, содержащих много незначительно различающихся цветов. Обычно для хранения таких изображений на компьютере используется 16 млн цветов на точку.

для визуального восприятия. Эта процедура называется *квантованием* и является единственным этапом, на котором происходит потеря информации. Далее матрица отобранных частот представляется компактным образом и кодируется так называемым энтропийным методом (хаффмановским или арифметическим).

Отличие нашего алгоритма состоит в использовании вейвлетов вместо дискретного косинус-преобразования, и в применении преобразования к полному изображению а не к шаблону 8×8 . На рисунке 21 показаны оригинальное изображение и восстановленные после сжатия по JPEG-алгоритму и по вейвлет-алгоритму. Легко видеть, что при практически одинаковых размерах закодированных файлов качество "вейвлет-картинки" существенно выше. Требование одинаковости качества приводит к выигрышу по размерам файла в 1,5–2 раза в случае вейвлет-алгоритма, что может оказаться существенным для передачи изображений, особенно если пропускная способность передающей линии ограничена.

15.5. Фокусировка микроскопа

Несомненно, фокусировка микроскопа принадлежит к одному из классов задач о распознавании образа. Тре-

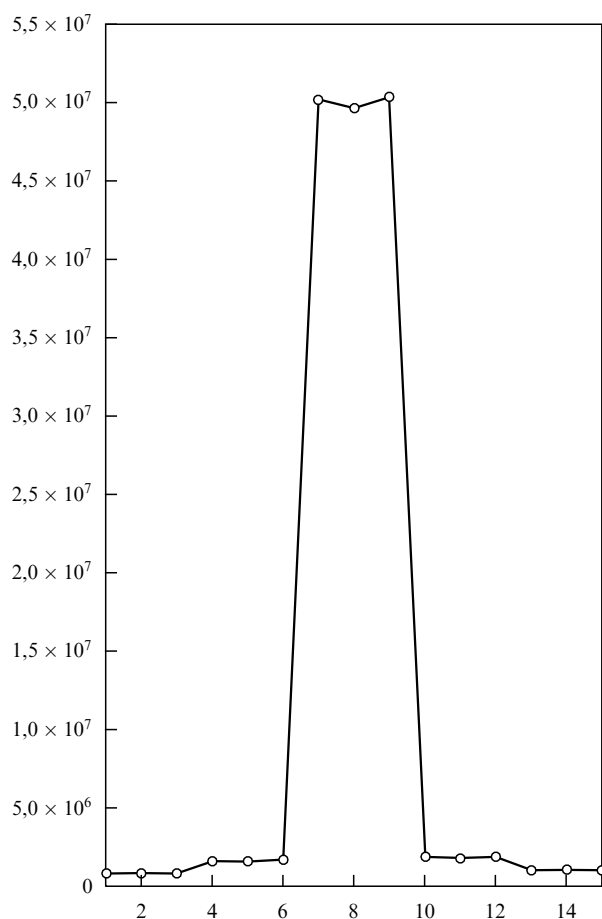


Рис. 22. Кривая фокусировки. По оси ординат — значения, вычисленные из вейвлет-коэффициентов последовательных кадров, по оси абсцисс — номера кадров. Фокус достигается на максимуме кривой (кадры 6–10). Большие значения вейвлет-коэффициентов соответствуют лучше сфокусированным изображениям. Микроскоп движется в направлении лучшей фокусировки по команде с компьютера в сторону увеличения вейвлет-коэффициентов анализируемого объекта.

буется отличить хорошо сфокусированное изображение предмета от того же предмета с размытыми очертаниями. Это сравнительно легкая задача для вейвлетов, потому что в первом случае градиенты изображения на границе предмета достаточно высоки, тогда как во втором случае они заметно меньше. Поэтому вейвлет-коэффициенты велики при хорошо сфокусированном изображении и сильно падают при дефокусировке микроскопа. На некотором уровне разрешения, соответствующем естественной шкале изображения предмета, этот эффект дефокусировки становится особенно сильным. Это показано на рис. 22. На других уровнях он выражен менее ярко, но зато становится более асимметричным в зависимости от того, находится микроскоп выше или ниже точки фокусировки. Это свойство асимметрии было использовано с целью автоматизации процесса фокусировки микроскопа, поскольку оно четко задает направление его движения в сторону фокусирующего положения. Такой метод можно успешно применять и во многих других областях, а не только в медицине.

16. Заключение

Красота математического аппарата вейвлет-преобразования и его практическая польза привлекают к себе внимание исследователей, работающих как над фундаментальными, так и над чисто прикладными проблемами. Более того, уже появляются результаты, имеющие коммерческий выход. Мы смогли лишь кратко описать здесь малую часть решаемых задач. Однако мы надеемся, что читатель понял и оценил общие тенденции развития в этой интересной области.

Уникальные математические свойства вейвлетов сделали их очень мощным инструментом анализа и последующего синтеза любого сигнала. Свойство ортогональности позволяет получать независимую информацию на разных масштабах. Нормируемость обеспечивает сохранение величины информации на различных этапах преобразования. Свойство локальности помогает получить знание о тех конкретных областях, в которых проявляют себя изучаемые масштабы (частоты). Наконец, полнота вейвлет-базиса, образованного сжатиями и сдвигом некой функции, обеспечивает возможность совершить обратное преобразование.

Многомасштабный анализ приводит к быстрому вейвлет-преобразованию и в сочетании с процедурой нестандартного матричного умножения — к эффективным вычислительным алгоритмам. С помощью вейвлет-преобразования можно изучать аналитические свойства функций, локальные и глобальные показатели Гельдера, мультифрактальные размерности и т.п. Естественное обобщение на случай дифференциальных операторов привело к эффективному решению с помощью вейвлетов некоторых дифференциальных уравнений.

Все эти свойства позволяют, используя вейвлет-преобразование, анализировать сложные сигналы на разных масштабах и в разных точках, решать уравнения, описывающие исключительно сложные нелинейные системы, содержащие взаимодействия на многих шкалах, изучать резко изменяющиеся функции и т.д. Вейвлет-преобразование легко обобщается на множества любых размерностей и потому может применяться также и для анализа многомерных объектов. Благодаря этому вейвлеты незаменимы при распознавании образов.

Итак, применения вейвлетов в различных областях весьма многочисленны и уже сейчас приводят к важным практическим результатам. В этой статье нам удалось описать только некоторые из них, оставив в стороне множество других, не менее важных. Возможности вейвлет-преобразования, тем не менее, еще отнюдь не полностью использованы, и можно ожидать вскоре новых интересных результатов, что мы и старались показать здесь.

Однако не следует тешить себя бесплодной надеждой, что они дадутся легко и вся описанная выше техника расчетов будет работать автоматически, следуя своей внутренней логике, и не потребует интуитивного подхода. Согласно Мейеру [4], "ни один "универсальный алгоритм" не сможет подойти к тому исключительно разнообразному набору ситуаций, с которым нам приходится сталкиваться". В действительности нужен большой опыт в выборе вейвлетов, полностью адекватных поставленной задаче, в подходящей формулировке этой задачи, в отборе наиболее важных масштабов и характеристик, описывающих сигнал, в правильном выборе используемых алгоритмов, в изучении проявляющих себя особенностей, в устранении возможных источников неустойчивости и т.д. Делая это замечание, мы не хотим напугать тех, кто только собирается заняться исследованиями в этой области, а совсем наоборот — стремимся привлечь к работе тех, кто не чурается сложных проблем и заинтересован в активных научных исследованиях и практическом опыте.

17. Приложение

17.1. Многомасштабный анализ

Многомасштабный (multiresolution) анализ математически определяется следующим образом [4].

Многомасштабное приближение $L^2(\mathbb{R}^n)$ представляет собой нарастающую последовательность V_j , $j \in \mathbb{Z}$, замкнутых линейных подпространств $L^2(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:

- 1) $\bigcap_{-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$, $\bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j$ всюду плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$;
- 2) для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и всех $j \in \mathbb{Z}$

$$f(x) \in V_j \leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1};$$

- 3) для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и всех $k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) \in V_0 \leftrightarrow f(x - k) \in V_0;$$

4) существует такая функция $g(x) \in V_0$, что последовательность $g(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, является ортонормальным базисом Рисса (Riesz) в пространстве V_0 . Ясно, что скейлинг-формы функции $g(x)$ образуют базисы для всех V_j .

Таким образом, многомасштабный анализ проводится с помощью набора последовательных аппроксимирующих пространств V_j , которые представляют собой отмасштабированные и инвариантные относительно смещений на целые числа разновидности одного центрального функционального пространства V_0 . В этом пространстве существует ортонормальный базис (или, в общем случае, базис Рисса). В этих терминах многомасштабный анализ Хаара можно записать в виде

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) ; \right. \\ \left. \text{для всех } k \in \mathbb{Z} \quad f|_{[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]} = \text{const} \right\}. \quad (17.1)$$

На рисунке 3 показано, как могли бы выглядеть проекции некоторой функции f на пространства Хаара V_0 , V_1 . В них легко распознать гистограммное представление этой функции. Сопоставление гистограмм на этих двух уровнях показывает, что первая сумма в формуле (3.17) дает "размытое изображение" или "сглаженные средние" сигнала $f(x)$ на каждом интервале, тогда как вторая сумма в ней добавляет все более тонкие детали со все уменьшающимися размерами. Таким способом функционалы общего вида разлагаются в ряды по правильно локализованным флуктуациям с характерной формой, определяемой выбранным вейвлетом.

Функции $\varphi_{j,k}$ образуют ортонормальный базис V_j . Ортогональное дополнение V_j в V_{j+1} обозначается W_j . Подпространства W_j образуют взаимно ортогональный набор. Последовательность $\psi_{j,k}$ формирует ортонормальный базис W_j при любом заданном j . Полный набор функций $\psi_{j,k}$ и $\varphi_{j,k}$ при всех j образует ортонормальный базис $L^2(\mathbb{R})$. Все это убеждает нас в том, что разработан подход с многомасштабным анализом, и функции $\psi_{j,k}$ и $\varphi_{j,k}$ служат высокочастотными и низкочастотными фильтрами соответственно. Графически всю процедуру можно было бы представить так, как это изображено на рис. 4.

В согласии с вышепоставленной целью можно дать следующее определение понятия вейвлетов [4].

Функция $\psi(x)$ вещественной переменной называется (основным) *вейвлетом класса m* , если выполнены следующие четыре свойства:

1) если $m = 0$, то $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ принадлежат к $L^\infty(\mathbb{R})$; если $m \geq 1$, то $\psi(x)$, $\varphi(x)$ и все их производные вплоть до порядка m принадлежат к $L^\infty(\mathbb{R})$;

2) $\psi(x)$, $\varphi(x)$ и все их производные вплоть до порядка m быстро уменьшаются, когда $x \rightarrow \pm\infty$;

3) $\int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi(x) dx = 0$ при $0 \leq n \leq m$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$;

4) набор функций $2^{j/2} \psi(2^j x - k)$, $2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, является ортонормальным базисом в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Тогда выполняется разложение (3.17). Если как ψ , так и φ имеют ограниченную область определения, то это разложение представляет любую обобщенную функцию порядка, меньшего m . Более того, порядок обобщенной функции f (природа ее сингулярностей) может быть установлен точно и непосредственно по поведению ее вейвлет-коэффициентов, как продемонстрировано в разделах 11, 12. Функции $2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ являются вейвлетами, порожденными одним "материнским вейвлетом" (основным вейвлетом) ψ . Условия 1), 2), 3) ответственны соответственно за регулярность, локальность и знакочередность. Видно, что условие 3) для вейвлета Хаара выполнено только при $m = 0$, т.е. его регулярность нулевая: $r = 0$. В общем случае для каждого целого значения $r \geq 1$ существует такое многомасштабное представление V_j в $L^2(\mathbb{R})$, которое обладает требуемой регулярностью r , и при этом соответствующие вещественные функции φ и ψ обладают конечной областью определения. По мере роста требований к регулярности приходится увеличивать и размер области определения. Вейвлет $2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ "сконцентрирован" в основном на двоичном интервале $I = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ при $j, k \in \mathbb{Z}$. Его фурье-образ заключен в интервале $2^j(2\pi/3) \leq |\omega| \leq 2^j(8\pi/3)$. В действительности его частотная полоса покрывает одну октаву.

17.2. Операторы Калдерона – Зигмунда

При вейвлет-анализе операторных выражений часто используются интегральные операторы Калдерона – Зигмунда. Имеется несколько определений таких операторов (подробнее см. в монографии [3]). Мы приводим здесь их определение, используемое Добеши [2].

Оператор Калдерона – Зигмунда T на R представляет собой интегральный оператор

$$Tf(x) = \int K(x, y)f(y) dy, \quad (17.2)$$

у которого интегральное ядро удовлетворяет условиям

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|}, \quad (17.3)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) \right| \leq \frac{C}{|x - y|^2} \quad (17.4)$$

и который определяет ограниченный оператор на пространстве $L^2(R)$.

При таком определении надо проявить некоторую осторожность в области $x = y$.

17.3. Связь с разложением Литтлвуда – Пали

В литературе, посвященной анализу сигналов, зачастую используется так называемое разложение Литтлвуда – Пали (Littlewood – Paley decomposition), которое тесным образом связано с вейвлет-преобразованием. Поэтому мы приводим здесь выражения, связывающие коэффициенты этого разложения $\Delta_j(f)(x)$ как с дискретными ($d_{j,k}$), так и с непрерывными ($W(a, b)$) вейвлет-коэффициентами:

$$\Delta_j(f)(x) = 2^{nj/2} d_{j, 2^j x} = W(2^{-j}, x), \quad (17.5)$$

$$d_{j,k} = 2^{-nj/2} W(2^{-j}, 2^{-j}k) = 2^{-nj/2} \Delta_j(f)(2^{-j}k). \quad (17.6)$$

Благодарности. Мы благодарны всем тем, с кем мы сотрудничали в процессе работы над этими проблемами. Мы особо признательны А.В. Леонидову, прочитавшему обзор и сделавшему ряд ценных предложений. Мы также благодарны А. Мартэну, отметившему некоторые упущения в библиографии. О. Иванов весьма благодарен С. Годекеру, в сотрудничестве с которым были развиты многие методы. В. Нечитайло благодарен за поддержку INTAS (грант 97-103).

Список литературы

- Meyer Y *Wavelets and Operators* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
- Daubechies I *Ten Lectures on Wavelets* (Philadelphia: SIAM, 1991)
- Meyer Y, Coifman R *Wavelets, Calderon – Zygmund and multilinear operators* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997)
- Meyer Y *Wavelets: Algorithms and Applications* (Philadelphia: SIAM, 1993)
- Progress in Wavelet Analysis and Applications* (Eds Y Meyer, S Roques) (Gif-sur-Yvette: Editions Frontiers, 1993)
- Chui C K *An Introduction to Wavelets* (San Diego: Academic Press, 1992)
- Hernandez E, Weiss G *A First Course on Wavelets* (Boca Raton: CRC Press, 1997)
- Kaiser G *A Friendly Guide to Wavelets* (Boston: Birkhauser, 1994)
- Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications* (Ed T Koornwinder) (Singapore: World Scientific, 1993)
- Асрафьева Н М *УФН* **39** 1085 (1996)
- Carmona R, Hwang W-L, Torresani B *Practical Time-Frequency Analysis* (San Diego: Academic Press, 1998)
- Grossman A, Morlet J "Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms", in *Mathematics + Physics, Lectures on Recent Results* Vol. 1 (Ed. L Streit) (Singapore: World Scientific, 1985)
- Morlet J, Arens G, Fourgeau E, Giard D *Geophysics* **47** 203, 222 (1982)
- Wavelets in Physics* (Ed. J C Van den Berg) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998)
- Mallat S *A Wavelet Tour of Signal Processing* (San Diego: Academic Press, 1998)
- Erlebacher G, Hussaini M Y, Jameson L M *Wavelets: Theory and Applications* (New York: Oxford Univ. Press, 1996)
- Wavelets in Medicine and Biology* (Eds A Aldroubi, M Unser) (Boca Raton: CRC Press, 1996)
- Haar A *Math. Ann.* **69** 331 (1910)
- Sweldens W *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **3** 186 (1996)
- Goedecker S, Ivanov O V *Comput. Phys.* **12** 548 (1998)
- Ausher P *Ondelettes Fractales et Applications* (Paris: Univ. Paris, Dauphine, 1989); Мандельштам Л И *Полное собрание трудов* Т. I (Под. ред. С М Рытова) (М.: Изд-во АН СССР, 1948) с. 46
- Beylkin G *SIAM J. Numer. Anal.* **29** 1716 (1992)
- Beylkin G, Coifman R, Rokhlin V *Commun. Pure Appl. Math.* **44** 141 (1991)
- Jaffard S, Meyer Y *Mem. Am. Math. Soc.* **123** 587 (1996)
- Dremin I M *Phys. Lett. B* **313** 209 (1993)
- Dremin I M, Hwa R C *Phys. Rev. D* **49** 5805 (1994)
- Dremin I M, Gary J W *Phys. Rep.* **348** (2001) (to be published); hep-ph/0004215
- Mallat S, Hwang W L *IEEE Trans. Inform. Theory* **38** 617 (1992)
- Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: W.H. Freeman, 1982)
- Feder J *Fractals* (New York: Plenum Press, 1988)
- Paladin G, Vulpiani A *Phys. Rep.* **156** 147 (1987)
- Дремин И М *УФН* **160** 647 (1990)
- Renyi A *Probability Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1970)
- Muzy J F, Bacry E, Arneodo A *Phys. Rev. Lett.* **67** 3515 (1991); *Int. J. Bifurcat. Chaos* **4** 245 (1994)
- Arneodo A, d'Aubenton-Carafa Y, Thermes C *Physica D* **96** 291 (1996)
- De Wolf E, Dremin I M, Kittel W *Phys. Rep.* **270** 1 (1996)
- Takayasu H *Fractals in the Physical Sciences* (Manchester: Manchester Univ. Press, 1990)
- Jaffard S *Multifractal Formalism for Functions* (Philadelphia: SIAM, 1997)
- Donoho D, Johnstone I J. *Am. Stat. Assoc.* **90** 1200 (1995)
- Дремин И М, Иванов О В, Нечитайло В А *Наука – производство* (6) 13 (2000)
- Спиридонов В П *Компьютерра* (8) 38 (1998)
- Torresani B, in *Self-similar Systems* (Eds V B Prietchev, V P Spiridonov) (Dubna: JINR, 1999)
- Bowman C, Newell A C *Rev. Mod. Phys.* **70** 289 (1998)
- Parr R G, Yang W *Density-Functional Theory of Atoms and Molecules* (New York: Oxford Univ. Press, 1989)
- Goedecker S, Ivanov O V *Solid State Commun.* **105** 665 (1998)
- Wei S, Chou M Y *Phys. Rev. Lett.* **76** 2650 (1997)
- Han S, Cho K, Ihm J *Phys. Rev. B* **60** 1437 (1999)
- Tymczak C J, Wang X *Phys. Rev. Lett.* **78** 3654 (1997)
- Ivanov O V, Antropov V P *J. Appl. Phys.* **85** 4821 (1999)
- Ivanov O V *Phys. Rev. B* (2001) (to be published)
- Goedecker S, Ivanov O V *Phys. Rev. B* **59** 7270 (1999)
- Carruthers P, in *Proc. of Hot and Dense Matter, Bodrum, 1993* (Singapore: World Scientific, 1994) p. 65
- Lipa P, Greiner M, Carruthers P, in *Proc. of Soft Physics and Fluctuations, Crakow, 1993* (Singapore: World Scientific, 1994) p. 105
- Greiner M et al. *Z. Phys. C* **69** 305 (1996)
- Suzuki N, Biyajima M, Ohsawa A *Prog. Theor. Phys.* **94** 91 (1995)
- Huang D *Phys. Rev. D* **56** 3961 (1997)

57. Sarcevic I, Huang Z, Thews R *Phys. Rev. D* **54** 750 (1996)
58. Nandi B K et al. (WA98 Coll.), in *Proc. of 3rd Int. Conference on Physics and Astrophysics of Quark-Gluon Plasma, Jaipur, 1997* (Singapore: World Scientific, 1998) p. 12
59. Astafyeva N M, Dremin I M, Kotelnikov K A *Mod. Phys. Lett. A* **12** 1185 (1997)
60. Апанасенко А В, Добротин Н А, Дремин И М и др. *Письма в ЖЭТФ* **30** 145 (1979)
61. Алексеева К И и др. *Известия АН СССР* **26** 572 (1962); *J. Phys. Soc. Jpn.* **17** 409 (1962)
62. Масленникова Н А и др. *Известия АН СССР* **36** 1696 (1972)
63. Arata N *Nuovo Cimento A* **43** 455 (1978)
64. Dremin I M, Orlov A M, Tretyakova M I *Proc. 17 ICRC* **5** 149 (1981); *JETP Lett.* **40** 320 (1984)
65. Марутян И А и др. *ЯФ* **29** 1566 (1979)
66. Adamus M et al. (NA22 Coll.) *Phys. Lett. B* **185** 200 (1987)
67. Bialas A, Peschanski R *Nucl. Phys. B* **273** 703 (1988)
68. Дремин И М *Письма в ЖЭТФ* **30** 140 (1979)
69. Дремин И М *ЯФ* **33** 1357 (1981)
70. Dremin I M, Ivanov O V, Kalinin S A et al. *Phys. Lett. B* **499** 97 (2001)
71. Adamovich M I et al. (EMU01 Coll.) *J. Phys. G* **19** 2035 (1993)
72. Cherry M L et al. (KLM Coll.) *Acta Phys. Pol. B* **29** 2129 (1998)
73. Дремин И М, Ласаева П Л, Локтионов А А и др. *ЯФ* **52** 840 (1990); *Mod. Phys. Lett. A* **5** 1743 (1990)
74. Agababyan N M et al. *Phys. Lett. B* **389** 397 (1996)
75. Дремин И М *УФН* **170** 1235 (2000)
76. Georgantas A A *Review of Compressor Aerodynamic Instabilities* (Canada: National Aeronautical Establishment, 1994)
77. Dremin I M, Furlotov V I, Ivanov O V et al. *Control Eng. Pract.* (2001) (to be published)
78. Akay M *IEEE Spectrum* **34** 50 (1997)
79. Ламброу Т, Линней А, Шпеллер М *Компьютерра* (6) 50 (1998)
80. Thurner S, Feurstein M C, Teich M C *Phys. Rev. Lett.* **80** 1544 (1998)
81. Amaral L A N, Goldberger A L, Ivanov P C et al. *Phys. Rev. Lett.* **81** 2388 (1998)
82. Ivanov P C, Amaral L A N, Goldberger A L et al. *Nature* **399** 461 (1999)
83. Yang F, Liao W *IEEE Eng. Med. Biol.* **16** 17 (1997)
84. Ivanov P C et al. *Nature* **383** 323 (1996)
85. Blanco S et al. *IEEE Eng. Med. Biol.* **16** 64 (1997)
86. Schiff S J et al. *Electroen. Clin. Neurophysiol.* **91** 442 (1994)
87. Blanco S et al. *Phys. Rev. E* **54** 6661 (1996)
88. Arneodo A et al. *J F Phys. Rev. Lett.* **74** 3293 (1995)
89. Arneodo A et al. *Physica A* **254** 24 (1998)
90. Peng C K et al. *Nature* **356** 168 (1992)
91. Antonini M, Barlaud M, Mathieu P, Daubechies I *IEEE Trans. on Image Process.* **1** 205 (1992)
92. Wallace G K, in *Compression Standard, Communications of the ACM, April 1991*, ftp://ftp.uu.net/graphics/jpeg/wallace.ps.gz

Wavelets and their applications

I.M. Dremin, O.V. Ivanov, V.A. Nechitailo

Lebedev Physical Institute,

117924 Moscow, Leninskii pros. 53, Russian Federation

Tel. (7-095) 132-29 29. Fax (7-095) 135-85 53

E-mail: dremin@lpi.ru

The aim of this review is to provide a practical guide for those considering the application of the discrete wavelet transform in their computational practice. The concept of a wavelet is introduced and its applications, computational and otherwise, are described in brief, the reader being referred to the literature for the rigorous proof of the mathematical statements used. The multiresolution analysis and the fast wavelet transform have become virtually synonymous to the discrete wavelet transform. The correct choice of a wavelet and the use of nonstandard matrix multiplication often prove crucial for the solution of a problem at hand. The wavelet analysis reveals such characteristics of a function as its fractal properties and singularities, among others. Applying the wavelet transform to operator expressions is helpful in solving certain types of equations. In dealing with discretized functions — as one often does in practical applications — the stability of the wavelet transform and of related numerical algorithms becomes a problem. Following the discussion of all the above topics, practical applications of the wavelet analysis are illustrated, which are, however, too numerous for us to cover more than a tiny part of them. The authors would appreciate any comments which would better this review and bring it nearer to the goal formulated in the first phrase of this abstract.

PACS numbers: **02.60.** – x, **02.70.** – c, **05.40.** – a, **87.57.** – s

Bibliography — 92 references

Received 13 December 2000