УДК 517.5-514.17

Линейные методы восстановления функций двух переменных, основанные на бинарном расслоении (Метод subdivision двух переменных).

А.А.Лигун, А.А.Шумейко

Введение.

Восстановление функции по ее значениям в узлах регулярной решетки является классической задачей теории аппроксимации. В последнее время, наряду с классическими методами восстановления основанными на использовании алгебраических и тригонометрических полиномов и сплайнов, широко используются методы основанные на использовании всплесков (см. [1]) или методы, основанные на пополнении данных (см. [2]). Восстановление функций по средним значениям является менее исследованным разделом теории приближений.

В данной работе изучается линейный метод восстановления поверхности по ее средним значениям в элементах правильной квадратной решетки, основанный на расслоении двумерных данных. Доказывается, что построенный оператор восстановления является линейным оператором сумматорного типа с базисной функцией имеющей малый носитель. Установлено, что базисные функции представимы в виде конечной линейной комбинации сжатых в два раза и сдвинутых тех же базисных функций, что позволяет использовать их в качестве масштабирующих функций в кратномасштабном анализе (см., [1] глава 5, [3]).

1 Определения и постановка задачи.

Через ℓ^2_∞ обозначим линейное пространство всех ограниченных двумерных последовательностей

$$\tilde{F} = \{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} = \{\tilde{f}_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$$

с нормой

$$\|\tilde{F}\|_{\ell^2_\infty} = \sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} |\tilde{f}_{i,j}|.$$

Введем некоторые обозначения необходимые нам в дальнейшем. Пусть $\mathbb{E}$измеримое множество из $\mathbb{R}^2$, через $L_\infty(\mathbb{E})$ обозначим линейное пространство всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{E}$ функций $f(x,y)$ с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{E})} = \mathrm{vraisup}_{(x,y)\in\mathbb{E}} |f(x,y)|, \tag{1}$$

$L_p(\mathbb{E})$ $(p\in[1,\infty))$ – пространство всех измеримых суммируемых на $\mathbb{E}$ в p-й степени функций с нормой

$$\|f\|_{p(\mathbb{E})} = \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} \tag{2}$$

и $C(\mathbb{E})$ обозначим линейное пространство всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{E}$ функций $f(x,y)$ с нормой

$$\|f\|_{C(\mathbb{E})} = \max_{(x,y)\in\mathbb{E}} |f(x,y)|.$$

Пусть Δ^0 есть разбиение плоскости на квадраты $\Delta^0_{i,j}$ $(i,j\in\mathbb{Z})$ с шагом h и вершинами в точках $\{M_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}} = \{(x_{i,0},y_{j,0})\}_{i,j\in\mathbb{Z}} = \{(ih,jh)\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$. Каждому значению двумерного массива $\tilde{F}^0 = \{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ поставим в соответствие элемент разбиения Δ^0.

Зададим на множестве ограниченных массивов $\tilde{F}^0$ линейный функционал $B(\tilde{F}^0) = \sum a_{i,j}\tilde{f}_{i,j,0}$ и положим

$$\begin{aligned}
B^{++}(\tilde{F}^0) = &\quad B(\{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}),\\
B^{--}(\tilde{F}^0) = &\quad B(\{\tilde{f}_{i-1,j-1,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}),\\
B^{-+}(\tilde{F}^0) = &\quad B(\{\tilde{f}_{i-1,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}),\\
B^{+-}(\tilde{F}^0) = &\quad B(\{\tilde{f}_{i,j-1,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}).
\end{aligned}$$

Определим точки $M_{i-1/2,j,0}, M_{i,j-1/2,0}, M_{i-1/2,j-1/2,0}$ равенствами

$$M_{i-1/2,j,0} = \frac{1}{2}(M_{i,j} + M_{i-1,j}), \tag{3}$$

$$M_{i,j-1/2,0} = \frac{1}{2}(M_{i,j} + M_{i,j-1}), \tag{4}$$

$$M_{i-1/2,j-1/2,0} = \frac{1}{4}(M_{i,j-1} + M_{i-1,j} + M_{i,j} + M_{i-1,j-1}). \tag{5}$$

Через $\tilde{F}^0_{\nu,\mu} = \{\tilde{f}_{i+\nu,j+\mu,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ обозначим сдвиг массива $\tilde{F}^0$. Определим новую решетку Δ^{k+1} и новый массив $\tilde{F}^{k+1} = \{\tilde{f}_{i,j,k+1}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ равенствами

$$\begin{array}{llll}
M_{2i,2j,k} & = M_{i,j,k-1}, & \tilde{f}_{2i,2j,k} & = B^{++}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),\\
M_{2i-1,2j,k} & = M_{i-1/2,j,k-1}, & \tilde{f}_{2i-1,2j,k} & = B^{-+}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),\\
M_{2i,2j-1,k} & = M_{i,j-1/2,k-1}, & \tilde{f}_{2i,2j-1,k} & = B^{+-}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),\\
M_{2i-1,2j-1,k} & = M_{i-1/2,j-1/2,k-1}, & \tilde{f}_{2i-1,2j-1,k} & = B^{--}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}).
\end{array} \tag{6}$$

Для фиксированных $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$ соединим точки $M_{i-1,j,k}$, $M_{i,j,k}$, $M_{i,j-1,k}$, $M_{i-1,j-1,k}$ с центром $M_{i-1/2,j-1/2,k}$ соответствующего квадрата. Таким образом получим триангуляцию плоскости на равнобедренные прямоугольные треугольники. Непрерывную на всей плоскости функцию двух переменных назовем k-полигоном, если она на каждом из этих треугольников совпадает с некоторой плоскостью.

Через $\psi_{k,h}(B,\tilde{F},x,y)$ обозначим k-полигон интерполирующий в узлах $M_{i,j,k}, i,j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$ значения $\frac{1}{4}(\tilde{f}_{i,j,k}+\tilde{f}_{i-1,j,k}+\tilde{f}_{i,j-1,k}+\tilde{f}_{i-1,j-1,k})$, а в точках $M_{i-1/2,j-1/2,k}$ принимающий значения $\tilde{f}_{i,j,k}$.

Если поточечный предел последовательности $\psi_{k,h}(B,\tilde{F},x,y)$ при $k\to\infty$ существует, то будем обозначать его через $\psi_h(B,\tilde{F},x,y)$.

В случае, когда задана функция $f\in C(\mathbb{R}^2)$ и значения $\tilde{f}_{i,j,0}$ определены равенствами

$$\tilde{f}_{i,j,0} = \frac{1}{h^2}\int_{(i-1)h}^{ih}\int_{(j-1)h}^{jh} f(x,y)\,dx\,dy,$$

вместо $\psi_{k,h}(B,\tilde{F},x,y)$ будем писать $\psi_{k,h}(B,f,x,y)$.

Из построения оператора $\psi_{k,h}(B,\tilde F)$ следует, что для любых $k,\nu = 0,1,2,\dots$ имеют место равенства

$$\psi_{k,h2^{-\nu}}(B,\tilde F^{\nu},x,y) = \psi_{k,h2^{-\nu}}(B,\psi_{\nu,h}(\tilde F),x,y) = \psi_{k+\nu,h}(B,\tilde F,x,y). \tag{7}$$

Переходя в (7) к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$\psi_{h2^{-\nu}}(B,\tilde F^{\nu},x,y) = \psi_h(B,\tilde F,x,y). \tag{8}$$

Из построения функции $\psi_h(B,\tilde F,x,y)$ ясно, что

$$\psi_h(B,\tilde F,x,y) = \psi_{h/2^k}(\psi_h(B,\tilde F),x,y). \tag{9}$$

Кроме того

$$\psi_h(B,\tilde F_{\nu,\mu},x,y) = \psi_h(B,\tilde F,x-\nu h,y-\mu h) \tag{10}$$

и

$$\psi_h\left(B,\tilde F,x,y\right) = \psi_H\left(B,\tilde F,\frac{H}{h}x,\frac{H}{h}y\right). \tag{11}$$

Целью работы является методика выбора функционала B и изучение свойств метода восстановления $\psi_h\left(B,\tilde F,x,y\right)$.

Приведем несколько подходов к построению функционала B.

Набор n пар индексов $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$, содержащих $(0,0)$ назовем апертурой A^n порядка n. Множество единичных квадратов с левым нижним углом (i,j) ($(i,j)\in A^n$) назовем геометрической апертурой $\mathcal{A}^n$.

По апертуре A^n определим функционал $B(A^n)$, поставив каждой клетке $\Delta^0_{i,j}$ $(i,j\in A^n)$ число $a_{i,j}$ множества $\mathcal{B}$, то есть

$$B(A^n,\mathcal{B},\tilde F^0) = \sum_{(i,j)\in A^n} a_{i,j}\tilde f_{i,j,0}.$$

Объединение всех сдвигов вдоль координатных осей на целые числа апертуры $\mathcal{A}^n$ и ее отображений относительно координатных осей и точки $(0,0)$ таких, что все они содержат элемент с левым нижним углом $(0,0)$ обозначим $\mathcal{G}^n$. Радиус множества $\mathcal{G}^n$ обозначим $R(\mathcal{A}^n)$.

2 Базисная функция

Пусть $h=1$ и $\tilde F^* = \{\tilde f^*_{0,i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$, где

$$\tilde f^*_{0,i,j} = \begin{cases} 1, & \nu{=}\mu{=}0;\\ 0, & \nu,\mu\neq 0.\end{cases}$$

Положим

$$\Psi_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y) = \psi_{k,1}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde F^*,x,y)$$

и

$$\Psi(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y) = \psi_1(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde F^*,x,y).$$

Ясно, то

$$\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde F^*,x,y) = \Psi_k\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h},\frac{y}{h}\right)$$

и если $\tilde{F}^*_{i,j}$ сдвиг последовательности $\tilde{F}^*$, то

$$\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}^*_{i,j}, x, y) = \Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right).$$

Отсюда и из линейности оператора $\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})$ следует

$$\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}, x, y) = \psi_{k,h}\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{f}_{i,j,0}\tilde{F}^*_{i,j}, x, y\right) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{f}_{i,j,0}\psi_{k,h}\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}^*_{i,j}, x, y\right) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{f}_{i,j,0}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right). \tag{12}$$

Таким образом, если существует $\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}, x, y)$, то для любой последовательности $\tilde{F} \in \ell^2_\infty$ и любого $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $h > 0$ имеет место соотношение

$$\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}, x, y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{f}_{i,j,0}\Psi\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right). \tag{13}$$

Носитель функции $\Psi(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})$ есть $\mathcal{G}$. Таким образом для $(x, y) \in (x_{i-1,k}, x_{i,k}) \times (y_{j-1,k}, y_{j,k})$ имеют место соотношения

$$\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}, x, y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{G}} \tilde{f}_{i,j,0}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right), \tag{14}$$

и

$$\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}, x, y) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{G}} \tilde{f}_{i,j,0}\Psi\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right). \tag{15}$$

Многие свойства оператора $\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F})$ (или $\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F})$) следуют из свойств базисных функций $\Psi(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, x, y)$ (или $\Psi_k(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, x, y)$).

Из (8) имеем равенство

$$\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}^0, x, y) = \psi_{h/2}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}^1, x, y),$$

в частности,

$$\psi_1(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}^{*,0}, x, y) = \psi_{1/2}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \tilde{F}^{*,1}, x, y)$$

или, что то же (свойство маштабируемости)

$$\Psi(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, x, y) = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{f}^{*,1}_{\nu,\mu}\Psi\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, 2x - \nu, 2y - \mu\right) = \tag{16}$$

$$= \sum_{\mu,\nu=-4}^{3} \alpha_{\nu,\mu}\Psi\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, 2x - \nu, 2y - \mu\right),$$

где

$$(\alpha_{i,j})^3_{i,j=-4} = \begin{pmatrix}
\alpha_{2,2} & \alpha_{-1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{0,2} & \alpha_{0,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{-1,2} & \alpha_{2,2} \\
\alpha_{2,-1} & \alpha_{-1,-1} & \alpha_{1,-1} & \alpha_{0,-1} & \alpha_{0,-1} & \alpha_{1,-1} & \alpha_{-1,-1} & \alpha_{2,-1} \\
\alpha_{2,1} & \alpha_{-1,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{-1,1} & \alpha_{2,1} \\
\alpha_{2,0} & \alpha_{-1,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{0,0} & \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{-1,0} & \alpha_{2,0} \\
\alpha_{2,0} & \alpha_{-1,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{0,0} & \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{-1,0} & \alpha_{2,0} \\
\alpha_{2,1} & \alpha_{-1,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \alpha_{-1,1} & \alpha_{2,1} \\
\alpha_{2,-1} & \alpha_{-1,-1} & \alpha_{1,-1} & \alpha_{0,-1} & \alpha_{0,-1} & \alpha_{1,-1} & \alpha_{-1,-1} & \alpha_{2,-1} \\
\alpha_{2,2} & \alpha_{-1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{0,2} & \alpha_{0,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{-1,2} & \alpha_{2,2}
\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Приведем одну конструкцию построения $\mathcal{B}$ по апертуре A^n. При фиксированном множестве функций $L^m = \{\ell^0, \dots, \ell^m\}$ для функционала

$$B(A^n, \tilde{F}^0) = \sum_{(i,j)\in A^n} a_{i,j}\tilde{f}_{i,j,0}$$

выберем коэффициенты $a_{i,j}$ из условия

$$B(A^n, \tilde{F}^0) = \frac{4}{h^2}\int_{h/2}^{h}\int_{h/2}^{h} \ell^k(x,y)\,dx\,dy \quad (k = 0, \dots, m).$$

В этом случае получаем систему из m линейных уравнений с n неизвестными. Если система совместна, то решая ее, получаем конкретный метод восстановления, порожденный функционалом $B(A^n(L^m), \tilde{F}^0)$. Апертуру $A^n(L^m)$ в этом случае будем называть апертурой точной на множестве $L^m = \{\ell^0, \dots, \ell^m\}$.

В дальнейшем будем рассматривать методы $\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})$ точные на полиномах порядка m и на некоторых маномах порядка m и не являющихся точными на некоторых маномах $x^\nu y^\mu$ $(\nu + \mu = m+1)$. Множество индексов (ν, μ) для которых метод не является точным на маномах $x^\nu y^\mu$ $(\nu + \mu = m+1)$ обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})$ и

$$\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}) = \{(1, \dots, m+1, 1, \dots, m+1)\} \setminus \mathcal{P}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}).$$

В дальнейшем будем считать (кроме отдельно оговоренных случаев), что функция $\Psi(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, x, y)$ существует и непрерывна.

3 О норме оператора $\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f)$.

Пусть $\mathcal{L}$ есть линейный оператор отображающий пространство X в пространство Y. Как обычно, нормой оператора $\mathcal{L}$ будем называть величину

$$\|\mathcal{L}\|_{X\to Y} = \sup_{\|F\|_X \le 1} \|\mathcal{L}(F)\|_Y. \tag{18}$$

Положим для $k \in \mathbb{N}$

$$N_k(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, x, y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \left|\Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, x-i, y-j\right)\right|.$$

Теорема 1 *Справедливо равенство*

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{\ell^2_\infty \to C(\mathbb{R}^2)} = \|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} = \tag{19}$$
$$= \|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} = \|N_k(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1])}.$$

Доказательство. Из (12) и (18) вытекает, что

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{\ell^2_\infty \to C(\mathbb{R}^2)} = \sup_{\|F\|_{\ell^2_\infty}\le 1} \left\| \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{f}_{\nu,\mu}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \frac{x}{h}-\nu, \frac{y}{h}-\mu\right)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le$$

$$\le \sup_{\|F\|_{\ell^2_\infty}\le 1} \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} \left\|\tilde{f}_{\nu,\mu}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \frac{x}{h}-\nu, \frac{y}{h}-\mu\right)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le$$

$$= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} \left|\Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \frac{x}{h}-\nu, \frac{y}{h}-\mu\right)\right| = \|N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1))}.$$

Функция $N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y)$ есть 1-периодическая непрерывная функция по каждой переменной, поэтому существует точка $(\hat{x},\hat{y})\in[0,1]\times[0,1]$ такая, что

$$N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\hat{x},\hat{y}) = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y).$$

Через F_0 обозначим двумерный массив с значениями

$$\mathrm{sign}\Psi_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\hat{x}-i,\hat{y}-j)$$

на квадратах $(ih,(i+1)h)\times(jh,(j+1)h)$. Тогда

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{\ell^2_\infty\to C(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},F_0)\|_{C(\mathbb{R}^2)}}{\|F_0\|_{\ell^2(\infty)}} = \|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},F_0)\|_{C(\mathbb{R}^2)} \geq$$

$$\geq |\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},F_0,\hat{x}h,\hat{y}h)| \geq \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{sign}\Psi_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\hat{x}-\nu,\hat{y}-\mu)\Psi_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\hat{x}-\nu,\hat{y}-\mu) =$$

$$= \|N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1))}.$$

Первое утверждение теоремы доказано, теперь докажем второе утверждение.

Пусть $f\in L_\infty(\mathbb{R}^2)$ и

$$\tilde{f}_{\nu,\mu} = \frac{1}{h^2}\int_{\mu h}^{(\mu+1)h}\int_{\nu h}^{(\nu+1)h} f(t,\tau)\,dt\,d\tau \quad (\nu,\mu\in\mathbb{Z}).$$

Аналогично предыдущему получаем

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} = \sup_{\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\leq 1} \left\|\sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{f}_{\nu,\mu}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h}-\nu,\frac{y}{h}-\mu\right)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \leq$$

$$\leq \sup_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2}|\tilde{f}_{\nu,\mu}| \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2}\left|\Psi_k\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h}-\nu,\frac{y}{h}-\mu\right)\right| =$$

$$= \sup_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2}|\tilde{f}_{\nu,\mu}|\|N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1))}.$$

Отсюда и из

$$\sup_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2}|\tilde{f}_{\nu,\mu}| \leq \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}$$

сразу получаем

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},f)\|_{C(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\|N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1])} \tag{20}$$

и

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} \leq \|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} \leq \|N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1))}. \tag{21}$$

Функция $N_k(x,y)$ есть 1-периодическая непрерывная функция по каждой переменной, поэтому существует точка $(\hat{x},\hat{y})$ такая, что

$$N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\hat{x},\hat{y}) = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} N_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y).$$

Через $f^*(x,y)$ функцию из $L_\infty(\mathbb{R}^2)$, принимающую значения

$$\operatorname{sign}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \hat{x}-i, \hat{y}-j\right)$$

на квадратах $((ih,(i+1)h)) \times ((jh,(j+1)h))$ и

$$f^*(x,y) = \frac{1}{4}(f^*(x+0,y) + f^*(x-0,y) + f^*(x,y-0) + f^*(x,y+0)) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Тогда

$$\tilde{f}^*_{\nu,\mu} = \operatorname{sign}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \hat{x}-i, \hat{y}-j\right)$$

и аналогично предыдущему получаем

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f^*)\|_{C(\mathbb{R}^2)} \geq \|N_k(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1])}. \tag{22}$$

Положим

$$f_\delta(x,y) = \frac{1}{4\delta^2}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\int_{y-\delta}^{y+\delta} f(u,v)du\,dv.$$

Ясно, что для любой функции $f \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$ получаем $f_\delta \in C(\mathbb{R}^2)$ для произвольного $0 < \delta < h/2$ и

$$\|f_\delta\|_{C(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f^*_\delta)\|_{C(\mathbb{R}^2)} \leq \|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f^*)\|_{C(\mathbb{R}^2)} - \varepsilon.$$

Отсюда и из (22) получаем

$$\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{\|\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f^*_\delta)\|_{C(\mathbb{R}^2)}}{\|f^*_\delta\|_{C(\mathbb{R}^2)}} \geq \|N_k(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1])} - \varepsilon.$$

Учитывая произвольность ε, из полученного неравенства и из (21) сразу получаем доказательство теоремы.

Следствие 1

$$\|\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{\ell^2_\infty\to C(\mathbb{R}^2)} = \|\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} =$$
$$= \|\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} = \|N(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1])}.$$

4 О погрешности приближения.

Для $(x,y) \in (0,1)\times(0,1)$ положим

$$K_{\nu,\mu}(\mathcal{A}^n_m, \mathcal{B}, x, y) = x^\nu y^\mu - \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}\left(\int_i^{(i+1)}\int_j^{(j+1)} t^\nu p^\mu\,dt\,dp\right)\Psi(\mathcal{A}^n_m, \mathcal{B}, x-i, y-j). \tag{23}$$

Теорема 2 *Пусть функция f такова, что*

$$\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \in C(\mathbb{R}^2) \quad \nu,\mu = 0,1,\ldots,m+1, \quad \nu+\mu \leq m+1,$$

и величина $\|\psi_h(\mathcal{A}_m^n)\|$ *конечна, тогда для* $(x,y)\in(ih,(i+1)h)\times(jh,(j+1)h)$

$$|f(x,y)-\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},f,x,y)|= \tag{24}$$

$$=\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\left|\sum_{(\nu,\mu)\in\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})} C_{m+1}^{\nu}\frac{\partial f^{m+1}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\right|_{(ih,jh)} K_{\nu,\mu}\left(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},\frac{x}{h},\frac{y}{h}\right)\Bigg|+$$

$$+(\alpha(x,y)+\beta(x,y)\|N(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B})\|_{C([0,1]\times[0,1])})\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\omega(f^{(m+1)},h(R(\mathcal{A}^n)+1)),$$

где $|\alpha(x,y)|<1$, $|\beta(x,y)|<1$ *и*

$$\omega(f^{(m+1)},\delta)=\max_{\nu+\mu=m+1}\sup_{|M'-M''|<\delta}\left|f_{x^\nu y^\mu}^{\nu+\mu}(M')-f_{x^\nu y^\mu}^{\nu+\mu}(M'')\right|.$$

Доказательство. Без потери общности можно считать $i=j=0$.

Из условий наложенных на функцию f следует, что используя формулу Тейлора, для $(x,y)\in\mathcal{G}$ можно записать

$$f(x,y)=\sum_{r=0}^{m+1}\frac{1}{r!}\sum_{\substack{\nu+\mu=r\\ \nu,\mu\geq 0}} C_r^{\nu}\frac{\partial f^{r}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Bigg|_{(0,0)} x^{\nu}y^{\mu}+\alpha(x,y)\varepsilon_h(f),$$

где $\varepsilon_h(f)=\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\omega(f^{(m+1)},h(R(\mathcal{A}^n)+1))$.

Тогда в силу линейности оператора $\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},f)$ имеем

$$\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},f,x,y)=$$

$$=\psi_h\left(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},\sum_{r=0}^{m+1}\frac{1}{r!}\sum_{\substack{\nu+\mu=r\\ \nu,\mu\geq 0}} C_r^{\nu}\frac{\partial f^{r}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Bigg|_{(0,0)}(\cdot)^{\nu}(\cdot\cdot)^{\mu}+\alpha\varepsilon_h(f),x,y\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{m+1}\frac{1}{r!}\sum_{\substack{\nu+\mu=r\\ \nu,\mu\geq 0}} C_r^{\nu}\frac{\partial f^{r}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Bigg|_{(0,0)}\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},(\cdot)^{\nu}(\cdot\cdot)^{\mu},x,y)+$$

$$+\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},\alpha\varepsilon_h(f),x,y)=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}\frac{1}{(\nu+\mu)!}C_{\nu+\mu}^{\nu}\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Bigg|_{(0,0)}\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},(\cdot)^{\nu}(\cdot\cdot)^{\mu},x,y)+$$

$$+\sum_{(\nu,\mu)\in\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}\frac{1}{(\nu+\mu)!}C_{\nu+\mu}^{\nu}\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Bigg|_{(0,0)}\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},(\cdot)^{\nu}(\cdot\cdot)^{\mu},x,y)+$$

$$+\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},\alpha\varepsilon_h(f),x,y).$$

Отсюда, в силу точности $\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B})$ на маномах $x^{\nu}y^{\mu}$, $(\nu,\mu)\in\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})$ получаем

$$\psi_h(\mathcal{A}_m^n,\mathcal{B},f,x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}\frac{1}{(\nu+\mu)!}C_{\nu+\mu}^{\nu}\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Bigg|_{(0,0)}x^{\nu}y^{\mu}+$$

$$+\sum_{(\nu,\mu)\in\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}\frac{1}{(\nu+\mu)!}C^{\nu}_{\nu+\mu}\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Big|_{(0,0)}\psi_h(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},(\cdot)^{\nu}(\cdot\cdot)^{\mu},x,y)+$$

$$+\psi_h(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},\alpha\varepsilon_h(f),x,y).$$

Таким образом получаем

$$f(x,y)-\psi_h(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},f,x,y)=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}\frac{1}{(\nu+\mu)!}C^{\nu}_{\nu+\mu}\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Big|_{(0,0)}(x^{\nu}y^{\mu}-$$

$$-\psi_h(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},(\cdot)^{\nu}(\cdot\cdot)^{\mu},x,y))+\alpha(x,y)\varepsilon_h(f)-\psi_h(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},\alpha\varepsilon_h(f),x,y)=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}\frac{1}{(\nu+\mu)!}C^{\nu}_{\nu+\mu}\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Big|_{(0,0)}(x^{\nu}y^{\mu}-$$

$$-\frac{1}{h^2}\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}\left(\int_{ih}^{(i+1)h}\int_{jh}^{(j+1)h}t^{\nu}\tau^{\mu}\,dt\,d\tau\right)\Psi\left(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right)\right)+$$

$$+\alpha(x,y)\varepsilon_h(f)+\beta(x,y)\varepsilon_h(f)\|\psi_h\left(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B}\right)\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)}.$$

Из (23) и последнего соотношения имеем

$$|f(x,y)-\psi_h(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},f,x,y)|=$$

$$=\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\Bigg|\sum_{(\nu,\mu)\in\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}C^{\nu}_{m+1}\frac{\partial f^{m+1}}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\Big|_{(ih,jh)}K_{\nu,\mu}\left(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},\frac{x}{h},\frac{y}{h}\right)\Bigg|+$$

$$+\alpha(x,y)\varepsilon_h(f)+\beta(x,y)\varepsilon_h(f)\|\psi_h(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B})\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда и из следствия 1 сразу получаем утверждение теоремы.

Положим

$$|||f^{(m)}|||=\max_{(\nu,\mu)\in\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}\left\{\left\|\frac{\partial^m f}{\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}}\right\|_{C(\mathbb{R}^2)}\right\}$$

и

$$\mathbb{K}(\mathcal{A}^n_m)=\max_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]}\left\{\sum_{(\nu,\mu)\in\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})}C^{\nu}_{m+1}\left|K_{\nu,\mu}(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},x,y)\right|.\right\}$$

Тогда

$$\|f(x,y)-\psi_h(\mathcal{A}^n_m,\mathcal{B},f,x,y)\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le$$

$$\le\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}\mathbb{K}(\mathcal{A}^n_m)|||f^{(m+1)}|||+O(h^{m+1}\omega(f^{(m+1)},h(R(\mathcal{A}^n)+1))).$$

5 Алгоритм послойного кодирования и передачи информации.

Тот факт, что оператор восстановления $\psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y)$ можно записать в виде (13) (вместе со свойствами функции $\Psi(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, x, y)$) позволяет построить метод послойного кодирования и передачи информации.

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ положим

$$z_\varepsilon^+ = \begin{cases} z, & |z| \geq \varepsilon, \\ 0, & |z| < \varepsilon \end{cases}$$

и

$$z_\varepsilon^- = z - z_\varepsilon^+. \tag{25}$$

Назовем $\mathfrak{G}_{1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y) = \psi_h(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y)$ восстановлением функции $f(x, y)$ по первому слою информации. Пусть $f(x, y) - \mathfrak{G}_{1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y)$ погрешность восстановления по первому слою.

Для $k > 1$ восстановление на $k-$м слое информации определим рекуррентными соотношениями

$$\begin{gathered} \mathfrak{G}_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y) = \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y)+ \\ +g_{h/2^{k-1}}\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, (f - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f))_\varepsilon^+, x, y\right). \end{gathered} \tag{26}$$

Ясно, что

$$f(x, y) - \mathfrak{G}_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y) = f(x, y) - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y)+$$

$$+\psi_{h/2^{k-1}}\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, (f - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f)) - (f - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f))_\varepsilon^-, x, y\right).$$

Из линейности метода $\psi_{h/2^m}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})$ следует, что

$$f(x, y) - \mathfrak{G}_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y) = f(x, y) - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y)+$$

$$+\psi_{h/2^{k-1}}\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, (f - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f)), x, y\right) -$$

$$-\psi_{h/2^{k-1}}\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, (f - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f))_\varepsilon^-, x, y\right) =$$

$$= f(x, y) - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y) + \psi_{h/2^{k-1}}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y)-$$

$$-\psi_{h/2^{k-1}}\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f), x, y\right) -$$

$$-\psi_{h/2^{k-1}}\left(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, (f - \mathfrak{G}_{k-1,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f))_\varepsilon^-, x, y\right).$$

Отсюда, из (26), свойства (9) и теоремы 1 сразу получаем

$$f(x, y) - \mathfrak{G}_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y) =$$

$$= f(x, y) - \psi_{h/2^{k-1}}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f, x, y) + \theta_k \varepsilon \|N(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C(\mathbb{R}^2)},$$

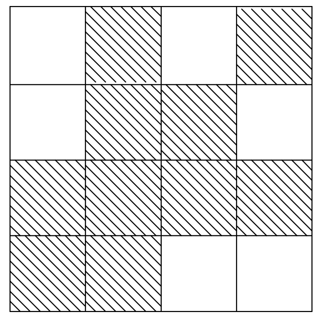
где $\theta_k = \theta_k(f, h) \in [-1, 1]$ и величина $N(x)$ определена соотношением (**??**).

Таким образом, с учетом $k-$го слоя информации метод $\mathfrak{G}_{k,h}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f)$ восстанавливает искомую функцию с точностью до $\theta_k \varepsilon \|N(\mathcal{A}^n, \mathcal{B})\|_{C(\mathbb{R}^2)}$ так же, как и первоначальный метод с шагом $h/2^{k-1}$. При этом в реальных задачах количество ненулевых единиц информации, которое требуется для этого, гораздо меньше, чем информации отличной от нуля, необходимой для метода $\psi_{h/2^{k-1}}(\mathcal{A}^n, \mathcal{B}, f)$.

Основные результаты

Рассмотрено все методы порожденных апертурами от 6 до 12 порядка. Всего таких методов 72.

В качестве примера приведем результаты соответствующие апертуре $\mathcal{A}_1^{10}$.



Геометрическая апертура $\mathcal{A}_1^{10}$.

Определим полином четвертого порядка

$$P(\tilde{F}^0, x, y) = a_{3,1}\, x^3 y + a_{1,3}\, x y^3 + \sum_{\nu=0}^{3} \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\mu,\nu-\mu} x^{\mu} y^{\nu-\mu}, \tag{27}$$

средние значения которого наименее уклоняются от заданных значений.

Вычислив коэффициенты $a_{3,1}, a_{1,3}, a_{3,0}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{0,3}, a_{2,0}, a_{0,2}, a_{1,1}, a_{1,0}, a_{0,1}, a_{0,0}$ по методу наименьших квадратов, положим

$$B^{++}(\tilde{F}^0) = \hat{f}^{++}_{1,1,1} = \frac{4}{h^2} \int\limits_{\frac{h}{2}}^{h} \int\limits_{\frac{h}{2}}^{h} P(\tilde{F}^0, x, y) dx dy = \tag{28}$$

$$= \frac{5}{256}\, \hat{f}_{-1,-1,0} - \frac{25}{256}\, \hat{f}_{0,-1,0} - \frac{25}{256}\, \hat{f}_{-1,0,0} + \frac{409}{512}\, \hat{f}_{0,0,0} + \frac{51}{256}\, \hat{f}_{0,1,0} +$$
$$+ \frac{51}{256}\, \hat{f}_{1,0,0} + \frac{17}{256}\, \hat{f}_{1,1,0} - \frac{21}{512}\, \hat{f}_{0,2,0} - \frac{21}{512}\, \hat{f}_{2,0,0} - \frac{3}{512}\, \hat{f}_{2,2,0}$$

Таким образом, формулы расслоения (6) примут вид:

$$x_{2i,k+1} = x_{i,k}, \;\; y_{2j,k+1} = y_{j,k},$$

$$\hat{f}_{2i,2j,k+1} = \frac{5}{256}\, \hat{f}_{i+1,j+1,k} - \frac{25}{256}\, \hat{f}_{i,j+1,k} - \frac{25}{256}\, \hat{f}_{i+1,j,k} + \frac{409}{512}\, \hat{f}_{i,j,k} + \frac{51}{256}\, \hat{f}_{i-1,j,k} -$$
$$- \frac{21}{512}\, \hat{f}_{i-2,j,k} + \frac{51}{256}\, \hat{f}_{i,j-1,k} + \frac{17}{256}\, \hat{f}_{i-1,j-1,k} - \frac{21}{512}\, \hat{f}_{i,j-2,k} - \frac{3}{512}\, \hat{f}_{i-2,j-2,k}$$

$$x_{2i+1,k+1} = x_{i,k} + \frac{h}{2^k}, \;\; y_{2j,k+1} = y_{j,k},$$

$$\hat{f}_{2i+1,2j,k+1} = \frac{5}{256}\, \hat{f}_{i-1,j+1,k} - \frac{25}{256}\, \hat{f}_{i,j+1,k} - \frac{25}{256}\, \hat{f}_{i-1,j,k} + \frac{409}{512}\, \hat{f}_{i,j,k} + \frac{51}{256}\, \hat{f}_{i+1,j,k} -$$

$$-\frac{21}{512}\,\hat f_{i+2,j,k}+\frac{51}{256}\,\hat f_{i,j-1,k}+\frac{17}{256}\,\hat f_{i+1,j-1,k}-\frac{21}{512}\,\hat f_{i,j-2,k}-\frac{3}{512}\,\hat f_{i+2,j-2,k}$$

$$x_{2i,k+1}=x_{i,k},\;\; y_{2j+1,k+1}=y_{j,k}+\frac{h}{2^k}, \tag{29}$$

$$\hat f_{2i,2j+1,k+1}=\frac{5}{256}\,\hat f_{i+1,j-1,k}-\frac{25}{256}\,\hat f_{i,j-1,k}-\frac{25}{256}\,\hat f_{i+1,j,k}+\frac{409}{512}\,\hat f_{i,j,k}+\frac{51}{256}\,\hat f_{i-1,j,k}-$$

$$-\frac{21}{512}\,\hat f_{i-2,j,k}+\frac{51}{256}\,\hat f_{i,j+1,k}+\frac{17}{256}\,\hat f_{i-1,j+1,k}-\frac{21}{512}\,\hat f_{i,j+2,k}-\frac{3}{512}\,\hat f_{i-2,j+2,k}$$

$$x_{2i+1,k+1}=x_{i,k}+\frac{h}{2^k},\;\; y_{2j+1,k+1}=y_{j,k}+\frac{h}{2^k},$$

$$\hat f_{2i+1,2j+1,k+1}=\frac{5}{256}\,\hat f_{i-1,j-1,k}-\frac{25}{256}\,\hat f_{i-1,j,k}-\frac{25}{256}\,\hat f_{i,j-1,k}+\frac{409}{512}\,\hat f_{i,j,k}+\frac{51}{256}\,\hat f_{i,j+1,k}-$$

$$-\frac{21}{512}\,\hat f_{i,j+2,k}+\frac{51}{256}\,\hat f_{i+1,j,k}+\frac{17}{256}\,\hat f_{i+1,j+1,k}-\frac{21}{512}\,\hat f_{i+2,j,k}-\frac{3}{512}\,\hat f_{i+2,j+2,k}$$

Функционал (28) можно определить исходя из других соображений. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируемая на $\mathbb{R}^2$ такова, что

$$\frac{\partial^\nu f}{\partial x^n\,\partial y^m}\in C\left(\mathbb{R}^2\right),\;\nu=0,\dots,4,\;\; n,m\geq 0, n+m=\nu$$

и $\hat f_{i,j}$ – ее среднее значение на квадратах $(x,y)\in(x_i,x_{i+1})\times(y_j,y_{j+1})$. Функционал B будем искать в виде

$$B^{++}(\tilde F^0)=\alpha_0\hat f_{-1,-1,0}+\alpha_1\left(\hat f_{0,-1,0}+\hat f_{-1,0,0}\right)+\alpha_2\hat f_{0,0,0}+ \tag{30}$$

$$\alpha_3\left(\hat f_{1,0,0}+\hat f_{0,1,0}\right)+\alpha_4\left(\hat f_{2,0,0}+\hat f_{0,2,0}\right)+\alpha_5\hat f_{1,1,0}+\alpha_6\hat f_{2,2,0},$$

где коэффиценты α_i выбираются так, чтобы разность между $\hat f^{++}_{1,1,1}$ и выражением (30) имела как можно более высокий порядок точности. Используя формулу Тейлора, это условие можно записать в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_0+2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=1,\\ 6\alpha_0+8\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_4-2\alpha_5-6\alpha_6=1,\\ 28\alpha_0+32\alpha_1+4\alpha_2+8\alpha_3+32\alpha_4+4\alpha_5+28\alpha_6=1,\\ 36\alpha_0+24\alpha_1+4\alpha_2-8\alpha_3-24\alpha_4+4\alpha_5+36\alpha_6=1,\\ 168\alpha_0+80\alpha_1+8\alpha_2+32\alpha_4-8\alpha_5-168\alpha_6=1,\\ 120\alpha_0+128\alpha_1+8\alpha_2-112\alpha_4-8\alpha_5-120\alpha_6=1,\\ 720\alpha_0+288\alpha_1+16\alpha_2-32\alpha_3-288\alpha_4+16\alpha_5+720\alpha_6=1,\end{cases} \tag{31}$$

решением которой есть числа

$$\alpha_0=\frac{5}{256},\quad \alpha_1=-\frac{25}{256},\quad \alpha_2=\frac{409}{512},\quad \alpha_3=\frac{51}{256}, \tag{32}$$

$$\alpha_4=-\frac{21}{512},\quad \alpha_5=\frac{17}{256},\quad \alpha_6=-\frac{3}{512}.$$

Таким образом, мы прийдем к функционалу (28).

Рассмотрим еще один подход к построению функционала (28). Снова расслоение $\hat f_{i,j,0}$ будем искать в виде линейной комбинации (30), но коэффициенты α_r $(r=0,\dots,6)$ выберем из условия наивысшей алгебраической точности. То есть так, чтобы соотношение (30) обращалось в равенство на множестве $\mathcal{L}_3^* = \{1, x, y, x^2, xy,\, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3\}$. Это приводит к системе (31).

Коэффициенты $\mathcal{B}_1^{10}$ апертуры в этом случае имеют вид

$$\mathcal{B}_1^{10} = \{a_{i,j}^{10,1}\}_{i,j=-1}^{2} = \frac{1}{512}\begin{pmatrix} 0 & -21 & 0 & -3 \\ 0 & 102 & 34 & 0 \\ -50 & 409 & 102 & -21 \\ 10 & -50 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

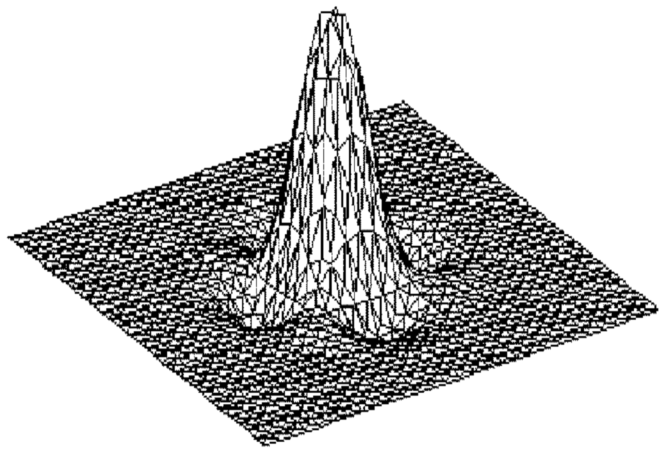


График функции $\Psi_4(A_1^{10}(\mathcal{L}_3^*), x, y)$.

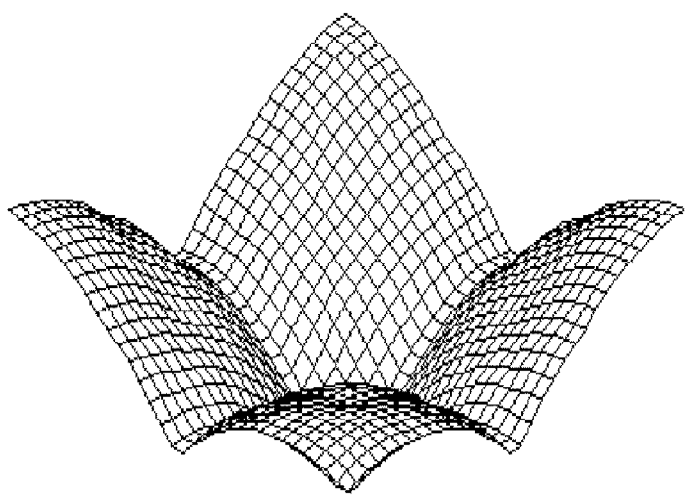


График функции $N_6(A_1^{10}(\mathcal{L}_3^*), x, y)$.

В дальнейшем вместо $\psi_{k,h}(A_1^{10}(\mathcal{L}_3^*),\tilde{F},x,y)$, $\Psi_k\,(A_1^{10}(\mathcal{L}_3^*),x,y)$ и т.д. будем писать $\psi_{k,h}(\tilde{F},x,y)$, $\Psi_k\,(x,y)$ и т.д.

Пусть

$$\Delta_x^2 z(x,y)=z(x+2^{-k}h,y)-2z(x,y)+z(x-2^{-k}h,y),$$
$$\Delta_y^2 z(x,y)=z(x,y+2^{-k}h)-2z(x,y)+z(x,y-2^{-k}h),$$
$$\Delta_-^2 z(x,y)=z(x,y)+z(x+2^{-k}h,y+2^{-k}h)-z(x+2^{-k}h,y)-z(x,y+2^{-k}h),$$
$$\Delta_+^2 z(x,y)=z(x+2^{-k}h,y)+z(x,y+2^{-k}h)+z(x-2^{-k}h,y)+z(x,y-2^{-k}h)-4z(x,y),$$

и

$$\|\sigma^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)}=\max\{\|\Delta_x^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)},\|\Delta_y^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)},\|\Delta_-^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)},\|\Delta_+^2 z\|_{C(\mathbb{R}^2)}\},$$
$$\|\sigma^2\tilde{F}\|_{\ell^2_\infty}=\max_{i,j\in\mathbb{Z}}\max\{|\hat{f}_{i+1,j,0}-2\hat{f}_{i,j,0}+\hat{f}_{i-1,j,0}|,|\hat{f}_{i,j+1,0}-2\hat{f}_{i,j,0}+\hat{f}_{i,j-1,0}|,$$
$$|\hat{f}_{i,j,0}+\hat{f}_{i+1,j+1,0}-\hat{f}_{i,j+1,0}-\hat{f}_{i+1,j,0}|,|\hat{f}_{i-1,j,0}+\hat{f}_{i,j+1,0}+\hat{f}_{i+1,j,0}+\hat{f}_{i,j-1,0}-4\hat{f}_{i,j,0}|\}.$$

Лемма 1 *Для любой последовательности $\tilde{F}\in l_\infty$ и $k\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\|\sigma^2\psi_{k+1,h}(\tilde{F})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\frac{61}{128}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\le\left(\frac{61}{128}\right)^{k+1}\|\sigma^2\tilde{F}\|_{\ell^2_\infty}. \tag{34}$$

Доказательство. Представим индексы i и j в виде $i=2\nu+\xi$ и $j=2\mu+\eta$, где $\nu,\mu\in\mathbb{Z}$ и $\xi,\eta=0,1$, тогда для

$$(x,y)\in\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k},\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k}\right)\times\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k},\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{h}{2^k}\right)$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned}\Delta_x^2\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi,k+1},y_{2\mu+\eta,k+1})&=\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi-1,k+1},y_{2\mu+\eta,k+1})-\\ -2\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi,k+1},y_{2\mu+\eta,k+1})&+\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi+1,k+1},y_{2\mu+\eta,k+1})=\\ &=\sum_{n=-3}^{2}\sum_{m=-2}^{2}a_{n,m}^{\xi,\eta}\psi_{k,h}(\tilde{F},x_{\nu+n,k},y_{\mu+m,k}),\end{aligned} \tag{35}$$

где $A_{\xi,\eta}=\|a_{n,m}^{\xi,\eta}\|_{n=-3,m=-2}^{2,2}$ и, например,

$$A_{1,0}=\frac{1}{2048}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&13&-84&142&-84&13\\0&-29&404&-750&404&-29\\0&-29&404&-750&404&-29\\0&13&-84&142&-84&13\end{bmatrix}.$$

Таким образом для $\xi=1,\eta=0$ имеет место соотношение

$$\Delta_x^2\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+1},y_{2\mu})=\sum_{n=-3}^{2}\sum_{m=-2}^{2}a_{n,m}^{1,0}\psi_{k,h}(\tilde{F},x_{\nu+n,k},y_{\mu+m,k})=$$

$$= \frac{1}{2048}\Big(13\Delta_x^2\Big(\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-1,k}, y_{\mu+1,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu+1,k}) +$$

$$+\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-1,k}, y_{\mu-2,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu-2,k})\Big) -$$

$$-29\Delta_x^2\Big(\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-1,k}, y_{\mu,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu,k}) +$$

$$+\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-1,k}, y_{\mu-1,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu-1,k})\Big) -$$

$$-58\Delta_x^2\Big(\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu+1,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu-2,k})\Big) +$$

$$+346\Delta_x^2\Big(\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu-1,k})\Big).$$

Следовательно, для $\xi = 1, \eta = 0$ имеет место соотношение

$$\sup_{\nu,\mu\in\mathbb{Z}} |\Delta_x^2\psi_{k+1,h}(\tilde F, x_{2\nu+\xi,k+1}, y_{2\mu+\eta,k+1})| \le \frac{61}{128}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{36}$$

Рассматривая остальные случаи убеждаемся, что соотношение (36) справедливо для всех $\xi, \eta = 0, 1$, то есть

$$\|\Delta_x^2\psi_{k+1,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \frac{61}{128}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Аналогично получаем

$$\Delta_-^2\psi_{k+1,h}(\tilde F, x_{2\nu+\xi}, y_{2\mu+\eta}) = \sum_{n=-2}^{2}\sum_{m=-2}^{2} b_{n,m}^{\xi,\eta}\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+n,k}, y_{\mu+m,k}),$$

где $B_{\xi,\eta} = \|b_{n,m}^{\xi,\eta}\|_{n,m=-2}^2$ матрицы коэффициентов, например,

$$B_{0,0} = \frac{1}{2048}\begin{bmatrix} 0 & 21 & -21 & 3 & -3 \\ 0 & -123 & 89 & 31 & 3 \\ 50 & -357 & 239 & 89 & -21 \\ -60 & 519 & -357 & -123 & 21 \\ 10 & -60 & 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta_-^2\psi_{k+1,h}(\tilde F, x_{2\nu}, y_{2\mu}) = \sum_{n=-2}^{2}\sum_{m=-2}^{2} b_{n,m}^{0,0}\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+n,k}, y_{\mu+m,k}) =$$

$$= \frac{1}{2048}\Big(-21\Delta_-^2\Big(\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-1,k}, y_{\mu+1,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu-1,k})\Big) -$$

$$-3\Delta_-^2\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu+1,k}, y_{\mu+1,k}) + 10\Delta_-^2\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-2,k}, y_{\mu-2,k}) -$$

$$-50\Delta_-^2\Big(\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-2,k}, y_{\mu-1,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-1,k}, y_{\mu-2,k})\Big) +$$

$$+409\Delta_-^2\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-1,k}, y_{\mu-1,k}) + 34\Delta_-^2\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu,k}) +$$

$$+102\Delta_-^2\Big(\psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu-1,k}, y_{\mu,k}) + \psi_{k,h}(\tilde F, x_{\nu,k}, y_{\mu-1,k})\Big)\Big).$$

Отсюда для $\xi=\eta=0$ и всех $\nu,\mu\in\mathbb{Z}$ имеем

$$|\Delta_{-}^{2}\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2\nu+\xi},y_{2\mu+\eta})|\leq\frac{401}{1024}\|\sigma^{2}\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}. \quad (37)$$

Рассматривая остальные случаи убеждаемся, что соотношение (37) справедливо для всех $\xi,\eta=0,1$.

Аналогично получаем

$$\|\Delta_{y}^{2}\psi_{k+1,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}\leq\frac{61}{128}\|\sigma^{2}\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}, \quad (38)$$

$$\|\Delta_{+}^{2}\psi_{k+1,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}\leq\frac{113}{256}\|\sigma^{2}\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}, \quad (39)$$

и, следовательно,

$$\|\sigma^{2}\psi_{k+1,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}\leq\frac{61}{128}\|\sigma^{2}\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}.$$

Последовательно используя полученное неравенство, получаем

$$\|\sigma^{2}\psi_{k+1,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}\leq\left(\frac{61}{128}\right)^{k+1}\|\sigma^{2}\psi_{0,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}.$$

Отсюда и из очевидного равенства

$$\left\|\sigma^{2}\psi_{0,h}(\tilde{F})\right\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}=\left\|\sigma^{2}\tilde{F}\right\|_{\ell_{\infty}^{2}} \quad (40)$$

сразу получаем справедливость соотношения (34).

Лемма 2 *Для любой последовательности $\tilde{F}$, и любого фиксированного $k\in\mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\|\psi_{k+1,h}(\tilde{F})-\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}\leq\frac{159}{512}\|\sigma^{2}\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}. \quad (41)$$

Доказательство. Функция $\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x,y)$ является полигоном по разбиению Δ^{k+1}, а $\psi_{k,h}(\tilde{F},x,y)$ есть полигон по разбиению Δ^{k}, поэтому экстремум величины $\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x,y)-\psi_{k,h}(\tilde{F},x,y)$ может достигаться только в точках $M_{2i,2j,k}$, $M_{2i+1/2,2j+1/2,k}$, $M_{2i+1,2j+1,k}$, $M_{2i+1,2j,k}$, $M_{2i,2j+1,k}$. Таким образом

$$\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2i,k+1},y_{2j+1,k+1})-\psi_{k,h}(\tilde{F},x_{i,k},y_{j+1/2,k})=$$
$$\sum_{n=1}^{4}\sum_{m=1}^{5}\beta_{n,m}\psi_{k,h}(\tilde{F},x_{\nu+n-5/2,k},y_{\mu+7/2-m,k}),$$

где

$$(\beta_{n,m})_{n=1,m=1}^{4\ 5}=\frac{1}{2048}\begin{bmatrix}3&21&21&3\\-10&170&170&-10\\142&-510&-510&142\\-10&170&170&-10\\3&21&21&3\end{bmatrix},$$

и

$$|\psi_{k+1,h}(\tilde{F},x_{2i,k+1},y_{2j+1,k+1})-\psi_{k,h}(\tilde{F},x_{i,k},y_{j+1/2,k})|\leq\frac{159}{512}\|\sigma^{2}\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^{2})}.$$

Аналогично

$$|\psi_{k+1,h}(\tilde F, x_{2i+1,k+1}, y_{2j+1,k+1}) - \psi_{k,h}(\tilde F, x_{i+1/2,k}, y_{j+1/2,k})| \le \frac{29}{128}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)},$$

$$|\psi_{k+1,h}(\tilde F, x_{2i,k+1}, y_{2j,k+1}) - \psi_{k,h}(\tilde F, x_{i,k}, y_{j,k})| \le \frac{71}{256}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)},$$

$$|\psi_{k+1,h}(\tilde F, x_{2i+1/2,k+1}, y_{2j+1/2,k+1}) - \psi_{k,h}(\tilde F, x_{i+1/4,k}, y_{j+1/4,k})| \le$$

$$\le \frac{137}{512}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Следовательно, полигон $\psi_{k+1,h}(\tilde F, x, y)$ уклоняется от полигона $\psi_{k,h}(\tilde F, x, y)$ на треугольнике с вершинами в точках $M_{2i,2j,k+1}$, $M_{2i+1,2j+1,k+1}$, $M_{2i,2j+1,k+1}$ не более чем на величину

$$\frac{159}{512}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Лемма 3 *Для любой последовательности $\tilde F \in \ell^2_\infty$, и $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\left\|\psi_{k+m,h}(\tilde F) - \psi_{k,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \frac{159}{268}\left(\frac{61}{128}\right)^k \left\|\sigma^2 \tilde F\right\|_{\ell^2_\infty}. \tag{42}$$

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$\left\|\psi_{k+m,h}(\tilde F) - \psi_{k,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \sum_{i=0}^{m-1}\left\|\psi_{k+i+1,h}(\tilde F) - \psi_{k+i,h}(\tilde F)\right\|_{\ell^2_\infty}$$

и леммы 2 вытекает

$$\left\|\psi_{k+m,h}(\tilde F) - \psi_{k,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \frac{159}{512}\sum_{i=0}^{m-1}\|\sigma^2\psi_{k+i,h}(\tilde F)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Применяя лемму 1, отсюда получаем

$$\left\|\psi_{k+m,h}(\tilde F) - \psi_{k,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le$$

$$\le \frac{159}{512}\|\sigma^2\psi_{k,h}(\tilde F)\|\left(1 + \frac{61}{128} + \left(\frac{61}{128}\right)^2 + \left(\frac{61}{128}\right)^3 + \ldots\right) \le$$

$$\le \frac{159}{268}\left(\frac{61}{128}\right)^k\left\|\sigma^2\psi_{0,h}(\tilde F)\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда и из (40) следует утверждение леммы 3.

Из леммы 3 следует, что последовательность $\{\psi_{k,h}(\tilde F, x, y)\}_{k=0}^\infty$ сходится в себе. Нетрудно видеть, что она ограничена (более того, далее мы покажем, что норма оператора $\psi_{k,h}(\tilde F, x, y)$ ограничена в совокупности и невелика). Отсюда следует, что поточечный предел $\psi_{k,h}(\tilde F, x, y)$ при $k \to \infty$ существует. Обозначим этот предел через $\psi_h(\tilde F, x, y)$.

Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ оператор $\psi_{k,h}(f)$ есть линейный оператор, отображающий пространство ℓ^2_∞ в пространство полигонов определенных на квадратных областях $(x_{i,k} - h/2^k, x_{i,k} + h/2^k) \times (y_{j,k} - h/2^k, y_{j,k} + h/2^k)$, то ψ_h есть линейный оператор, отображающий пространство ℓ^2_∞ в пространство $C(\mathbb{R}^2)$ (это следует из (34)).

Переходя к пределу по $m \to \infty$ в (42), немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 3 *Для любого фиксированного* $k \in \mathbb{N}$ *и любой последовательности* $\tilde{F} \in \ell^2_\infty$ *верно неравенство*

$$\left\|\psi_h(\tilde{F}) - \psi_{k,h}(\tilde{F})\right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \frac{159}{268}\left(\frac{61}{128}\right)^k \left\|\sigma^2\tilde{F}\right\|_{\ell^2_\infty}.$$

Следствие 2 *Пусть* $p \in [1,\infty)$, *числа* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\Re \in \mathbb{R}^2$. *Для любой последовательности* $\tilde{F} \in \ell^2_\infty$ *имеют место неравенства*

$$\left|\|\psi_h(\tilde{F})\|_{p(\Re)} - \|\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{p(\Re)}\right| \le \tag{43}$$

$$\le (\operatorname{mes}\Re)^p \frac{159}{268}\left(\frac{61}{128}\right)^k \left\|\sigma^2\tilde{F}\right\|_{\ell^2_\infty},$$

и

$$\|\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_\infty(\Re)} \le \|\psi_h(\tilde{F})\|_{L_\infty(\Re)} \le \tag{44}$$

$$\le \|\psi_{k,h}(\tilde{F})\|_{L_\infty(\Re)} + \frac{159}{268}\left(\frac{61}{128}\right)^k \left\|\sigma^2\tilde{F}\right\|_{\ell^2_\infty}.$$

Действительно, из теоремы 3, из неравенств верных для любых $p \in [1,\infty)$ и $g, c \in L_p(\Re)$

$$\|g\|_{L_p(\Re)} - \|c\|_{L_p(\Re)} \le \|g - c\|_{L_p(\Re)} \le \|g\|_{L_p(\Re)} + \|c\|_{L_p(\Re)}$$

и очевидного неравенства

$$\|g\|_{L_p(\Re)} \le (\operatorname{mes}\Re)^p \|g\|_{L_\infty(\Re)},$$

сразу получаем для $p \in [1,\infty)$ соотношение (43).

Оценка снизу в (44) вытекает из того факта, что норма функции $\psi_{k,h}(\tilde{F},x,y)$ в $L_\infty(\Re)$ не превышает нормы функции $\psi_h(\tilde{F},x,y)$.

Вычисляя числа $\hat{f}^{*,1}_{\nu,\mu}$, получаем свойство масштабируемости, которое можно записать в виде следующего утверждения

Теорема 4 *Для всех* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *имеет место равенство*

$$\Psi(x,y) = \sum_{\nu=-4}^{3}\sum_{\mu=-4}^{3} \alpha_{\nu,\mu}\Psi(2x-\nu, 2y-\mu), \tag{45}$$

где

$$(\alpha_{\nu,\mu})_{\nu,\mu=-4}^{3} = \frac{1}{512}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -21 & -21 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 0 & -50 & -50 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 34 & 102 & 102 & 34 & 0 & 0 \\ -21 & -50 & 102 & 409 & 409 & 102 & -50 & -21 \\ -21 & -50 & 102 & 409 & 409 & 102 & -50 & -21 \\ 0 & 0 & 34 & 102 & 102 & 34 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -50 & -50 & 0 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -21 & -21 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Отметим также, что

$$1.84695 < \|N\|_{C([0,1]\times[0,1])} < 1.84697.$$

Список литературы

[1] *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.

[2] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных. Математичне моделювання. Днепродзержинск, ДГТУ, 2(5), 2000, 11 – 19.

[3] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. Киев, Изд. Института математики НАН Украины, 1997.

[4] *Donoho D. L.* Unconditional Bases are Optimal Bases for Data Estimation. Appl. Comput. Harmon. Anal. 1, 1 (1993), 100-115.