

Петербургский государственный университет путей сообщения

Ю.К.Демьянович, В.А.Ходаковский

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЭЙВЛЕТОВ

Курс лекций

Санкт-Петербург
2007

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ	3
§1. Проблема сжатия информационных потоков	4
§2. Основная идея вэйвлетного преобразования	5
§3. Вэйвлеты (всплески)	8
§4. Пространства основных функций. Кратно-масштабные соотношения	13
§5. Ортогональность вэйвлетных пространств	15
§6. Формулы декомпозиции и реконструкции	17
§7. Фильтры и их связь с вэйвлет-преобразованием	20
§8. Масштабирующая функция. Вэйвлеты Добеши	21
§9. О многообразии вэйвлетных систем	23
ДОПОЛНЕНИЕ 1. Некоторые общие подходы к построению вэйвлетов	27
1. Потоки информации, сигналы, сеточные функции	27
2. Вэйвлетное разложение потока	30
3. Об истории исследований	31
4. Другие способы построения вэйвлетов	32
ДОПОЛНЕНИЕ 2. Один алгоритм сжатия информации. Реализация сжатия. Описание результатов	34
1. Построение сплайн-вэйвлетного разложения на неравномерной сетке	34
2. Формулы декомпозиции и реконструкции	37
3. Об алгоритме адаптивного выбора сетки	38
4. Описание численного эксперимента	43
5. О программе сжатия-восстановления числовых потоков	46
ЛИТЕРАТУРА	48

ВВЕДЕНИЕ

Современные потоки информации в процессе обработки, хранения и передачи имеют электронную форму: чаще всего это последовательности нулей и единиц огромной длины ($10^{12} - 10^{16}$ символов). Такие последовательности можно быстро обрабатывать лишь в случае, когда имеются большие компьютерные ресурсы (быстродействие, память, мощные каналы связи). Задача сокращения объемов цифровой информации за счет отбрасывания несущественных ее составляющих весьма актуальна, причем степень важности эффективного решения этой задачи постоянно возрастает.

На первом месте среди средств решения этой задачи несомненно находятся вэйвлеты, что подтверждается большим числом приложений в различных технических и научных областях. Имеется много работ по вэйвлетной тематике, в том числе, ряд монографий, исследующих вопрос с различных точек зрения (см. работы [1 – 6] и имеющуюся в них библиографию).

Цель данного учебного пособия состоит в том, чтобы дать первоначальные сведения о вэйвлетах, пояснить основную идею их построения, дать наглядную иллюстрацию результатов вэйвлетной обработки информации, изложить их простейшие свойства, а также дать представление о различных аспектах их применения. От читателей требуются математические знания в объеме двухгодичного курса математики, обычно читаемого в техническом вузе. Приведенные библиографические ссылки позволят любознательному читателю более глубоко ознакомиться с излагаемым предметом.

Данная работа частично поддержана РФФИ (гранты 07-01-00269 и 07-01-00451).

§1. Проблема сжатия информационных потоков

Теория вэйвлетов (всплесков) появилась сравнительно недавно (несколько десятилетий тому назад); к настоящему времени она завоевала прочные позиции в математике и нашла глубокие приложения в физике, астрономии, медицине, и, конечно, в инженерном деле, поскольку основной результат этой теории — эффективные алгоритмы обработки больших потоков информации. Под эффективностью в данном случае понимают экономное (с точки зрения экономии ресурсов компьютера: памяти и времени обработки) разложение потока информации на составляющие, так чтобы можно было выделить основной информационный поток, уточняющий информационный поток и информационный поток с несущественной информацией. Как правило, основной информационный поток значительно менее плотный, чем исходный поток информации; поэтому его можно передать быстро, и при этом не требуется использовать линии связи с широкой полосой пропускания и с большим количеством проводников. Уточняющий информационный поток не во всех случаях необходим, его можно передавать фрагментарно в зависимости от потребностей. Наконец, поток с несущественной информацией вообще может быть отброшен. Конечно, вопрос о том, какая информация является основной, какая уточняющей, а какая — несущественной, выходит за рамки математических исследований и должен решаться в каждом отдельном случае специалистом предметной области.

Роль теории вэйвлетов (всплесков) состоит в том, что она дает предметному специалисту достаточно широкий арсенал средств, из которых он может выбрать то средство, которое ему подходит для обработки (для разложения на составляющие) интересующего его потока информации. Такими средствами в теории вэйвлетов являются наборы вложенных (основных) пространств функций и их представлений в виде прямой (а иногда и ортогональной) суммы вэйвлетных пространств. Весьма важными являются базисы основных пространств, а также базисы вэйвлетов (всплесков); построению и изучению свойств таких базисов посвящено много работ.

Большой вклад в развитие теории вэйвлетов внесли Мейер, Чуи, Добеши, Малла и др. (число публикаций в этой области, по-видимому, превысило тысячу). Наиболее известные книги по этой тематике указаны в прилагаемом списке литературы (см. [1 – 6]); их можно рекомендовать

для углубленного изучения теории, а также ее приложений.

Данное учебное пособие преследует цель первоначально ознакомить читателя с элементами теории вэйвлетов и дать представление о возможностях ее практического использования. Одновременно это пособие простейшим образом подводит читателя к наиболее современным вариантам вэйвлетных разложений и к эффективным способам сжатия неоднородных потоков информации (имеющих сингулярности или быстро меняющиеся характеристики).

§2. Основная идея вэйвлетного преобразования

Для более наглядной иллюстрации идеи вэйвлет-преобразования представим себе, что рассматриваемый числовой поток кодирует некоторое изображение, выводимое на экран компьютера (или цифрового телевизора). Предположим, что экран представляет собой прямоугольную матрицу из большого числа пикселей — маленьких прямоугольников, нанесенных на прозрачную поверхность (стекло), которые светятся под воздействием попадающих на них электронов, причем для такого свечения имеется фиксированное число градаций яркости. Для простоты рассматриваем лишь одноцветные изображения (черно-белый экран). Обычно пиксели перенумерованы последовательно по строкам, которые предварительно выстроены одна за другой в прямую линию; таким образом, пиксели приобретают номера $0, 1, 2, \dots, N - 1$, где $N = M \times K$, где M число строк рассматриваемой матрицы, а K — число ее столбцов. Для определенности будем считать N четным; пусть $N = 2L$, где L — натуральное число. Каждому пикселю предписывается определенная яркость, выражаемая некоторым числом; обозначим это число для j -го пикселя через c_j . Таким образом, кодировка изображения производится с помощью числового потока

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, \dots, c_{2L-1}. \quad (2.1)$$

Поток (2.1) может быть передан по линиям связи и при подаче на экран компьютера (телевизора) может быть превращен в исходное изображение. Если исходное изображение передается с большой точностью, то N весьма велико, и передача даже одного такого изображения представляет значительные технические трудности (на практике требуется передавать миллионы таких изображений с большой скоростью). Поэтому

возникает задача уменьшения количества передаваемых чисел. Предполагая, что соседние числа в (2.1) близки, можно было бы предложить передавать, например, только числа с нечетными номерами в (2.1), т.е. числа

$$c_1, c_3, c_5, c_7, \dots, c_{2L-1}. \quad (2.2)$$

Такое преобразование называется *прореживанием* исходного числового потока (английский термин *upsampling* – разрежение или разрежающая выборка). Вместо потока (2.1) передают в два раза более короткий поток (2.2); приемное устройство расширяет полученный числовой поток (2.2) дублированием принятых значений так, чтобы в результате на местах с четным и со следующим нечетным номером находились одинаковые числа. В результате на экране воспроизводится изображение, полученное с помощью числового потока вида

$$c_1, c_1, c_3, c_3, c_5, c_5, c_7, \dots, c_{2L-1}, c_{2L-1}. \quad (2.3)$$

Тем самым "восстановление" (2.3) исходного потока (2.1) производится с погрешностью, причем информация теряется необратимым образом (т.е. без передачи дополнительной информации приемное устройство, вообще говоря, не в состоянии восстановить поток (2.1)). Такой прием (английский эквивалент *downsampling* – сгущение) оправдан, если полученное изображение мало отличается от исходного.

Недостатки описанного подхода состоят в следующем: 1) он применим лишь к достаточно медленно меняющемуся потоку, 2) отсутствует учет характеристик числового потока (в некоторых частях числовой поток может меняться очень медленно, и можно было бы выбрасывать много чисел подряд, а в других частях при быстром изменении потока любые выбрасывания чисел могут существенно испортить передаваемое изображение), 3) нет средств для уточнения передаваемого потока.

Идея вэйвлетного подхода иллюстрируется следующим образом. Из числового потока (2.1) формируется два числовых потока

$$a_j = (c_{2j} + c_{2j+1})/2, \quad b_j = (c_{2j} - c_{2j+1})/2, \quad \text{где } j = 0, 1, \dots, L-1. \quad (2.4)$$

Нетрудно видеть, что

$$c_{2j} = a_j + b_j, \quad c_{2j+1} = a_j - b_j, \quad j = 0, 1, \dots, L-1. \quad (2.5)$$

Таким образом, если поток (2.1) заменить двумя потоками (2.4), то после их передачи можно восстановить исходный поток (2.1), используя формулы (2.5).

Возникает вопрос, в чем же польза от замены потока (2.1) на два потока (2.4), если общее количество чисел в потоках (2.4) совпадает с количеством чисел в (2.1). Для ответа на этот вопрос заметим, что если соседние числа в (2.1) близки, то второй из потоков в (2.4) состоит из чисел, близких к нулю, так что может оказаться, что второй поток вообще не нужен и его можно отбросить. Однако, если некоторые фрагменты первого потока из (2.4) не дают достаточной точности, то можно использовать соответствующие фрагменты (с теми же диапазонами индексов) второго потока, и произвести расчеты по формулам (2.5); это приведет к точному восстановлению исходного потока (2.1) на соответствующих участках (подобная технология передачи используется, в частности, при передаче изображений в Интернете: сначала появляются основные контуры изображения, позволяющие оценить его содержание и прервать передачу, если в ней нет необходимости, и лишь затем происходит уточнение, и окончательное завершение передачи изображения).

Поток чисел

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_{L-1} \quad (2.6)$$

называют основным, а поток чисел

$$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots, b_{L-1} \quad (2.7)$$

— вэйвлетным (всплесковым) потоком.

Полученный основной поток (2.6) можно рассматривать как сжатие исходного потока (2.1), а поток (2.7) как поправку к основному потоку, позволяющую восстановить исходный поток.

Если поток (2.6) все еще велик для передачи, то аналогичной процедурой его расщепляют на два потока: поток, являющийся основным для потока (2.6) (будем его называть нулевым приближением к исходному потоку (2.1) или просто нулевым потоком) и соответствующий вэйвлетный поток (его назовем первой поправкой к нулевому потоку или первым вэйвлетным потоком); в этом случае поток (2.7) можно назвать второй поправкой (или вторым вэйвлетным потоком).

Возможно дальнейшее продолжение процесса расщепления; на k -м шаге получим расщепление исходного потока на $k + 1$ потоков: нулевой поток (основной результат сжатия) и k вэйвлетных потоков, последовательное добавление которых к нулевому потоку приводит к последовательному уточнению результата сжатия вплоть до полного восстановления исходного потока. Излагаемая методика похожа на разложение по

формуле Тейлора, где производные заменены соответствующими разностями. Такой процесс расщепления иногда применяют и к упомянутым вэйвлетным потокам; получающийся результат называют *вэйвлет-пакетом*.

§3. Вэйвлеты (всплески)

Более подробное исследование и отыскание наиболее подходящих приемов расщепления потоков требует применить аппарат функционального анализа.

Пусть $\chi_{[a,b]}(t)$ — характеристическая функция промежутка $[a, b)$,

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [a, b), \\ 0 & \text{при } t \notin [a, b). \end{cases} \quad (3.1)$$

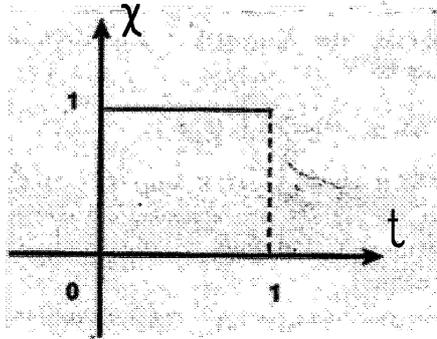


Рис. 1. График характеристической функции $\chi_{[0,1)}(t)$

Для простоты в (2.1) положим $N = 4$ и на единичном интервале рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(t) = c_0\chi_{[0,1/4)}(t) + c_1\chi_{[1/4,1/2)}(t) + c_2\chi_{[1/2,3/4)}(t) + c_3\chi_{[3/4,1)}(t). \quad (3.2)$$

На Рис. 2 показан график этой функции: он состоит из отрезков прямых, параллельных оси абсцисс; таким образом, функция $\tilde{u}(t)$ кусочно постоянная.

Рис. 2. График кусочно постоянной функции (3.2)

Для того, чтобы подобный график был близок к графику функции $u(t)$ следует взять по-больше точек деления, а в качестве констант c_i можно взять значения функции $u(t)$ в конце каждого из отрезков, на которые подразделен отрезок $[0, 1]$. Рассматривая последовательность подразделений отрезка $[0, 1]$ на N равных частей, где $N = 2^k$, k — натуральное число, имеем

$$\tilde{u}(t) = c_0\chi_{[0,1/N)}(t) + c_1\chi_{[1/N,2/N)}(t) + \dots + c_{N-1}\chi_{[N-1/N,1)}(t), \quad (3.3)$$

где $c_s = u(s/N)$.

Обратим внимание на то, что в слагаемых правой части равенства (3.3) фигурирует одна и та же функция (3.1), у которой аргумент преобразован подходящим образом; действительно,

$$\chi_{[s/2^k, (s+1)/2^k)}(t) = \chi_{[0,1)}(2^k t - s), \quad s = 0, 1, \dots, 2^k - 1. \quad (3.4)$$

Поскольку в подобных рассуждениях может использоваться не только характеристическая функция единичного интервала, но и другие функции, то введем более удобное обозначение для рассматриваемых функций, а именно, положим

$$\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{[0,1)}(t), \quad \omega_{k,s}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(2^k t - s). \quad (3.5)$$

Функция $\omega(t)$ в соотношениях (3.5) называется масштабирующей; из $\omega(t)$ получаются функции $\omega_{k,s}(t)$ масштабированием (умножением на 2^k) и сдвигом аргумента (вычитанием числа s). Теперь соотношение (3.2) можно переписать в виде

$$\tilde{u}(t) = c_0\omega_{2,0}(t) + c_1\omega_{2,1}(t) + c_2\omega_{2,2}(t) + c_3\omega_{2,3}(t); \quad (3.6)$$

заметим, что в рассматриваемом случае $k = 2$. В общем случае (см. (3.3) при $L = 2^{k-1}$) получаем

$$\tilde{u}(t) = c_0\omega_{k,0}(t) + c_1\omega_{k,1}(t) + c_2\omega_{k,2}(t) + \dots + c_{2^k-1}\omega_{k,2^k-1}(t). \quad (3.7)$$

Напомним, что замыкание множества, на котором функция отлична от нуля, называется носителем этой функции. Например, функция $\omega_{2,0}(t)$ отлична от нуля на промежутке $[0, 1/4)$, так что ее носитель — отрезок $[0, 1/4]$, носителем функции $\omega_{2,1}(t)$ является отрезок $[1/4, 1/2]$ и т.д.; вообще, носителем функции $\omega_{k,s}(t)$ является отрезок $[s/2^k, (s+1)/2^k]$ (см. Рис. 3).

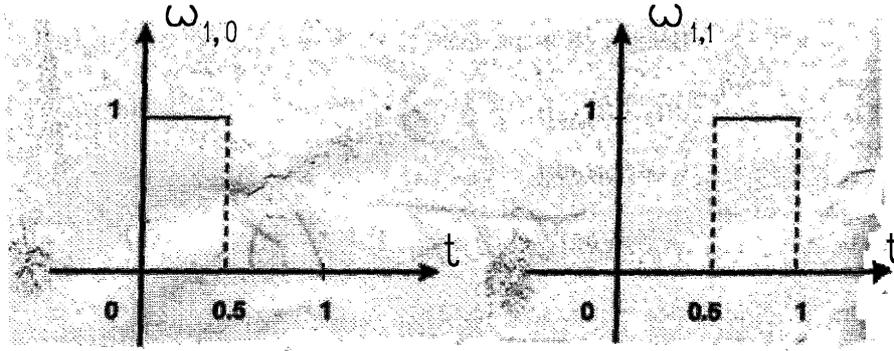


Рис. 3. Графики функций $\omega_{1,0}(t)$ и $\omega_{1,1}(t)$

Из предыдущего видно, с ростом k длина носителя таких функций сокращается, а число слагаемых в представлении (3.7) увеличивается; последнее означает возможность улучшать приближение $\tilde{u}(t)$ функции $u(t)$ с ростом k .

Для построения вэйвлет-функций воспользуемся очевидным тождеством

$$\alpha x + \beta y = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)(x + y) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)(x - y) \quad (3.8)$$

(здесь α, x, β, y — любые вещественные числа) и применим его к представлению (3.2); получаем

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & \frac{c_0 + c_1}{2} \left(\chi_{[0,1/4)}(t) + \chi_{[1/4,1/2)}(t) \right) + \\ & + \frac{c_0 - c_1}{2} \left(\chi_{[0,1/4)}(t) - \chi_{[1/4,1/2)}(t) \right) + \\ & + \frac{c_2 + c_3}{2} \left(\chi_{[1/2,3/4)}(t) + \chi_{[3/4,1)}(t) \right) + \\ & + \frac{c_2 - c_3}{2} \left(\chi_{[1/2,3/4)}(t) - \chi_{[3/4,1)}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \chi_{[0,1/4)}(t) + \chi_{[1/4,1/2)}(t) &= \chi_{[0,1/2)}(t), \\ \chi_{[1/2,3/4)}(t) + \chi_{[3/4,1)}(t) &= \chi_{[1/2,1)}(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя обозначения (3.5), из (3.9) и (3.10) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & \frac{c_0 + c_1}{2} \omega_{1,0}(t) + \frac{c_0 - c_1}{2} \left(\omega_{2,0}(t) - \omega_{2,1}(t) \right) + \\ & + \frac{c_2 + c_3}{2} \omega_{1,1}(t) + \frac{c_2 - c_3}{2} \left(\omega_{2,2}(t) - \omega_{2,3}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{w}_{1,0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{2,0}(t) - \omega_{2,1}(t), \quad \mathbf{w}_{1,1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{2,2}(t) - \omega_{2,3}(t). \quad (3.12)$$

Теперь соотношения (3.11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & \left(\frac{c_0 + c_1}{2} \omega_{1,0}(t) + \frac{c_2 + c_3}{2} \omega_{1,1}(t) \right) + \\ & + \left[\frac{c_0 - c_1}{2} \mathbf{w}_{1,0}(t) + \frac{c_2 - c_3}{2} \mathbf{w}_{1,1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Фактически, в рассматриваемом частном случае (у нас $k = 2$ и, следовательно, $L = 2^{k-1} = 2$) сделано преобразование (2.4) кусочно-постоянной функции $\tilde{u}(t)$: в круглых скобках оказалась часть, относящаяся к основному потоку, а в квадратных скобках — часть, относящаяся к вэйвлетному потоку (см. формулы (2.6) и (2.7)).

Функции $\mathbf{w}_{1,0}(t)$ и $\mathbf{w}_{1,1}(t)$ называются вэйвлетным базисом, а их линейные комбинации образуют *пространство вэйвлетов*. Заметим, что они могут быть получены подобным преобразованием и сдвигом аргумента функции $\mathbf{w}(t)$, определяемой формулой

$$\mathbf{w}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, 1/2), \\ -1 & \text{при } t \in [1/2, 1), \\ 0 & \text{при } t \notin [0, 1). \end{cases} \quad (3.14)$$

Действительно

$$\mathbf{w}_{1,0}(t) = \mathbf{w}(t/2), \quad \mathbf{w}_{1,1}(t) = \mathbf{w}(t/2 - 1). \quad (3.15)$$

Функция $\mathbf{w}(t)$ носит название функции Хаара; ее график представлен на Рис. 4.

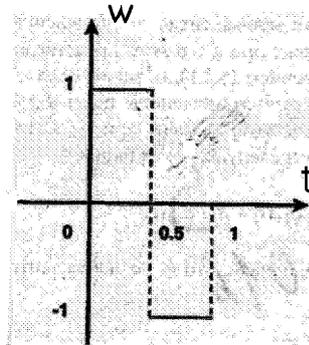


Рис. 4. График функции $\mathbf{w}(t)$

Графики для $w_{1,0}(t)$ и $w_{1,1}(t)$ получаются сдвигом и сжатием графика функции $w(t)$ (см. Рис.5).

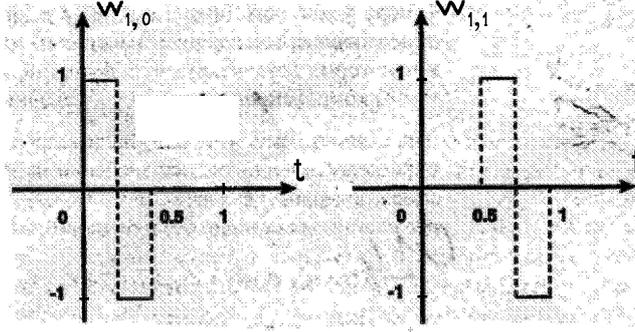


Рис. 5. Графики функций $w_{1,0}(t)$ и $w_{1,1}(t)$

Аналогичным образом в общем случае (3.7), объединяя соседние слагаемые, получаем

$$\tilde{u}(t) = \sum_{s=0}^{2^k-1} c_s \omega_{k,s}(t) = \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} (c_{2l} \omega_{k,2l}(t) + c_{2l+1} \omega_{k,2l+1}(t)).$$

Используя (3.8), отсюда находим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} \frac{c_{2l} + c_{2l+1}}{2} (\omega_{k,2l}(t) + \omega_{k,2l+1}(t)) + \\ &+ \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} \frac{c_{2l} - c_{2l+1}}{2} (\omega_{k,2l}(t) - \omega_{k,2l+1}(t)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Функции

$$w_{k-1,l}(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(2^k t - l). \quad (3.17)$$

получаются линейным преобразованием аргумента функции Хаара; они называются *вэйвлетами Хаара*. Учитывая, что

$$\omega_{k,2l}(t) + \omega_{k,2l+1}(t) = \omega_{k-1,l}(t),$$

а также, что

$$\omega_{k,2l}(t) - \omega_{k,2l+1}(t) = w_{k-1,l}(t),$$

из (3.16) получаем

$$\tilde{u}(t) = \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} a_l \omega_{k-1,l}(t) + \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} b_l w_{k-1,l}(t), \quad (3.18)$$

где использованы обозначения

$$a_l \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_{2l} + c_{2l+1}}{2}, \quad b_l \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_{2l} - c_{2l+1}}{2}. \quad (3.19)$$

Аналогично частному случаю (3.13) первая сумма в правой части равенства (3.18) представляет собой часть, относящуюся к основному потоку, а вторая сумма — часть, относящаяся к вэйвлетному потоку.

§4. Пространства основных функций. Кратно-масштабные соотношения

Теперь нам понадобятся линейные пространства функций. Напомним, что линейное пространство — это множество, в котором определены операции сложения элементов и умножения их на число. Такое пространство обычно называют векторным пространством. Примерами векторных пространств является обычное трехмерное векторное пространство \mathbb{R}^3 , а также пространство $C(a, b)$ функций, непрерывных на интервале (a, b) вещественной оси; таким образом, в последнем случае "векторами" являются функции, непрерывные на интервале (a, b) .

Итак, если V — вещественное векторное пространство, то каковы бы ни были вещественные числа a и b для любых элементов $\varphi, \psi \in V$ линейная комбинация $a\varphi + b\psi$ определена и принадлежит пространству V (это свойство легко поверяется для упомянутых выше пространств \mathbb{R}^3 и $C(a, b)$).

Приступим к построению интересующих нас пространств функций.

Прежде всего заметим, что множество функций, заданных на промежутке $[0, 1]$, кусочно непрерывных и имеющих разве лишь конечное число разрывов первого рода, является линейным пространством. В дальнейшем функции этого множества будем рассматривать лишь на промежутке $[0, 1)$ и образуемое ими линейное пространство будем обозначать по-прежнему буквой V .

Пусть $V^{(0)}$ — пространство констант (т.е. функций, принимающих одно и то же значение на всем промежутке $[0, 1)$). Введем еще пространство $V^{(1)}$ функций, постоянных на каждом промежутке $[0, 1/2)$, $[1/2, 1)$. Поскольку каждая функция, постоянная на $[0, 1)$, постоянна также и на промежутках $[0, 1/2)$, $[1/2, 1)$, то каждый элемент пространства $V^{(0)}$ является также и элементом пространства $V^{(1)}$, т.е.

$$V^{(0)} \subset V^{(1)}. \quad (4.1)$$

Обозначим $V^{(2)}$ пространство функций, которые постоянны на промежутках $[0, 1/4)$, $[1/4, 1/2)$, $[1/2, 3/4)$, $[3/4, 1)$. Вообще будем использовать обозначение $V^{(k)}$ для пространства кусочно-постоянных функций, каждая из которых постоянна на промежутках вида $[s/2^k, (s+1)/2^k)$, где $s = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$. Любую функцию $f(t)$ пространства $V^{(k)}$ можно представить в виде линейной комбинации функций $\omega_{k,s}(t)$:

$$f(t) = \sum_{s=0}^{2^k-1} c_s \omega_{k,s}(t), \quad (4.2)$$

где $c_s \stackrel{\text{def}}{=} f(s/N)$; при этом представление вида (4.2) единственно (для доказательства достаточно воспользоваться определением функций $\omega_{k,s}(t)$, см. формулу (3.5), и вычислить левую и правую части соотношения (4.2) в точках s/N , $s = 0, 1, \dots, 2^k - 1$). Очевидно, что

$$V^{(k)} \subset V, \quad (4.3)$$

Заметим, что функция $\omega_{k,2l}(t)$ равна единице на промежутке $[2l/2^k, (2l+1)/2^k)$, а вне его равна нулю, и при $0 \leq l \leq 2^{k-1} - 1$ функция $\omega_{k,2l+1}(t)$ равна единице на промежутке $[2l+1/2^k, (2l+2)/2^k)$, а вне его равна нулю; следовательно, сумма $\omega_{k,2l}(t) + \omega_{k,2l+1}(t)$ равна единице на промежутке $[2l/2^k, (2l+2)/2^k)$, а вне его равна нулю. Как следует из определения (см. (3.5)) функция $\omega_{k-1,l}(t)$ равна нулю вне промежутка $[l/2^{k-1}, (l+1)/2^{k-1})$ и равна единице на этом промежутке; очевидно, последний промежуток совпадает с тем, на котором отлична от нуля рассматриваемая сумма. Легко видеть, что функция $\omega_{k-1,l}(t)$ и сумма $\omega_{k,2l}(t) + \omega_{k,2l+1}(t)$ совпадают:

$$\omega_{k-1,l}(t) \equiv \omega_{k,2l}(t) + \omega_{k,2l+1}(t). \quad (4.4)$$

Используя формулу (3.5), соотношение (4.4) перепишем в виде

$$\omega(2^{k-1}t - l) \equiv \omega(2^k t - 2l) + \omega(2^k t - 2l - 1),$$

а производя здесь подстановку $x = 2^{k-1}t - l$, приходим к тождеству

$$\omega(x) \equiv \omega(2x) + \omega(2x - 1). \quad (4.5)$$

Тождество (4.5) является примером так называемого *кратно-масштабного уравнения*; функция $\omega(x)$ называется *масштабирующей функцией*.

Благодаря соотношению (4.4) ясно, что

$$V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset \dots \subset V^{(k)} \subset V^{(k+1)} \dots \quad (4.6)$$

§5. Ортогональность вэйвлетных пространств

Множество функций можно рассматривать как векторное пространство. Для двух функций $f(t)$ и $g(t)$ из пространства V определим *скалярное произведение* и *норму* ("длину") формулами

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad \|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(f, f)}. \quad (5.1)$$

Напомним, что функции $f, g \in V$ со свойством $(f, g) = 0$ называются *ортогональными*. Если же V' и W' — линейные пространства, содержащиеся в пространстве V (их называют *подпространствами* пространства V), и при этом для любых $f \in V'$ и любых $g \in W'$ верно соотношение $(f, g) = 0$, то пространства V' и W' называют *ортогональными* и пишут $V' \perp W'$. Рассмотрим множество U' , состоящее из элементов вида $u = f + g$, где f пробегает все пространство V' , а g пробегает все пространство W' ; U' также является линейным пространством. Если при этом $V' \perp W'$, то говорят, что пространство U' разлагается в *ортогональную сумму пространств V' и W'* и пишут

$$U' = V' \oplus W'.$$

Перейдем к построению ортогональной суммы пространств в интересующем нас случае. Нетрудно видеть (проверяется интегрированием, см. формулы (5.1)), что справедливы соотношения

$$(\omega_{k,l}, \omega_{k,s}) = 0, \quad (\mathbf{w}_{k,l}, \mathbf{w}_{k,s}) = 0 \text{ при } l \neq s, \quad l, s \in \{1, 2, \dots, 2^k - 1\}, \quad (5.2)$$

$$(\omega_{k,p}, \mathbf{w}_{k,q}) = 0 \text{ при любых } p, q \in \{1, 2, \dots, 2^k - 1\}, \quad (5.3)$$

$$\|\omega_{k,l}\| = \|\mathbf{w}_{k,l}\| = 2^{-k/2} \text{ при } l \in \{1, 2, \dots, 2^k - 1\}. \quad (5.4)$$

Из формул (4.2) и (5.3) следует, что любая функция $f \in V^{(k)}$ ортогональна функциям $\mathbf{w}_{k,q}$.

Рассмотрим множество $W^{(k)}$ функций вида

$$w(t) = \sum_{q=0}^{2^k-1} b_q w_{k,q}, \quad (5.5)$$

где b_q — любые вещественные числа; очевидно, что это множество является линейным пространством. Из формул (4.2), (5.3) и (5.5) вытекает, что любая функция $w \in W^{(k)}$ ортогональна любой функции $f \in V^{(k)}$:

$$(f, w) = 0 \quad \forall f \in V^{(k)} \quad \forall w \in W^{(k)}.$$

Таким образом, пространства $V^{(k)}$ и $W^{(k)}$ ортогональны.

Заметим, что в левой части представления (3.18) находится элемент пространства $V^{(k)}$, первая сумма правой части является элементом пространства $V^{(k-1)}$, а вторая сумма правой части — элемент пространства $W^{(k-1)}$; здесь $k = 1, 2, 3, \dots$. Из формул (3.19) следует, что каковы бы ни были числа a_l и b_l найдутся числа c_s такие, что справедливо представление (3.18); обратно, по произвольным числам c_s найдутся числа a_l и b_l , при которых верно тождество (3.18). Это означает, что сумма любых двух элементов из пространств $V^{(k-1)}$ и $W^{(k-1)}$ является элементом пространства $V^{(k)}$; наоборот, любой элемент пространства $V^{(k)}$ может быть представлен в виде суммы элементов из пространств $V^{(k-1)}$ и $W^{(k-1)}$ и при том единственным способом. Учитывая ортогональность пространств $V^{(k-1)}$ и $W^{(k-1)}$, видим, что пространство $V^{(k)}$ разлагается в ортогональную сумму подпространств $V^{(k-1)}$ и $W^{(k-1)}$:

$$V^{(k)} = V^{(k-1)} \oplus W^{(k-1)}. \quad (5.6)$$

Заметим, что поскольку $V^{(k)} \perp W^{(k)}$, то из (4.9) следует ортогональность пространств $W^{(k-1)}$ и $W^{(k)}$:

$$W^{(k-1)} \perp W^{(k)} \quad (5.7)$$

Введем множество

$$V^{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=0}^{+\infty} V^{(k)}. \quad (5.8)$$

Легко видеть, что $V^{(\infty)}$ — линейное пространство. Действительно, ввиду вложенности объединяемых пространств (см. формулу (4.6)) для любых элементов $f_1, f_2 \in V^{(\infty)}$ найдется $k_0 \geq 1$ такое, что $f_1, f_2 \in V^{(k_0)}$; ввиду

линейности пространства $V^{(k_0)}$ линейная комбинация элементов f_1, f_2 лежит в $V^{(k_0)}$, а значит принадлежит и множеству $V^{(\infty)}$. Аналогичным образом устанавливается включение $V^{(\infty)} \subset V$.

Благодаря формулам (4.6), (5.6), (5.7) и (5.8) теперь получаем ортогональное разложение пространства $V^{(\infty)}$ на основное пространство $V^{(0)}$ и вэйвлетные пространства $W^{(k)}$

$$V^{(\infty)} = V^{(0)} \oplus W^{(0)} \oplus W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(k-1)} \oplus W^{(k)} \oplus \dots,$$

что кратко записывается в виде

$$V^{(\infty)} = V^{(0)} \oplus \bigoplus_{k=0}^{+\infty} W^{(k)}. \quad (5.9)$$

Пространства $W^{(k)}$ называются вэйвлетными пространствами с базисом Хаара.

§6. Формулы декомпозиции и реконструкции

Введем функции

$$\overset{\circ}{\omega}_{k,l}(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{k/2} \omega_{k,l}(t), \quad \overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k,l}(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{k/2} \mathbf{w}_{k,l}(t). \quad (6.1)$$

Очевидны соотношения $\overset{\circ}{\omega}_{k,l} \in V^{(k)}$, $\overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k,l} \in W^{(k)}$. Используя соотношения (5.2) – (5.4), получим

$$(\overset{\circ}{\omega}_{k,l}, \overset{\circ}{\omega}_{k,s}) = 0, \quad (\overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k,l}, \overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k,s}) = 0 \text{ при } l \neq s, \quad l, s \in \{1, 2, \dots, 2^k - 1\}, \quad (6.2)$$

$$(\overset{\circ}{\omega}_{k,p}, \overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k,q}) = 0 \text{ при любых } p, q \in \{1, 2, \dots, 2^k - 1\}, \quad (6.3)$$

$$\|\overset{\circ}{\omega}_{k,l}\| = \|\overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k,l}\| = 1 \text{ при } l \in \{1, 2, \dots, 2^k - 1\}. \quad (6.4)$$

Функцию \tilde{u} из пространства $V^{(k)}$ представим в виде

$$\tilde{u}(t) = \sum_{s=0}^{2^k-1} c_s \overset{\circ}{\omega}_{k,s}(t). \quad (6.5)$$

Благодаря ортогональному разложению (5.6) эту функцию можно представить также в виде

$$\tilde{u}(t) = \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} a_l \overset{\circ}{\omega}_{k-1,l}(t) + \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} b_l \overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k-1,l}(t). \quad (6.6)$$

Из (6.5) и (6.6) тождество

$$\sum_{s=0}^{2^k-1} c_s \overset{\circ}{\omega}_{k,s}(t) = \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} a_l \overset{\circ}{\omega}_{k-1,l}(t) + \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} b_l \overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k-1,l}(t). \quad (6.7)$$

Умножая скалярно это соотношение на $\overset{\circ}{\omega}_{k,p}$ и учитывая соотношения (6.4), найдем

$$c_p = \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} a_l (\overset{\circ}{\omega}_{k,p}, \overset{\circ}{\omega}_{k-1,l}) + \sum_{l=0}^{2^{k-1}-1} b_l (\overset{\circ}{\omega}_{k,p}, \overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k-1,l}). \quad (6.8)$$

Применяя формулы (3.5), (3.14), (3.17) и (6.1), находим

$$(\overset{\circ}{\omega}_{k,p}, \overset{\circ}{\omega}_{k-1,l}) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{при } p = 2l \text{ или } p = 2l + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (6.9)$$

$$(\overset{\circ}{\omega}_{k,p}, \overset{\circ}{\mathbf{w}}_{k-1,l}) = \begin{cases} +1/\sqrt{2} & \text{при } p = 2l \\ -1/\sqrt{2} & \text{или } p = 2l + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6.10)$$

Используем соотношения (6.9) и (6.10) для упрощения формулы (6.8), рассматривая четные и нечетные значения индекса p . Для $p = 2s$ и $p = 2s + 1$ из (6.9) и (6.10) имеем соответственно:

$$c_{2s} = \frac{a_s + b_s}{\sqrt{2}}, \quad c_{2s+1} = \frac{a_s - b_s}{\sqrt{2}}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, 2^{k-1} - 1. \quad (6.11)$$

Для наглядности при представлении преобразования (6.11) в матричной форме ограничимся случаем $k = 3$:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Обозначая U квадратную матрицу в (6.12) и вводя векторы

$$\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_0, a_1, a_2, a_3)^T, \quad \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_0, b_1, b_2, b_3)^T,$$

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)^T,$$

а также блочную одностолбцовую матрицу $\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$, перепишем (6.12) в виде

$$\mathbf{c} = U \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Переход от потоков $a_0, a_1, \dots, a_{2^{k-1}-1}$ и $b_0, b_1, \dots, b_{2^{k-1}-1}$, называется *реконструкцией*, а соотношения (6.11) (а также (6.12) или (6.13)) называются *формулами реконструкции*.

Формулы, позволяющие по исходному числовому потоку $c_0, c_1, \dots, c_{2^k-1}$ получить основной поток $a_0, a_1, \dots, a_{2^{k-1}-1}$ и вэйвлетный поток $b_0, b_1, \dots, b_{2^{k-1}-1}$, называют *формулами декомпозиции*. Для того, чтобы получить формулы декомпозиции, достаточно обратить матрицу U в соотношении (6.13). Поскольку эта матрица U ортогональная, то для отыскания обратной матрицы достаточно ее транспонировать: $U^{-1} = U^T$. Таким образом, формулы декомпозиции имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = U^T \mathbf{c}. \quad (6.14)$$

Другая запись формул декомпозиции непосредственно получается из (6.11):

$$a_s = \frac{c_{2s} + c_{2s+1}}{\sqrt{2}}, \quad (6.15)$$

$$b_s = \frac{c_{2s} - c_{2s+1}}{\sqrt{2}}. \quad (6.16)$$

В частности, при $k = 3$ из (6.12) и (6.14) получаем

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

§7. Фильтры и их связь с вэйвлет-преобразованиями

В практике обработки потоков числовой информации рассматривают так называемые *высокочастотные* и *низкочастотные фильтры*. Низкочастотный фильтр выделяет низкочастотную составляющую в потоке числовой информации; эту составляющую можно представлять как главную тенденцию поведения числового потока или как текущее (по потоку) усреднение фиксированного количества последовательных чисел рассматриваемого числового потока. Высокочастотная составляющая может быть получена составлением разности между исходным числовым потоком и низкочастотной составляющей, так что высокочастотную составляющую можно рассматривать как уклонение исходного потока от своего среднего значения или как погрешность представления исходного потока с помощью низкочастотного. В случае, когда исходный поток кодирует изображение, низкочастотная составляющая дает основные контуры изображения, а высокочастотный поток — его детализацию.

Из сказанного следует, что разложение исходного числового потока (представляющего собой последовательность $\{c_j\}$) на основной и вэйвлетный потоки является вариантом фильтрации потока; таким образом, можно говорить о вэйвлетном фильтре: основной поток (последовательность $\{a_j\}$) — результат фильтрации низкочастотным фильтром (этот фильтр дается формулами (6.15)), а вэйвлетный поток (последовательность $\{b_j\}$) — результат фильтрации высокочастотным фильтром

(этот фильтр определяется формулами (6.16)). Рассматриваемое разложение можно трактовать также как результат представления исходного пространства $V^{(1)}$ в виде прямой суммы основного $V^{(0)}$ и вэйвлетного $W^{(0)}$ пространств с переходом к формулам .

§8. Масштабирующая функция. Вэйвлеты Добеши

Исходным моментом при построении различных вэйвлетных разложений, связанных с равномерной сеткой, является кратно-масштабное уравнение. В простейшем случае (для вэйвлетов Хаара) оно встречалось нам ранее (см. формулу (4.5)). Для получения других вариантов вэйвлетных разложений задаются числами d_j и рассматривают кратно-масштабное уравнение вида

$$\omega(t) \equiv d_0\omega(2t) + d_1\omega(2t - 1) + d_2\omega(2t - 2) + \dots + d_N\omega(2t - N). \quad (8.1)$$

Масштабирующую функцию $\omega(t)$ иногда подчиняют тем или иным дополнительным условиям; примером таких условий являются условие нормированности и условия ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega(t)|^2 dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(2t - j)\omega(2t - k) dt = 0 \quad \text{при } j \neq k. \quad (8.2)$$

Следует заметить, что отыскание функции ω из условий (8.1) – (8.2) является весьма непростым делом. Основной прием решения этой задачи — применение преобразования Фурье к тождеству (8.1); это приводит к представлению образа Фурье функции ω в виде бесконечного произведения, откуда можно, по-крайней мере, извлечь ее значения в двоичных точках вещественной оси (т.е. в точках, являющихся обыкновенными дробями со знаменателем 2^s , где s — целое число).

В частности, если взять

$$d_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad d_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad d_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad d_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad (8.3)$$

а остальные коэффициенты d_j положить равными нулю, то получается

вэйвлет, называемый *D4-вэйвлетом Добеши* (см. Рис. 6).



Рис. 6. Графическое изображение D4-вэйвлета Добеши

Заметим, что этот вэйвлет равен нулю вне промежутка $[-1, 2]$, он непрерывен, но не дифференцируем; отметим также, что в точках вида $k/2^s$ (где k и s — целые) у него имеется только левая производная, а правой производной нет. Другой выбор коэффициентов d_j (см. [1]) приводит к *D6-вэйвлету Добеши* (см. Рис. 7), который по сравнению с D4-вэйвлетом позволяет получить лучшее сжатие для медленно меняющихся функций, но приводит к тому же сжатию при их быстром изменении. Представленные графики (см. рис. 5 и 6) показывают, что только что упомянутые вэйвлеты (в отличие от вэйвлетов Хаара) не обладают свойством симметрии.

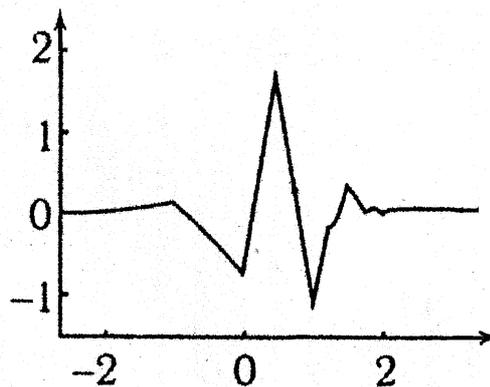


Рис. 7. Графическое изображение D6-вэйвлета Добеши

§9. О многообразии вэйвлетных систем

Рассмотренные вэйвлеты (Хаара и Добеши) являются лишь незначительной частью того множества множества вэйвлетов, которые были предложены исследователями (см. Малла[6] и имеющуюся там обширную библиографию).

Требования, предъявляемые к вэйвлетам, весьма разнообразны. Сюда относятся: 1) вычислительная простота, 2) хорошие качества приближения, 3) вычислительная устойчивость, 4) гладкость, 5) компактность носителя у базисных вэйвлетов (или их быстрое убывание на бесконечности — при отсутствии такой компактности), 6) симметричность базисных вэйвлетов, 7) ортогональность вэйвлетного разложения и многие другие. Обоснованность этих требований различна: наиболее важные из них указаны в пунктах 1) – 3) приведенного списка, хотя другие свойства также могут иметь то или иное отношение к требованиям 1) – 3), так, например, ортогональность вэйвлетного разложения существенно упрощает процедуру отыскания коэффициентов разложения.

Однако, удовлетворить всем этим требованиям — тяжелая задача. К настоящему времени известно свыше 4300 вэйвлетов, однако, лишь простейшие вэйвлеты — вэйвлеты Хаара удовлетворяют условиям 1), 5), 6), 7). Для иллюстрации ниже приведены графики некоторых более сложных вэйвлетов и соответствующих им масштабирующих функций: 1) на Рис.8 представлен график вэйвлета Мейера,

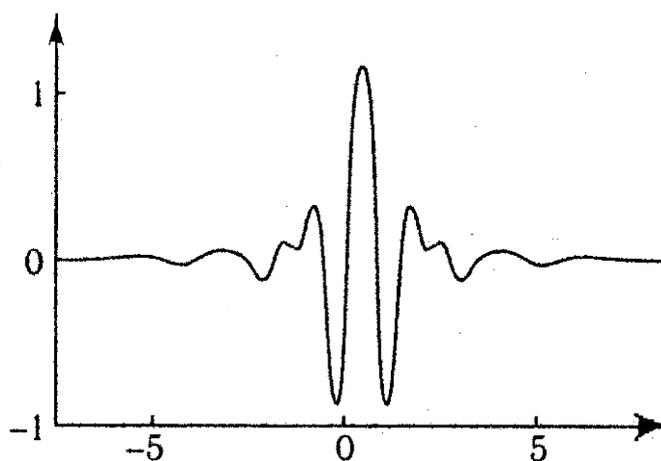


Рис. 8. Вэйвлет Мейера

2) масштабирующая функция и вэйвлет Батла-Лемарье (для первой

степени) приведены на Рис. 9 и Рис.10 соответственно,

3) наконец, на рисунках 11 и 12 изображены графики масштабирующая функция и вэйвлет Батла-Лемарье для второй степени.

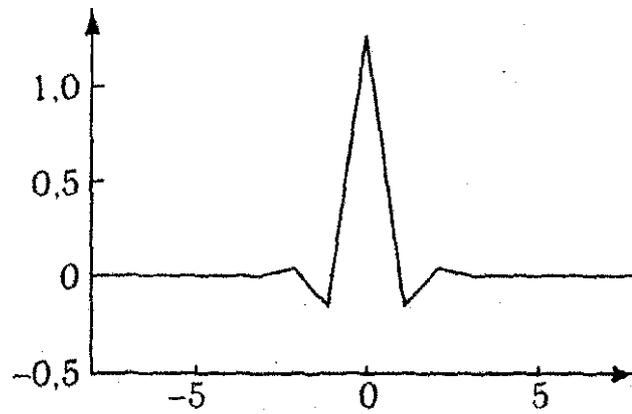


Рис. 9. Масштабирующая функция Батла-Лемарье для первой степени

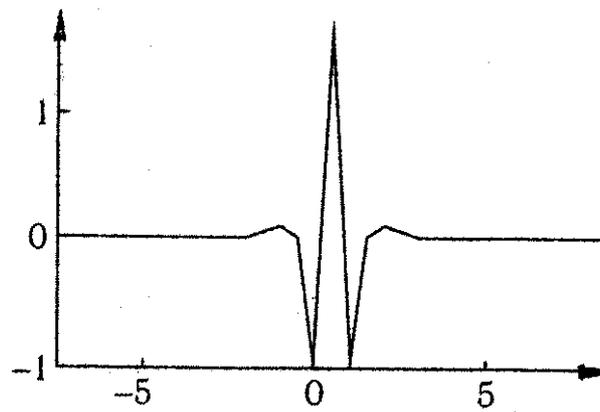


Рис. 10. Вэйвлет Батла-Лемарье (для первой степени)

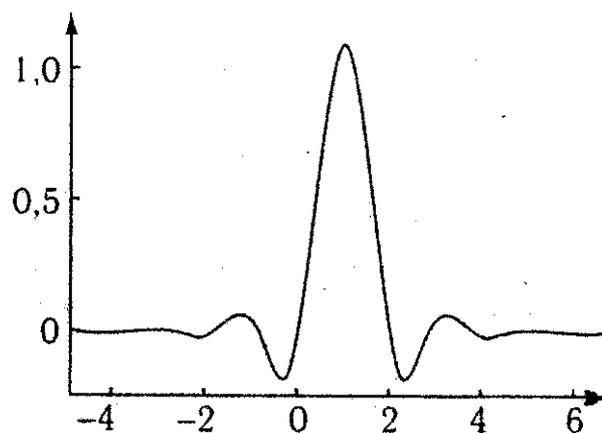


Рис. 11. Масштабирующая функция Батла-Лемарье для второй степени

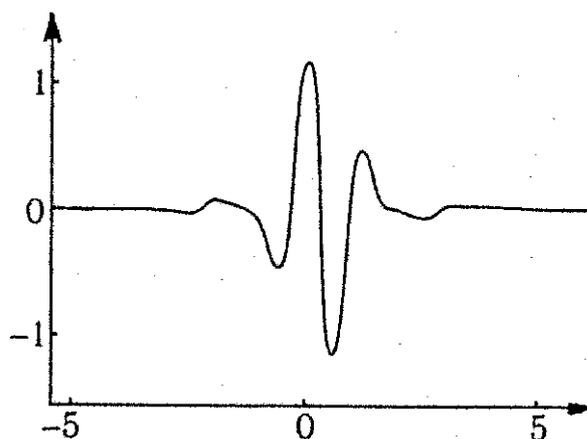


Рис. 12. Вэйвлет Батла-Лемарье (для второй степени)

Подробные комментарии к упомянутым вэйвлетам можно найти в ряде более подробных руководств (см., например, [6]); заметим, однако, что приведенные графики показывают, что эти вэйвлеты весьма сложны.

Если нужны гладкие симметричные вэйвлеты, то приходится отказываться от ортогональности. Поэтому рассматривают вэйвлеты, удовлетворяющие условиям полуортогональности: хотя сами базисные вэйвлеты образуют неортогональный базис, вэйвлетное разложение ортогонально. Другое ослабление требования ортогональности — использование свойства биортогональности: для линейно независимой системы функций существует система функционалов, знание которой значительно упрощает процедуру отыскания коэффициентов разложения.



Рис. 13. Изображение "Лена" с использованием 10% вэйвлет-коэффициентов вэйвлетов Хаара

В заключение этой части приведем упрощенные вэйвлет-преобразования изображения, фигурирующего обычно под названием "Лена", которое получено с помощью вэйвлетов Хаара, причем в первом из них использовано 10% вэйвлет-коэффициентов (см. Рис. 13), а во втором — лишь 5% коэффициентов (Рис. 14).



Рис. 14. Изображение "Лена" с использованием 5% коэффициентов при использовании вэйвлетов Хаара

ДОПОЛНЕНИЕ 1.
НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОДХОДЫ
К ПОСТРОЕНИЮ ВЭЙВЛЕТОВ

1. Потоки числовой информации, сигналы, сеточные функции

Числовой информационный поток часто появляется в результате обработки параметра какого-либо физического процесса, причем этот параметр рассматривается, как функция времени; такая обработка называется дискретизацией или оцифровкой. Простейший способ оцифровки — измерение значений упомянутого параметра в отдельные моменты времени. Эти моменты времени образуют дискретное множество чисел, обычно называемое сеткой на числовой оси (точки этого множества называются узлами сетки). Таким образом, каждому рассматриваемому моменту времени сопоставляется число — значение этого параметра. Такое сопоставление называют цифровым сигналом или сеточной функцией.

Итак, пусть упомянутый выше физический параметр представлен функцией $u(t)$, заданной на интервале (α, β) вещественной оси; дальше эту функцию называем *первоначальной*. Как сказано выше, для компьютерной обработки вводится сеточная функция $v(t)$, определяемая с помощью значений первоначальной функции (и, возможно, ее производных) в узлах некоторой сетки (эту сеточную функцию и сетку назовем *исходными*). Использование исходной сеточной функции позволяет построить приближение к первоначальной функции с помощью того или иного аппарата аппроксимации или интерполяции.

Для наглядности предположим, что первоначальная функция $u(t)$ имеет график, изображенный сплошной линией на Рис.15 (для простоты в качестве $u(t)$ взята функция $\sin t$ при $t \in (-\pi, +3\pi)$). Для компьютерной обработки приходится иметь дело со значениями этой функции на исходной сетке $X \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_j)\}_{j=1,2,\dots,N}$; в рассматриваемом примере возьмем $N = 6$. Итак, сетка содержит N узлов (на рисунке эта сетка состоит из узлов, отмеченных "крестиками"). Пунктирные вертикальные отрезки, соответствующие этим "крестикам", заканчиваются точками $\{P_j(x_j, y_j)\}_{j=1,2,\dots,N}$ на графике функции $u(t)$ (на Рис.15 эти точки отмечены "кружочками"); из таких точек состоит график исходной

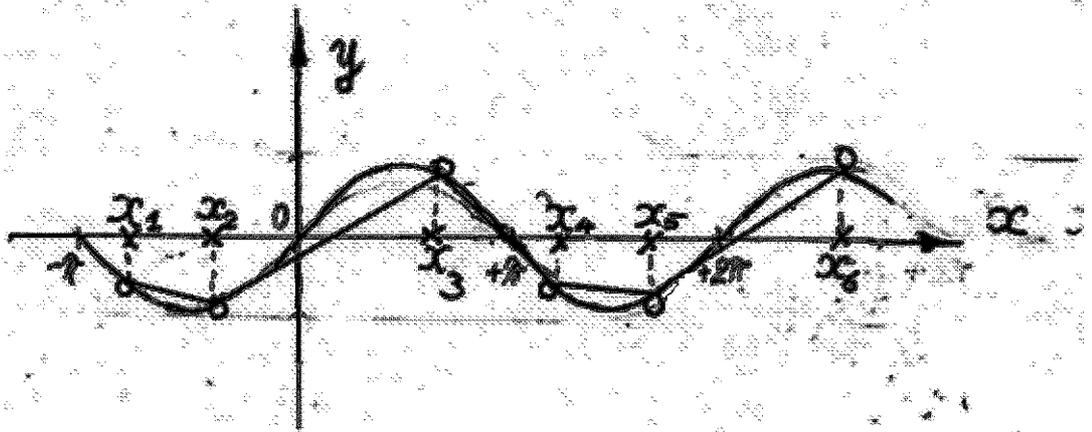


Рис. 15. Аппроксимация синусоиды

В качестве аппроксимации (приближения) к первоначальной функции возьмем кусочно-линейную функцию $v(t)$, $t \in \{x_j\}_{j=1,2,\dots,N}$ последовательно соединяющую точки $\{P_j(x_j, y_j)\}_{j=1,2,\dots,N}$ (т.е. точки графика сеточной функции). Видно, что построенная аппроксимация даже при небольшом $N = 6$ сравнительно мало отличается от первоначальной функции (погрешность аппроксимации мала), а с увеличением густоты сетки уклонение соответствующей аппроксимации от функции $u(t)$ будет уменьшаться. Кусочно-линейная аппроксимация полностью характеризуется множеством точек $\{P_j(x_j, y_j)\}_{j=1,2,\dots,N}$; это множество может быть задано таблицей

x_1	x_2	x_3	x_4	\dots	x_{N-1}	x_N
y_1	y_2	y_3	y_4	\dots	y_{N-1}	y_N

Если N велико (обычно $N \approx 10^6 \div 10^{15}$), то хранение, передача и обработка такой таблицы может оказаться достаточно затратной (могут потребоваться значительные компьютерные ресурсы); с другой стороны, в некоторых случаях погрешность аппроксимации значительно меньше требуемой, и можно было бы укрупнить сетку с тем, чтобы уменьшить объем обрабатываемой таблицы.

Выбор способа уменьшения числового потока находится целиком в руках предметного специалиста (т.е. специалиста в той предметной области, где приходится иметь дело с числовыми потоками): именно предметный специалист должен решить, какая информация настолько несущественна, что ею можно пренебречь. В некоторых областях знаний для

такого заключения необходим переход к частотному представлению информации (в виде суммы гармоник — синусов или косинусов с соответствующими коэффициентами); такой переход, например, часто делают при обработке электронного кода видеоинформации. Для этого перехода используют преобразование Фурье или ряд Фурье (или их дискретные аналоги), а интересующие предметного специалиста частоты выделяют с помощью так называемой "оконной" функции $g(x)$; по-существу $g(x)$ — срезающая функция (т.е. функция, близкая к константе на интересующем диапазоне частот и равная нулю вне этого диапазона), так что нужные частоты выделяются умножением частотного представления на эту функцию (иногда, с дополнительным сдвигом аргумента; см. Рис. 16).

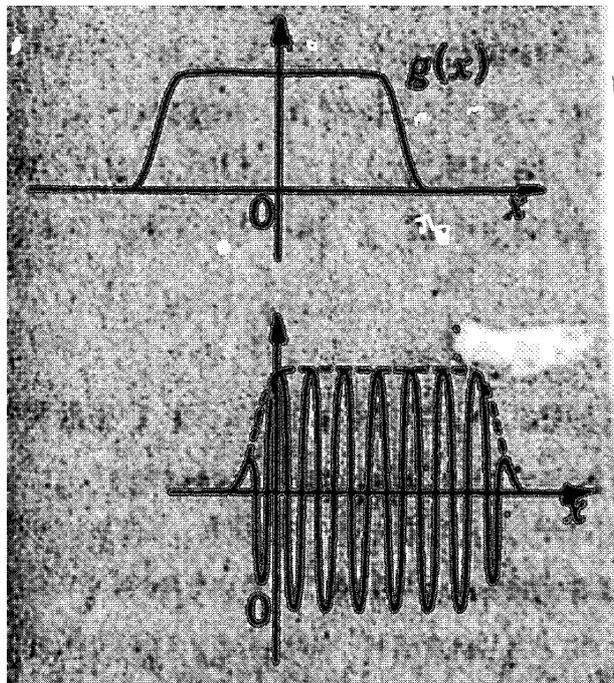


Рис. 16. Иллюстрация "оконного преобразования Фурье"

После такого преобразования можно вернуться в исходное пространство применением обратного преобразования Фурье. Весь прием в целом называется "оконным преобразованием Фурье".

2. Вэйвлетное разложение потока

Линейное пространство таких приближений (будем называть его аналогично предыдущему — исходным пространством) затем представляют в виде прямой суммы пространств, одно из которых называют основным, а второе — вэйвлетным. Часто основное пространство связывают с сеткой, получающейся выбрасыванием некоторой совокупности узлов из исходной сетки, а подпространство вэйвлетов определяют операцией проектирования исходного пространства на основное. Таким образом, порождается разложение упомянутого приближения на основную и вэйвлетную составляющие. Центральными здесь оказываются два момента: вложенность основного пространства в исходное и задание операции проектирования исходного пространства на основное. Представления элементов этого разложения в базисах рассматриваемых пространств порождают соответствующие соотношения между коэффициентами этих представлений. Соотношения, позволяющие перейти от коэффициентов базиса исходного пространства к коэффициентам базисов основного и вэйвлетного пространств, называются *формулами декомпозиции*, а соотношения, дающие обратный переход, — *формулами реконструкции*.

Каждое из упомянутых выше подпространств иногда также разлагают в прямую сумму некоторых подпространств и, возможно, продолжают этот процесс дальше; разложения подобного рода называются *вэйвлет-пакетами*.

Важнейшими вопросами, которые волнуют исследователей, являются вычислительная сложность (объем используемых ресурсов вычислительной системы: памяти, каналов передачи результатов, времени счета), свойства гладкости и устойчивости решения интересующих задач, аппроксимационные и интерполяционные свойства, а также ряд других свойств (компактность носителя базисных функций, скорость их убывания на бесконечности — в случае некомпактного носителя и т.д.)

В случае, когда $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$, а сетка — равномерная, удается применить мощный аппарат гармонического анализа (в пространстве функций $L^2(\mathbb{R}^1)$ и в пространстве последовательностей l^2); этому случаю посвящено большое количество исследований (см., например, [6] и имеющуюся там библиографию). Для цифровых потоков с резко меняющимися характеристиками (со сменой плавного поведения на скачкообразное и наоборот) весьма важно использовать неравномерную сетку,

приспосабливаемую к обрабатываемому потоку. В случае неравномерной сетки и для случая, когда (α, β) не совпадает с вещественной осью, работ не много (см. [7-10]); непосредственное применение гармонического анализа в этих случаях затруднительно.

3. Об истории исследований

Исследования в области обработки больших числовых массивов информации восходят к трем источникам, возникшим независимо друг от друга: к классической теории сплайнов, к методу конечных элементов и к теории вэйвлетов. В соответствии с этим можно выделить по крайней мере три направления развития теории обработки упомянутых массивов. Первое направление берет свое начало от работ Шонберга (I.J.Schoenberg, 1946); здесь исходным моментом является решение какой-либо задачи интерполяции (задачи Лагранжа, Эрмита или Эрмита-Биркгофа) в классе функций с "кусочными" свойствами и с определенной гладкостью в узлах рассматриваемой сетки (см. [11-16]). Заметим, что если исходный массив числовой информации задан как сеточная функция на мелкой сетке, то замена этой сеточной функции на результат решения интерполяционной задачи для крупной сетки (являющейся подмножеством мелкой сетки) может рассматриваться как сжатие исходного массива числовой информации. Аппроксимационные свойства и вычислительная простота получаемых сплайнов всякий раз исследуются дополнительно. Сюда относятся современные исследования по обобщенным сплайнам, так называемым ECT-B-сплайнам (см., например, [15-16]); в этих работах для построения сплайнов на сеточных промежутках используются различные ECT-системы, которые при определенных условиях удается гладко "склеить" в узлах.

Второе направление опирается на аппроксимационные свойства рассматриваемых функций, где определение базисных функций связано с решением аппроксимационных соотношений, рассматриваемых как система уравнений (эти исследования появились в связи с теорией метода конечных элементов, см. [17-26]); при таком подходе интерполяционные свойства и алгоритмы минимизации вычислительной сложности (вложенность пространств и вэйвлетное представление цепочки вложенных пространств) приходится устанавливать дополнительно. Выбор порождающей $m + 1$ -компонентной вектор-функции $\varphi(t)$, заданной на интервале (α, β) , определяет семейства конечномерных пространств на эле-

ментарных сеточных интервалах рассматриваемой (конечной или бесконечной) сетки $X = \{x_j\}$, $X \subset (\alpha, \beta)$, а выбор цепочки \mathbf{A} векторов со свойством полноты приводит к пространству (X, \mathbf{A}, φ) -сплайнов. Условия гладкости эквивалентны определенным алгебраическим соотношениям между значениями $\varphi(t)$ (и ее производных) в узлах сетки и векторами цепочки \mathbf{A} . Требование максимальной гладкости сплайнов (при выбранной вектор-функции $\varphi(t)$ с отличным от нуля вронскианом из ее компонент) однозначно (с точностью до постоянных отличных от нуля множителей) определяет цепочку \mathbf{A} ; при этом однозначно определяется также пространство (X, \mathbf{A}, φ) -сплайнов, которое в этом случае называется пространством B_φ -сплайнов (см. [25]).

Третье направление – теория вэйвлетов – в основу кладет вычислительную простоту, отражением чего является кратно-масштабное уравнение (см. [1-6]); исследование последнего приводит в первую очередь ко вложенности получаемых пространств и к вэйвлетному представлению соответствующей цепочки вложенных пространств (это ведет к минимизации вычислительной сложности); остальные из перечисленных выше свойств с бóльшим или мéньшим успехом исследуются дополнительно (см., например, [6]).

4. Другие способы построения вэйвлетов

Известно, что на двукратно измельчающейся сетке полиномиальные B -сплайны образуют систему вложенных пространств, на основе которой строятся вэйвлетные разложения (см. [1,4]); для равномерной сетки это устанавливается с помощью преобразования Фурье (см., например, [5]), а для неравномерной сетки – использованием специального дробно-рационального тождества (см. [23]). Применение неравномерной сетки позволяет улучшить приближение функций без усложнения вычислений. Однако, для дальнейшего улучшения приближения могут понадобиться различные степени измельчения сетки в разных частях рассматриваемого промежутка: для этого двукратное измельчение недостаточно. Особую заботу представляет вейвлетное разложение в случае неравномерной сетки, поскольку обычно применяемое на равномерной сетке преобразование Фурье в условиях неравномерной сетки использовать затруднительно. Оказалось, что использование биортогональной системы функционалов позволяет построить вэйвлетные разложения и при произвольном измельчении сетки (это ведет к упрощениям и в случае

равномерной сетки).

В работе [25] представлены системы вложенных пространств B -сплайнов второй степени и даны их вейвлетные разложения при произвольном способе измельчения сетки. Для этого используется подходящая реализация биортогональной (к B -сплайнам) системы функционалов и калибровочные соотношения, позволяющие представить B -сплайны на крупной сетке как линейную комбинацию B -сплайнов на мелкой сетке. Первоначально с каждой сеткой связываются B -сплайны второй степени. Далее устанавливается, что если новая сетка \tilde{X}_1 получена из исходной X удалением одного узла, то пространство $\mathcal{P}^B(\tilde{X}_1)$ упомянутых сплайнов, построенных для сетки \tilde{X}_1 , содержится в пространстве $\mathcal{P}^B(X)$ аналогичных сплайнов, построенных для сетки X . Использование биортогональной (к B -сплайнам) системы функционалов позволяет получить прямое сплайн-вейвлетное разложение $\mathcal{P}^B(X) = \mathcal{P}^B(\tilde{X}) \dot{+} W$ и соответствующие формулы реконструкции и декомпозиции; отсюда следует, что последовательное удаление или добавление узлов в исходную сетку приводит к телескопическим системам пространств рассматриваемых сплайнов и к прямому разложению вида $\mathcal{P}^B(X) \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \dots$. Отсюда следует также, что от исходной сетки X можно перейти к любой более мелкой сетке \bar{X} добавлением бесконечной совокупности узлов, если при этом соблюдено условие: между любыми двумя соседними узлами сетки X появляется конечное число узлов (это число может быть различным в зависимости от выбранной пары соседних узлов). При этом $\mathcal{P}^B(X) \subset \mathcal{P}^B(\bar{X})$, а формулы реконструкции и декомпозиции легко получаются использованием указанных здесь биортогональных систем функционалов. Хотя рассуждения проводятся на интервале (α, β) в случае бесконечной сетки, сгущающейся к точкам α и β , все результаты сохраняются и в случае конечной сетки на конечном отрезке $[c, d]$, лежащем в упомянутом интервале: достаточно сузить все рассматриваемые функции на этот отрезок. К этим исследованиям примыкают работы [21 – 26].

ДОПОЛНЕНИЕ 2.
ОДИН АЛГОРИТМ СЖАТИЯ ИНФОРМАЦИИ.
РЕАЛИЗАЦИЯ СЖАТИЯ. ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Построение сплайн-вэйвлетного разложения на неравномерной сетке

На интервале (α, β) вещественной оси рассмотрим сетку

$$X : \quad \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots,$$

и положим

$$\alpha = \lim_{j \rightarrow -\infty} x_j, \quad \beta = \lim_{j \rightarrow +\infty} x_j \quad \forall j \in \mathbb{Z};$$

здесь \mathbb{Z} — множество всех целых чисел.

Полиномиальный B -сплайн ω_j^B второй степени на сетке X можно задать формулами:

$$\omega_j^B(t) = (t - x_j)^2(x_{j+1} - x_j)^{-1}(x_{j+2} - x_j)^{-1} \quad \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}), \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \omega_j^B(t) &= (x_{j+2} - x_j)^{-1}(x_{j+2} - x_{j+1})^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1})^{-1} \times \\ &\times [(x_j - x_{j+2} - x_{j+3} + x_{j+1}) t^2 - 2(x_{j+1}x_j - x_{j+2}x_{j+3}) t + x_jx_{j+1}x_{j+3} - \\ &- x_jx_{j+2}x_{j+3} + x_jx_{j+1}x_{j+2} - x_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}] \quad \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_j^B(t) &= (t - x_{j+3})^2(x_{j+3} - x_{j+2})^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1})^{-1} \\ &\quad \text{при } t \in [x_{j+2}, x_{j+3}], \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$\omega_j^B(t) = 0 \quad \text{при } t \notin [x_j, x_{j+3}], \quad \text{так что } \text{supp } \omega_j^B = [x_j, x_{j+3}]. \quad (1.4)$$

В дальнейшем нам понадобятся суммы вида $\sum_j \omega_j^B(t)$; заметим, что при фиксированном $t \in (\alpha, \beta)$ в таких суммах имеется не более трех ненулевых слагаемых.

Линейное пространство функций, непрерывно дифференцируемых в точках открытого интервала (α, β) , обозначим $C^1(\alpha, \beta)$. Нетрудно проверить, что $\omega_j^B \in C^1(\alpha, \beta)$ (достаточно непрерывность функции $\omega_j^B(t)$ и ее производной установить в узлах $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}$). В пространстве $C^1(\alpha, \beta)$ рассмотрим линейные функционалы $g^{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}$, определяемые формулой

$$\langle g^{(i)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{i+1}) + (x_{i+2} - x_{i+1})u'(x_{i+1})/2 \quad \forall u \in C^1(\alpha, \beta).$$

Заметим, что $\langle g^{(i)}, \omega_j^B \rangle = \delta_{i,j}$, т.е. система функционалов $\{g^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ биортонормальна системе функций $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$

Выбрасывая узел x_1 из сетки X , положим

$$\tilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \text{ при } j \leq 0, \text{ и } \tilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \text{ при } j \geq 1, \quad \xi \stackrel{\text{def}}{=} x_1,$$

и рассмотрим новую (укрупненную) сетку

$$\tilde{X} : \quad \dots < \tilde{x}_{-1} < \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots$$

B -сплайны второй степени $\tilde{\omega}_j^B$, построенные с использованием новой сетки \tilde{X} , представляются теми же формулами (1.1) – (1.4) с заменой узлов x_j сетки X на узлы \tilde{x}_j сетки \tilde{X} . Заметим, что сплайны $\tilde{\omega}_j^B$ на крупной сетке могут быть представлены через сплайны ω_j^B на мелкой сетке следующим образом:

$$\tilde{\omega}_i^B = \sum_j d_{i,j} \omega_j^B; \quad (1.5)$$

здесь числа $d_{i,j}$ отыскиваются по формулам:

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \delta_{i,j} \quad \text{при } i \leq -3, \\ d_{-2,-2} &= 1, \quad d_{-2,-1} = (\tilde{x}_1 - \xi)(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{-1})^{-1}, \\ d_{-2,j} &= 0 \text{ при } j \notin \{-2, -1\}, \\ d_{-1,-1} &= (\xi - \tilde{x}_{-1})(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{-1})^{-1}, \quad d_{-1,0} = (\tilde{x}_2 - \xi)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_0)^{-1}, \\ d_{-1,j} &= 0 \text{ при } j \notin \{-1, 0\}, \\ d_{0,0} &= (\xi - \tilde{x}_0)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_0)^{-1}, \quad d_{0,1} = 1, \quad d_{0,j} = 0 \text{ при } j \notin \{0, 1\}, \\ d_{i,j} &= \delta_{i+1,j} \quad \text{при } i \geq 1. \end{aligned}$$

Соотношения вида (1.5) называются (см. [25]) *калибровочными соотношениями*.

Обозначим $\mathcal{P}^B(X)$ пространство, являющееся линейной оболочкой функций ω_j^B ,

$$\mathcal{P}^B(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \tilde{u} \mid \tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j c_j \omega_j^B \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1 \};$$

это пространство будем называть *пространством B -сплайнов второй степени на сетке X* .

В соответствии с этим определением $\mathcal{P}^B(\tilde{X})$ является пространством B -сплайнов второй степени на сетке \tilde{X} , $\mathcal{P}^B(\tilde{X}) = \{ \tilde{u} \mid \tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \tilde{c}_j \tilde{\omega}_j^B \forall \tilde{c}_j \in \mathbb{R}^1 \}$. Справедливо включение $\mathcal{P}^B(\tilde{X}) \subset \mathcal{P}^B(X)$. Рассмотрим оператор P проектирования пространства $\mathcal{P}^B(X)$ на подпространство $\mathcal{P}^B(\tilde{X})$, задаваемый формулой $P\tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \langle \tilde{g}^{(j)}, \tilde{u} \rangle \tilde{\omega}_j^B \quad \forall \tilde{u} \in \mathcal{P}^B(X)$, и введем оператор $Q = I - P$, где I — тождественный оператор.

Пространством вэйвлетов (всплесков) здесь является пространство $\tilde{W} \stackrel{\text{def}}{=} Q\mathcal{P}^B(X)$, так что получаем прямое разложение

$$\mathcal{P}^B(X) = \mathcal{P}^B(\tilde{X}) \dot{+} \tilde{W} \quad (1.6)$$

является *сплайн-вэйвлетным разложением* пространства $\mathcal{P}^B(X)$.

Пусть известны коэффициенты a_i и $b_{i'}$ в разложениях проекций элемента $\tilde{u} \in \mathcal{P}^B(X)$ на пространства $\mathcal{P}^B(\tilde{X})$ и W : $P\tilde{u} = \sum_i a_i \tilde{\omega}_i^B$, $Q\tilde{u} = \sum_{i'} b_{i'} \omega_{i'}^B$, где $a_i = \langle \tilde{g}^{(i)}, \tilde{u} \rangle$, $b_{i'} = \langle g^{(i')}, Q\tilde{u} \rangle$.

В соответствии с формулами (1.5) и (1.6) имеем $\tilde{u} = \sum_i a_i \tilde{\omega}_i^B + \sum_{i'} b_{i'} \omega_{i'}^B = \sum_{i'} (\sum_i a_i d_{i,i'} + b_{i'}) \omega_{i'}^B$, так что для чисел $c_j = \langle g^{(j)}, \tilde{u} \rangle$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_i a_i d_{i,j} + b_j, \quad j \in \mathcal{Z}. \quad (1.7)$$

Для рассматриваемого сплайн-вэйвлетного разложения (1.6) пространства $\mathcal{P}^B(X)$ B -сплайнов второй степени формулы реконструкции (1.7) имеют вид

$$c_j = a_j \quad \text{при } j \leq -2, \quad (1.8)$$

$$c_{-1} = a_{-2}(\tilde{x}_1 - \xi)(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{-1})^{-1} + a_{-1}(\xi - \tilde{x}_{-1})(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{-1})^{-1}, \quad (1.9)$$

$$c_0 = a_{-1}(\tilde{x}_2 - \xi)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_0)^{-1} + a_0(\xi - \tilde{x}_0)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_0)^{-1} + b_0, \quad (1.10)$$

$$c_j = a_{j-1} \quad \text{при } j \geq 1. \quad (1.11)$$

Пусть теперь известны коэффициенты c_k в разложении элемента $\tilde{u} \in \mathcal{P}^B(X)$ по элементам базиса ω_k^B , а именно, $\tilde{u} = \sum_k c_k \omega_k^B$. Используя равенство $a_i = \langle \tilde{g}^{(i)}, \tilde{u} \rangle$, последовательно имеем

$$\begin{aligned} b_j &= c_j - \sum_i d_{i,j} a_i = \\ &= c_j - \sum_i d_{i,j} \langle \tilde{g}^{(i)}, \sum_k c_k \omega_k^B \rangle = c_j - \sum_i d_{i,j} \sum_k c_k \langle \tilde{g}^{(i)}, \omega_k^B \rangle. \end{aligned}$$

Формулы

$$a_i = \sum_k c_k \langle \tilde{g}^{(i)}, \omega_k^B \rangle, \quad (1.12)$$

$$b_j = c_j - \sum_i d_{i,j} \sum_k c_k \langle \tilde{g}^{(i)}, \omega_k^B \rangle \quad (1.13)$$

называются *формулами декомпозиции*. Для сплайн-вэйвлетного разложения (1.6) пространства $\mathcal{P}^B(X)$ формулы декомпозиции (1.12) имеют вид

$$a_i = c_i \quad \text{при } i \leq -2, \quad (1.14)$$

$$a_{-1} = -(\tilde{x}_1 - \xi)(\xi - \tilde{x}_{-1})^{-1}c_{-2} + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{-1})(\xi - \tilde{x}_{-1})^{-1}c_{-1}, \quad (1.15)$$

$$a_i = c_{i+1} \quad \text{при } i \geq 0, \quad (1.16)$$

а формулы (1.13) принимают вид

$$b_j = 0 \quad \text{при } j \neq 0, \quad (1.17)$$

$$b_0 = [(\tilde{x}_2 - \xi)(\tilde{x}_1 - \xi)c_{-2} - (\tilde{x}_2 - \xi)(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{-1})c_{-1} + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_0)(\xi - \tilde{x}_{-1})c_0 - (\xi - \tilde{x}_0)(\xi - \tilde{x}_{-1})c_1](\tilde{x}_2 - \tilde{x}_0)^{-1}(\xi - \tilde{x}_{-1})^{-1}, \quad (1.18)$$

2. Формулы декомпозиции и реконструкции

Формулы (1.14) – (1.18) перепишем с использованием сетки X в виде

$$\tilde{c}_i = c_i \quad \text{при } i \leq -2, \quad \tilde{c}_i = c_{i+1} \quad \text{при } i \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\tilde{c}_{-1} = -(x_2 - x_1)(x_1 - x_{-1})^{-1}c_{-2} + (x_2 - x_{-1})(x_1 - x_{-1})^{-1}c_{-1}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 = & [(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)c_{-2} - (x_3 - x_1)(x_2 - x_{-1})c_{-1} + \\ & + (x_3 - x_0)(x_1 - x_{-1})c_0 - (x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})c_1](x_3 - x_0)^{-1}(x_1 - x_{-1})^{-1}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\tilde{b}_j = 0 \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

аналогичным образом перепишем формулы реконструкции (1.8) – (1.11):

$$c_j = \tilde{c}_j \quad \text{при } j \leq -2, \quad c_j = \tilde{c}_{j-1} \quad \text{при } j \geq 1, \quad (2.4)$$

$$c_{-1} = \tilde{c}_{-2}(x_2 - x_1)(x_2 - x_{-1})^{-1} + \tilde{c}_{-1}(x_1 - x_{-1})(x_2 - x_{-1})^{-1}, \quad (2.5)$$

$$c_0 = \tilde{c}_{-1}(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)^{-1} + \tilde{c}_0(x_1 - x_0)(x_3 - x_0)^{-1} + \tilde{b}_0. \quad (2.6)$$

3. Об алгоритме выбора сетки

3.1. Основные предположения. Формула для числа выбрасываемых узлов

Предположим, что исходная сетка $\{x_{i'}\}$ — равномерная: $x_{i'} = i'h$. Здесь будут предложены формулы для количества выбрасываемых узлов мелкой сетки $\{x_{i'}\}$, следующих за очередным сохраняемым узлом x_i упомянутой сетки. За сохраненным узлом x_i следует сохраняемый узел x_{i+s} ; таким образом, узлы в количестве $S - 1$ выбрасываются.

Укрупненная сетка $\{\tilde{x}_j\}$ должна подчиняться условию:

$$(\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j)|f'(\tilde{x}_j)| = C, \quad (3.1)$$

где C — некоторая константа. Предполагая, что укрупненная сетка содержит M узлов и складывая предыдущие равенства, имеем

$$\sum_j (\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j)|f'(\tilde{x}_j)| = CM.$$

Считая, что узлы укрупненной сетки делят промежуток $[a, b]$, получаем приближенное соотношение

$$\int_a^b |f'(x)|dx \approx CM,$$

откуда находим C в виде

$$C \approx \int_a^b |f'(x)|dx / M. \quad (3.2)$$

Учитывая, что $\{\tilde{x}_j\}$ — укрупнение исходной сетки имеем соответствия $j - - > i$, $j + 1 - - > i + s$, где $s - 1$ — число выброшенных узлов исходной равномерной сетки $x_i = ih$; из (3.1) получаем

$$(x_{i+s} - x_i)|f'(x_i)| = C,$$

а отсюда имеем

$$sh|f'(x_i)| = C.$$

Ввиду формулы (3.2) вблизи точки $x = x_i$ число $S - 1$ выбрасываемых узлов будем брать равным

$$S - 1 = \lfloor \int_a^b |f'(x)|dx / (Mh|f'(x)|) \rfloor - 1, \quad (3.3)$$

где скобки $\lfloor a \rfloor$ означают ближайшее целое, не превосходящее числа a . Здесь следует заметить, что шаг h должен быть столь малым, чтобы выполнялось соотношение

$$h < C / \max |f'(x)|, \quad (3.4)$$

где константа C вычисляется по формуле (3.2).

3.2. Модификация вывода формулы для числа выбрасываемых узлов

Если считать, что при адаптивном выборе узлов сетки должно выполняться "нормализованное" соотношение

$$(\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j) |f'(\tilde{x}_j)| = C/M, \quad (3.5)$$

где M – число сохраняемых узлов (число узлов урупненной сетки \tilde{x}_j), то после суммирования и предельного перехода получаем приближенное соотношение

$$\int_a^b |f'(t)| dt = C. \quad (3.6)$$

Теперь, как и выше, из (3.5) получаем соотношение

$$(x_{i+s} - x_i) |f'(x_i)| = C/M,$$

и для равномерной сетки имеем

$$S = \lfloor C / (Mh |f'(x_i)|) \rfloor; \quad (3.7)$$

из (3.6) и (3.7) находим приближенную формулу для числа $S(x) - 1$ выбрасываемых узлов вблизи точки $x = x_i$

$$S(x) - 1 = \lfloor \int_a^b |f'(t)| dt / (Mh |f'(x)|) \rfloor - 1. \quad (3.8)$$

Таким образом, формула (2.4) совпала с формулой (3.3).

3.3. Формула, основанная на использовании интегрального среднего

Обозначим $S(c, d)$ число, на единицу большее, чем количество выбрасываемых узлов на интервале $(c, d) \in (a, b)$, и положим

$$S(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor \int_a^b |f'(x)| dx / (\int_c^d |f'(x)| dx Mh / (d - c)) \rfloor, \quad (3.9)$$

где M – число сохраняемых узлов, h – шаг исходной (мелкой) равномерной сетки; таким образом число выбрасываемых узлов на промежутке (c, d) равно $S(c, d) - 1$. Заметим прежде всего, что если узлы не выбрасываются на всем промежутке (a, b) , то $M = N$; при $c = a, d = b$, как и следовало ожидать, из формулы (3.9) имеем $S(a, b) = 1$, а при стремлении к нулю разности $d - c$ приходим к формуле (3.8).

Увеличение числа выбрасываемых узлов, вообще говоря, приводит к бóльшей потере информации, уменьшение числа выбрасываний позволяет уменьшить такие потери. Рассмотрим число

$$s(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{\int_a^b |f'(x)| dx}{Mh \max_{x \in [c, d]} |f'(x)|} \right\rfloor, \quad (3.10)$$

где максимум берется по отрезку $[c, d]$; поскольку правая часть последнего соотношения отличается от правой части соотношения (3.9) заменой в знаменателе подинтегрального выражения на его максимум, то справедливо неравенство

$$s(c, d) < S(c, d). \quad (3.11)$$

Замечание 1. Если $f(x)$ монотонна (убывает или возрастает) на участке интегрирования, так что на этом участке $f'(x)$ не меняет знак, то рассматриваемый интеграл сводится к двойной подстановке для $f(x)$. Например, если $f'(x) > 0$ при $x \in (c, d)$, то

$$\int_c^d |f'(x)| dx = \int_c^d f'(x) dx = f(d) - f(c). \quad (3.12)$$

3.4. Формула, использующая априорную информацию ("формула с предсказанием")

Исходя из соотношения (3.9), зададим число $\tilde{S}(x, q)$, на единицу бóльшее, чем количество выбрасываемых узлов после узла x , формулой

$$\tilde{S}(x, q) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{\int_a^b |f'(t)| dt}{\frac{M}{q} \int_x^{x+qh} |f'(t)| dt} \right\rfloor, \quad (3.13)$$

где M – количество сохраняемых узлов, h – шаг исходной (мелкой) равномерной сетки, q – параметр усреднения; таким образом, число выбрасываемых узлов после узла равно $S(x, q) - 1$. Заметим, что переходя

к пределу при $q \rightarrow 0$, получаем

$$\tilde{S}(x, 0) = \lfloor \int_a^b |f'(t)| dt / (Mh|f'(x)|) \rfloor, \quad (3.14)$$

что совпадает с формулой (3.3) и с формулой (3.8).

3.5. Невырожденная "формула с предсказанием"

Знаменатель в (3.13) может обращаться в нуль. Здесь предлагается формула, свободная от этого недостатка.

Преобразуем (3.13) с учетом равенства $hN = (b - a)$:

$$\tilde{S}(x, q) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{\frac{1}{b-a} \int_a^b |f'(t)| dt}{\frac{M}{N} \frac{1}{qh} \int_x^{x+qh} |f'(t)| dt} \right\rfloor. \quad (3.15)$$

Полагая $P \stackrel{\text{def}}{=} M/N$, получаем

$$\tilde{S}(x, q) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{\frac{1}{b-a} \int_a^b |f'(t)| dt}{P \frac{1}{qh} \int_x^{x+qh} |f'(t)| dt} \right\rfloor; \quad (3.16)$$

заметим, что P представляет собой относительное количество оставляемых узлов (желаемую "среднюю степень разряжения сетки").

Стремясь ограничить локальную "степень разряжения" сетки, введем выражение

$$S^*(f', x, P, q, h, g, C) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{C}{P \left(\frac{1}{qh} \int_x^{x+qh} |f'(t)| dt + \frac{C}{g} \right)} \right\rfloor, \quad (3.17)$$

где

x — рассматриваемая точка,

P — относительное количество сохраняемых узлов ($0 < P \leq 1$),

h — шаг исходной мелкой сетки, $h > 0$,

q — параметр усреднения ($q \geq 1$), определяющий длину промежутка усреднения (эта длина равна qh , $qh \geq 0$),

g — параметр (целое число, $g \geq 1$), характеризующий максимальное количество одновременно выбрасываемых узлов (это количество в дальнейшем полагается равным g),

$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b |f'(t)| dt$; эта константа решающего значения не имеет.

Из формулы (3.17) видно, что выражение S^* принимает максимальное значение при $f'(t) \equiv 0$:

$$\max S^* = \lfloor g/P \rfloor, \quad (3.18)$$

а минимальное значение получается при $x = a$, $qh = b - a$:

$$\min S^* = S^*(f', a, P, q, \frac{b-a}{q}, g, C) = \left\lfloor \frac{C}{P(C + \frac{C}{g})} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{P(1 + \frac{1}{g})} \right\rfloor, \quad (3.19)$$

откуда видно, что при $g \geq 1$ имеем

$$\left\lfloor \frac{1}{2P} \right\rfloor \leq \min S^* \leq \left\lfloor \frac{1}{P} \right\rfloor. \quad (3.20)$$

3.6. Численный метод реализации невырожденной "формулы с предсказанием"

Численный метод реализации формулы (3.17) при условии, что q — натуральное число, а $x = x_i$ получается заменой интеграла на соответствующую интегральную сумму:

$$\frac{1}{qh} \int_x^{x_i+qh} |f'(t)| dt \approx \frac{1}{qh} \sum_{i'=i}^{i+q-1} |f'(x_{i'})| h. \quad (3.21)$$

Итак, приближенное значение $\bar{S}^*(f', i, q, P, h, g, \bar{C})$ выражения $S^*(f', x_i, P, q, h, g, C)$ будем определять по формуле

$$\bar{S}^*(f', i, q, P, h, g, \bar{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{\bar{C}}{P \left(\frac{1}{q} \sum_{i'=i}^{i+q-1} |f'(i'h)| + \bar{C}/g \right)} \right\rfloor. \quad (3.22)$$

где

i — номер рассматриваемого узла x_i сетки $\{x_{i'}\}_{i=0,1,\dots,N}$ (очевидно, что $0 \leq i \leq N - 1$),

P — относительное количество сохраняемых узлов ($0 < P \leq 1$),

q — параметр усреднения (количество усредняемых значений $|f'(x_{i'})|$ в соседних узлах, $1 \leq q \leq N - i$),

g — параметр ($1 \leq g \leq N - 2$), характеризующий максимальное количество одновременно выбрасываемых узлов (это количество равно $\lfloor g/P \rfloor$),

$\bar{C} \approx \frac{1}{N} \sum_{i'=0}^{N-1} |f'(x_{i'})|$; эта константа может вычисляться приближенно, поскольку она решающего значения не имеет.

Из формулы (3.22) видно, что максимальное значение выражение \bar{S}^* принимает при $f'(t) \equiv 0$:

$$\max S^* = \lfloor g/P \rfloor, \quad (3.23)$$

а минимальное значение получается при $i = 0$, $q = N$:

$$\min \bar{S}^* = \bar{S}^*(f', 0, P, N, g, \bar{C}) = \left\lfloor \frac{\bar{C}}{P(\bar{C} + \frac{\bar{C}}{g})} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{P(1 + \frac{1}{g})} \right\rfloor, \quad (3.24)$$

откуда видно, что при $g \geq 1$ имеем

$$\left\lfloor \frac{1}{2P} \right\rfloor \leq \min \bar{S}^* \leq \left\lfloor \frac{1}{P} \right\rfloor. \quad (3.25)$$

Оценка (3.25) показывает, что при $\frac{1}{2} \leq P \leq 1$ нижняя граница $\min \bar{S}^*$ равна нулю. Поэтому число $S - 1$ выбрасываемых узлов определим с помощью равенства

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \max\{1, \bar{S}^*\}; \quad (3.26)$$

здесь \bar{S}^* задается формулой (3.22).

4. Описание численного эксперимента

Пусть имеется функция $u(t)$, $u \in C^1(\alpha, \beta)$. Входной поток образуем с помощью чисел c_j , $c_j \stackrel{\text{def}}{=} \langle g^{(j)}, u \rangle$. Функцию $u(t)$ назовем функцией, генерирующей числовой поток $\{c_j\}$ или просто – *генерирующей* функцией. Известно (см. [23 – 25]), что решение интерполяционной задачи

$$\langle g^{(j)}, \tilde{u} \rangle = c_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

в пространстве \mathbb{S}_1 единственно и дается формулой

$$\tilde{u} = \sum_j c_j \omega_j. \quad (4.2)$$

Если $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ и $u \in C^3[a, b]$, то справедлива оценка

$$|\tilde{u}(t) - u(t)| \leq Ch^3 \|u\|_{C^3[a, b]} \quad \forall t \in [a, b], \quad (4.3)$$

где $h \stackrel{\text{def}}{=} \sup |x_{j+1} - x_j|$, а константа $C > 0$ от h и от u не зависит.

Заметим, что если стремиться получить аппроксимацию лишь на отрезке $[a, b]$, то кроме узлов сетки, попадающих в этот отрезок, достаточно привлечь лишь три ближайших узла слева от точки a и три ближайших узла справа от точки b .

В данном численном эксперименте рассматривался отрезок $[0, \pi]$ (т.е. $a = 0$, $b = \pi$), исходная сетка $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}$, бралась равномерной, $x_j = jh$,

а сетка \tilde{X} – неравномерной. Сетки строились с тем расчетом, чтобы во внешности рассматриваемого отрезка $[a, b]$ имелось по крайней мере по три сеточных узла справа и слева от него.

Оценкой нормы разности двух аналитически заданных функций считался максимум значений абсолютной величины этой разности, вычисленной в узлах вспомогательной сетки, получаемой из рассматриваемой стократным измельчением каждого элементарного сеточного промежутка.

Рассмотрены два подхода к исследованию эффективности предложенного алгоритма. Первый подход состоит в том, что исходной является аналитически заданная или таблично заданная функция $u(t)$ (в последнем случае в тех или иных обстоятельствах таблица должна быть настолько плотной и точной, чтобы такое задание в пределах необходимой точности давало бы тот же результат, что и аналитическое; в частности, первые производные должны вычисляться по разностям с большой точностью). В этом случае первым шагом алгоритма является сжатие, состоящее в решении задачи (4.1) на исходной равномерной сетке и в оценке нормы уклонения сплайна (4.2) от функции $u(t)$. Второй шаг — укрупнение сетки, получение основного и вэйвлетного потоков по формулам декомпозиции. Третий шаг: построение сплайна по основному потоку, приближенное восстановление входного потока по построенному сплайну ("восстановление с потерей информации"), оценка уклонения этого потока от генерирующей функции $u(t)$. Четвертый шаг — восстановление входного потока по формулам реконструкции, оценка уклонения результата восстановления от входного потока.

При втором подходе предполагается, что после генерации входного потока генерирующая функция $u(t)$ становится недоступной. Последовательность действий в этом случае та же самая, но вместо оценки уклонения от генерирующей функции рассматривается оценка уклонения от сплайна, рассмотренного на первом шаге.

Таблица 1 иллюстрирует второй подход. В ней предусмотрены следующие столбцы:

- в первом столбце находится имя генерирующей функции $u(t)$,
- во втором столбце дается количество N узлов исходной сетки,
- третий столбец предназначен для числа i_0 узлов полученной крупной сетки,
- в четвертом столбце указан диапазон изменения количества выбро-

шенных узлов исходной сетки между двумя соседними узлами, сохраняемыми в полученной крупной сетке (d_1 – минимальное число подряд выбрасываемых узлов, а d_2 – максимальное число таких узлов),

– пятый столбец содержит оценку r_1 нормы разности (в упомянутом выше смысле) между сплайном, построенным по входному потоку и сплайном, построенным по "основному" потоку,

– в шестом столбце находится разность r между входным потоком и реконструированным (согласно теории реконструкция дает в точности исходный поток, так что здесь представлена ошибка округления): как видно из таблицы эта разность весьма мала – меньше, чем 10^{-8} ,

– в седьмом столбце содержится объем w входного потока (в байтах на диске),

– в восьмом столбце содержится объем v основного выходного потока (в байтах на диске),

– наконец, в девятом столбце дан коэффициент Q сжатия входного потока (отношение двух упомянутых выше величин: $Q = \frac{v}{w}$). только что упомянутых величин

Таблица 1.

$u(t)$	N	i_0	d_1, d_2	r_1	r	w	v	$Q = \frac{v}{w}$
t	1189	121	2, 10	$3 \cdot 10^{-10}$	$< 10^{-8}$	11940	1358	$\frac{1358}{11940} \approx 0.1137$
t^2	1189	138	5, 10	$12 \cdot 10^{-10}$	$< 10^{-8}$	11940	1562	$\frac{1562}{11940} \approx 0.1308$
t^3	1189	147	3, 10	$72 \cdot 10^{-7}$	$< 10^{-8}$	11940	1770	$\frac{1770}{11940} \approx 0.1482$
$\frac{1}{1+t^2}$	1189	143	2, 10	$32 \cdot 10^{-7}$	$< 10^{-8}$	11940	1712	$\frac{1712}{11940} \approx 0.1434$
$\sin(t)$	27	5	2, 10	$39 \cdot 10^{-3}$	$< 10^{-8}$	320	66	$\frac{66}{320} \approx 0.2063$
$\sin(t)$	1189	136	6, 9	$72 \cdot 10^{-8}$	$< 10^{-8}$	11940	1638	$\frac{1638}{11940} \approx 0.1371$
$\sin(10t)$	1189	135	4, 10	$70 \cdot 10^{-5}$	$< 10^{-8}$	11940	1626	$\frac{1626}{11940} \approx 0.1361$

5. О программе сжатия-восстановления числовых потоков

Программа содержит ряд процедур, которые описаны ниже.

1. FUN(t :extended):
extended; — аппроксимируемая функция
 t — аргумент (extended);
2. DifFUN(t :extended):
extended; — производная аппроксимируемой
функции;
3. APPR_B_spl
(var cm2, cm1, c0,
 t , xm1, x0, x1, x2:
 t , xm1, x0, x1, x2:
extended): extended; — линейная комбинация
трех B -сплайнов ω_{-2} , ω_{-1} , ω_0 ,
 $\tilde{u}(t) = c_{-2}\omega_{-2}(t) + c_{-1}\omega_{-1}(t) +$
 $+ c_0\omega_0(t)$ при $t \in (x_0, x_1)$;
здесь участвуют узлы
 x_{-1}, x_0, x_1, x_2 . Вычисления
проводятся по формуле
$$\text{APPR_B_spl} = c_{-2} \frac{(t-x_1)^2}{(x_1-x_0)(x_1-x_{-1})} + c_{-1} \left((x_{-1} - x_1 - x_2 + x_0)t^2 - \right.$$

$$\left. - 2(x_0x_{-1} - x_1x_2)t + x_{-1}x_0x_2 - \right.$$

$$\left. - x_{-1}x_1x_2 + x_{-1}x_0x_1 - x_0x_1x_2 \right) \times ((x_1 - x_{-1})(x_1 - x_0)(x_2 - x_0))^{-1}$$

$$+ c_0 \frac{(t-x_0)^2}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)};$$
4. fg(var x1, x2:extended):
extended — вычисление функционала:
 $\langle g, u \rangle = u(x_1) +$
 $+(x_2 - x_1)u'(x_1)/2;$
5. pr_DECOMP_partly(var
xm1, x0, x1, x2, x3,
cm2, cm1, c0, c1, am1, b0
: extended) — процедура отыскания a_{-1} и b_0 :
 $a_{-1} = -c_{-2} \frac{x_2-x_1}{x_1-x_{-1}} + c_{-1} \frac{x_2-x_{-1}}{x_1-x_{-1}};$
 $b_0 = (c_{-2} (x_3 - x_1)(x_2 - x_1) -$
 $- c_{-1}(x_2 - x_{-1})) + (x_1 - x_{-1}) \times$
 $\times (c_0(x_3 - x_0) - c_1(x_1 - x_0)) \times$
 $\times ((x_3 - x_0)(x_1 - x_{-1}))^{-1};$
6. PR_cm1c0(var
xm1, x0, x1, x2, x3, — процедура отыскания c_{-1} и c_0 :
 $c_{-1} = (a_{-2} (x_2 - x_1) +$

- $am2, am1, a0, b0, cm1, c0$
 $:extended)$
- $$+a_{-1} (x_1 - x_{-1})/(x_2 - x_{-1});$$
- $$c_0 = (a_{-1} (x_3 - x_1) +$$
- $$+a_0 (x_1 - x_0))/(x_3 - x_0) + b_0;$$
7. PR_C:extended — вычисление "интегральной"
 константы:
 $PR_C = \sum_{i=0}^{N-1} |DifFUN(x_i)|;$
8. PR_s(var
 $i, q, g: integer;$
 $P, h, C: extended):$
 $integer;$
- процедура определения,
 числа выбрасываемых узлов:
 i — номер рассматриваемого
 узла,
 P — относительное число
 сохраняемых узлов,
 q — число усредняемых
 узлов,
 g — максимальное число
 одновременно выбрасываемых
 узлов,
 C — "интегральная" константа;
 вычисления происходят
 по алгоритму: $j :=$
 $\lfloor C / (\sum_{r=i}^{\min\{i+q-1, N\}} |DifFUN(x_r)| / q +$
 $+ C/g) / P \rfloor$; if $j < 1$ then PR_s:=1
 else if $j > g$ then PR_s:=g
 else PR_s:=j;
9. MIN(q:integer):integer; — максимум из чисел q и N ;
10. Title; — ЗАГОЛОВОК .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.-И. 2004. 464 с.
- [2] Skopina M. Multiresolution analysis of periodic functions// East Journal on Approximations. 1997. Vol.3, №2. P.614-627.
- [3] Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков// Успехи математич. наук. 1998. Т.53, № 6. С.53-128.
- [4] Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб., 1999. 132 с.
- [5] Чуи К. Введение в вэйвлеты. М. 2001. 412 с.
- [6] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М. 2005. 671 с.
- [7] Daubechies I., Guskov I., Schröder P., Sweldens W. Wavelets on Irregular Point Sets//Phil.Trans.: Math., Physical,Engng.Sci., 357(1999). P. 2397-2413.
- [8] Daubechies I., Guskov I., Sweldens W. Commutation for Irregular Subdivision//Const. Approx., 17(4),(2001). P.479-514.
- [9] Aldroubi A., Sun Q., Tang W.-S., Non-uniform average sampling and reconstruction in multiply generated shift-invariant spaces// Constr. Approx., 20(2004). P. 173–189.
- [10] Aldroubi A., Cabrelli C., Molter U. Wavelets on irregular grids with arbitrary dilation matrices, and frame atoms for $L^2(\mathbb{R}^d)$. Preprint. Date: March 30, 2004. <http://atlas.math.vanderbilt.edu/~aldroubi/IW.ps>
- [11] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976. 248 с.
- [12] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М., 1980. 352 с.
- [13] Schumaker L.L. Spline Functions. Basic Theory. Waley Interscience. New York. 1981. 548 p.
- [14] Малоземов В.Н., Певный А.Б. Полиномиальные сплайны. Л.,1986. 120 с.
- [15] Buchwald B., Mühlbach G. Construction of B-splines for generalized spline spaces from local ECT-systems// Journal of Computational and Applied Mathematics 159 (2003). P. 249-267.
- [16] Mühlbach G. ECT-B-splines defined by generalized divided differences// Journal of Computational and Applied Mathematics 187 (2006). P. 96-122.

- [17] Goel J.J. Construction of basis functions for numerical utilization of Ritz's method// Numer. Math. 1968. Vol. 12. P.435-447.
- [18] Strang G., Fix G. Fourier analysis of the finite element method in Ritz-Galerkin theory// Stud. Appl. Math. 1969. Vol.48, №3. P. 265-273.
- [19] Михлин С.Г. Вариационно-сеточная аппроксимация// Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1974. Т.48. С. 32-188.
- [20] Демьянович Ю.К., Михлин С.Г. О сеточной аппроксимации функций соболевских пространств// Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1973. Т.35. С. 6-11.
- [21] Демьянович Ю.К. Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб., 1994. 356 с.
- [22] Бурова И.Г., Демьянович Ю.К. Теория минимальных сплайнов. СПб., 2000. 316 с.
- [23] Демьянович Ю.К. Всплески & минимальные сплайны. СПб., 2003. 200 с.
- [24] Демьянович Ю.К. О вложенности пространств минимальных сплайнов// Ж. выч. мат. и мат. физ. 2000. Т.40. № 7. С. 1012-1029.
- [25] Демьянович Ю.К. Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения// Доклады РАН. 2005. Т.401, № 4. С. 1-4.
- [26] Демьянович Ю.К., Иванцова О.Н. Гладкость пространств сплайнов третьего порядка. Сб. Математические модели. Теория и приложения. Вып.7. СПб.: ВВМ, 2006. С. 58-64.