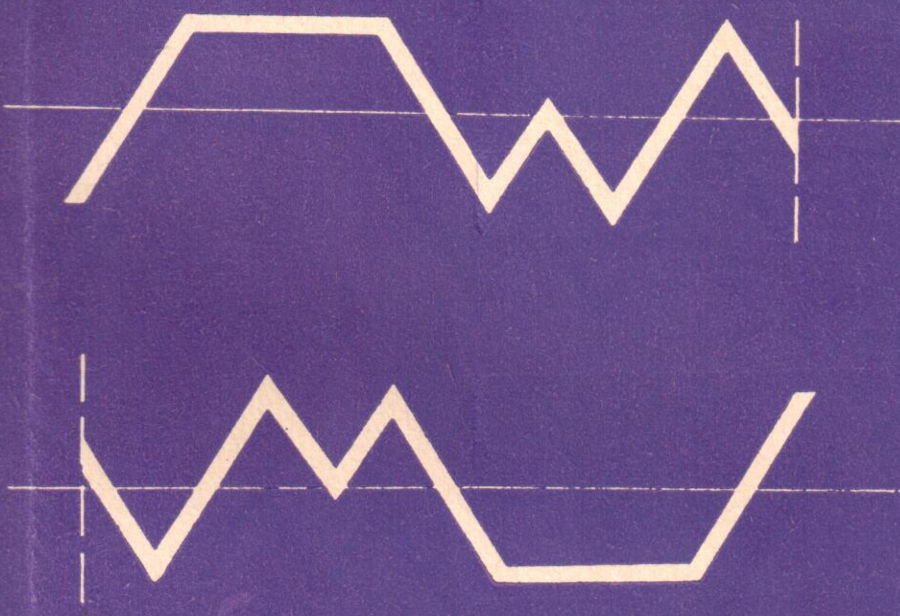
В. Н. Малоземов, А. Б. Певный

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ



ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА

В. Н. МАЛОЗЕМОВ, А. Б. ПЕВНЫЙ

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

Учебное пособие

Ленинград
Издательство Ленинградского университета
1986

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

УДК 519.65(07)

Малоземов В. Н., Певный А. Б. **Полиномиальные сплайны**: Учеб. пособие.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 120 с.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, который с 1980 года читается в Ленинградском университете на математическом отделении факультета повышения квалификации преподавателей вузов. В нем рассмотрены следующие вопросы: фундаментальные свойства полиномиальных сплайнов, кратная сплайн-интерполяция, совершенные сплайны и оптимальная интерполяция на классах функций с ограниченной старшей производной, экстремальные свойства интерполяционных натуральных сплайнов, оптимальность и центральность сплайновых алгоритмов, построение балочных и сферических сплайнов. При доказательстве многих утверждений используется разработанная авторами техника.

Пособие предназначено для слушателей ФПК, студентов и аспирантов математических специальностей, для всех лиц, желающих ознакомиться с основами теории сплайнов. Библиогр. 80 назв. Ил. 18.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук В. С. Виденский (Ленингр. пед. ин-т им. А. И. Герцена), канд. физ.-мат. наук И. К. Даугавет (Ленингр. ун-т).

ИБ № 2334

Василий Николаевич Малоземов
Александр Борисович Певный

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

Учебное пособие

Редактор *Г. А. Григенч*
Художественный редактор *О. Н. Советникова*
Обложка художника *И. А. Птаховой*
Технический редактор *Л. А. Топорина*
Корректоры *К. Я. Евнина, Г. Н. Гуляева*

Сдано в набор 15.02.86. Подписано в печать 17.10.86. М-17218 Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 7,5. Усл. кр-отт. 7,69. Уч.-изд. л. 6,32. Тираж 3526 экз. Заказ 546. Цена 20 коп.

Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова.
199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9.

Типография ЛЭИС, 198320, Ленинград, ул. Свободы, 31.

М $\frac{1502000000-181}{076(02)-}$ -86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория сплайнов, история которой начинается с работы Шёнберга [74] 1946 г., в настоящее время продолжает бурно развиваться. Об этом можно судить по опубликованным за последние годы книгам [8, 9, 19, 21, 23, 24, 27, 32, 55, 79] и неубывающему потоку журнальных статей.

Основная особенность сплайнов заключается в том, что они хорошо приспособлены для решения интерполяционных задач. Сплайны оказались более гибким и не менее удобным аппаратом, чем полиномы. Этим объясняется их широкое использование в вычислительной математике [1, 21, 23, 51]. Изучены и другие области применения сплайнов [9, 24, 50].

С помощью совершенных сплайнов решены некоторые экстремальные задачи теории приближения функций [27, 54]. При построении оптимальных алгоритмов важную роль играют интерполяционные натуральные сплайны [31, 75, 76]. Утверждение о том, что сплайновый алгоритм оптимален, справедливо в весьма общей ситуации [55].

Холлидей [67] обнаружил глубокую связь между сплайнами и многоточечными вариационными задачами. В дальнейшем выяснилось, что вариационный подход открывает широкие возможности для обобщения понятия сплайна и позволяет, в частности, наиболее естественным образом ввести многомерные сплайны [8, 47, 61, 62, 64].

Данная книга знакомит читателей с основами теории сплайнов. В ней рассмотрены следующие вопросы:

— фундаментальные свойства полиномиальных сплайнов (оценка числа нулей и нуль-интервалов с учетом их кратности, представление сплайна в виде линейной комбинации нормализованных B-сплайнов и др.),

— кратная сплайн-интерполяция (критерий разрешимости, оценка погрешности, численный метод),

— совершенные сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной метрике (существование, единственность, альтернансная характеристика),

— основная теорема алгебры для совершенных сплайнов,

— оптимальная интерполяция на классах функций с ограниченной старшей производной,

— экстремальные свойства интерполяционных натуральных сплайнов,

— оптимальность и центральность сплайновых алгоритмов,

— построение балочных и сферических сплайнов.

Чтобы избежать технических трудностей, авторы ограничились в основном изучением полиномиальных сплайнов с простыми узлами. В комментариях обсуждаются возможные обобщения этого понятия и дается обзор дальнейших результатов.

Поясним порядок ссылок на теоремы и формулы. Полная ссылка состоит из трех чисел. Первое число указывает номер главы, второе — номер параграфа, третье — номер теоремы или формулы в параграфе. При ссылках внутри главы номер главы опускается.

Авторы надеются, что эта небольшая книга поможет читателям разобраться в основах теории сплайнов и подготовит их к изучению специальной литературы.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$:=$ или $=:$ — равно по определению;

$1:m$ — множество целых чисел от 1 до m включительно;

$D=D[1:m,\ 1:n]$ — матрица с элементами $D[i,j]$, $i\in 1:m$, $j\in 1:n$;

δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij}=1$, если $i=j$, и $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$);

$\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbf{R}^n$ — линейное пространство векторов $X=(x_1, \ldots, x_n)$;

$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение векторов X и Y;

$\|X\| = \langle X, X\rangle^{1/2}$ — норма вектора X;

$f(a+0)$ — предельное значение функции $f(x)$ при стремлении x к a справа;

$f(a-0)$ — предельное значение функции $f(x)$ при стремлении x к a слева;

$W^r=W^r[c,d]$ — линейное пространство функций, имеющих на отрезке $[c,d]$ абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка;

W^r_pM, где $1\leqslant p<\infty$,— класс функций $f\in W^r$, у которых

$$\|f^{(r)}\|_p := \left(\int_c^d |f^{(r)}(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant M;$$

$W^r_\infty M$ — класс функций $f\in W^r$, у которых

$$\|f^{(r)}\| := \operatorname{vrai}\sup_{x\in[c,d]} |f^{(r)}(x)| \leqslant M.$$

Глава I. **ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ**

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Сплайном степени r с m узлами $t_1<t_2<\ldots<t_m$ называется кусочно-полиномиальная функция, совпадающая на промежутках $(-\infty, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\ldots$, $[t_m, +\infty)$ с некоторыми алгебраическими полиномами степени не выше r и $r-1$ раз непрерывно дифференцируемая на всей вещественной оси. Сплайн степени 1 — это непрерывная ломаная (см. рис. на обложке). Ломаная представляет собой простейший, но очень важный пример сплайнов. В определенном смысле вся теория сплайнов посвящена изучению свойств и аппроксимационных возможностей ломаных и их обобщению на случай более гладких кусочно-полиномиальных функций.

Основная область применения сплайнов — интерполяция. Именно специфические требования к интерполирующему семейству — локальность базисных функций вместе с определенной их гладкостью — и породили сплайны. В отличие от чисто полиномиального случая при сплайн-интерполяции имеются две системы узлов: интерполяции $\{x_\mu\}$ и сплайна $\{t_j\}$. Задача сплайн-интерполяции однозначно разрешима при любых правых частях тогда и только тогда, когда выполнены некоторые условия на взаимное расположение узлов $\{x_\mu\}$ и $\{t_j\}$.

С технической точки зрения сплайны отличаются от алгебраических полиномов тем, что могут обращаться в нуль на целом интервале. Однако количество изолированных нулей и нуль-интервалов сплайна с учетом их кратности ограничено. Это служит основой для доказательства критерия однозначной разрешимости задачи кратной сплайн-интерполяции.

Прокомментируем содержание главы по параграфам. В § 2 дается формальное определение полиномиального сплайна степени r с m узлами. Отмечается, что при фиксированных узлах сплайн является обобщенным полиномом порядка $n=r+1+m$

по некоторой линейно независимой системе $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций.

В § 3 получена оценка числа изолированных нулей и нуль-интервалов сплайна с учетом их кратности. Этот принципиальный результат в дальнейшем широко используется. Он играет такую же роль, как оценка числа нулей с учетом их кратности для алгебраических полиномов.

В § 4 установлен критерий однозначной разрешимости задачи кратной сплайн-интерполяции. Отдельно рассмотрены практически важные случаи интерполяции кубическими и параболическими сплайнами.

В § 5 дана оценка погрешности кратной сплайн-интерполяции функций с ограниченной $(r+1)$-й производной. Эта оценка формально и по идее доказательства аналогична известной оценке погрешности кратной полиномиальной интерполяции. Однако первая более содержательна прежде всего потому, что зависит от двух параметров r и m. При полиномиальной интерполяции уменьшения погрешности можно добиться только за счет увеличения степени полинома r, а при сплайн-интерполяции той же цели можно достигнуть при неизменном r — за счет увеличения числа m узлов сплайна.

Специфической конструкцией, не имеющей аналога в полиномиальном случае, является B-сплайн. Его основное свойство — минимальность носителя. В § 6 вводится определение B-сплайна и показывается, как построить базис, состоящий из B-сплайнов, в пространстве всех сплайнов и пространстве сплайнов, удовлетворяющих однородным граничным условиям.

При вычислениях используется представление сплайна в виде линейной комбинации нормализованных B-сплайнов. В § 7 получено рекуррентное соотношение для нормализованных B-сплайнов, и на его основе построены эффективные алгоритмы вычисления значений сплайна и его производных.

Задача кратной интерполяции с помощью сплайнов с фиксированными узлами сводится к решению системы линейных уравнений. В § 8 установлено, что матрица такой системы имеет почти блочно-диагональную структуру. Для численного решения интерполяционной системы предложен специализированный вариант метода Гаусса.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО СПЛАЙНА

Пусть r — натуральное число. Введем функцию (рис. 1)

$$x_+^r = \begin{cases} x^r, & \text{если } x\geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Эту функцию можно представить в компактном виде

$$x_+^r = (\max\{0, x\})^r,$$

$$\text{или } x_+^r = \left(\frac{x+|x|}{2}\right)^r.$$

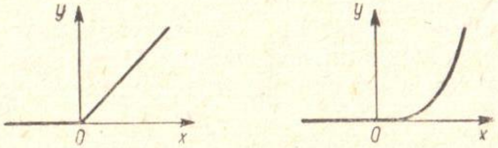


Рис. 1. График функции $y = x_+^r$ при $r=1$ и $r>1$

Кроме того, при нечетном r

$$x_+^r = \frac{x^r + |x|^r}{2}.$$

Отметим основные свойства функции x_+^r.

1. Для всех производных до $(r-1)$-го порядка справедлива формула

$$(x_+^r)^{(k)} = r(r-1)\ldots(r-k+1)x_+^{r-k}, \qquad k\in 1:r-1. \tag{2.1}$$

Действительно, при $x>0$ и $x<0$ формула (2.1) очевидна. Остается учесть, что предельные значения указанных производных при $x\to 0$ как справа, так и слева совпадают (равны нулю).

Из (2.1) следует, что функция x_+^r является $r-1$ раз непрерывно дифференцируемой на всей вещественной оси.

2. При $x\neq 0$ существует производная r-го порядка:

$$(x_+^r)^{(r)} = \begin{cases} r!, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

В точке $x=0$ производная r-го порядка терпит разрыв. Функция x_+^r — это простейшая функция, r-я производная которой в точке $x=0$ имеет конечный скачок.

3. Справедливо тождество

$$x^r = x_+^r + (-1)^r(-x)_+^r. \tag{2.2}$$

Полиномиальным сплайном степени r с m узлами, или короче, сплайном класса (r, m), называется функция вида

$$S(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i + \sum_{j=1}^m b_j (x-t_j)_+^r. \tag{2.3}$$

Здесь $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ — *узлы сплайна* S.

Обозначим $P(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i$. Согласно определению x_+^r имеем

$$S(x) = P(x) \text{ при } x\in(-\infty, t_1],$$

$$S(x) = P(x) + b_1(x-t_1)^r \text{ при } x\in[t_1, t_2],$$

$$S(x) = P(x) + b_1(x-t_1)^r + b_2(x-t_2)^r \text{ при } x\in[t_2, t_3],$$

. . . .

$$S(x) = P(x) + \sum_{j=1}^m b_j(x-t_j)^r \text{ при } x\in[t_m, +\infty).$$

Таким образом, на каждом промежутке $(-\infty, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_m, +\infty)$ сплайн S совпадает с некоторыми алгебраическими полиномами степени не выше r. В целом же в силу (2.1) сплайн S является $r-1$ раз непрерывно дифференцируемой на всей вещественной оси функцией.

При $r>1$ производную S' можно записать в виде

$$S'(x) = \sum_{i=0}^{r-1}(i+1)a_{i+1}x^i + \sum_{j=1}^m r b_j (x-t_j)_+^{r-1}.$$

Значит, S' — сплайн класса $(r-1, m)$ с теми же узлами $t_1, \ldots, t_m$.

Введем обозначения $t_0 = -\infty$, $t_{m+1} = +\infty$. Полезно отметить, что на интервале (t_i, t_j), $0\leqslant i<j\leqslant m+1$, сплайн S допускает представление

$$S(x) = P(x) + \sum_{k=1}^i b_k(x-t_k)^r + \sum_{k=i+1}^{j-1} b_k(x-t_k)_+^r.$$

Лемма 2.1. *Пусть S — сплайн вида* (2.3). *Тогда*

$$b_j = \frac{1}{r!}\left(S^{(r)}(t_j+0) - S^{(r)}(t_j-0)\right). \tag{2.4}$$

Доказательство. При $x\in(t_{j-1}, t_j)$

$$S(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i + \sum_{k=1}^{j-1} b_k(x-t_k)^r.$$

Поэтому

$$S^{(r)}(t_j-0) = r!\,(a_r + \sum_{k=1}^{j-1} b_k). \tag{2.5}$$

Аналогично получаем, что

$$S^{(r)}(t_j+0) = r!\,(a_r + \sum_{k=1}^{j} b_k). \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует (2.4). Лемма доказана.

При фиксированных t_j сплайн S можно рассматривать как обобщенный полином по системе функций

$$1, x, \ldots, x^r, (x-t_1)_+^r, \ldots, (x-t_m)_+^r. \tag{2.7}$$

Лемма 2.2. *Система функций (2.7) линейно независима на любом интервале (c,d), содержащем узлы $t_1, \ldots, t_m$.*

Доказательство. Пусть сплайн S вида (2.3) тождественно равен нулю на (c,d). В частности, $S\equiv 0$ на (c,t_1) или

$$\sum_{i=0}^{r} a_i x^i = 0 \quad \text{при} \quad x\in(c,\ t_1).$$

Отсюда следует, что $a_0=a_1=\ldots=a_r=0$.

Далее, $S\equiv 0$ на (t_1,t_2). Это приводит к равенству

$$b_1(x-t_1)^r = 0 \quad \text{при} \quad x\in(t_1,t_2).$$

Значит, $b_1=0$. Перебирая слева направо остальные интервалы $(t_2,t_3),\ldots,(t_m,d)$, последовательно получаем $b_2=0,\ldots,b_m=0$. Лемма доказана.

§ 3. НУЛИ И НУЛЬ-ИНТЕРВАЛЫ СПЛАЙНА

Рассмотрим сплайн S класса (r,m) с узлами $t_1<t_2<\ldots<t_m$. Напомним обозначения $t_0=-\infty$, $t_{m+1}=+\infty$.

Точка $\xi\in(t_{j-1},t_j)$, $j\in 1:m+1$, в которой $S(\xi)=0$, считается изолированным нулем сплайна S, если $S\not\equiv 0$ на (t_{j-1},t_j). Кратность изолированного нуля ξ определяется обычным способом: это наименьшее натуральное ν, при котором $S^{(\nu)}(\xi)\neq 0$.

Предположим, что $S\not\equiv 0$ как в $(t_{j-1},\ t_j)$, так и в $(t_j,\ t_{j+1})$. Если $S(t_j)=S'(t_j)=\ldots=S^{(\nu-1)}(t_j)=0$ и $S^{(\nu)}(t_j)\neq 0$ при некотором $\nu\in 1:r-1$, то $\xi=t_j$ — изолированный нуль сплайна S кратности ν. Пусть $S(t_j)=S'(t_j)=\ldots=S^{(r-1)}(t_j)=0$. В этом случае величины $A_r=S^{(r)}(t_j-0)$ и $B_r=S^{(r)}(t_j+0)$ отличны от нуля. Точка $\xi=t_j$ считается нулем кратности r, если $A_rB_r>0$, и нулем кратности $r+1$, если $A_rB_r<0$.

Покажем, что в изолированном нуле нечетной кратности знак S меняется, а в изолированном нуле четной кратности — не меняется. Достаточно рассмотреть случай $\xi=t_j$, $S(t_j)=S'(t_j)=\ldots=S^{(r-1)}(t_j)=0$. Поскольку

$$S(x)=\begin{cases} A_r(x-t_j)^r/r! & \text{при } x\in(t_{j-1},\ t_j),\\ B_r(x-t_j)^r/r! & \text{при } x\in(t_j,\ t_{j+1}),\end{cases}$$

то

$$\operatorname{sign} S(x)=\begin{cases} (-1)^r \operatorname{sign} A_r & \text{при } x\in(t_{j-1},\ t_j),\\ \operatorname{sign} B_r & \text{при } x\in(t_j,\ t_{j+1}).\end{cases}$$

Пусть кратность нуля $\xi=t_j$ равна r. Тогда $A_rB_r>0$. Если r четно, то $\{(-1)^rA_r\}B_r>0$, так что знак S в точке t_j не меняется. Если r нечетно, то $\{(-1)^rA_r\}B_r<0$,— знак S в точке t_j меняется.

Пусть теперь кратность нуля $\xi=t_j$ равна $r+1$. Тогда $A_rB_r<0$. Если $r+1$ четно, то $\{(-1)^rA_r\}B_r>0$, так что знак S в точке t_j не меняется. Если $r+1$ нечетно, то $\{(-1)^rA_r\}\times B_r<0$,— знак S в точке t_j меняется.

Интервал $\xi=(t_i,\ t_j)$, где $1\leqslant i<j\leqslant m$, назовем конечным нуль-интервалом сплайна S, если $S\equiv 0$ в (t_i,t_j), но $S\not\equiv 0$ как в $(t_{i-1},\ t_i)$, так и в $(t_j,\ t_{j+1})$. Сплайн S является $r-1$ раз непрерывно дифференцируемой на всей вещественной оси функцией, поэтому

$$S(t_i)=S'(t_i)=\ldots=S^{(r-1)}(t_i)=0,\ A_r:=S^{(r)}(t_i-0)\neq 0,$$

$$S(t_j)=S'(t_j)=\ldots=S^{(r-1)}(t_j)=0,\ B_r:=S^{(r)}(t_j+0)\neq 0.$$

Будем считать, что нуль-интервал $\xi=(t_i,t_j)$ имеет кратность r, если $A_rB_r>0$, и имеет кратность $r+1$, если $A_rB_r<0$.

Допустим, что $S\equiv 0$ на $\xi=(t_0,t_j)$, где $j\in 1:m$, но $S\not\equiv 0$ на (t_j,t_{j+1}). Интервал ξ назовем бесконечным нуль-интервалом сплайна S и присвоим ему кратность r. Бесконечному нуль-интервалу вида $\xi=(t_i,t_{m+1})$, где $i\in 1:m$, также присваивается кратность r.

Отметим, что при $r>1$ изолированный нуль и нуль-интервал сплайна S являются соответственно изолированным нулем и нуль-интервалом на единицу меньшей кратности производной S'.

Индексной длиной интервала (t_i,t_j) называется число $j-i$. Обозначим $Z(S)$ количество всех изолированных нулей и нуль-интервалов сплайна S с учетом их кратности.

Лемма 3.1. *Если* $S\not\equiv 0$, то

$$Z(S)\leqslant r+m-l, \tag{3.1}$$

где l — суммарная индексная длина нуль-интервалов сплайна S.

Доказательство. В случае $S^{(r-1)}\equiv 0$ оценка (3.1) тривиальна, поскольку S вырождается в алгебраический полином степени не выше $r-2$.

Допустим, что $S^{(r-1)}\not\equiv 0$. По обобщенной теореме Ролля

$$Z(S)\leqslant Z(S')+1\leqslant\ldots\leqslant Z(S^{(r-1)})+r-1. \tag{3.2}$$

Сплайн $S^{(r-1)}$ является непрерывной ломаной с m узлами. Покажем, что

$$Z(S^{(r-1)})\leqslant m+1-l^{(r-1)}, \tag{3.3}$$

где $l^{(r-1)}$ — суммарная индексная длина нуль-интервалов $S^{(r-1)}$.

Предположим вначале, что ломаная $g=S^{(r-1)}$ не имеет нуль-интервалов. От g перейдем к непрерывной ломаной g_1 с теми же узлами $t_1, \ldots, t_m$ и следующими свойствами (рис. 2):

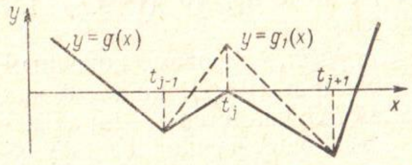


Рис. 2. Переход от ломаной g к ломаной g_1

1) все нули g_1 простые;

2) каждому двойному нулю g соответствуют два простых нуля g_1;

3) $Z(g_1)=Z(g)$.

Между двумя нулями g_1 находится хотя бы один узел, поэтому $Z(g_1)-1\leqslant m$. Отсюда очевидным образом следует (3.3).

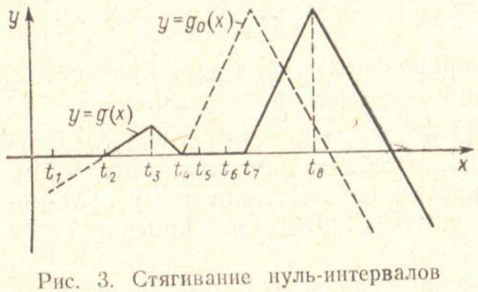


Рис. 3. Стягивание нуль-интервалов

Если g имеет нуль-интервалы, то с помощью их стягивания (рис. 3) можно перейти к непрерывной ломаной g_0 без нуль-интервалов и с $m-l^{(r-1)}$ узлами, такой, что $Z(g)=Z(g_0)$. По доказанному

$$Z(g)=Z(g_0)\leqslant(m-l^{(r-1)})+1,$$

что равносильно (3.3).

Требуемую оценку (3.1) получим, объединив (3.2), (3.3) и очевидное неравенство $l^{(r-1)}\geqslant l$. Лемма доказана.

§ 4. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Обратимся к задаче кратной интерполяции при помощи полиномиальных сплайнов класса (r, m) с фиксированными узлами $t_1<t_2<\ldots<t_m$:

$$S^{(\nu)}(x_\mu)=y_\mu^{(\nu)}, \quad \mu\in 1:p, \quad \nu\in 0:\sigma_\mu-1. \tag{4.1}$$

Здесь $x_1<x_2<\ldots<x_p$ — узлы интерполяции, σ_μ — кратность узла x_μ.

Пусть $n=r+1+m$. Предполагается, что $\sum_{\mu=1}^{p}\sigma_\mu=n$, $\sigma_\mu\leqslant r+1$ и $\sigma_\mu\leqslant r$, если x_μ совпадает с одним из узлов сплайна t_j. По существу (4.1) — это система линейных уравнений n-го порядка относительно коэффициентов сплайна a_i, b_j.

Обозначим $V(t_i, t_j)$ количество узлов интерполяции x_μ с учетом их кратности, содержащихся в замыкании интервала (t_i, t_j) (каждый узел x_μ считается σ_μ раз). Замыканием интервала (t_i, t_j) является отрезок $[t_i, t_j]$ при $1\leqslant i<j\leqslant m$ и промежутки

$$(-\infty, t_j] \text{ при } i=0,\ j\in 1:m;$$
$$[t_i, +\infty) \text{ при } i\in 1:m,\ j=m+1;$$
$$(-\infty, +\infty) \text{ при } i=0,\ j=m+1.$$

Теорема 4.1. *Для того чтобы задача* (4.1) *при любых* $y_\mu^{(\nu)}$ *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$V(t_i, t_j)\leqslant r+j-i \tag{4.2}$$

при всех $0\leqslant i<j\leqslant m+1$.

Доказательство. Необходимость. Допустим вопреки утверждению, что замыкание некоторого интервала (t_i, t_j) содержит точки $x_k<x_{k+1}<\ldots<x_q$ и $\sigma_k+\sigma_{k+1}+\ldots+\sigma_q\geqslant r+j-i+1$. По условию теоремы система уравнений

$$S^{(\nu)}(x_\mu)=y_\mu^{(\nu)}, \quad \mu\in k:q, \quad \nu\in 0:\sigma_\mu-1, \tag{4.3}$$

имеет решение при любых $y_\mu^{(\nu)}$. Но на замыкании интервала (t_i, t_j) сплайн S допускает представление

$$S(x)=\sum_{\alpha=0}^{r}c_\alpha x^\alpha+\sum_{s=i+1}^{j-1}b_s(x-t_s)_+^r.$$

Значит, при любых $y_\mu^{(\nu)}$ найдутся c_α и b_s, такие, что выполняется (4.3). Но это невозможно, ибо у системы линейных уравнений (4.3) неизвестных меньше, чем уравнений.

Достаточность. Покажем, что при выполнении условия (4.2) однородная система

$$S^{(\nu)}(x_\mu)=0, \quad \mu\in 1:p, \quad \nu\in 0:\sigma_\mu-1, \tag{4.4}$$

имеет только нулевое решение.

Допустим противное. Тогда найдется сплайн $S\not\equiv 0$, удовлетворяющий (4.4). Обозначим q количество нуль-интервалов сплайна S и l — их суммарную индексную длину. Согласно (4.2) в замыкания всех нуль-интервалов попадает не более $rq+l$ узлов интерполяции x_μ с учетом их кратности. Вне замыканий нуль-интервалов остается не менее $n-rq-l$ точек x_μ с учетом их кратности, причем каждая такая точка x_μ является изолированным нулем сплайна S кратности не менее σ_μ. Так как суммарная кратность нуль-интервалов не менее rq, то

$$Z(S)\geqslant(n-rq-l)+rq=n-l=r+1+m-l.$$

Но это противоречит лемме 3.1. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (4.2) можно переписать в эквивалентной форме

$$V(t_0, t_j) \leqslant r+j, \quad j\in 1:m, \tag{4.5}$$

$$V(t_i, t_{m+1}) \leqslant n-i, \quad i \in 1:m. \tag{4.6}$$

Действительно, согласно (4.5) количество u_j узлов интерполяции с учетом их кратности, содержащихся в интервале $(t_j, +\infty)$, не меньше $n-r-j$, т. е. $u_j \geqslant m+1-j$. Согласно (4.6) количество v_i узлов интерполяции с учетом их кратности, содержащихся в $(-\infty, t_i)$, не меньше i, т. е. $v_i \geqslant i$. Значит, при $1\leqslant i<j\leqslant m$

$$V(t_i, t_j)=n-u_j-v_i\leqslant r+j-i.$$

Получили, что из (4.5), (4.6) следует (4.2). Обратное тривиально.

Замечание 2. Когда все σ_μ равны единице, приходим к задаче простой интерполяции

$$S(x_\mu)=y_\mu, \quad \mu\in 1:n,$$

где $n=r+1+m$. В этом случае критерий однозначной разрешимости (4.2) можно представить в форме Шёнберга-Уитни [77]:

$$x_i<t_i<x_{r+1+i}, \quad i\in 1:m. \tag{4.7}$$

Действительно, правое неравенство в (4.7) равносильно (4.5), а левое — (4.6).

Замечание 3. При интерполяции кубическими сплайнами ($r=3$) нужно задать $n=r+1+m=m+4$ интерполяционных условий. Обычно рассматривают задачу

$$\begin{aligned} &S(x_0)=y_0, \quad S'(x_0)=y'_0;\\ &S(t_j)=y_j, \quad j\in 1:m;\\ &S(x_{m+1})=y_{m+1}; \quad S'(x_{m+1})=y'_{m+1}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $x_0<t_1$, $x_{m+1}>t_m$. Нетрудно проверить, что условия (4.5), (4.6) в данном случае выполнены, поэтому интерполяционная задача (4.8) имеет единственное решение.

При интерполяции параболическими сплайнами ($r=2$) нужно задать $n=m+3$ интерполяционных условий. Чаще всего рассматривают задачу

$$\begin{aligned} &S(x_0)=y_0; \quad S'(x_0)=y'_0;\\ &S(x_\mu)=y_\mu, \quad \mu\in 1:m-1;\\ &S(x_m)=y_m; \quad S'(x_m)=y'_m, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $x_0<t_1<x_1<t_2<\ldots<x_{m-1}<t_m<x_m$. И здесь условия

(4.5), (4.6) выполнены, так что интерполяционная задача (4.9) имеет единственное решение.

§ 5. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Для получения основного результата этого параграфа нам потребуется оценка числа нулей функций несколько более общего вида, чем параболические сплайны.

Зафиксируем разбиение отрезка $[c, d]$:

$$c=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_m<\tau_{m+1}=d.$$

Обозначим H семейство функций h, удовлетворяющих условиям:

1) h непрерывна на $[c, d]$;

2) сужение h на каждый подотрезок $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ имеет абсолютно непрерывную производную h';

3) $\operatorname{sign} h''(x)=(-1)^j$ для почти всех $x\in(\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j\in 1:m+1$.

Лемма 5.1. *Функция $h\in H$ строго вогнута на $[\tau_{2k-2}, \tau_{2k-1}]$ и строго выпукла на $[\tau_{2k-1}, \tau_{2k}]$.*

Доказательство. Проверим, например, строгую выпуклость h на $[\tau_{2k-1}, \tau_{2k}]$. Нужно показать, что для любых x_0, x_1 из $[\tau_{2k-1}, \tau_{2k}]$, $x_0<x_1$ и $\alpha\in(0, 1)$ выполняется неравенство

$$h(\alpha x_1+(1-\alpha)x_0)<\alpha h(x_1)+(1-\alpha)h(x_0). \tag{5.1}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\alpha h(x_1)+(1-\alpha)h(x_0)-h(\alpha x_1+(1-\alpha)x_0)=\\ &=\alpha[h(x_1)-h(x_1-(1-\alpha)(x_1-x_0))]-(1-\alpha)[h(x_0+\alpha(x_1-x_0))-\\ &-h(x_0)]=\alpha(1-\alpha)(x_1-x_0)[h'(x_1-\theta_1(1-\alpha)(x_1-x_0))-h'(x_0+\\ &+\theta_0\alpha(x_1-x_0))], \end{aligned} \tag{5.2}$$

где θ_1, θ_0 — некоторые положительные числа, меньшие единицы. Точки $y_1=x_1-\theta_1(1-\alpha)(x_1-x_0)$ и $y_0=x_0+\theta_0\alpha(x_1-x_0)$ принадлежат $[\tau_{2k-1}, \tau_{2k}]$. Кроме того, $y_1>y_0$. Значит, согласно условию 3)

$$h'(y_1)-h'(y_0)=\int_{y_0}^{y_1} h''(x)dx=\int_{y_0}^{y_1}|h''(x)|dx>0. \tag{5.3}$$

Объединяя (5.2) и (5.3), приходим к (5.1). Лемма доказана.

Точку $\xi\in[c, d]$, в которой $h(\xi)=0$, считаем простым нулем функции h, за исключением того случая, когда $\xi\in\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ и $h(\xi)=h'(\xi)=0$,— такому нулю ξ присваивается кратность 2. Обозначим $Z(h; [c, \tau_j])$ количество нулей h с учетом их кратности, содержащихся в $[c, \tau_j]$.

Лемма 5.2. *Для любой функции* $h \in H$

$$Z(h;\ [c, \tau_j]) \leqslant j+1, \quad j \in 1 : m+1, \tag{5.4}$$

причем если (5.4) выполняется как равенство, то $(-1)^j h(\tau_j) \geqslant 0$.

Доказательство проведем индукцией по j. При $j=1$ утверждение очевидно в силу строгой вогнутости h на $[c, \tau_1]$.

Пусть утверждение справедливо при некотором j, для определенности нечетном. Возможны два случая.

I. $Z(h;\ [c, \tau_j]) \leqslant j$. Если $h(\tau_j) > 0$, то $Z(h;\ [c, \tau_{j+1}]) \leqslant j+2$, а при выполнении равенства $Z(h;\ [c, \tau_{j+1}]) = j+2$ необходимо $h(\tau_{j+1}) \geqslant 0$. Это следует из строгой выпуклости h на $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, благодаря которой h может иметь на $(\tau_j, \tau_{j+1}]$ один простой, два простых или один двойной нуль. Если $h(\tau_j) \leqslant 0$, то $Z(h;\ [c, \tau_{j+1}]) \leqslant j+1$.

II. $Z(h;\ [c, \tau_j]) = j+1$. По индуктивному предположению $h(\tau_j) \leqslant 0$. Значит, $Z(h;\ [c, \tau_{j+1}]) \leqslant j+2$. Если последнее неравенство выполняется как равенство, то необходимо $h(\tau_{j+1}) \geqslant 0$. Лемма доказана.

Следствие. Для любой функции $h \in H$

$$Z(h;\ [c, d]) \leqslant m+2. \tag{5.5}$$

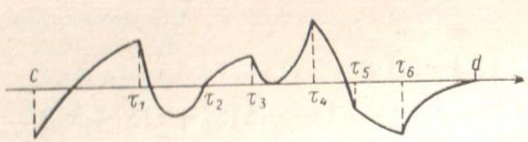


Рис. 4. Пример функции $h \in H$, на которой неравенство (5.5) обращается в равенство

На рис. 4 приведен пример функции $h \in H$, на которой неравенство (5.5) обращается в равенство.

Обозначим $W_\infty^{r+1} M$ класс функций f, имеющих на $[c, d]$ абсолютно непрерывную r-ю производную и почти всюду $(r+1)$-ю производную, такую, что

$$|f^{(r+1)}(x)| \leqslant M \quad \text{для почти всех} \quad x \in [c, d].$$

Зафиксируем $f \in W_\infty^{r+1} M$ и рассмотрим задачу кратной интерполяции f полиномиальными сплайнами класса (r, m) с фиксированными узлами $c < t_1 < \ldots < t_m < d$:

$$S^{(\nu)}(x_\mu) = f^{(\nu)}(x_\mu), \quad \mu \in 1 : p, \quad \nu \in 0 : \sigma_\mu - 1.$$

Будем считать, что выполнены все условия из § 4, гарантирующие однозначную разрешимость этой задачи. Интерполяционный сплайн обозначим $S(f;\ x)$.

Теорема 5.1. *Существует единственная функция F вида*

$$F(x) = \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x^i + \frac{2}{(r+1)!} \sum_{j=1}^{m} \{(-1)^j (x-t_j)_+^{r+1} + \beta_j (x-t_j)_+^r\}$$

со свойством $F^{(\nu)}(x_\mu) = 0$, $\mu \in 1 : p$, $\nu \in 0 : \sigma_\mu - 1$.

Для любой функции $f \in W_\infty^{r+1} M$ *справедлива оценка*

$$|f(x) - S(f;\ x)| \leqslant M\,|F(x)|, \quad x \in [c, d]. \tag{5.6}$$

Доказательство. Построение F весьма просто. А именно, $F(x) = g(x) - S(g;\ x)$, где

$$g(x) = \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{2}{(r+1)!} \sum_{j=1}^{m} (-1)^j (x-t_j)_+^{r+1}.$$

Проверим (5.6). Допустим, рассуждая от противного, что в некоторой точке $x_0 \in [c, d]$

$$|f(x_0) - S(f;\ x_0)| > M\,|F(x_0)|.$$

Очевидно, что $x_0 \overline{\in} \{x_1, \ldots, x_p\}$. Подберем константу λ, $|\lambda| < 1/M$, так, чтобы функция

$$\varphi(x) = \lambda[f(x) - S(f;\ x)] - F(x)$$

обращалась в нуль в точке x_0.

Прежде всего покажем, что $h = \varphi^{(r-1)}$ принадлежит семейству H (при $\tau_j = t_j$, $j \in 1 : m$). Проверка условий 1), 2) не представляет труда. Обратимся к условию 3). На (τ_{j-1}, τ_j)

$$h''(x) = \varphi^{(r+1)}(x) = \lambda f^{(r+1)}(x) - F^{(r+1)}(x).$$

Поскольку на указанном интервале $F^{(r+1)}(x) \equiv (-1)^{j-1}$ и $|\lambda f^{(r+1)}(x)| \leqslant |\lambda|\,M < 1$ почти всюду, то

$$\operatorname{sign} h''(x) = (-1)^j \quad \text{для почти всех } x \in (\tau_{j-1}, \tau_j).$$

Значит, условие 3) выполнено. Включение $h \in H$ установлено.

По определению φ

$$\varphi^{(\nu)}(x_\mu) = 0, \quad \mu \in 1 : p, \quad \nu \in 0 : \sigma_\mu - 1; \quad \varphi(x_0) = 0.$$

Напомним, что $\sum_{\mu=1}^{p} \sigma_\mu = n = r+1+m$, $\sigma_\mu \leqslant r+1$ и $\sigma_\mu \leqslant r$, если x_μ совпадает с одним из узлов сплайна $t_1, \ldots, t_m$. Согласно обобщенной теореме Ролля функция $h = \varphi^{(r-1)}$ имеет на $[c, d]$ не менее $m+3$ нулей с учетом их кратности в смысле введенного выше определения. Но это противоречит следствию из леммы 5.2. Теорема доказана.

Замечание 1. Формально (при $m=0$) и по идее доказательства оценка (5.6) связана с известной оценкой погрешности кратной интерполяции функции $f \in W_\infty^{r+1} M$ алгебраическими полиномами степени не выше r:

$$|f(x)-P(f;\,x)| \leqslant \frac{M}{(r+1)!}\left|(x-x_1)^{\sigma_1} \ldots (x-x_p)^{\sigma_p}\right|, \tag{5.7}$$

где $P(f;\,x)=\sum_{i=0}^{r} a_i x^i$,

$$P^{(\nu)}(f;\,x_\mu)=f^{(\nu)}(x_\mu), \quad \mu \in 1:p, \quad \nu \in 0:\sigma_\mu-1;$$

$$\sigma_\mu \leqslant r+1, \ \sum_{\mu=1}^{p} \sigma_\mu = r+1.$$

Разумеется, оценка (5.6) более содержательна. В (5.7) при увеличении количества интерполяционных условий вместе со степенью полинома r должен увеличиться и порядок используемой производной функции f. В (5.6) в аналогичной ситуации достаточно, не меняя r и класса $W_\infty^{r+1} M$, увеличить m — число узлов интерполяционного сплайна.

Замечание 2. При интерполяции сплайнами имеются две системы узлов $\{t_j\}$ и $\{x_\mu\}$, взаимное расположение которых регулируется условием (4.2). В узлах x_μ обычно задается информация о функции. Узлами t_j можно произвольно распоряжаться. В § II.5 будет показано, что узлы t_j полиномиального сплайна можно выбрать так, что коэффициенты β_j в формуле для F обратятся в нуль. Тогда F примет вид

$$F(x)=\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}+\sum_{i=0}^{r} \alpha_i x^i+\frac{2}{(r+1)!}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j (x-t_j)_+^{r+1} =: T(x).$$

Функция T называется *совершенным сплайном*. Она характеризуется тем, что ее r-я производная $T^{(r)}$ абсолютно непрерывна и $T^{(r+1)}(x) \equiv (-1)^{j-1}$ на (t_{j-1}, t_j), $j \in 1:m+1$.

§ 6. *B*-СПЛАЙНЫ И ИХ СВОЙСТВА

В пространстве непрерывных на отрезке $[c, d]$ функций рассмотрим подпространство $S[c, d]$ полиномиальных сплайнов класса (r, m) с фиксированными узлами $c<t_1<\ldots<t_m<d$. Согласно лемме 2.2 размерность $S[c, d]$ равна $n=r+1+m$, а базис составляют функции (2.7).

Любое линейное неособенное преобразование системы (2.7) порождает новый базис в $S[c, d]$. Так, например, при $r=1$ из основного базиса $1,\ x,\ (x-t_1)_+,\ \ldots,\ (x-t_m)_+$ можно получить базис $g_0(x),\ g_1(x),\ \ldots,\ g_{m+1}(x)$, отдельные элементы которого изображены на рис. 5, *а*—*в*. У крайних функций g_0, g_1, g_m, g_{m+1}

нестандартный вид. На рис. 5, *б'*, *в'* показано, как изменить эти функции вне основного промежутка $[c, d]$, чтобы привести их к стандартному виду, изображенному на рис. 5, *а*.

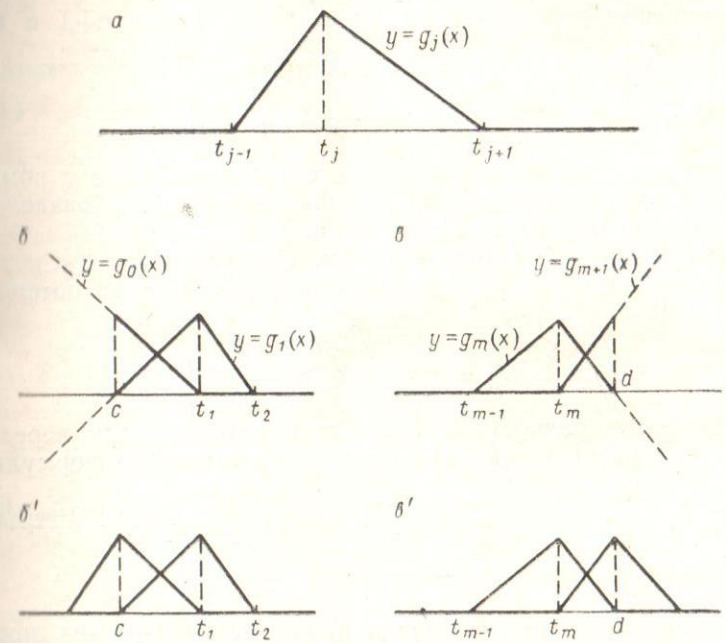


Рис. 5. Базисные функции семейства $S[c, d]$ при $r=1$

Попытаемся построить аналогичный базис в $S[c, d]$ при всех $r \geqslant 1$. Введем функцию

$$B(x)=\sum_{j=k}^{k+q} b_j (x-t_j)_+^r.$$

Очевидно, что $B(x)=0$ при $x \leqslant t_k$. Предположим, что коэффициенты b_j удалось подобрать так, что

$$B(x)=0 \quad \text{при} \quad x \geqslant t_{k+q}, \tag{6.1}$$

но $B \not\equiv 0$ на (t_k, t_{k+q}). В этом случае B будет сплайном класса $(r, q+1)$ с двумя бесконечными нуль-интервалами. Поскольку кратность бесконечного нуль-интервала равна r, то

$$Z(B) \geqslant 2r. \tag{6.2}$$

Вместе с тем согласно лемме 3.1

$$Z(B) \leqslant r+(q+1)-l, \tag{6.3}$$

где l — суммарная индексная длина нуль-интервалов сплайна B. По построению $l \geqslant 2$. Из (6.2), (6.3), в частности, следует, что $2r \leqslant r+q+1-l$ или

$$q \geqslant r-1+l.$$

Наименьшее возможное значение для q равно $r+1$ и достигается при $l=2$.

Положим $q=r+1$ и перепишем (6.1) в виде

$$\sum_{j=k}^{k+r+1} b_j(x-t_j)^r=0 \quad \text{при} \quad x \geqslant t_{k+r+1}. \tag{6.4}$$

Обеспечить выполнение последнего условия можно с помощью разделенных разностей. Напомним определение разделенных разностей и некоторые их свойства.

Рассмотрим функцию f на системе узлов $t_1<t_2<\ldots<t_m$. Разделенными разностями первого порядка называются отношения

$$f[t_j, t_{j+1}]=\frac{f(t_{j+1})-f(t_j)}{t_{j+1}-t_j}, \quad j \in 1:m-1.$$

Разделенные разности s-го порядка определяются через разделенные разности $(s-1)$-го порядка с помощью формулы

$$f[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+s}]=\frac{f[t_{j+1}, \ldots, t_{j+s}]-f[t_j, \ldots, t_{j+s-1}]}{t_{j+s}-t_j},$$

$$j \in 1:m-s.$$

Нас интересует разделенная разность $(r+1)$-го порядка $f[t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+r+1}]$. Ее можно выразить непосредственно через значения функции $f(t_j)$:

$$f[t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+r+1}]=\sum_{j=1}^{k+r+1} \frac{f(t_j)}{\omega'(t_j)}, \tag{6.5}$$

где $\omega(t)=(t-t_k)(t-t_{k+1}) \ldots (t-t_{k+r+1})$. Кроме того, при $f(t)=t^{r+1}$ имеем $f[t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+r+1}]=1$. Если же f — алгебраический полином степени не выше r, то $f[t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+r+1}]=0$. Доказательства этих фактов можно найти, например, в [4, с. 69—74].

При фиксированном x функция $f(t)=(x-t)^r$ является алгебраическим полиномом степени r, поэтому $(x-t)^r[t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+r+1}]=0$. Учитывая (6.5), получаем

$$\sum_{j=k}^{k+r+1} \frac{(x-t_j)^r}{\omega'(t_j)}=0. \tag{6.6}$$

Теперь положим $b_j=(-1)^{r+1}/\omega'(t_j)$. Функция

$$B(x)=(-1)^{r+1} \sum_{j=k}^{k+r+1} \frac{(x-t_j)_+^r}{\omega'(t_j)} \tag{6.7}$$

называется *B-сплайном*. Условие (6.1), (6.4) для нее выполнено в силу (6.6). На основании (2.2) и (6.6) приходим к другому представлению для B-сплайна

$$B(x)=\sum_{j=k}^{k+r+1} \frac{(t_j-x)_+^r}{\omega'(t_j)}=(t-x)_+^r\,[t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{k+r+1}]. \tag{6.8}$$

Лемма 6.1. *B-сплайн обладает такими свойствами:*

1) $B(x)=0$ *вне* (t_k, t_{k+r+1});
2) $\int_{t_k}^{t_{k+r+1}} B(x)dx=1/(r+1)$;
3) $B(x)>0$ *при* $x \in (t_k, t_{k+r+1})$.

Доказательство. Свойство 1) непосредственно следует из формул (6.7), (6.8). Далее, согласно (6.8) и упомянутым свойствам разделенных разностей имеем

$$\int_{t_k}^{t_{k+r+1}} B(x)dx=\sum_{j=k}^{k+r+1} \frac{1}{\omega'(t_j)} \int_{t_k}^{t_{k+r+1}} (t_j-x)_+^r\,dx=$$

$$=\frac{1}{r+1} \sum_{j=k}^{k+r+1} \frac{(t_j-t_k)^{r+1}}{\omega'(t_j)}=\frac{1}{r+1} \sum_{j=k}^{k+r+1} \frac{t_j^{r+1}}{\omega'(t_j)}=\frac{1}{r+1}.$$

Тем самым установлено свойство 2). Остается проверить свойство 3). Согласно (6.2) и (6.3)

$$2r \leqslant Z(B) \leqslant 2r+2-l,$$

причем $l \geqslant 2$. Непротиворечивая ситуация возникает лишь тогда, когда $l=2$, $Z(B)=2r$. Но это означает, что у B кроме двух бесконечных нуль-интервалов $(-\infty, t_k)$ и $(t_{k+r+1}, +\infty)$ нет ни изолированных нулей, ни нуль-интервалов. Другими словами, $B(x) \neq 0$ при всех $x \in (t_k, t_{k+r+1})$. Учитывая свойство 2), заключаем, что $B(x)>0$ на (t_k, t_{k+r+1}). Лемма доказана.

Вернемся к подпространству $S[c,d]$. Введем дополнительные узлы $z_1<z_2<\ldots<z_{r+1}=c$, $d=z_{n+1}<z_{n+2}<\ldots<z_{n+r+1}$ и переобозначим старые: $z_{r+1+j}:=t_j$, $j \in 1:m$ (рис. 6). Положим

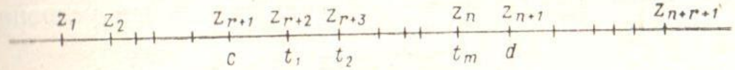


Рис. 6. Расширенная система узлов

$$B_k(x)=(z-x)_+^r\,[z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+r+1}], \quad k \in 1:n.$$

Теорема 6.1. *B-сплайны* $B_1, \ldots, B_n$ *образуют базис в* $S[c,d]$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что все B_k на $[c,d]$ являются сплайнами класса (r,m) с узлами $t_1<t_2<\ldots<t_m$. Их число равно n, т. е. совпадает с размер-

ностью $S[c,d]$. Для завершения доказательства достаточно установить линейную независимость $B_1, \ldots, B_n$ на $[c,d]$. Пусть

$$S(x) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k B_k(x) = 0, \quad x \in [c, d]. \tag{6.9}$$

На всей вещественной оси S является сплайном класса $(r, n+r+1)$ с узлами $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n+r+1}$. При этом согласно свойству 1) B-сплайнов $S(x) = 0$ при $x \in (-\infty, z_1]$ и $x \in [z_{n+r+1}, +\infty)$. Покажем, что $S \equiv 0$ на $(-\infty, +\infty)$.

Если $S \not\equiv 0$ на (z_1, c) и $S \not\equiv 0$ на (d, z_{n+r+1}), то S имеет по крайней мере три нуль-интервала суммарной индексной длины l не меньше $n-r+2$. Кратность каждого нуль-интервала не меньше r. Значит, $Z(S) \geqslant 3r$. Вместе с тем в силу леммы 3.1

$$Z(S) \leqslant r + (n+r+1) - l \leqslant 3r - 1.$$

Получили противоречие.

Допустим, что $S \equiv 0$ на (z_1, c), но $S \not\equiv 0$ на (d, z_{n+r+1}) (случай $S \equiv 0$ на (d, z_{n+r+1}), но $S \not\equiv 0$ на (z_1, c) исследуется аналогично). Тогда у сплайна S по крайней мере два нуль-интервала суммарной индексной длины l не меньше $n+2$. За счет нуль-интервалов имеем $Z(S) \geqslant 2r$. Вместе с тем согласно лемме 3.1

$$Z(S) \leqslant r + (n+r+1) - l \leqslant 2r - 1.$$

Снова получили противоречие.

Таким образом, из (6.9) следует, что $S \equiv 0$ на $(-\infty, +\infty)$. В частности, $0 = S(x) = \alpha_1 B_1(x)$ при $x \in (z_1, z_2)$. Поскольку $B_1(x) > 0$ на (z_1, z_2), то $\alpha_1 = 0$. Далее, $0 = S(x) = \alpha_2 B_2(x)$ при $x \in (z_2, z_3)$, а поскольку $B_2(x) > 0$ на (z_2, z_3), то $\alpha_2 = 0$. Перебирая слева направо интервалы $(z_3, z_4), \ldots, (z_n, z_{n+1})$, получаем $\alpha_3 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Линейная независимость B-сплайнов $B_1, \ldots, B_n$ на $[c,d]$ установлена. Теорема доказана.

Введение дополнительных узлов позволило единообразно представить функции, входящие в базис $S[c,d]$. Однако есть случай, когда можно обойтись без дополнительных узлов.

Предположим, что $m \geqslant r \geqslant 1$, и обозначим $S^0[c,d]$ семейство сплайнов из $S[c,d]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{aligned} &S^{(\nu)}(c) = 0, \quad \nu \in 0 : r-1; \\ &S^{(\nu)}(d) = 0, \quad \nu \in 0 : r-1. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Теорема 6.2. *Базис $S^0[c,d]$ образуют B-сплайны $B_0, B_1, \ldots, B_{m-r}$, построенные по узлам $z_0 = c$, $z_1 = t_1, \ldots, z_m = t_m$, $z_{m+1} = d$.*

Доказательство. Указанные B-сплайны принадлежат $S^0[c,d]$, они линейно независимы на $[c,d]$ и их число равно $m-r+1$. Остается проверить, что размерность $S^0[c,d]$ равна $m-r+1$.

Каждый сплайн S вида (2.3) с фиксированными узлами $c < t_1 < \ldots < t_m < d$ однозначно определяется вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_m)$. В $S^0[c,d]$ входят те сплайны, векторы коэффициентов которых удовлетворяют ограничениям (6.10).

Обозначим D матрицу системы (6.10). Ее ранг равен $2r$. Действительно, рассмотрим интерполяционную задачу

$$\begin{aligned} &S^{(\nu)}(c) = y_0^{(\nu)}, \quad \nu \in 0 : r-1; \\ &S(_jt) = y_j, \quad j \in 1 : m-r+1; \\ &S^{(\nu)}(d) = y_{m+1}^{(\nu)}, \quad \nu \in 0 : r-1. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Нетрудно понять, что условия (4.5), (4.6), гарантирующие однозначную разрешимость этой задачи при любых правых частях, выполнены. Значит, матрица системы (6.11) неособая. В частности, ранг матрицы D равен $2r$.

По известной теореме линейной алгебры система (6.10) имеет $r+1+m-2r = m-r+1$ линейно независимых решений $A_0, A_1, \ldots, A_{m-r}$, и любое другое решение A является линейной комбинацией данных векторов. Сплайны $S_0, S_1, \ldots, S_{m-r}$ с векторами коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_{m-r}$ принадлежат $S^0[c,d]$ и согласно лемме 2.2 линейно независимы на $[c,d]$. Более того, любой другой сплайн $S \in S^0[c,d]$ может быть представлен в виде линейной комбинации $S_0, S_1, \ldots, S_{m-r}$. Получили, что размерность $S^0[c,d]$ равна $m-r+1$. Теорема доказана.

§ 7. НОРМАЛИЗОВАННЫЕ B-СПЛАЙНЫ

Согласно теореме 6.1 полиномиальный сплайн S класса (r, m) с узлами $c < t_1 < \ldots < t_m < d$ на отрезке $[c,d]$ допускает представление

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k B_k(x), \tag{7.1}$$

где $B_1, \ldots, B_n$ — B-сплайны, построенные по расширенной системе узлов $z_1 < z_2 < \ldots < z_{n+r+1}$ (см. рис. 6). Теперь вместо B_k будем писать B_{rk}, явно подчеркивая зависимость B_k от степени r. Таким образом,

$$B_{rk}(x) = (z - x)_+^r \, [z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+r+1}].$$

Нормализованным B-сплайном степени i при $i \in 1 : r$ называется функция вида

$$\begin{aligned} N_{ik}(x) &:= (z_{k+i+1} - z_k)\, B_{ik}(x) = \\ &= (z_{k+i+1} - z_k)(z - x)_+^i [z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+i+1}] = \\ &= (z - x)_+^i \, [z_{k+1}, \ldots, z_{k+i+1}] - (z - x)_+^i \, [z_k, \ldots, z_{k+i}]. \end{aligned} \tag{7.2}$$

В частности, N_{1k} — это непрерывная ломаная, равная нулю вне (z_k, z_{k+2}) и принимающая значение единицы при $x=z_{k+1}$. Формально положим

$$N_{0k}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in[z_k, z_{k+1}),\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Наша ближайшая цель — получить рекуррентное соотношение для нормализованных B-сплайнов. Предварительно выясним, как выражается разделенная разность произведения $f\cdot g$ через разделенные разности функций f и g.

Лемма 7.1. *Справедлива формула*

$$(f\cdot g)[z_k,\ldots,z_{k+s}] = \sum_{j=k}^{k+s} f[z_k,\ldots,z_j]\,g[z_j,\ldots,z_{k+s}]. \tag{7.3}$$

Доказательство проводится индукцией по s. При $s=0$ формула (7.3) тривиальна, если считать, что $f[z_k]=f(z_k)$, $g[z_k]=g(z_k)$. Сделаем индуктивный переход от $s-1$ к s.

По определению разделенных разностей и индуктивному предположению имеем

$$Q:=(f\cdot g)[z_k,\ldots,z_{k+s}] = \frac{1}{z_{k+s}-z_k}\{(f\cdot g)[z_{k+1},\ldots,z_{k+s}] -$$
$$-(f\cdot g)[z_k,\ldots,z_{k+s-1}]\} = \frac{1}{z_{k+s}-z_k}\Big\{\sum_{j=k+1}^{k+s} f[z_{k+1},\ldots,z_j]\times$$
$$\times g[z_j,\ldots,z_{k+s}] - \sum_{j=k}^{k+s-1} f[z_k,\ldots,z_j]\,g[z_j,\ldots,z_{k+s-1}]\Big\}.$$

Поскольку

$$f[z_{k+1},\ldots,z_j]=f[z_k,\ldots,z_{j-1}]+(z_j-z_k)f[z_k,\ldots,z_j],$$
$$g[z_j,\ldots,z_{k+s-1}]=g[z_{j+1},\ldots,z_{k+s}]-(z_{k+s}-z_j)g[z_j,\ldots,z_{k+s}],$$

то
$$Q=\frac{1}{z_{k+s}-z_k}\Big\{\sum_{j=k+1}^{k+s} f[z_k,\ldots,z_{j-1}]g[z_j,\ldots,z_{k+s}]+$$
$$+\sum_{j=k+1}^{k+s}(z_j-z_k)f[z_k,\ldots,z_j]g[z_j,\ldots,z_{k+s}]-$$
$$-\sum_{j=k}^{k+s-1} f[z_k,\ldots,z_j]g[z_{j+1},\ldots,z_{k+s}]+$$
$$+\sum_{j=k}^{k+s-1}(z_{k+s}-z_j)f[z_k,\ldots,z_j]g[z_j,\ldots,z_{k+s}]\Big\}.$$

Первая и третья суммы взаимно уничтожаются. В результате получаем

$$Q=f[z_k,\ldots,z_{k+s}]g(z_{k+s})+$$
$$+\sum_{j=k+1}^{k+s-1} f[z_k,\ldots,z_j]g[z_j,\ldots,z_{k+s}]+$$
$$+f(z_k)g[z_k,\ldots,z_{k+s}],$$

что равносильно (7.3). Лемма доказана.

При $i\geqslant 2$ и фиксированном x положим $f(z)=(z-x)_+^{i-1}$, $g(z)=z-x$. Тогда $(z-x)_+^{i}=f(z)g(z)$. Согласно (7.2)

$$N_{ik}(x)=(f\cdot g)[z_{k+1},\ldots,z_{k+i+1}]-(f\cdot g)[z_k,\ldots,z_{k+i}].$$

Воспользуемся леммой 7.1. Учитывая, что разделенные разности порядка выше первого от g равны нулю, а разделенная разность первого порядка равна единице, приходим к равенствам

$$(f\cdot g)[z_{k+1},\ldots,z_{k+i+1}]=f[z_{k+1},\ldots,z_{k+i}]\cdot 1+$$
$$+f[z_{k+1},\ldots,z_{k+i+1}]g(z_{k+i+1}),$$
$$(f\cdot g)[z_k,\ldots,z_{k+i}]=f[z_k,\ldots,z_{k+i-1}]\cdot 1+$$
$$+f[z_k,\ldots,z_{k+i}]g(z_{k+i}).$$

После вычитания получаем

$$N_{ik}(x)=(z_{k+i}-z_k)f[z_k,\ldots,z_{k+i}]+$$
$$+f[z_{k+1},\ldots,z_{k+i+1}](z_{k+i+1}-x)-f[z_k,\ldots,z_{k+i}](z_{k+i}-x)=$$
$$=(z_{k+i+1}-x)f[z_{k+1},\ldots,z_{k+i+1}]+(x-z_k)f[z_k,\ldots,z_{k+i}]=$$
$$=\frac{z_{k+i+1}-x}{z_{k+i+1}-z_{k+1}}N_{i-1,\,k+1}(x)+\frac{x-z_k}{z_{k+i}-z_k}N_{i-1,\,k}(x).$$

Таким образом, при $i\geqslant 2$ справедливо тождество

$$N_{ik}(x)=\frac{z_{k+i+1}-x}{z_{k+i+1}-z_{k+1}}N_{i-1,\,k+1}(x)+\frac{x-z_k}{z_{k+i}-z_k}N_{i-1,\,k}(x), \tag{7.4}$$

выражающее нормализованный B-сплайн степени i через нормализованные B-сплайны степени $i-1$. Непосредственно проверяется, что тождество (7.4) остается верным и при $i=1$.

Перепишем формулу (7.1) в виде

$$S(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k N_{rk}(x). \tag{7.5}$$

Покажем, как вычислить значение S в фиксированной точке $x\in[c,d]$.

Пусть $z_j<x<z_{j+1}$, где $j\in r+1:n$. Тогда согласно (7.2) и лемме 6.1

$$S(x)=\sum_{k=j-r}^{j} a_k N_{rk}(x).$$

Воспользуемся тождеством (7.4) при $i=r$. С учетом равенств $N_{r-1,\,j+1}(x)=0$, $N_{r-1,\,j-r}(x)=0$ имеем

$$S(x)=\sum_{k=j-r}^{j-1} a_k\frac{z_{k+r+1}-x}{z_{k+r+1}-z_{k+1}}N_{r-1,\,k+1}(x)+$$

$$+\sum_{k=j-r+1}^{j} a_k \frac{x-z_k}{z_{k+r}-z_k} N_{r-1,\,k}(x) =$$

$$=\sum_{k=j-r+1}^{j} a_k^{(1)} N_{r-1,\,k}(x),$$

где $a_k^{(1)} = \dfrac{(z_{k+r}-x)a_{k-1}^{(0)} + (x-z_k)a_k^{(0)}}{z_{k+r}-z_k}$; $a_k^{(0)} = a_k$, $k \in j-r:j$.

Повторив это преобразование ν раз, $\nu \in 1:r$, придем к формуле

$$S(x) = \sum_{k=j-r+\nu}^{j} a_k^{(\nu)} N_{r-\nu,\,k}(x), \tag{7.6}$$

где $a_k^{(\nu)} = \dfrac{(z_{k+r-\nu+1}-x)a_{k-1}^{(\nu-1)} + (x-z_k)\,a_k^{(\nu-1)}}{z_{k+r-\nu+1}-z_k}$. (7.7)

При $\nu=r$ получаем $S(x)=a_j^{(r)}\,N_{0j}(x)=a_j^{(r)}$. Функция $a_j^{(r)}= =a_j^{(r)}(x)$ является алгебраическим полиномом степени не выше r. По непрерывности равенство $S(x)=a_j^{(r)}(x)$ справедливо при всех $x\in[z_j, z_{j+1}]$.

Коэффициенты $a_k^{(\nu)}$ образуют таблицу

$$\begin{array}{cccc}
a_{j-r}^{(0)} & a_{j-r+1}^{(0)} & \dots & a_j^{(0)} \\
 & a_{j-r+1}^{(1)} & \dots & a_j^{(1)} \\
 & & \dots & \\
 & & & a_j^{(r)}
\end{array}$$

Первая строка этой таблицы известна. Остальные строки вычисляются на основе рекуррентного соотношения (7.7). Составим программу, реализующую указанный процесс.

Зафиксируем $x\in[c,d]$ и найдем j, такое, что $z_j \leqslant x \leqslant z_{j+1}$. Обозначим $i=r-\nu+1$ $(i\in 1:r)$. Теперь программа вычислений примет вид

```
for k := j—r step 1 until j do u[k] := a[k];
for i := r step —1 until 1 do
for k := j step —1 until j—i+1 do
        begin p := (z[k+i]—x)/(z[k+i]—z[k]);
        u[k] := p×u[k—1]+(1—p)×u[k] end;
v := u[j]
```

В результате выполнения этой программы переменной v присвоится значение $a_j^{(r)}$, равное $S(x)$.

Формулы (7.6), (7.7) позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 7.1. *При $x\in[c,d]$ справедливо тождество*

$$(z-x)^r = \sum_{k=1}^{n} \omega_{rk}(z) N_{rk}(x), \quad z\in(-\infty, +\infty), \tag{7.8}$$

где $\omega_{rk}(z) = \prod_{i=1}^{r}(z-z_{k+i})$.

Доказательство. Зафиксируем z, положим $a_k^{(0)}=\omega_{rk}(z)$ и вычислим

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} N_{rk}(x).$$

Пусть $z_j<x<z_{j+1}$, $j\in r+1:n$. Согласно (7.6), (7.7)

$$S(x) = \sum_{k=j-r+1}^{j} a_k^{(1)} N_{r-1,\,k}(x),$$

причем

$$a_k^{(1)} = \frac{(z_{k+r}-x)\,a_{k-1}^{(0)} + (x-z_k)a_k^{(0)}}{z_{k+r}-z_k} =$$

$$= \frac{1}{z_{k+r}-z_k}\{(z_{k+r}-x)\,\omega_{r,\,k-1}(z) + (x-z_k)\,\omega_{rk}(z)\} =$$

$$= \frac{\omega_{r-1,\,k}(z)}{z_{k+r}-z_k}\,[(z_{k+r}-x)(z-z_k) + (x-z_k)(z-z_{k+r})] =$$

$$= \omega_{r-1,\,k}(z)(z-x).$$

Значит,

$$S(x) = (z-x)\sum_{k=j-r+1}^{j} \omega_{r-1,\,k}(z) N_{r-1,\,k}(x).$$

Продолжая аналогично, получаем

$$S(x) = (z-x)^2 \sum_{k=j-r+2}^{j} \omega_{r-2,\,k}(z) N_{r-2,\,k}(x) = \dots =$$

$$=(z-x)^{r-1}\sum_{k=j-1}^{j}\omega_{1k}(z)N_{1k}(x) = (z-x)^{r-1}\sum_{k=j-1}^{j}(z-z_{k+1})N_{1k}(x) =$$

$$= \frac{(z-x)^{r-1}}{z_{j+1}-z_j}\,[(z_{j+1}-x)(z-z_j) + (x-z_j)(z-z_{j+1})] = (z-x)^r.$$

Тождество (7.8) при $z_j<x<z_{j+1}$ установлено. По непрерывности оно справедливо при $x\in[z_j, z_{j+1}]$, $j\in r+1:n$, и тем самым при всех $x\in[c,d]$. Теорема доказана.

В левой и правой частях (7.8) стоят алгебраические полиномы относительно z. Поскольку они равны тождественно, то и все их коэффициенты равны. Отсюда, в частности, следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} N_{rk}(x) = 1 \text{ при } x\in[c,d].$$

В заключение этого параграфа опишем схему вычисления ν-й производной сплайна S, представленного в форме (7.5). Напомним, что

$$N_{ik}(x)=(z-x)_+^i\,[z_{k+1},\ \ldots,\ z_{k+i+1}]-(z-x)_+^i\,[z_k,\ \ldots,\ z_{k+i}].$$

На основании (6.5) операции дифференцирования по x и взятия разделенной разности можно переставлять. Значит,

$$N'_{ik}(x)=-\,i\,\{(z-x)_+^{i-1}\,[z_{k+1},\ \ldots,\ z_{k+i+1}]-$$
$$-(z-x)_+^{i-1}\,[z_k,\ \ldots,\ z_{k+i}]\}=$$
$$=i\left\{\frac{N_{i-1,\,k}(x)}{z_{k+i}-z_k}-\frac{N_{i-1,\,k+1}(x)}{z_{k+i+1}-z_{k+1}}\right\}.$$

Пусть $z_j<x<z_{j+1}$, $j\in r+1:n$. С учетом равенств $N_{r-1,\,j-r}(x)=0$, $N_{r-1,\,j+1}(x)=0$ имеем

$$S'(x)=\sum_{k=j-r}^{j}a_kN'_{rk}(x)=r\sum_{k=j-r+1}^{j}a_k\frac{N_{r-1,\,k}(x)}{z_{k+r}-z_k}-$$
$$-r\sum_{k=j-r}^{j-1}a_k\frac{N_{r-1,\,k+1}(x)}{z_{r+k+1}-z_{k+1}}=r\sum_{k=j-r+1}^{j}b_k^{(1)}N_{r-1,\,k}(x),$$

$$\text{где } b_k^{(1)}=\frac{b_k^{(0)}-b_{k-1}^{(0)}}{z_{k+r}-z_k};\quad b_k^{(0)}=a_k,\ k\in j-r:j.$$

Дифференцируя ν раз, получаем

$$S^{(\nu)}(x)=r(r-1)\ \ldots\ (r-\nu+1)\ \sum_{k=j-r+\nu}^{j}b_k^{(\nu)}N_{r-\nu,\,k}(x),\tag{7.9}$$

$$\text{где } b_k^{(\nu)}=\frac{b_k^{(\nu-1)}-b_{k-1}^{(\nu-1)}}{z_{k+r-\nu+1}-z_k}.$$

Формула (7.9) установлена при $z_j<x<z_{j+1}$. Если $\nu\leqslant r-1$, то по непрерывности она справедлива при $x\in[z_j,\ z_{j+1}]$.

Теперь ν-я производная $S^{(\nu)}(x)$ представлена в виде линейной комбинации нормализованных B-сплайнов. Для вычисления ее значения в фиксированной точке x можно воспользоваться описанным выше алгоритмом.

§ 8. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Вернемся к задаче кратной интерполяции

$$S^{(\nu)}(x_\mu)=y_\mu^{(\nu)},\quad \mu\in 1:p,\quad \nu\in 0:\sigma_\mu-1.\tag{8.1}$$

Здесь S — сплайн класса (r,m) с фиксированными узлами $t_1<\ldots<t_m$, $\sum_{\mu=1}^{p}\sigma_\mu=n=r+1+m$, $\sigma_\mu\leqslant r+1$ и $\sigma_\mu\leqslant r$, если $x_\mu\in\{t_1,\ \ldots,\ t_m\}$. Отрезок $[c,d]$ выберем так, чтобы $c<t_1<\ldots<t_m<d$ и $x_\mu\in[c,d]$ при всех $\mu\in 1:p$. Воспользуемся представлением S на $[c,d]$ в виде линейной комбинации нормализованных B-сплайнов, построенных по расширенной системе узлов $z_1<z_2<\ldots<z_{n+r+1}$ (см. рис. 6):

$$S(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kN_{rk}(x),\quad x\in[c,\ d].$$

Тогда (8.1) — это система n линейных уравнений относительно коэффициентов $a_1,\ \ldots,\ a_n$. Перепишем ее в векторной форме

$$Da=y.\tag{8.2}$$

Предположим, что выполнены условия (4.5), (4.6) на взаимное расположение узлов $\{t_j\}$ и $\{x_\mu\}$, гарантирующие однозначную разрешимость задачи (8.1), (8.2) при любых правых частях или, что равносильно, неособенность матрицы D. Узлы интерполяции с учетом их кратности

$$\underbrace{x_1,\ \ldots,\ x_1}_{\sigma_1\text{ раз}},\ \ldots,\ \underbrace{x_p,\ \ldots,\ x_p}_{\sigma_p\text{ раз}}$$

переобозначим $\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\ldots\leqslant\xi_n$. В этом случае узлу ξ_i соответствует i-е уравнение системы (8.2). Выясним структуру матрицы D.

Пусть $c=:z_{r+1}\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\ldots\leqslant\xi_{i_2-1}<z_{r+2}$ и $\xi_{i_2}\geqslant z_{r+2}$. Поскольку $V(z_{r+2},\ +\infty)=V(t_1,\ +\infty)\leqslant n-1$, то в $[c,\ z_{r+2})$ имеется хотя бы один узел интерполяции. Далее, $V(-\infty,\ z_{r+2})=V(-\infty,\ t_1)\leqslant r+1$, поэтому $i_2-1\leqslant r+1$.

Согласно лемме 6.1 у матрицы D в строках с номерами $1,\ 2,\ \ldots,\ i_2-1$ отличными от нуля могут быть лишь элементы, стоящие в столбцах с номерами $1,\ 2,\ \ldots,\ r+1$. Выделим ненулевой блок $D_1=D[1:i_2-1,\ 1:r+1]$. Из неравенства $i_2-1\leqslant r+1$ следует, что D_1 содержит диагональные элементы $D[1,\ 1],\ \ldots,\ D[i_2-1,\ i_2-1]$.

Пусть теперь $\xi_{i_s-1}<z_{r+q}\leqslant\xi_{i_s}$. Найдем наименьшее z_{r+k+1}, такое, что $\xi_{i_s}<z_{r+k+1}$, и рассмотрим узлы интерполяции, принадлежащие промежутку $[z_{r+k},\ z_{r+k+1})$:

$$z_{r+k}\leqslant\xi_{i_s}<\xi_{i_s+1}<\ \ldots\ <\xi_{i_{s+1}-1}<z_{r+k+1}\tag{8.3}$$

(если $\xi_{i_s}\geqslant z_n$, то рассматриваются узлы интерполяции из $[z_n,\ z_{n+1}]$). Согласно определению z_{r+k} имеем $V(z_{r+k},\ +\infty)=n-i_s+1$. Вместе с тем

$$V(z_{r+k},\ +\infty)=V(t_{k-1},\ +\infty)\leqslant n-k+1.$$

Значит, $n-i_s+1\leqslant n-k+1$ или $k\leqslant i_s$. Поскольку $V(-\infty,\ {}_{r+k+1})=V(-\infty,\ t_k)\leqslant r+k$, то $i_{s+1}-1\leqslant r+k$.

На основании леммы 6.1 и (8.3) заключаем, что в строках матрицы D с номерами $i_s,\ i_s+1,\ \ldots,\ i_{s+1}-1$. отличными от нуля, могут быть лишь элементы, стоящие в столбцах с номерами k, $k+1$, ..., $k+r$. Обозначим $D_s=D[i_s:i_{s+1}-1,\ j_s:j_s+r]$, где $j_s=k$. Установленные выше неравенства $j_s\leqslant i_s$, $i_{s+1}-1\leqslant j_s+r$ гарантируют принадлежность блоку D_s диагональных элементов

$$D[i_s,\ i_s],\ \dots,\ D[i_{s+1}-1,\ i_{s+1}-1].$$

Итак, доказано, что матрица D системы (8.2) имеет почти блочно-диагональную структуру (рис. 7, *а*), при этом каждый элемент главной диагонали принадлежит одному из ненулевых блоков $D_1, \dots, D_l$. Для единообразия положим $i_1=j_1=1$. Тогда $D_1=D[i_1:i_2-1,\ j_1:j_1+r]$. Отметим, что $i_{l+1}=n+1$. Введем дополнительный индекс $j_{l+1}=n+1$.

а *б*

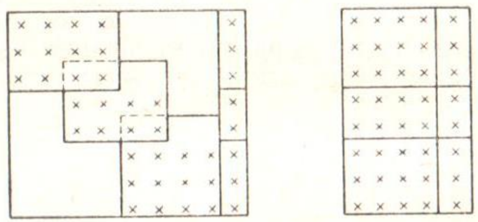


Рис. 7. Схематичное изображение данных системы (8.2)

Теперь опишем специализированный вариант метода Гаусса для численного решения системы (8.2). Сдвинув ненулевые блоки матрицы D к первому столбцу, получим компактное представление данных системы (8.2) в виде матрицы $B=B[1:n,\ 1:r+2]$, в которой в последнем столбце стоит вектор правых частей y (рис. 7, *б*). Образуем блок B_1 из строк матрицы B с номерами $j_1:i_2-1$ и выполним в нем $q=j_2-j_1$ преобразований Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцам. Имеется в виду, что при k от j_1 до j_2-1 производятся следующие операции:

1. Среди элементов $B[k,1], \dots, B[i_2-1,\ 1]$ находится наибольший по модулю. Пусть это будет $B[im,\ 1]$.
2. При $im>k$ меняются местами k-я и im-я строки.
3. k-я строка делится на $B[k,1]$.
4. Выполняются преобразования Гаусса со сдвигом:

```
for    i := k+1 step 1 until i2-1 do
begin  u := B[i, 1];
       for    j := 2 step 1 until r+2 do
       B[i, j-1] := B[i, j] - u×B[k, j];
       B[i, r+2] := B[i, r+1]; B[i, r+1] := 0
end
```

Опишем общую s-ю итерацию. Из преобразованных строк блока B_{s-1} с номерами $j_s:i_s-1$ и новых строк матрицы B

с номерами $i_s:i_{s+1}-1$ составим блок B_s. Выполним в нем $q=j_{s+1}-j_s$ преобразований Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцам и сдвигом так же, как в блоке B_1. При этом индекс k меняется от j_s до $j_{s+1}-1$.

После l-й итерации матрица системы (8.2) будет приведена к треугольному виду. Диагональные элементы, равные единице, разместятся в первом столбце матрицы B. Обратным ходом метода Гаусса вычисляем решение системы (8.2).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

1. Показать, что непрерывную ломаную

$$S(x)=a_0+a_1x+\textstyle\sum_{j=1}^m b_j(x-t_j)_+$$

можно представить в виде $S(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m b_j|x-t_j|$. Получить явные формулы для коэффициентов α_0 и α_1.

2. Проверить, что на ломаной, изображенной на рис. 3, неравенство (3.1) обращается в равенство.

3. Используя в качестве узлов интерполяции кратности не выше 2 точки c, $t_1, \dots, t_m$, d $(m\geqslant 2)$, корректно поставить задачу на интерполяцию сплайнами пятой степени.

4. Пусть $S(f;x)$ — непрерывная ломаная с узлами $t_j=c+jh$, $j\in 1:m$, где $h=(d-c)/(m+1)$, интерполирующая функцию f в точках $c, t_1, \dots, t_m, d$. Доказать, что

$$\sup_{f\in W^2_\infty M}\ \max_{x\in[c,\,d]} |f(x)-S(f;\ x)|=\frac{1}{8}Mh^2.$$

5. В условиях предыдущей задачи показать, что

$$\sup_{f\in W^2_\infty M}\ \sup_{\substack{x\in[c,\,d]\\ x\notin\{t_1,\dots,t_m\}}} |f'(x)-S'(f;\ x)|=\frac{1}{2}Mh.$$

6. Для равноотстоящих узлов $z_j=z_0+jh$, $j\in 0:3$, построить нестандартный кубический B-сплайн

$$B(x)=\alpha_0(x-z_0)_+ +\textstyle\sum_{j=0}^{3}{}' b_j(x-z_j)_+^3,$$

нормированный условием $b_3=1$ и обращающийся в нуль вне (z_0, z_3). Доказать, что $B(x)>0$ при $x\in(z_0, z_3)$. (Такой B-сплайн используется при интерполяции функций f, удовлетворяющих граничным условиям $f(z_0)=f''(z_0)=0$.)

7. Даны равноотстоящие узлы $z_j=z_0+jh$, $j\in 0:r+1$. Найти коэффициенты B-сплайна

$$B(x)=\textstyle\sum_{j=0}^{r+1} b_j\,(x-z_j)_+^r,$$

нормированного условием $b_{r+1}=1$ и обращающегося в нуль вне (z_0, z_{r+1}). Проверить, что этот B-сплайн симметричен относительно середины интервала (z_0, z_{r+1}).

8. Пусть функция f имеет на отрезке $[z_k, z_{k+r+1}]$ абсолютно непрерывную r-ю производную. Получить следующее представление для разделенной разности $(r+1)$-го порядка:

$$f[z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+r+1}] = \frac{1}{r!}\int_{z_k}^{z_{k+r+1}} B_{rk}(x) f^{(r+1)}(x)dx,$$

где $B_{rk}(x)=(z-x)_+^r[z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+r+1}]$.

9. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_{k+1}+\ldots+z_{k+r}}{r} N_{rk}(x) \equiv x \text{ на } [c, d].$$

10. Составить программу вычисления значения нормализованного B-сплайна $N_{rk}(x)$ в фиксированной точке $x \in [c, d]$.

Глава II. СОВЕРШЕННЫЕ СПЛАЙНЫ И ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей главе изучалась задача кратной интерполяции при помощи сплайнов с фиксированными узлами. Расширим представление об интерполяции. Предположим, что известны n значений

$$f(x_1), f'(x_1), \ldots, f^{(\sigma_1-1)}(x_1), \ldots, f(x_p), f'(x_p), \ldots, f^{(\sigma_p-1)}(x_p).$$

Они образуют исходную информацию $I(f)$ о функции f. Поставим задачу: найти формулу, зависящую от $I(f)$, по которой наилучшим образом восстанавливается значение f в фиксированной точке x равномерно по всем f из некоторого класса W. В этой главе в качестве W обычно берется $W_\infty^r M$. Что касается конкурирующих формул, то они могут быть совершенно произвольными, как линейно, так и нелинейно зависящими от $I(f)$.

Результат оказывается неожиданным. Наилучшая на классе $W_\infty^r M$ формула получается при интерполяции сплайнами степени $r-1$ со специально подобранными узлами $t_1, \ldots, t_{n-r}$. Выбор узлов t_j — принципиально новая нелинейная задача. Ее решение сводится к построению совершенного сплайна T класса $(r, n-r)$, удовлетворяющего условиям

$$T^{(\nu)}(x_k)=0, \quad \nu \in 0:\sigma_k-1, \quad k \in 1:p. \qquad (1.1)$$

Кратко изложим содержание главы по параграфам. В § 2 рассматривается общая задача оптимального восстановления линейного функционала $L(f)$ по значениям линейных функционалов $L_1(f), \ldots, L_n(f)$ равномерно относительно f из выпуклого уравновешенного множества W. Устанавливается соотношение двойственности. Доказывается существование *линейного* оптимального метода восстановления и приводится достаточное условие его единственности.

Непосредственное применение общих результатов позволяет решить в § 3 задачу оптимальной интерполяции на классе $W^r_\infty M$ в двух частных случаях $r=1$ и $r=n$. (Напомним, что n — это размерность вектора исходной информации $I(f)$.) Исследование основного случая $1<r<n$ требует серьезной подготовки.

В § 4 вводится функция Тихомирова T_{rm}. Это совершенный сплайн степени r с m узлами, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в равномерной метрике. Узлы совершенного сплайна не фиксируются, поэтому задача построения T_{rm} является нелинейной. Доказывается существование и единственность решения этой задачи и дается его альтернансная характеристика. В дальнейшем важную роль играют узлы и нули функции Тихомирова.

В § 5 установлены существование и единственность решения системы (1.1). Этот результат называется основной теоремой алгебры для совершенных сплайнов. Его можно переформулировать так: существует и единствен совершенный сплайн с наперед заданными нулями. Система (1.1) — нелинейная, поскольку и здесь узлы совершенного сплайна T не фиксируются.

При анализе нелинейных задач из § 4 и 5 используются без доказательства два топологических факта: теорема Борсука о существовании нуля у непрерывного нечетного отображения сферы S^n в $\mathbf{R}^n$ и теорема о том, что при гомеоморфном отображении одного множества из $\mathbf{R}^n$ в другое внутреняя точка переходит во внутреннюю. Кроме того, делается ссылка на теорему Чебышева о существовании, единственности и альтернансной характеристике алгебраического полинома наилучшего равномерного приближения непрерывной функции на конечном отрезке.

В § 6, который является основным в главе II, решается задача оптимальной интерполяции на классе $W^r_\infty M$ при $1<r<n$. Опишем схему построения оптимального метода интерполяции. Из системы (1.1) находим узлы $t_1, \ldots, t_{n-r}$. По существу они зависят только от узлов интерполяции x_k и их кратностей σ_k. Затем строим сплайн $S(f; x)$ класса $(r-1, n-r)$ с узлами $t_1, \ldots, t_{n-r}$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$S^{(\nu)}(f;\ x_k)=f^{(\nu)}(x_k),\quad \nu\in 0:\sigma_k-1,\quad k\in 1:p.$$

При фиксированном x приближенная формула

$$f(x)\approx S(f; x) \tag{1.2}$$

является наилучшей на классе $W^r_\infty M$. Отметим, что формула (1.2) пригодна сразу для всех $x\in[-1, 1]$.

В § 7 исходная информация задается в общем виде $I(f)=(L_1(f), \ldots, L_l(f))$, где L_i — произвольные линейные функционалы. Ставится вопрос: как выбрать L_i, чтобы погрешность оптимального восстановления значений $f(x)$ для функций класса $W^r_\infty M$ была минимальной равномерно по всем $x\in[-1, 1]$. Показано, что наилучшую исходную информацию образуют значения f в нулях функции Тихомирова $T_{r,\,n-r}$.

В § 8 исследуется задача оптимального на классе $W^r_\infty M$ восстановления нелинейного функционала

$$L(f)=\max_{x\in[-1,\,1]} f(x).$$

Допускается вычисление значений f в n точках. Оптимальной оказывается следующая стратегия:

вычислить f в нулях $u_1, \ldots, u_n$ функции Тихомирова $T_{r,\,n-r}$;

построить сплайн $S(f; x)$ класса $(r-1, n-r)$ с теми же узлами, что и у $T_{r,\,n-r}$, удовлетворяющий интерполяционным условиям $S(f; u_k)=f(u_k)$, $k\in 1:n$;

найти максимум $S(f; x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Приближенная формула

$$\max_{x\in[-1,\,1]} f(x)\approx \max_{x\in[-1,\,1]} S(f;\ x)$$

будет наилучшей на классе $W^r_\infty M$.

§ 2. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть $\mathbf{X}$ — линейное пространство и $W\subset\mathbf{X}$ — выпуклое уравновешенное множество. Напомним, что множество называется уравновешенным, если вместе с элементом f оно содержит и $-f$. Предположим, что на $\mathbf{X}$ заданы линейные функционалы $L, L_1, \ldots, L_n$. Требуется наилучшим образом восстановить значение $L(f)$, где $f\in W$, по известным значениям $L_1(f), \ldots, L_n(f)$.

Методы восстановления определяются функциями $\Phi: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, на которые не накладывается никаких ограничений. Введем величины

$$e(\Phi)=\sup_{f\in W}|L(f)-\Phi(L_1(f),\ \ldots,\ L_n(f))|,$$

$$R=\inf_{\Phi} e(\Phi) \tag{2.1}$$

и назовем их соответственно погрешностью метода Φ и оптимальной погрешностью. Если инфимум по Φ в (2.1) достигается на Φ_*, то Φ_* называется оптимальным методом. Другими словами, оптимальной является приближенная формула

$$L(f)\approx\Phi_*(L_1(f),\ \ldots,\ L_n(f)).$$

Ее погрешность на классе W равна R.

Теорема 2.1. *Существует оптимальный линейный метод восстановления, т. е. найдутся коэффициенты* $a_1^*, \ldots, a_n^*$, *такие, что*

$$R = \sup_{f \in W} |L(f) - \textstyle\sum_{i=1}^n a_i^* L_i(f)|.$$

Кроме того, справедливо соотношение двойственности

$$R = \sup_{\{f \in W \mid L_i(f)=0,\ i \in 1:n\}} |L(f)|.$$

Доказательство. Рассмотрим множество D в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ (рис. 8):

$$D = \{y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \mid y_0 = L(f),\ y_i = L_i(f),\ i \in 1:n;\ f \in W\}.$$

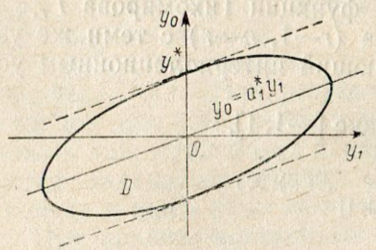


Рис. 8. Множество D

Поскольку $L, L_1, \ldots, L_n$ — линейные функционалы и W — выпуклое уравновешенное множество, то D также выпукло и уравновешено. Положим

$$y^* = \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in D} y_0.$$

Нетрудно понять, что

$$y^* = \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in D} |y_0| = \sup_{\{f \in W \mid L_i(f)=0,\ i \in 1:n\}} |L(f)|.$$

Для любого метода $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ имеем

$$e(\Phi) := \sup_{f \in W} |L(f) - \Phi(L_1(f), \ldots, L_n(f))| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\{f \in W \mid L_i(f)=0,\ i \in 1:n\}} |L(f) - \Phi(\mathbf{O})| =$$

$$= \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in D} \max\{|y_0 - \Phi(\mathbf{O})|,\ |-y_0 - \Phi(\mathbf{O})|\}.$$

Вместе с тем

$$|y_0| = \frac{1}{2}|(y_0 - \Phi(\mathbf{O})) + (y_0 + \Phi(\mathbf{O}))| \leqslant \frac{1}{2}|y_0 - \Phi(\mathbf{O})| +$$

$$+ \frac{1}{2}|-y_0 - \Phi(\mathbf{O})| \leqslant \max\{|y_0 - \Phi(\mathbf{O})|,\ |-y_0 - \Phi(\mathbf{O})|\}.$$

Значит,

$$e(\Phi) \geqslant \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in D} |y_0| = y^*. \qquad (2.2)$$

Отсюда следует неравенство $R \geqslant y^*$.

Отметим, что при $y^* = +\infty$ теорема формально справедлива, так как в этом случае согласно (2.2) любой метод является оптимальным и $R = y^*$.

Пусть $y^* < +\infty$. Если все функционалы $L_1, \ldots, L_n$ тождественно равны нулю на W, то для произвольных $a_1, \ldots, a_n$

$$y^* = \sup_{f \in W} |L(f)| = \sup_{f \in W} |L(f) - \textstyle\sum_{i=1}^n a_i L_i(f)| \geqslant R \geqslant y^*.$$

Получили, что $R = y^*$ и любой линейный метод восстановления — оптимальный.

Остается рассмотреть случай, когда $y^* < +\infty$ и не все функционалы $L_1, \ldots, L_n$ тождественно равны нулю на W. Из системы $\{L_1, \ldots, L_n\}$ выделим линейно независимую на W подсистему, скажем, $\{L_1, \ldots, L_k\}$, так, что остальные функционалы $L_{k+1}, \ldots, L_n$ линейно выражаются на W через $L_1, \ldots, L_k$. Введем множество Ω в пространстве $\mathbf{R}^{k+1}$:

$$\Omega = \{Y = (y_0, y_1, \ldots, y_k) \mid y_0 = L(f);\ \ y_i = L_i(f),\ i \in 1:k;\ f \in W\}.$$

Очевидно, что

$$y^* = \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in \Omega} y_0.$$

Точка $Y^* = (y^*, 0, \ldots, 0)$ является граничной точкой выпуклого уравновешенного множества Ω. По теореме отделимости (см., например, [17, с. 93]) найдется ненулевой вектор $C = (c_0, c_1, \ldots, c_k)$ со свойством

$$|\langle C, Y\rangle| \leqslant \langle C, Y^*\rangle \qquad \forall Y \in \Omega. \qquad (2.3)$$

Здесь $\langle C, Y\rangle$ — скалярное произведение векторов C и Y.

Перепишем (2.3) в развернутом виде:

$$|c_0 L(f) + \textstyle\sum_{i=1}^k c_i L_i(f)| \leqslant c_0 y^* \quad \forall f \in W. \qquad (2.4)$$

В силу линейной независимости на W функционалов $L_1, \ldots, L_k$ коэффициент c_0 отличен от нуля. Поделим (2.4) на $|c_0|$. Учитывая, что правая часть в (2.4) равна $|c_0| y^*$, получаем

$$R \leqslant \sup_{f \in W} |L(f) - \textstyle\sum_{i=1}^n a_i^* L_i(f)| \leqslant y^* \leqslant R,$$

где $a_i^* = -c_i/c_0$, $i \in 1:k$; $a_i^* = 0$, $i \in k+1:n$. Теорема доказана.

Следствие (соотношение двойственности С. М. Никольского [41]). Пусть $\mathbf{X}$ — нормированное пространство и B — единичный шар в нем, т. е. $B = \{f \in X \mid \|f\| \leqslant 1\}$. Обозначим X^* пространство линейных непрерывных функционалов L на $\mathbf{X}$ с нормой $\|L\|_* = \sup\limits_{f\in B} |L(f)|$. Тогда для произвольных функционалов $L, L_1, \ldots, L_n$ из $\mathbf{X}^*$

$$\inf_{a_1, \ldots, a_n} \| L - \sum_{i=1}^n a_i L_i \|_* = \sup_{\{f\in B \mid L_i(f)=0,\ i\in 1:n\}} |L(f)|.$$

Рассмотрим вопрос о единственности **линейного** оптимального метода восстановления. Введем множества

$$W_k(t) = \{ f \in W \mid L_i(f) = 0,\ i \neq k;\ L_k(f) = t\},\quad k \in 1:n,$$

и предположим, что они непусты при $t\in(-\delta, \delta)$, где δ — некоторое положительное число. Введем функции

$$\varphi_k(t) = \sup_{f\in W_k(t)} L(f),\quad k\in 1:n.$$

Теорема 2.2. *Пусть $R < +\infty$ и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ дифференцируемы при $t=0$. Тогда метод*

$$\Phi_*(L_1(f), \ldots, L_n(f)) = \sum_{k=1}^n \varphi_k'(0) L_k(f)$$

является единственным линейным оптимальным методом восстановления.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 оптимальный линейный метод восстановления существует. Это значит, что найдутся коэффициенты $a_1^*, \ldots, a_n^*$, при которых

$$|L(f) - \sum_{k=1}^n a_k^* L_k(f)| \leqslant R \quad \forall f \in W.$$

Перепишем последнее неравенство в эквивалентном виде

$$y_0 - \sum_{k=1}^n a_k^* y_k \leqslant y^* \quad \forall (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in D,$$

где $R = y^* = \sup\limits_{(y_0, 0, \ldots, 0)\in D} y_0$.

Зафиксируем $k\in 1:n$ и рассмотрим множество в $\mathbf{R}^2$:

$$D_k = \{(y_0, y_k) \mid (y_0, 0, \ldots, 0, y_k, 0, \ldots, 0) \in D\}.$$

Поскольку $y_0 - a_k^* y_k \leqslant y^*$ для всех $(y_0, y_k)\in D_k$ и $y^* = \sup\limits_{(y_0, 0)\in D_k} y_0$, то прямая, задаваемая уравнением $y_0 - a_k^* y_k = y^*$, будет опорной к D_k в точке $(y^*, 0)$. Вместе с тем

$$\varphi_k(t) = \sup_{(y_0, t)\in D_k} y_0,\quad \varphi_k(0) = y^*,$$

так что в окрестности точки $(y^*, 0)$ граница множества D_k задается уравнением $y_0 = \varphi_k(y_k)$. В силу дифференцируемости функции $\varphi_k(t)$ при $t=0$ опорная прямая совпадает с касатель-

ной к графику φ_k в точке $(y^*, 0)$. Отсюда следует, что $a_k^* = \varphi_k'(0)$. Теорема доказана.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Обозначим $W_\infty^1 M$ класс функций f, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица с константой M:

$$W_\infty^1 M = \{ f \mid |f(t_2) - f(t_1)| \leqslant M |t_2 - t_1| \quad \forall t_1, t_2 \in [-1, 1]\}.$$

Рассмотрим задачу оптимальной интерполяции на классе $W_\infty^1 M$, т. е. задачу оптимального восстановления функционала $L(f) = f(x)$ по информации $I(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$, где $x, x_1, \ldots, x_n$ — фиксированные точки отрезка $[-1, 1]$.

Согласно теореме 2.1 оптимальная погрешность интерполяции

$$R(x) = \inf_{\Phi} \sup_{f\in W_\infty^1 M} |f(x) - \Phi(I(f))|$$

может быть представлена в виде

$$R(x) = \sup_{\{f\in W_\infty^1 M \mid f(x_i)=0,\ i\in 1:n\}} |f(x)|. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Справедливо равенство*

$$R(x) = M|x - x_k| \quad \text{при} \quad x\in[\xi_{k-1}, \xi_k],\ k\in 1:n, \tag{3.2}$$

где $\xi_k = (x_k + x_{k+1})/2$, $k\in 1:n-1$; $\xi_0 = -1$, $\xi_n = 1$.

Доказательство. Функцию, стоящую в правой части формулы (3.2), обозначим $f_0(x)$. Для $f\in W_\infty^1 M$, $f(x_i)=0$, $i\in 1:n$, при $x\in[\xi_{k-1}, \xi_k]$ имеем

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leqslant M|x - x_k| = f_0(x).$$

В силу (3.1) $R(x) \leqslant f_0(x)$. Вместе с тем $f_0\in W_\infty^1 M$, $f_0(x_i) = 0$, $i\in 1:n$, поэтому $R(x)\geqslant f_0(x)$. Получили, что $R(x) = f_0(x)$. Лемма доказана.

С помощью теоремы 2.2 построим линейный оптимальный метод интерполяции. При фиксированном $k\in 1:n$ рассмотрим множество

$$W_k(t) = \{ f\in W_\infty^1 M \mid f(x_i) = 0,\quad i\neq k;\quad f(x_k) = t\}$$

и введем функцию

$$\varphi_k(x, t) = \sup_{f\in W_k(t)} f(x).$$

Легко понять, что при $t>0$ функция $\varphi_k(x,t)$ имеет вид, изображенный на рис. 9. В частности,

$$\begin{aligned} \varphi_k(x,t)&=R(x) \quad \text{при } x\overline{\in}(\xi_{k-1},\xi_k), \\ \varphi_k(x,t)&=t+M|x-x_k| \quad \text{при } x\in[\xi_{k-1}(t),\xi_k(t)], \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\xi_{k-1}(t)=\xi_{k-1}+t/(2M)$, $\xi_k(t)=\xi_k-t/(2M)$.

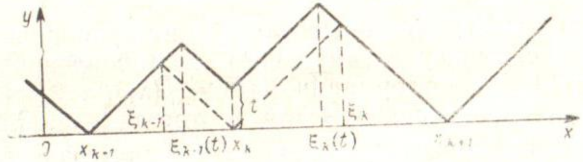


Рис. 9. График функции $y=\varphi_k(x,t)$

На основании (3.3) получаем

$$\frac{\partial\varphi_k(x,+0)}{\partial t}=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant\xi_{k-1} \text{ или } x\geqslant\xi_k,\\ 1, & \text{если } x\in(\xi_{k-1},\xi_k).\end{cases}$$

Аналогично показывается, что

$$\frac{\partial\varphi_k(x,-0)}{\partial t}=\begin{cases}0, & \text{если } x<\xi_{k-1} \text{ или } x>\xi_k,\\ 1, & \text{если } x\in[\xi_{k-1},\xi_k].\end{cases}$$

Таким образом, производная функции φ_k при $t=0$ существует для всех $x\neq\xi_k$, $k\in 1:n-1$, и

$$\frac{\partial\varphi_k(x,0)}{\partial t}=\chi_k(x):=\begin{cases}0, & \text{если } x<\xi_{k-1} \text{ или } x>\xi_k,\\ 1, & \text{если } x\in(\xi_{k-1},\xi_k).\end{cases}$$

По теореме 2.2 при $x\overline{\in}\{\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}\}$ единственный линейный оптимальный метод интерполяции имеет вид (рис. 10)

$$\Phi_*(I(f))=\sum\nolimits_{k=1}^n f(x_k)\,\chi_k(x).$$

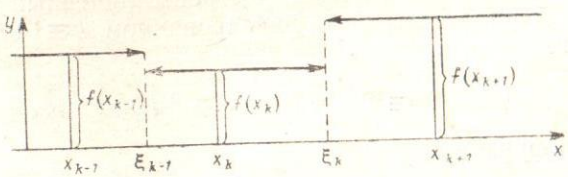


Рис. 10. Оптимальный метод интерполяции на классе $W^1_\infty M$

При $x=\xi_k$ линейный оптимальный метод интерполяции неединствен. Действительно, при восстановлении функционала $L(f)=f(\xi_k)$ метод

$$\Phi(I(f))=\alpha f(x_k)+(1-\alpha)f(x_{k+1})$$

оптимален при всех $\alpha\in[0,1]$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления на классе $W^r_\infty M$, состоящем из функций f, $(r-1)$-я производная которых удовлетворяет на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица с константой M:

$$W^r_\infty M=\{f\,|\,|f^{(r-1)}(t_2)-f^{(r-1)}(t_1)|\leqslant M|t_2-t_1| \quad \forall t_1,\ t_2\in[-1,1]\}.$$

По теореме 2.1 при восстановлении линейного функционала $L(f)$ по значениям линейных функционалов $L_1(f),\ldots,L_n(f)$ существует линейный оптимальный метод

$$L(f)\approx\sum\nolimits_{i=1}^n a_i^*L_i(f).$$

Покажем, что при $R<+\infty$ оптимальный на классе $W^r_\infty M$ линейный метод точен на полиномах степени не выше $r-1$, т. е.

$$L(Q_k)=\sum\nolimits_{i=1}^n a_i^*L_i(Q_k), \quad k\in 0:r-1, \tag{3.4}$$

где Q_k — полином степени k.

Пусть $c:=L(Q_k)-\sum_{i=1}^n a_i^*L_i(Q_k)\neq 0$. Учитывая, что $\lambda Q_k\in W^r_\infty M$ при всех вещественных λ, получаем

$$R=\sup_{f\in W^r_\infty M}|L(f)-\sum\nolimits_{i=1}^n a_i^*L_i(f)|\geqslant\sup_\lambda|L(\lambda Q_k)-\sum\nolimits_{i=1}^n a_i^*L_i(\lambda Q_k)|=$$
$$=\sup_\lambda|\lambda c|=+\infty.$$

Последнее противоречит условию $R<+\infty$.

Иногда из (3.4) коэффициенты a_i^* определяются однозначно. Для этого необходимо, чтобы

$$\operatorname{rank}\,[L_i(Q_k)]_{i\in 1:n,\ k\in 0:r-1}=n.$$

В частности, должно выполняться неравенство $n\leqslant r$.

Если $R<+\infty$ и система (3.4) имеет единственное решение a_i^*, то $a_1^*,\ldots,a_n^*$ — коэффициенты линейного оптимального метода восстановления. Отметим, что для любого другого набора коэффициентов $a_1,\ldots,a_n$ погрешность на классе $W^r_\infty M$ равна $+\infty$.

Приведем два примера.

Пример 1. Пусть $L(f)=f(x)$, $L_\nu(f)=f^{(\nu)}(x_0)$, $\nu\in 0:r-1$, где x и x_0 — фиксированные точки отрезка $[-1,1]$.

В данном случае $n=r$. Запишем выражение для оптимальной погрешности на классе $W^r_\infty M$:

$$R(x)=\sup_{\{f\in W^r_\infty M \mid f^{(\nu)}(x_0)=0,\ \nu\in 0:r-1\}} |f(x)|.$$

По формуле Тейлора функция $f\in W^r_\infty M$, удовлетворяющая условиям $f^{(\nu)}(x_0)=0$, $\nu\in 0:r-1$, допускает представление

$$f(t)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{x_0}^{t}(t-u)^{r-1}f^{(r)}(u)\,du,$$

причем $|f^{(r)}(u)|\leqslant M$ для почти всех $u\in[-1,1]$. **Значит,**

$$R(x)\leqslant\frac{M}{(r-1)!}\left|\int_{x_0}^{x}(x-u)^{r-1}du\right|=\frac{M}{r!}|x-x_0|^r<+\infty.$$

Рассмотрение функции $f_0(t)=M(t-x_0)^r/r!$ показывает, что $R(x)=M|x-x_0|^r/r!$.

Возьмем $Q_k(t)=(t-x_0)^k$. Тогда система (3.4) примет вид

$$(x-x_0)^k=\sum_{\nu=0}^{r-1}a^*_\nu[(t-x_0)^k]^{(\nu)}_{t=x_0}=k!\,a^*_k,\quad k\in 0:r-1.$$

Она имеет единственное решение $a^*_k=(x-x_0)^k/k!$. Таким образом, единственным линейным оптимальным методом восстановления значения $f(x)$ по информации $I(f)=(f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(r-1)}(x_0))$ на классе $W^r_\infty M$ является отрезок ряда Тейлора:

$$f(x)\approx\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x_0).$$

П р и м е р 2. Тот же функционал $L(f)=f(x)$ будем восстанавливать по информации

$$I(f)=\{f^{(\nu)}(x_j)\mid \nu\in 0:\sigma_j-1,\quad j\in 1:p\},$$

где $\sigma_j\in 1:r-1$, $\sum_{j=1}^{p}\sigma_j=r$. Используя теорему об оценке погрешности эрмитовой интерполяции полиномами степени не выше $r-1$ ([4, с. 119]) и теорему 2.1, легко показать, что на классе $W^r_\infty M$

$$R(x)=\frac{M}{r!}|(x-x_1)^{\sigma_1}\ \ldots\ (x-x_p)^{\sigma_p}|.$$

Обозначим $H_{i\mu}$ фундаментальные полиномы эрмитовой интерполяции. Они определяются соотношениями

$$H^{(\nu)}_{i\mu}(x_j)=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\ \mu=\nu,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Поскольку система

$$H_{i\mu}(x)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{\nu=0}^{\sigma_j-1}a^*_{j\nu}H^{(\nu)}_{i\mu}(x_j)$$

имеет единственное решение $a^*_{i\mu}=H_{i\mu}(x)$, то единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$\Phi_*(I(f))=\sum_{j=1}^{p}\sum_{\nu=0}^{\sigma_j-1}H_{j\nu}(x)f^{(\nu)}(x_j).$$

§ 4. СОВЕРШЕННЫЕ СПЛАЙНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ

Важную роль в исследовании общей задачи оптимальной интерполяции на классе $W^r_\infty M$ играют совершенные сплайны. Совершенным сплайном степени r с m узлами $t_1<t_2<\ldots<t_m$ называется функция вида

$$T(x)=\frac{x^r}{r!}+\sum_{i=0}^{r-1}a_ix^i+\frac{2}{r!}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j(x-t_j)^r_+.$$

Будем считать, что узлы t_j лежат в интервале $(-1,1)$, т. е.

$$-1=:t_0<t_1<\ldots<t_m<t_{m+1}:=1. \qquad (4.1)$$

Совершенный сплайн характеризуется тем, что его $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна и $T^{(r)}(x)=(-1)^{j-1}$ при $x\in(t_{j-1},t_j)$, $j\in 1:m$.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|T\|:=\max_{x\in[-1,1]}|T(x)|\to\inf, \qquad (4.2)$$

где инфимум берется по всем коэффициентам a_i и узлам t_j, удовлетворяющим условию (4.1). Покажем, что решение этой задачи существует и единственно.

При $r=1$ решение очевидно (рис. 11). Поэтому предположим, что $r\geqslant 2$. Установим вначале существование совершенного сплайна с $r+m+1$ точками альтернанса.

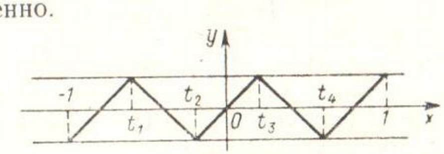


Рис. 11. Решение задачи (4.2) при $r=1$

Лемма 4.1. *Существует совершенный сплайн T_{rm}, такой, что в некоторых точках x_i, $-1=x_0<x_1<\ldots<x_{r+m}=1$, выполняются соотношения*

$$T_{rm}(x_i)=(-1)^{r+i}\|T_{rm}\|,\quad i\in 0:r+m. \qquad (4.3)$$

Доказательство основано на теореме Борсука. Построим непрерывное нечетное отображение сферы

$$S^m = \{s = (s_1, \ldots, s_{m+1}) \mid \sum_{i=1}^{m+1} |s_i| = 2\}$$

в пространство $\mathbf{R}^m$. Для этого сопоставим вектору $s \in S^m$ разбиение отрезка $[-1, 1]$:

$$t_0 = -1; \quad t_j = -1 + \sum_{i=1}^{j} |s_i|, \quad j \in 1 : m+1. \tag{4.4}$$

Каждая точка $x \in [-1, 1] \setminus \{t_0, t_1, \ldots, t_{m+1}\}$ принадлежит некоторому интервалу (t_{j-1}, t_j). Положим

$$g_s(x) = \operatorname{sign} s_j.$$

Пусть далее

$$f_s(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^{1} (x-t)_+^{r-1} g_s(t)\,dt,$$

$$T_s(x) = f_s(x) - P_s(x),$$

где $P_s(x) = \sum_{i=0}^{r+m-1} a_i(s) x^i$ — полином степени $r+m-1$ наилучшего равномерного приближения функции f_s на отрезке $[-1, 1]$. По теореме П. Л. Чебышева [20, с. 21] T_s имеет $r+m+1$ точек альтернанса.

Рассмотрим отображение $\tau : S^m \to \mathbf{R}^m$,

$$\tau(s) = (a_r(s), a_{r+1}(s), \ldots, a_{r+m-1}(s)).$$

Легко проверить, что $\tau(-s) = \tau(s)$. Покажем, что отображение τ непрерывно на S^m.

Пусть $s^{(k)} = (s_1^{(k)}, \ldots, s_{m+1}^{(k)}) \in S^m$ и $s^{(k)} \to s := (s_1, \ldots, s_{m+1})$ при $k \to \infty$. Вектору $s^{(k)}$ сопоставим точки $t_j^{(k)}$ по формуле, аналогичной (4.4). Тогда $t_j^{(k)} \to t_j$ при всех $j \in 0 : m+1$. Мера множества

$$G_k = \{x \in [-1, 1] \mid g_{s^{(k)}}(x) \neq g_s(x)\}$$

стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому $\|f_{s^{(k)}} - f_s\| \to 0$. Из последнего условия в силу единственности полинома наилучшего приближения следует, что $a_i(s^{(k)}) \to a_i(s)$ при всех $i \in 0 : r+m-1$. В частности, $\tau(s^{(k)}) \to \tau(s)$.

Итак, τ — непрерывное нечетное отображение сферы S^m в $\mathbf{R}^m$. По теореме Борсука [29, с. 106] существует вектор $s^* \in S^m$, такой, что $\tau(s^*) = \mathbf{0}$. Это значит, что P_{s^*} — полином степени не выше $r-1$.

По построению T_{s^*} имеет $r+m+1$ точек альтернанса на $[-1, 1]$. Тем самым $T_{s^*}^{(r-1)}$ обращается в нуль не менее $m+1$ раз. Но $T_{s^*}^{(r-1)}$ — непрерывная ломаная, у которой не более m

узлов и отсутствуют нуль-интервалы. Значит, у ломаной $T_{s^*}^{(r-1)}$ ровно m узлов и ровно $m+1$ простых нулей на $(-1, 1)$. Отсюда следует, что функция $g_{s^*} = T_{s^*}^{(r)}$ на $(-1, 1)$ ровно m раз меняет знак. Это возможно лишь тогда, когда все компоненты $s_1^*, \ldots, s_{m+1}^*$ вектора s^* отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки, т. е.

$$\operatorname{sign} s_j^* = \xi(-1)^{j-1}, \quad j \in 1 : m+1; \quad \xi = \pm 1.$$

Функция $T_{rm} = \xi T_{s^*}$ является совершенным сплайном. Кроме того, T_{rm} обладает $r+m+1$ точками альтернанса $-1 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{r+m} \leqslant 1$, в которых

$$T_{rm}(x_i) = \eta(-1)^i \|T_{rm}\|, \quad i \in 0 : r+m; \quad \eta = \pm 1.$$

Покажем, что $x_0 = -1$, $x_{r+m} = 1$, $\eta = (-1)^r$.

Согласно лемме 1.3.1 $Z(T'_{rm}) \leqslant r-1+m$. Вместе с тем $T'_{rm}(x_i) = 0$, если $x_i \in (-1, 1)$. Значит, необходимо $x_0 = -1$, $x_{r+m} = 1$.

Далее, все нули T_{rm} простые и лежат в $(-1, 1)$. В частности, $\operatorname{sign} T_{rm}(-1) = \operatorname{sign} T_{rm}(x)$ при $x < -1$. Учитывая, что $(-1)^r T_{rm}(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$, приходим к равенству $\eta = (-1)^r$. Лемма доказана.

Для дальнейшего потребуется оценка числа нулей и нуль-интервалов с учетом их кратности сплайнов специального вида

$$S(x) = \sum_{i=0}^{r-1} c_i x^i + \sum_{j=1}^{2N} \xi_j (x - t_j)_+^r, \tag{4.5}$$

где $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{2N}$, $\xi_j = \pm 1$ и $S^{(r)}(x) = 0$ при $x > t_{2N}$.

Лемма 4.2. *Пусть S — сплайн вида (4.5) и $S \not\equiv 0$. Тогда $Z(S) \leqslant r-1+N$.*

Доказательство. При $S^{(r-1)} \equiv 0$ лемма тривиальна. Поэтому предположим, что $S^{(r-1)} \not\equiv 0$. По теореме Ролля $Z(S) \leqslant Z(S^{(r-1)}) + r - 1$. Остается показать, что для ломаной $g = S^{(r-1)}/r!$ справедлива оценка $Z(g) \leqslant N$.

Имеем

$$g(x) = c + \sum_{j=1}^{2N} \xi_j (x - t_j)_+, \quad \xi_j = \pm 1,$$

$$g'(x) = 0 \text{ при } x > t_{2N}.$$

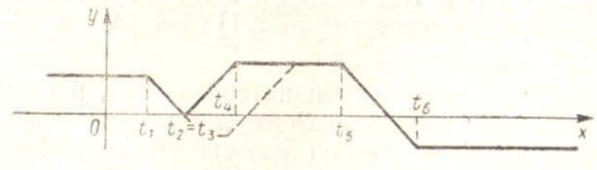


Рис. 12. Переход к ломаной с простыми нулями

Вначале рассмотрим случай, когда у g нет нуль-интервалов. Малым шевелением узлов (рис. 12) можно перейти к ломаной

g_1 того же вида, у которой все нули будут простыми и $Z(g_1)=Z(g)$. Обозначим $x_1, \ldots, x_p$ упорядоченные по возрастанию нули g_1. В каждом интервале (x_{k-1}, x_k), $k\in 2:p$, имеется по крайней мере два узла ломаной g_1, а в интервалах $(-\infty, x_1)$, $(x_p, +\infty)$ не менее чем по одному. Значит, $2(p-1)+2\leqslant 2N$. Отсюда следует, что $Z(g)=Z(g_1)=p\leqslant N$.

Если у g есть нуль-интервалы, то от них можно избавиться малым шевелением узлов (рис. 13), не меняя при этом величину Z. Таким образом, $Z(g)\leqslant N$. Лемма доказана.

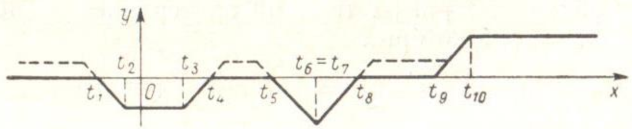


Рис. 13. Переход к ломаной без нуль-интервалов

Вернемся к задаче (4.2).

Теорема 4.1. *Решение задачи* (4.2) *существует и единственно. Для того чтобы совершенный сплайн T_{rm} был решением задачи* (4.2), *необходимо и достаточно, чтобы при некоторых $-1=x_0<x_1<\ldots<x_{r+m}=1$ выполнялось соотношение* (4.3).

Доказательство. Согласно лемме 4.1 существует совершенный сплайн T_{rm} с $r+m+1$ точками альтернанса $-1=x_0<x_1<\ldots<x_{r+m}=1$. Возьмем любой другой совершенный сплайн T, $T\neq T_{rm}$, и покажем, что $\|T\|>\|T_{rm}\|$. Отсюда будут следовать существование и единственность совершенного сплайна, наименее уклоняющегося от нуля, и необходимость условия (4.3).

Допустим, рассуждая от противного, что найдется совершенный сплайн $T_0\neq T_{rm}$, у которого $\|T_0\|\leqslant\|T_{rm}\|$. Рассмотрим функцию $S_0=(r!/2)(T_{rm}-T_0)$. Это сплайн вида (4.5). К тому же $S_0\neq 0$.

Предположим, что S_0 имеет q нуль-интервалов (α_j, β_j), $j\in 1:q$, и среди них ω бесконечных, $\omega\in\{0, 1, 2\}$. Введем обозначения: $\varkappa_j$ — количество узлов T_{rm}, содержащихся в (α_j, β_j); Δ_j — замыкание (α_j, β_j); D_k, $k\in 1:q+1-\omega$,— промежутки, на которые распадается множество $[-1, 1]\setminus\bigcup_{j=1}^{q}\Delta_j$; μ_k — количество точек x_i, попавших в D_k.

Узлы T_{rm}, принадлежащие нуль-интервалу (α_j, β_j) сплайна S_0, являются также узлами T_0. Соответствующие слагаемые у T_{rm} и T_0 равны и при вычитании взаимно уничтожаются. Поэтому реально в представлении вида (4.5) для S_0 величина N не превосходит $m-\sum_{j=1}^{q}\varkappa_j$. По лемме 4.2

$$Z(S_0)\leqslant r-1+m-\sum\nolimits_{j=1}^{q}\varkappa_j. \tag{4.6}$$

Оценим $Z(S_0)$ снизу. Согласно (4.3), $(-1)^{r+i}S_0(x_i)\geqslant 0$. Учитывая определение μ_k, заключаем [28, с. 190], что S_0 имеет на D_k не менее μ_k-1 изолированных нулей с учетом их кратности.

Далее, у T'_{rm} на Δ_j не более $r-1+\varkappa_j$ нулей (T'_{rm} является на Δ_j сплайном класса $(r-1, \varkappa_j)$). Значит, в Δ_j попадает не более $r-1+\varkappa_j$ точек альтернанса x_i, отличных от ± 1. На все D_k остается не менее

$$\mu:=r+m+1-\sum\nolimits_{j=1}^{q}(r-1+\varkappa_j)-\omega$$

точек x_i. Отсюда следует, что S_0 имеет на $[-1, 1]$ не менее

$$\mu-(q+1-\omega)=r+m-qr-\sum\nolimits_{j=1}^{q}\varkappa_j$$

изолированных нулей с учетом их кратности. Прибавляя суммарную кратность нуль-интервалов, которая не менее qr, получаем

$$Z(S_0)\geqslant r+m-\sum\nolimits_{j=1}^{q}\varkappa_j.$$

Это неравенство противоречит (4.6). Таким образом, действительно, $\|T\|>\|T_{rm}\|$, если $T\neq T_{rm}$.

Остается проверить достаточность условия (4.3) для оптимальности T_{rm}. Допустим противное. Тогда найдется совершенный сплайн T_*, такой, что $\|T_*\|<\|T_{rm}\|$. Рассмотрим сплайн $S_*=(r!/2)(T_{rm}-T_*)$ вида (4.5) с $N=m$. Согласно (4.3) $(-1)^{r+i}S_*(x_i)>0$, $i\in 0:r+m$. Значит, $Z(S_*)\geqslant r+m$. Но это противоречит лемме 4.2. Теорема доказана.

Единственный совершенный сплайн T_{rm}, наименее уклоняющийся от нуля на $[-1, 1]$ в равномерной метрике, называется функцией Тихомирова.

Нетрудно понять, что точками $x_1, \ldots, x_{r+m-1}$ исчерпываются все нули производной T'_{rm}. Поэтому в интервалах (x_{i-1}, x_i), $i\in 1:r+m$, функция T_{rm} строго монотонна. В каждом таком интервале она имеет единственный простой нуль. Эти нули будем обозначать $u_1, \ldots, u_{r+m}$. Других нулей у T_{rm} нет.

Обратимся к более сложной задаче

$$\|T\|:=\max_{x\in[-1,1]}|T(x)|\to\inf, \tag{4.7}$$

где инфимум берется по всем совершенным сплайнам T, узлы которых удовлетворяют условию (4.1), и дополнительно

$$T^{(\nu)}(-1)=T^{(\nu)}(1)=0,\quad \nu\in 0:r-1. \tag{4.8}$$

При $r=1$ решение этой задачи очевидно (рис. 14). В дальнейшем считаем, что $m\geqslant r\geqslant 2$.

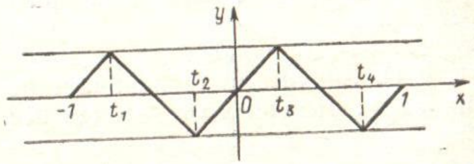


Рис. 14. Решение задачи (4.7) при $r=1$

Лемма 4.3. *Существует совершенный сплайн* $\mathring{T}_{rm}$, *который удовлетворяет условиям* (4.8) *и имеет на* $(-1,\ 1)$ $m-r+1$ *точек альтернанса.*

Доказательство. Так же, как в лемме 4.1, для любого $s\in S^m$ строятся функции g_s и f_s. Очевидно, что f_s удовлетворяет граничному условию $f_s^{(\nu)}(-1)=0$, $\nu\in 0:r-1$. Далее полагаем $T_s=f_s-P_s$, где $P_s(x)=\sum_{i=0}^{m-r-1}a_i(s)x^i$ — полином степени $m-r-1$ наилучшего приближения функции f_s на $[-1,\ 1]$ ($P_s\equiv 0$ при $m=r$). По теореме П. Л. Чебышева T_s имеет $m-r+1$ точек альтернанса.

Рассмотрим отображение

$$\tau(s)=(a_0(s),\ a_1(s),\ \dots,\ a_{m-r-1}(s),\ T_s(1),\ T_s'(1),\ \dots,\ T_s^{(r-1)}(1))$$

сферы S^m в $\mathbf{R}^m$. Оно непрерывно и нечетно. Согласно теореме Борсука существует вектор $s^*\in S^m$, такой, что $\tau(s^*)=\mathbf{0}$. Соответствующая функция $T_{s^*}=f_{s^*}$ удовлетворяет граничным условиям (4.8) и обладает $(m-r+1)$-точечным альтернансом.

Учитывая r-кратные нули в точках $x=\pm 1$, получаем $Z(T_{s^*})\geqslant r+m$. Теперь так же, как в лемме 4.1, показывается, что все компоненты $s_1^*,\ \dots,\ s_{m+1}^*$ вектора s^* отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки, т. е.

$$\operatorname{sign} s_j^*=\xi(-1)^{j-1},\ j\in 1:m+1;\ \xi=\pm 1.$$

Функция $\mathring{T}_{rm}=\xi T_{s^*}$ является требуемым совершенным сплайном. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Решение задачи* (4.7) *существует и единственно. Оно полностью характеризуется наличием* $(m-r+1)$-*точечного альтернанса.*

Доказательство. Возьмем функцию $\mathring{T}_{rm}$, построенную в лемме 4.3, и допустим, что $\|\mathring{T}_1\|\leqslant\|\mathring{T}_{rm}\|$ на некотором совершенном сплайне $\mathring{T}_1\neq\mathring{T}_{rm}$, удовлетворяющем граничным условиям (4.8). Разность $S_1:=(r!/2)(\mathring{T}_{rm}-\mathring{T}_1)$ есть сплайн вида (4.5) и $S_1^{(\nu)}(\pm 1)=0$, $\nu\in 0:r-1$.

Предположим, что S_1 имеет q нуль-интервалов $(\alpha_j,\ \beta_j)$, $j\in 1:q$; среди них заведомо два бесконечных $(-\infty,\beta_1)$ и $(\alpha_q,\ +\infty)$. Обозначим $\varkappa_j$ количество узлов $\mathring{T}_{rm}$, содержащихся

в $(\alpha_j,\ \beta_j)$. Тогда реально в представлении вида (4.5) для S_1 величина N не превосходит $m-\sum_{j=1}^q\varkappa_j$. По лемме 4.2

$$Z(S_1)\leqslant r-1+m-\sum_{j=1}^q\varkappa_j. \tag{4.9}$$

Оценим $Z(S_1)$ снизу. Как и в лемме 4.1, показывается, что в замыкание Δ_j интервала $(\alpha_j,\ \beta_j)$ при $j\in 2:q-1$ попадает не более $r-1+\varkappa_j$ точек альтернанса $\mathring{T}_{rm}$, а в Δ_1 и Δ_q соответственно не более $\varkappa_1$ и $\varkappa_q$. На все интервалы D_k, $k\in 1:q-1$, расположенные между $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots,\ \Delta_q$, остается не менее

$$\mu:=m-r+1-(q-2)(r-1)-\sum_{j=1}^q\varkappa_j$$

точек альтернанса $\mathring{T}_{rm}$. Отсюда следует, что S_1 имеет на $(-1,\ 1)$ не менее

$$\mu-(q-1)=r+m-qr-\sum_{j=1}^q\varkappa_j$$

изолированных нулей с учетом их кратности. Прибавляя суммарную кратность нуль-интервалов, которая не меньше qr, получаем

$$Z(S_1)\geqslant r+m-\sum_{j=1}^q\varkappa_j,$$

что противоречит (4.9).

Таким образом, $\|\mathring{T}\|>\|\mathring{T}_{rm}\|$ для любого совершенного сплайна $\mathring{T}\neq\mathring{T}_{rm}$, удовлетворяющего граничным условиям (4.8). Это гарантирует существование и единственность решения задачи (4.7). Необходимость $(m-r+1)$-точечного альтернанса для оптимальности $\mathring{T}_{rm}$ установлена в лемме 4.3. Достаточность легко следует из леммы 4.2. Теорема доказана.

§ 5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ ДЛЯ СОВЕРШЕННЫХ СПЛАЙНОВ

Зафиксируем натуральные r, m и рассмотрим совершенный сплайн

$$T(c,\ x)=\frac{x^r}{r!}+\sum_{i=0}^{r-1}a_ix^i+\frac{2}{r!}\sum_{j=1}^m(-1)^j(x-t_j)_+^r$$

как функцию, зависящую от вектора параметров $c=(a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{r-1},\ t_1,\ \dots,\ t_m)$ при ограничении $t_1<t_2<\dots<t_m$. Выясним вопрос о существовании совершенного сплайна с наперед заданными нулями.

Теорема 5.1. *Для любых* $r+m$ *точек* $x_1<x_2<\dots<x_{r+m}$ *существует и единствен вектор* c, *такой, что*

$$T(c,\ x_k)=0,\quad k\in 1:r+m. \tag{5.1}$$

Эта теорема называется основной теоремой алгебры для совершенных сплайнов в случае простых нулей. Ее доказательство опирается на две леммы.

Лемма 5.1. *Пусть $D_0 \subset D \subset \mathbf{R}^n$. Если D_0 непусто, открыто в D и замкнуто в D, а D связно, то $D_0=D$.*

Доказательство. Зафиксируем $x^{(0)} \in D_0$ и возьмем произвольную точку $x^{(1)} \in D$. Поскольку D связно, то существует непрерывная на отрезке $[0, 1]$ вектор-функция φ со свойствами: $\varphi(t) \in D$ при всех $t \in [0, 1]$, $\varphi(0)=x^{(0)}$, $\varphi(1)=x^{(1)}$. Положим

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid \varphi(\tau) \in D_0 \quad \forall \tau \in [0, t]\}.$$

Нетрудно понять, что $\varphi(t_0) \in D_0$. При $t_0=0$ это очевидно. Пусть $t_0 \in (0, 1]$. Возьмем $\tau_s \in (0, t_0)$, $\tau_s \to t_0$ при $s \to \infty$. Имеем $\varphi(\tau_s) \in D_0$, $\varphi(\tau_s) \to \varphi(t_0)$, причем $\varphi(t_0) \in D$. Включение $\varphi(t_0) \in D_0$ следует теперь из замкнутости D_0 в D.

Покажем, что $t_0=1$. Допустим противное: $t_0 \in [0, 1)$. Поскольку D_0 открыто в D, то найдется $\varepsilon>0$, такое, что $x \in D_0$ как только $x \in D$ и $\|x-\varphi(t_0)\| < \varepsilon$. Выберем $\delta \in (0, 1-t_0)$ так, чтобы $\|\varphi(t)-\varphi(t_0)\| < \varepsilon$ при $0 \leqslant t-t_0 < \delta$. Тогда $\varphi(t) \in D_0$ при $t \in [t_0, t_0+\delta)$ и, значит, при всех $t \in [0, t_0+\delta)$. Последнее противоречит определению t_0.

Итак, $t_0=1$, $x^{(1)}=\varphi(1) \in D_0$. В силу произвольности $x^{(1)} \in D$ заключаем, что $D_0=D$. Лемма доказана.

Введем обозначение $B_\delta(x^{(0)})=\{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x-x^{(0)}\| \leqslant \delta\}$.

Лемма 5.2. *Если множества X и Y из $\mathbf{R}^n$ гомеоморфны, X содержит шар $B_\delta(x^{(0)})$, $\delta>0$, и точка $x^{(0)}$ при гомеоморфизме переходит в точку $y^{(0)}$, то Y содержит при некотором $\rho>0$ шар $B_\rho(y^{(0)})$.*

Доказательство см., например в [2, с. 196].

Доказательство теоремы. Положим $n=r+m$ и введем открытое выпуклое множество $D=\{x=(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 < \ldots < x_n\}$. Совокупность тех $x \in D$, при которых система (5.1) имеет решение, обозначим D_0. Покажем, что $D_0=D$.

Множество D_0 непусто, так как содержит точку $u=(u_1, \ldots, u_n)$, где u_i — нули функции Тихомирова T_{rm}. Проверим, что D_0 открыто (в $\mathbf{R}^n$).

Пусть $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in D_0$, $T(c^{(0)}, x_k^{(0)})=0$ при $k \in 1:n$. Поскольку $Z(T) \leqslant n$, то все нули $x_k^{(0)}$ простые. Найдется шар $B=B_\delta(c^{(0)})$, такой, что при $c \in B$ функция $T(c, x)$ также имеет n простых нулей $x_1(c) < \ldots < x_n(c)$. Введем отображение $\psi: B \to D_0$, $\psi(c)=(x_1(c), \ldots, x_n(c))$. Установим, что оно инъективно, т. е. переводит разные точки в разные.

Допустим противное. Тогда у системы (5.1) при некоторых $x_1 < \ldots < x_n$ найдутся два решения $c^{(1)}$ и $c^{(2)}$. Рассмотрим разность

$$S(x) = (r!/2)[T(c^{(2)}, x) - T(c^{(1)}, x)].$$

Это не равный тождественно нулю сплайн вида (4.5). Предположим, что S имеет q нуль-интервалов (α_j, β_j), $j \in 1:q$. Количество узлов $T(c^{(1)}, x)$, содержащихся в (α_j, β_j), обозначим $\varkappa_j$. Тогда реально у S в представлении (4.5) величина N не превосходит $m-\sum_{j=1}^q \varkappa_j$. По лемме 4.2

$$Z(S) \leqslant r-1+m-\sum_{j=1}^q \varkappa_j. \tag{5.2}$$

Оценим $Z(S)$ снизу. В замыкание Δ_j интервала (α_j, β_j) попадает не более $r+\varkappa_j$ точек x_k. Действительно, x_k являются нулями сплайна $T(c^{(1)}, x)$, принадлежащего на Δ_j классу $(r, \varkappa_j)$. Вне $\Delta_1, \ldots, \Delta_q$ остается не менее $r+m-qr-\sum_{j=1}^q \varkappa_j$ изолированных нулей сплайна S. Прибавляя суммарную кратность нуль-интервалов, получаем

$$Z(S) \geqslant r+m-\sum_{j=1}^q \varkappa_j,$$

что противоречит (5.2).

Тем самым инъективность отображения ψ установлена. Попутно доказана единственность решения системы (5.1) (при условии его существования).

Проверим непрерывность ψ. Пусть $c^{(\mu)} \to c^*$, причем все $c^{(\mu)}$ и c^* принадлежат B. Обозначим $x^{(\mu)}=\psi(c^{(\mu)})$, $x^*=\psi(c^*)$. Тогда $T(c^{(\mu)}, x_k^{(\mu)})=0$, $T(c^*, x_k^*)=0$, $k \in 1:n$. Возьмем точки $v_0 < x_1^* < v_1 < x_2^* < \ldots < v_{n-1} < x_n^* < v_n$. Нетрудно понять, что $(-1)^{r+k} T(c^*, v_k)>0$, $k \in 0:n$. При больших μ будет $(-1)^{r+k} T(c^{(\mu)}, v_k)>0$. Значит, $x_k^{(\mu)} \in (v_{k-1}, v_k)$.

Предположим, что $x^{(\mu_s)} \to \bar{x}$ и $\bar{x}=(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. В пределе получаем $T(c^*, \bar{x}_k)=0$, $v_{k-1} \leqslant \bar{x}_k \leqslant v_k$. На самом деле, $v_{k-1} < \bar{x}_k < v_k$, так что необходимо $\bar{x}=x^*$. Доказано предельное соотношение $x^{(\mu)} \to x^*$, свидетельствующее о непрерывности ψ на B. Непрерывность ψ^{-1} на $\psi(B)$ легко следует из однозначной разрешимости системы (5.1). Таким образом, ψ — гомеоморфизм B на $\psi(B)$.

Поскольку $x^{(0)}=\psi(c^{(0)})$, то по лемме 5.2 найдется $\rho>0$, такое, что $B_\rho(x^{(0)}) \subset \psi(B) \subset D_0$. Ввиду произвольности $x^{(0)} \in D_0$ заключаем, что множество D_0 открыто в $\mathbf{R}^n$.

Покажем, что D_0 замкнуто в D. Пусть $x^{(\mu)} \in D_0$, $x^{(\mu)} \to x^*$ и $x^* \in D$. По определению D_0 имеем $T(c^{(\mu)}, x_k^{(\mu)})=0$, $k \in 1:n$, или

$$\frac{(x_k^{(\mu)})^r}{r!} + \sum_{i=0}^{r-1} a_i^{(\mu)}(x_k^{(\mu)})^i + \frac{2}{r!}\sum_{j=1}^m (-1)^j (x_k^{(\mu)} - t_j^{(\mu)})_+^r = 0,$$
$$k \in 1:n.$$

Легко понять, что $x_1^{(\mu)} < t_1^{(\mu)} < t_2^{(\mu)} < \ldots < t_m^{(\mu)} < x_n^{(\mu)}$. Отсюда следует ограниченность всех последовательностей $\{a_i^{(\mu)}\}$, $i \in 0:r-1$. Возьмем сходящуюся подпоследовательность $\{c^{(\mu_s)}\}$, $c^{(\mu_s)} \to c^*$,

$c^* = (a_0^*, a_1^*, \ldots, a_{r-1}^*, t_1^*, \ldots, t_m^*)$, $t_1^* \leqslant t_2^* \leqslant \ldots \leqslant t_m^*$. В пределе получаем

$$T(c^*, x_k^*) = 0,\ k \in 1:n. \tag{5.3}$$

Если хотя бы два узла t_{j-1}^* и t_j^* совпадают, то $Z(T(c^*, \cdot)) < n$, что противоречит (5.3). Значит, $T(c^*, x)$ — совершенный сплайн нужного вида. В силу (5.3) $x^* \in D_0$. Замкнутость D_0 в D установлена.

По лемме 5.1 $D_0 = D$. Теорема доказана.

На рис. 15 иллюстрируется содержание теоремы при $r=1$.

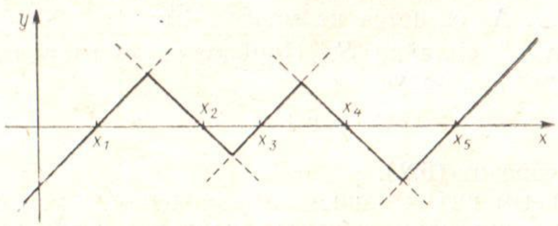


Рис. 15. Иллюстрация к теореме 5.1 при $r=1$

Основная теорема алгебры для совершенных сплайнов справедлива и в случае кратных нулей. Получим ее предельным переходом из теоремы 5.1.

Теорема 5.2. *Для данных точек $x_1 < \ldots < x_p$ и кратностей $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, таких, что $\sigma_k \in 1:r$, $\sum_{k=1}^{p} \sigma_k = r+m$, существует и единствен совершенный сплайн T степени r с m узлами, удовлетворяющий условию*

$$T^{(\nu)}(x_k) = 0,\ \nu \in 0:\sigma_k - 1,\ k \in 1:p. \tag{5.4}$$

Доказательство. Выберем точки $x_1^{(s)} < x_2^{(s)} < \ldots < x_{r+m}^{(s)}$ так, чтобы при $k \in 1:p$

$$\lim_{s\to\infty} x_l^{(s)} = x_k,\ l \in \sigma_1 + \ldots + \sigma_{k-1} + 1 : \sigma_1 + \ldots + \sigma_k.$$

По теореме 5.1 существует совершенный сплайн

$$T_s(x) = \frac{x^r}{r!} + \sum_{i=0}^{r-1} a_i^{(s)} x^i + \frac{2}{r!} \sum_{j=1}^{m} (-1)^j (x - t_j^{(s)})_+^r$$

с нулями $x_1^{(s)}, \ldots, x_{r+m}^{(s)}$. Как уже отмечалось,

$$x_1^{(s)} < t_1^{(s)} < t_2^{(s)} < \ldots < t_m^{(s)} < x_{r+m}^{(s)}.$$

Обозначим $\gamma_s = \sum_{i=0}^{r-1} |a_i^{(s)}|$ и покажем, что последовательность $\{\gamma_s\}$ ограничена. Допустим противное. Можно считать, что $\gamma_s \to +\infty$ и $a_i^{(s)}/\gamma_s \to b_i$; при этом $\sum_{i=0}^{r-1} |b_i| = 1$. Положим

$$P_s(x) = \sum_{i=0}^{r-1} (a_i^{(s)}/\gamma_s) x^i, \quad P(x) = \sum_{i=0}^{r-1} b_i x^i.$$

Поделив равенства

$$T_s(x_l^{(s)}) = 0,\ l \in 1:r+m,\ s = 1, 2, \ldots, \tag{5.5}$$

на γ_s и перейдя к пределу при $s \to \infty$, получим $P(x_k) = 0$, $k \in 1:p$. Проверим, что и производные в точках x_k обращаются в нуль.

Рассмотрим, например, x_1 и $\nu \in 2:\sigma_1$. В силу (5.5) разделенная разность $T_s[x_1^{(s)}, \ldots, x_\nu^{(s)}]$ равна нулю и, значит, $T_s^{(\nu-1)}(\xi_s) = 0$ в некоторой точке $\xi_s \in (x_1^{(s)}, x_\nu^{(s)})$. Имеем

$$P_s^{(\nu-1)}(\xi_s) + \frac{r(r-1)\ldots(r-\nu+2)}{r!\,\gamma_s} \Big[\xi_s^{r-\nu+1} + $$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{m} (-1)^j (\xi_s - t_j^{(s)})_+^{r-\nu+1}\Big] = 0.$$

В пределе при $s \to \infty$ получаем $P^{(\nu-1)}(x_1) = 0$, $\nu \in 2:\sigma_1$. Таким образом, точки x_k являются для полинома P нулями кратности не менее σ_k. Но это невозможно, поскольку степень P не выше $r-1$, а $\sum_{k=1}^{p} \sigma_k = r+m$. Показано, что последовательность $\{\gamma_s\}$ ограничена.

Теперь можно считать, что $a_i^{(s)} \to a_i$, $i \in 0:r-1$, и $t_j^{(s)} \to t_j$, $j \in 1:m$, при $s \to \infty$. Положим

$$T(x) = \frac{x^r}{r!} + \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i + \frac{2}{r!} \sum_{j=1}^{m} (-1)^j (x - t_j)_+^r.$$

Здесь $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m$. На основании (5.5) имеем $T(x_k) = 0$, $k \in 1:p$. Кроме того, аналогично предыдущему проверяется, что $T^{(\nu-1)}(x_k) = 0$, $\nu \in 2:\sigma_k$, $k \in 1:p$. В частности, $Z(T) \geqslant r+m$, откуда следует невозможность совпадения узлов t_{j-1} и t_j. Значит, T — требуемый совершенный сплайн.

Единственность решения системы (5.4) устанавливается так же, как в теореме 5.1. Теорема доказана.

§ 6. ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА КЛАССЕ $W_\infty^r M$

Зафиксируем натуральные числа $n > r \geqslant 2$ и точку $x \in [-1, 1]$. Рассмотрим задачу оптимального на классе $W_\infty^r M$ восстановления функционала $L(f) = f(x)$ по информации

$$I(f) = \{f^{(\nu)}(x_k) \mid \nu \in 0:\sigma_k - 1,\ k \in 1:p\}, \tag{6.1}$$

где $-1 \leqslant x_1 < \ldots < x_p \leqslant 1$, $\sigma_k \in 1:r$, $\sum_{k=1}^{p} \sigma_k = n$. В качестве основного пространства **X** возьмем W^r — класс функций, имеющих на $[-1, 1]$ абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка. Как при $r=1$, так и при $n=r$ аналогичная задача решена в § 3.

По теореме 2.1 оптимальная погрешность

$$R(x) := \inf_{\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \sup_{f \in W^r_\infty M} |f(x) - \Phi(I(f))|$$

допускает представление

$$R(x) = \sup_{\{f \in W^r_\infty M \mid I(f) = 0\}} |f(x)|. \tag{6.2}$$

Наша цель — вычислить $R(x)$ и указать оптимальный метод восстановления.

Согласно теореме 5.2 существует и единствен совершенный сплайн T степени r с $m = n - r$ узлами

$$T(t) = \frac{t^r}{r!} + \sum_{i=0}^{r-1} a_i t^i + \frac{2}{r!} \sum_{j=1}^{m} (-1)^j (t - t_j)^r_+,$$

такой, что $I(T) = \mathbf{O}$, т. е.

$$T^{(\nu)}(x_k) = 0, \ \nu \in 0 : \sigma_k - 1, \ k \in 1 : p.$$

Узлы t_j зависят от x_k и σ_k, но не зависят от x.

Зафиксируем $t_1 < \ldots < t_m$ и введем сплайн степени $r-1$

$$S(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i t^i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j (t - t_j)^{r-1}_+. \tag{6.3}$$

Рассмотрим интерполяционную задачу

$$S^{(\nu)}(x_k) = y_k^{(\nu)}, \ \nu \in 0 : \sigma_k - 1, \ k \in 1 : p. \tag{6.4}$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{p} \sigma_k = r + m$, то в системе (6.4) число уравнений равно числу неизвестных.

Лемма 6.1. *Узлы t_j не совпадают с точками интерполирования x_k кратности $\sigma_k = r$. Задача* (6.4) *однозначно разрешима при любых $y_k^{(\nu)}$.*

Доказательство. Проверим сначала выполнение условия теоремы I.4.1

$$V(t_i, t_j) \leqslant r - 1 + j - i, \ 0 \leqslant i < j \leqslant m + 1, \tag{6.5}$$

где $V(t_i, t_j)$ — количество точек x_k с учетом их кратности, содержащихся в замыкании Δ_{ij} интервала (t_i, t_j). Воспользуемся тем, что t_j — узлы совершенного сплайна T, а x_k — его нули. У T на (t_i, t_j) ровно $j - i - 1$ узлов. Значит, T имеет на Δ_{ij} не более $r + j - i - 1$ нулей с учетом их кратности. Отсюда очевидным образом следует (6.5).

Теперь допустим, что узел t_j совпадает с точкой x_k. Тогда

$$\sum_{\mu=1}^{k} \sigma_\mu = V(-\infty, t_j) \leqslant r - 1 + j,$$

$$\sum_{\mu=k}^{p} \sigma_\mu = V(t_j, +\infty) \leqslant r - 1 + (m + 1 - j) = n - j.$$

Складывая эти неравенства, получаем $n + \sigma_k \leqslant n + r - 1$ или $\sigma_k \leqslant r - 1$. Лемма доказана.

Обозначим $S(f; t)$ сплайн вида (6.3), такой, что

$$S^{(\nu)}(f; x_k) = f^{(\nu)}(x_k), \ \nu \in 0 : \sigma_k - 1, \ k \in 1 : p.$$

Теорема 6.1. *Для погрешности $R(x)$ оптимального восстановления $f(x)$ по информации* (6.1) *справедлива формула*

$$R(x) = M \, | T(x) |. \tag{6.6}$$

Оптимальным методом восстановления является интерполяция сплайнами:

$$\Phi_*(I(f)) = S(f; x).$$

Доказательство. Поскольку $MT \in W^r_\infty M$ и $I(MT) = \mathbf{O}$, то согласно (6.2) $R(x) \geqslant M|T(x)|$. Для получения обратного неравенства воспользуемся оценкой (I.5.6) погрешности сплайн-интерполяции. Роль функции F в данном случае играет совершенный сплайн T. Имеем

$$\sup_{f \in W^r_\infty M} |f(x) - S(f; x)| \leqslant M \, | T(x) |.$$

Тем более $R(x) \leqslant M|T(x)|$. Значит, $R(x) = M \, | T(x) |$ и

$$\sup_{f \in W^r_\infty M} | f(x) - S(f; x| = R(x).$$

Теорема доказана.

Естественно возникает задача

$$\|R\| := \max_{x \in [-1, 1]} |R(x)| \to \inf,$$

где инфимум берется по всем x_k, σ_k, удовлетворяющим ограничениям $-1 \leqslant x_1 < \ldots < x_p \leqslant 1$, $\sum_{k=1}^{p} \sigma_k = n$ $(p \in 1 : n, \ \sigma_k \in 1 : r)$.

Обозначим $R_{rn} = \inf \|R\|$.

Теорема 6.2. *Значение R_{rn} достигается на единственной системе точек $u_1, \ldots, u_n$ $(p = n, \ \sigma_1 = \ldots = \sigma_n = 1)$, где u_k — нули функции Тихомирова T_{rm}, $m = n - r$. При этом $R_{rn} = M \| T_{rm} \|$.*

Доказательство немедленно следует из формулы (6.6), определения T и результатов § 4.

Следствие. Справедливо равенство

$$\inf_{-1 < x_1 < \ldots < x_n < 1} \ \sup_{\{f \in W^r_\infty M \mid f(x_k) = 0, \ k \in 1 : n\}} \|f\| = M \| T_{r, n-r} \|.$$

Инфимум достигается на системе $u_1, \ldots, u_n$, где u_k — нули функции Тихомирова $T_{r, n-r}$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $f\in W_\infty^r M$ по информации

$$I(f)=(f(x_1),\ \dots,\ f(x_n),\ f'(x_1),\ \dots,\ f'(x_n)).$$

Здесь $2n>r\geqslant 2$. Согласно теореме 2.1 оптимальная погрешность при фиксированном x равна

$$R^{(1)}(x)=\sup_{\{f\in W_\infty^r M\,|\,f(x_k)=f'(x_k)=0,\ k\in 1:n\}}|f(x)|.$$

Будем искать точки $-1\leqslant x_1<\dots<x_n\leqslant 1$, минимизирующие супремум $R^{(1)}(x)$ на $[-1, 1]$. Положим

$$R_{rn}^{(1)}:=\inf_{-1\leqslant x_1<\dots<x_n\leqslant 1}\ \sup_{x\in[-1,1]}R^{(1)}(x)=$$

$$=\inf_{-1\leqslant x_1<\dots<x_n\leqslant 1}\ \sup_{\{f\in W_\infty^r M\,|\,f(x_k)=f'(x_k)=0,\ k\in 1:n\}}\|f\|.$$

Нам потребуются функции Тихомирова T_{rm}, $m=2n-r$. Поскольку $r+m=2n$, то возможны два случая:

1) r, m — четные. Функция T_{rm} имеет n $(-)$-точек альтернанса $-1<\tau_1<\dots<\tau_n<1$, в которых

$$T_{rm}(\tau_k)=-\|T_{rm}\|,\quad T'_{rm}(\tau_k)=0,\quad k\in 1:n;$$

2) r, m — нечетные. Функция T_{rm} имеет n $(+)$-точек альтернанса $-1<\tau_1<\dots\tau_n<1$, в которых

$$T_{rm}(\tau_k)=\|T_{rm}\|,\quad T'_{rm}(\tau_k)=0,\quad k\in 1:n.$$

Теорема 6.3. *Значение $R_{rn}^{(1)}$ достигается на единственной системе точек $\tau_1, \dots, \tau_n$. При этом $R_{rn}^{(1)}=2M\|T_{rm}\|$, $m=2n-r$.*

Доказательство. Возьмем совершенный сплайн

$$T^*(t)=T_{rm}(t)+(-1)^r\|T_{rm}\|$$

с m узлами $-1<t_1<\dots<t_m<1$ и n двойными нулями $\tau_1, \dots, \tau_n$. По лемме 6.1 существует и единствен сплайн

$$S(f;\ t)=\sum_{i=0}^{r-1}\alpha_i t^i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t-t_j)_+^{r-1},$$

такой, что

$$S(f;\ \tau_k)=f(\tau_k),\ S'(f;\ \tau_k)=f'(\tau_k),\ k\in 1:n.$$

Теперь воспользуемся теоремой I.5.1, согласно которой для любой функции $f\in W_\infty^r M$ справедлива оценка

$$|f(t)-S(f;\ t)|\leqslant M|T^*(t)|\quad \forall t\in[-1,\ 1].$$

Если $f\in W_\infty^r M$ и $f(\tau_k)=f'(\tau_k)=0$ при $k\in 1:n$, то $S(f;t)\equiv 0$. В этом случае

$$\|f\|\leqslant M\|T^*\|=2M\|T_{rm}\|.$$

Для функции $f=MT^*$ неравенство обращается в равенство. Значит,

$$\sup_{\{f\in W_\infty^r M\,|\,f(\tau_k)=f'(\tau_k)=0,\ k\in 1:n\}}\|f\|=2M\|T_{rm}\|. \tag{6.7}$$

Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ произвольную систему попарно различных точек $\{x_1, \dots, x_n\}$, отличную от $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. По теореме 5.2 существует и единствен совершенный сплайн $T\neq T^*$ с $m=2n-r$ узлами, такой, что $T(x_k)=T'(x_k)=0$ при $k\in 1:n$. Предположим для определенности, что r — четное число. Тогда функция T неотрицательна. Опустим ее график на $\frac{1}{2}\|T\|$ вниз. Получим совершенный сплайн степени r с m узлами и нормой $\frac{1}{2}\|T\|$. Поскольку T_{rm} — единственный совершенный сплайн, наименее уклоняющийся от нуля на $[-1, 1]$ в равномерной метрике, то $\frac{1}{2}\|T\|>\|T_{rm}\|$ или $\|T\|>2\|T_{rm}\|$. Имеем

$$\sup_{\{f\in W_\infty^r M\,|\,f(x_k)=f'(x_k)=0,\ k\in 1:n\}}\|f\|\geqslant\|MT\|>2M\|T_{rm}\|. \tag{6.8}$$

Объединяя (6.7) и (6.8), приходим к требуемому заключению. Теорема доказана.

Интересно сравнить величину $R_{rn}^{(1)}$ с погрешностью оптимального восстановления функции $f\in W_\infty^r M$ по ее значениям в $2n$ различных точках. По следствию из теоремы 6.2 инфимум

$$R_{r,2n}=\inf_{-1\leqslant x_1<\dots<x_{2n}\leqslant 1}\ \sup_{\{f\in W_\infty^r M\,|\,f(x_k)=0,\ k\in 1:2n\}}\|f\|$$

достигается на системе точек $u_1, \dots, u_{2n}$, где u_k — нули функции Тихомирова T_{rm}, $m=2n-r$. При этом $R_{r,2n}=M\|T_{rm}\|$. С учетом теоремы 6.3 получаем

$$R_{r,2n}=\frac{1}{2}R_{rn}^{(1)}.$$

Таким образом, при оптимальной интерполяции на классе $W_\infty^r M$ использовать значения функции в $2n$ точках в два раза выгоднее, чем значения функции и ее производной в n точках.

§ 7. ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ ПО ГЕЛЬФАНДУ

Пусть $n \geqslant r \geqslant 1$. В основном пространстве $\mathbf{X} = W^r$ возьмем выпуклое уравновешенное множество W. Для фиксированной точки $x \in [-1, 1]$ и заданных на W^r линейных функционалов $L_1, \ldots, L_n$ положим

$$R(x) = \inf_{\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \sup_{f \in W} |f(x) - \Phi(L_1(f), \ldots, L_n(f))|.$$

Согласно теореме 2.1

$$R(x) = \sup_{\{f \in W \mid L_i(f)=0,\ i \in 1:n\}} |f(x)|.$$

Поставим задачу о минимизации супремума $R(x)$ на $[-1, 1]$ по всевозможным наборам линейных функционалов $\{L_1, \ldots, L_n\}$:

$$\sup_{x \in [-1,1]} R(x) \to \inf_{\{L_1, \ldots, L_n\}}. \tag{7.1}$$

Величина

$$d^n(W) := \inf_{\{L_1, \ldots, L_n\}} \sup_{x \in [-1,1]} R(x) =$$

$$= \inf_{\{L_1, \ldots, L_n\}} \sup_{\{f \in W \mid L_i(f)=0,\ i \in 1:n\}} \|f\|$$

называется n-поперечником по Гельфанду множества W.

В этом параграфе приводится решение задачи (7.1) в случае $W = W^r_\infty M$.

Теорема 7.1. *Справедливо равенство*

$$d^n(W^r_\infty M) = M \| T_{rm} \|, \quad m = n - r.$$

Значение $d^n(W^r_\infty M)$ достигается на системе функционалов $L_i^*(f) = f(u_i)$, $i \in 1:n$, где u_i — нули функции Тихомирова T_{rm}.

Доказательство. По следствию из теоремы 6.2 имеем

$$d^n(W^r_\infty M) \leqslant \sup_{\{f \in W^r_\infty M \mid f(u_i)=0,\ i \in 1:n\}} \|f\| = M \| T_{rm} \|. \tag{7.2}$$

Для получения обратного неравенства рассмотрим сплайны вида

$$S(t) = \textstyle\sum_{i=0}^r \alpha_i t^i + \sum_{j=1}^m \beta_j (t - t_j)_+^r, \tag{7.3}$$

где $-1 < t_1 < \ldots < t_m < 1$ — узлы функции T_{rm}. Сплайны (7.3) образуют $(n+1)$-мерное подпространство в W^r. Обозначим $\rho = M \| T_{rm} \|$, $B_\rho = \{S \mid \|S\| \leqslant \rho\}$. Покажем, что $B_\rho \subset W^r_\infty M$.

Допустим, рассуждая от противного, что существует сплайн S вида (7.3) со свойствами

$$\|S\| \leqslant \rho, \quad \|S^{(r)}\| := \operatorname{vrai}\sup_{t \in [-1,1]} |S^{(r)}(t)| > M.$$

Положим $t_0 = -1$, $t_{m+1} = 1$ и обозначим (t_{k-1}, t_k) интервал, на котором $|S^{(r)}(t)|$ достигает наибольшего значения. Введем функцию

$$\varphi(t) = \lambda S(t) - T_{rm}(t),$$

где $\lambda = \xi / \|S^{(r)}\|$, $\xi = \operatorname{sign}(S^{(r)}(t) \cdot T_{rm}^{(r)}(t))$ при $t \in (t_{k-1}, t_k)$. В силу выбора λ выполняется равенство $\varphi^{(r)}(t) = 0$ на (t_{k-1}, t_k).

Заметим, что φ — сплайн вида (7.3). Поскольку $\|\lambda S\| < \rho / M = \|T_{rm}\|$ и T_{rm} имеет $n+1$ точек альтернанса, то $Z(\varphi) \geqslant n$. По теореме Ролля

$$Z(\varphi^{(r-1)}) \geqslant n - r + 1 = m + 1. \tag{7.4}$$

Вместе с тем $\varphi^{(r-1)}$ — непрерывная ломаная с m узлами, равная некоторой константе c на (t_{k-1}, t_k). Если $c = 0$, то суммарная индексная длина l нуль-интервалов $\varphi^{(r-1)}$ не меньше единицы. По лемме 1.3.1

$$Z(\varphi^{(r-1)}) \leqslant 1 + m - l \leqslant m.$$

Если же $c \neq 0$, то

$$Z(\varphi^{(r-1)}) = Z(\varphi^{(r-1)}; (-\infty, t_{k-1}]) + Z(\varphi^{(r-1)}; [t_k, +\infty)) \leqslant$$

$$\leqslant k - 1 + (m - k + 1) = m.$$

В обоих случаях получаем противоречие с (7.4). Значит, действительно, $B_\rho \subset W^r_\infty M$.

Теперь имеем

$$d^n(W^r_\infty M) \geqslant d^n(B_\rho) \geqslant \rho = M \| T_{rm} \|. \tag{7.5}$$

Поясним последнее неравенство. Возьмем произвольный набор линейных функционалов $\{L_1, \ldots, L_n\}$ и рассмотрим систему линейных уравнений

$$L_i(S) = 0, \quad i \in 1:n.$$

У этой системы n уравнений и $n+1$ неизвестных, поэтому она имеет нетривиальное решение. Нормируем соответствующий сплайн S_* так, чтобы $\|S_*\| = \rho$. Тогда

$$\sup_{\{S \in B_\rho \mid L_i(S)=0,\ i \in 1:n\}} \|S\| \geqslant \|S_*\| = \rho.$$

Беря инфимум по всевозможным наборам $\{L_1, \ldots, L_n\}$, приходим к неравенству $d^n(B_\rho) \geqslant \rho$.

Остается объединить (7.2) и (7.5). Теорема доказана.

Таким образом, среди богатого семейства линейных (однородных и аддитивных) функционалов на W^r наиболее информативный с точки зрения интерполяции на классе $W^r_\infty M$ n-элементный набор образуют функционалы $L_i^*(f)=f(u_i)$, $i\in 1:n$.

§ 8. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПОИСКА МАКСИМУМА ФУНКЦИЙ КЛАССА $W^r_\infty M$

Зафиксируем $n\geqslant r\geqslant 1$ и рассмотрим нелинейный функционал

$$L(f)=\max_{t\in[-1,\,1]} f(t).$$

Требуется найти наилучший на классе $W^r_\infty M$ метод восстановления $L(f)$ по информации $I(f)=(f(x_1),\,\ldots,\,f(x_n))$ и указать оптимальные точки $-1\leqslant x_1<\ldots<x_n\leqslant 1$.

Положим

$$R_{rn}=\inf_{-1\leqslant x_1<\ldots<x_n\leqslant 1}\ \inf_{\substack{\Phi:\,\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\\ \Phi(0)=0}}\ \sup_{f\in W^r_\infty M}|L(f)-\Phi(I(f))|. \tag{8.1}$$

В отличие от предыдущего мы ограничиваем множество методов восстановления условием $\Phi(\mathbf{O})=0$. Этому условию удовлетворяют, например, методы вида

$$\Phi(f(x_1),\,\ldots,\,f(x_n))=\max_{t\in[-1,\,1]}\sum_{k=1}^n f(x_k)\,w_k(t), \tag{8.2}$$

где $w_1,\,\ldots,\,w_n$ — произвольные непрерывные на отрезке $[-1,1]$ функции.

Набор $\{x_1,\,\ldots,\,x_n,\,\Phi\}$ называется пассивной стратегией поиска максимума. Стратегия $\{x_1^*,\,\ldots,\,x_n^*,\,\Phi_*\}$, состоящая из точек x_k^* и метода Φ_*, на которых достигается инфимум в (8.1), называется оптимальной на классе $W^r_\infty M$. Опираясь на результаты § 6, вычислим R_{rn} и укажем оптимальную стратегию.

Согласно следствию из теоремы 6.2 имеем

$$R_{rn}\geqslant\inf_{\{x_k\}}\ \inf_{\{\Phi\,|\,\Phi(0)=0\}}\ \sup_{\{f\in W^r_\infty M\,|\,f(x_k)=0,\ k\in 1:n\}}|L(f)-\Phi(I(f))|=$$

$$=\inf_{\{x_k\}}\ \sup_{\{f\in W^r_\infty M\,|\,f(x_k)=0,\ k\in 1:n\}}\Big|\max_{t\in[-1,\,1]}f(t)\Big|=$$

$$=\inf_{\{x_k\}}\ \sup_{\{f\in W^r_\infty M\,|\,f(x_k)=0,\ k\in 1:n\}}\|f\|=M\,\|T_{r,\,n-r}\|. \tag{8.3}$$

Положим, как обычно, $m=n-r$, обозначим $t_1,\,\ldots,\,t_m$ и $u_1,\,\ldots,\,u_n$ соответственно узлы и нули функции Тихомирова T_{rm} и введем сплайн $S(f;t)$ степени $r-1$ с m узлами t_j, интерполирующий функцию f в точках u_k, $k\in 1:n$. Тогда для метода вида (8.2)

$$\Phi_*(I(f))=\max_{t\in[-1,\,1]}S(f;\,t) \tag{8.4}$$

получим

$$R_{rn}\leqslant\sup_{f\in W^r_\infty M}|L(f)-\Phi_*(I(f))|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{f\in W^r_\infty M}\|f-S(f;\,\cdot)\|\leqslant M\,\|T_{r,\,n-r}\|. \tag{8.5}$$

Объединяя (8.3) и (8.5), приходим к следующему результату.

Теорема 8.1. *Справедливо равенство $R_{rn}=M\,\|T_{r,\,n-r}\|$. Оптимальной стратегией поиска максимума функций класса $W^r_\infty M$ является набор $\{u_1,\,\ldots,\,u_n,\,\Phi_*\}$, где u_k — нули функции Тихомирова $T_{r,\,n-r}$, а Φ_* — метод (8.4). При этом оптимальные точки $u_1,\,\ldots,\,u_n$ единственны.*

Рассмотрим частные случаи.

1) $r=1$. Функция $T_{1,\,n-1}$ представляет собой непрерывную ломаную с узлами $t_j=-1+2j/n$, $j\in 1:n-1$, и нулями $u_k=-1+(2k-1)/n$, $k\in 1:n$. Поскольку $S(f;t)$ — кусочно-постоянная функция, то

$$\Phi_*(I(f))=\max_{k\in 1:n}f(u_k).$$

Оптимальность этого метода на классе $W^1_\infty M$ хорошо известна. Его погрешность равна $R_{1n}=M/n$.

2) $r=2$. График функции $T_{2,\,n-2}$ изображен на рис. 16.

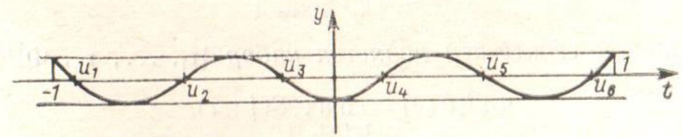


Рис. 16. График функции $y=T_{2,\,n-2}(t)$ при $n=6$

Нулями $T_{2,\,n-2}$ являются точки

$$u_k=-1+(\sqrt{2}-1)a+2(k-1)a,\quad k\in 1:n;\quad a=1/(n-2+\sqrt{2}),$$

а узлами — $u_2,\,\ldots,\,u_{n-1}$. Максимум ломаной $S(f;t)$, интерполирующей f в точках $u_1,\,\ldots,\,u_n$, достигается либо в концах отрезка $[-1, 1]$, либо в узлах $u_2, \ldots, u_{n-1}$. Поэтому оптимальный на классе $W^2_\infty M$ метод вычисления максимума имеет вид

$$\Phi_*(I(f)) = \max \left\{ \frac{\sqrt{2}+1}{2} f(u_1) - \frac{\sqrt{2}-1}{2} f(u_2),\ f(u_2), \ldots, \right.$$

$$\left. f(u_{n-1}),\ \frac{\sqrt{2}+1}{2} f(u_n) - \frac{\sqrt{2}-1}{2} f(u_{n-1}) \right\}.$$

Погрешность $R_{2,n}$ равна $(M/2)(n-2+\sqrt{2})^{-2}$.

Обратимся теперь к задаче об оптимальной стратегии поиска максимума функций $f \in W^r_\infty M$ по информации

$$I(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_n), f'(x_1), \ldots, f'(x_n)), \tag{8.6}$$

где $2n \geqslant r \geqslant 2$, $-1 \leqslant x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1$. Положим

$$R^{(1)}_{rn} = \inf_{\{x_k\}} \inf_{\{\Phi \mid \Phi(O)=0\}} \sup_{f \in W^r_\infty M} |L(f) - \Phi(I(f))|.$$

Рассмотрим функцию Тихомирова T_{rm}, $m = 2n-r$. Обозначим $t_1, \ldots, t_m$ узлы T_{rm}; $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — нули $T^*(t) = T_{rm}(t) + (-1)^r \| T_{rm} \|$; $S(f; t)$ — сплайн степени $r-1$ с узлами $t_1, \ldots, t_m$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$S(f; \tau_k) = f(\tau_k),\ S'(f; \tau_k) = f'(\tau_k),\ k \in 1:n.$$

Со ссылкой на теорему 6.3 легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 8.2. *Справедливы равенства*

$$R^{(1)}_{rn} = \inf_{-1 < x_1 < \ldots < x_n < 1} \sup_{\{f \in W^r_\infty M \mid f(x_k) = f'(x_k) = 0,\ k \in 1:n\}} \|f\| =$$

$$= 2M \| T_{r,\,2n-r} \|.$$

Оптимальной стратегией является набор $\{\tau_1, \ldots, \tau_n, \Phi^{(1)}_*\}$, *где*

$$\Phi^{(1)}_*(I(f)) = \max_{t \in [-1, 1]} S(f; t).$$

При этом оптимальные точки $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *единственны.*

Нетрудно подсчитать, что при $r = 2$

$$R^{(1)}_{2,n} = Mh^2, \quad h = 1/(2n - 2 + \sqrt{2});$$

$$t_j = -1 + (\sqrt{2} - 1)h + 2jh,\ j \in 1:2n-2;$$

$$\tau_k = -1 + \sqrt{2}h + 4(k-1)h,\ k \in 1:n.$$

Максимум ломаной $S(f; t)$ достигается либо в узлах $t_1, \ldots, t_{2n-2}$, либо в точках ± 1. Поэтому оптимальный на классе $W^2_\infty M$ метод поиска максимума функции f по информации (8.6) принимает вид

$$\Phi^{(1)}_*(I(f)) = \max \{ f(\tau_1) - f'(\tau_1) h\sqrt{2},\ f(\tau_1) + f'(\tau_1)h,$$

$$f(\tau_2) \pm f'(\tau_2)h, \ldots, f(\tau_{n-1}) \pm f'(\tau_{n-1})h,$$

$$f(\tau_n) - f'(\tau_n)h,\ f(\tau_n) + f'(\tau_n)h\sqrt{2} \}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

1. Пусть $n \geqslant r \geqslant 1$. Зафиксируем попарно различные точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ из $[-1, 1]$. Положим

$$R = \sup_{\{f \in W^r_\infty M \mid f(x_i) = 0,\ i \in 1:n\}} |f(x_0)|,$$

$$E = \inf_{\{f \in W^r \mid f(x_i)=0,\ i \in 1:n;\ f(x_0)=1\}} \|f^{(r)}\|.$$

Проверить, что $E = M/R$. Указать функцию, на которой достигается значение E.

2. Рассмотрим информацию

$$I(f) = (f(x_0), f'(x_1), \ldots, f^{(r-1)}(x_{r-1})),$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$ — произвольные точки отрезка $[-1, 1]$. Показать, что погрешность оптимального на классе $W^r_\infty M$ восстановления функционала $L(f) = f(x)$ по информации $I(f)$ конечна, а единственный линейный оптимальный метод восстановления имеет вид

$$\Phi_*(I(f)) = \textstyle\sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(x_\nu) P_\nu(x).$$

Здесь $P_0(x) = 1$ и

$$P_k(x) = \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_1}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_{k-1}}^{t_{k-1}} dt_k,\ k \in 1:r-1. \tag{*}$$

3. Проверить, что в случае равноотстоящих узлов $x_k = x_0 + kh$ полиномы (*) допускают представление

$$P_k(x) = \frac{1}{k!}(x - x_0)(x - x_0 - kh)^{k-1},\ k \in 1:r-1.$$

4. Показать, что функция Тихомирова T_{rm} при $r=3$ имеет узлы

$$t_j = -1 + \frac{2j+1}{m+2}, \quad j \in 1:m,$$

нули

$$u_1 = -u_{m+3} = -1 + \frac{2-\sqrt{3}}{m+2}; \quad u_k = -1 + \frac{2(k-1)}{m+2}, \quad k \in 2:m+2,$$

и норму $\|T_{3,m}\| = (3(m+2)^3)^{-1}$.

5. Определить знак $\mathring{T}_{rm}$ в крайней слева точке альтернанса.

6. Обозначим $B(x)$ B-сплайн степени r, построенный по узлам $t_j = \cos\frac{(r+1-j)\pi}{r+1}$, $j \in 0:r+1$. Доказать, что при $x \in [-1, 1]$

$$\mathring{T}_{rr}(x) = \frac{r+1}{r!\,2^{r-1}} B(x).$$

7. Проверить справедливость равенств

$$\|\mathring{T}_{rr}\| = \mathring{T}_{rr}(0) = \frac{1}{r!}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{[r/2]} (-1)^k \cos^r \frac{k\pi}{r+1}\right),$$

где $[r/2]$ — целая часть числа $r/2$.

8. Пусть информация $I(f)$, совершенный сплайн $T(t)$ степени r, и интерполяционный сплайн $S(f;t)$ степени $r-1$ такие же, как в начале § 6, а $L(f)=f^{(\nu)}(x)$, где $\nu \in 1:r-2$ — фиксированный порядок производной. Доказать следующее утверждение.

Если $x \in [-1, x_1)$ или $x \in (x_p, 1]$ или x совпадает с некоторой точкой x_k кратности $\sigma_k = \nu$, то погрешность оптимального восстановления производной $f^{(\nu)}(x)$ по информации $I(f)$ на классе $W_\infty^r M$ равна $M|T^{(\nu)}(x)|$. При этом оптимальным методом дифференцирования является метод

$$\Phi_*(I(f)) = S^{(\nu)}(f;\ x).$$

9. Решить задачу оптимального восстановления производных $f'(0)$ и $f''(0)$ по информации $I(f) = (f(-h), f(0), f(h))$ на классе $W_\infty^3 M$ при фиксированном $h \in (0, 1]$.

10. К обозначениям § 2 добавим следующие:

$$I(f) = (L_1(f), \ldots, L_n(f)), \quad \|I(f)\|_\infty = \max_{i \in 1:n} |L_i(f)|.$$

Доказать, что при фиксированном $\varepsilon > 0$

$$R_\varepsilon := \inf_{\Phi} \sup_{\substack{f \in W,\ Y \in \mathbb{R}^n, \\ \|I(f)-Y\|_\infty \leq \varepsilon}} |L(f) - \Phi(Y)| =$$

$$= \sup_{\{f \in W \mid \|I(f)\|_\infty \leq \varepsilon\}} |L(f)|.$$

Это равенство обобщает соотношение двойственности из теоремы 2.1 на тот случай, когда информация о функции f известна с погрешностью ε.

Глава III. НАТУРАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Натуральным называется сплайн S степени $2r-1$ с m узлами $t_1<t_2<\ldots<t_m$, удовлетворяющий дополнительным условиям: $m\geqslant r\geqslant 2$ и

$$S^{(r)}(x)=0 \text{ при } x<t_1 \text{ и } x>t_m. \tag{1.1}$$

В простейшем случае $r=2$ получаем натуральный кубический сплайн. Это дважды непрерывно дифференцируемая функция, совпадающая на интервалах (t_{j-1}, t_j), $j\in 2:m$, с некоторыми полиномами третьей степени и линейная на бесконечных интервалах $(-\infty, t_1)$ и $(t_m, +\infty)$.

Для натуральных сплайнов наиболее естественной является следующая постановка интерполяционной задачи:

$$S(t_j)=y_j,\quad j\in 1:m. \tag{1.2}$$

В ней узлы интерполяции совпадают с узлами сплайна. Задача (1.2) при любых правых частях имеет решение, и оно единственно. При доказательстве этого утверждения используется оригинальная техника, не связанная с подсчетом нулей и нуль-интервалов.

Интерполяционные натуральные сплайны обладают замечательными экстремальными свойствами, из которых выделяется свойство минимальной нормы. Точная формулировка последнего такова: единственным решением вариационной задачи

$$\begin{gathered}\Phi(f):=\int_c^d [f^{(r)}(x)]^2\,dx\to\inf,\\ f(t_j)=y_j,\ j\in 1:m;\quad f\in W_2^r\end{gathered} \tag{1.3}$$

является интерполяционный натуральный сплайн. Это свойство служит основой для широкого обобщения понятия натурального сплайна.

Кратко изложим содержание главы по параграфам. В § 2 с помощью ключевого соотношения (2.5) доказана однозначная разрешимость интерполяционной задачи (1.2). Появление ключевого соотношения может показаться неожиданным. В дальнейшем (в § 5) выясняется, что интеграл в левой части (2.5) связан с вариацией функционала Φ из задачи (1.3).

В § 3 установлено свойство минимальной нормы для натуральных сплайнов. И здесь важную роль играет ключевое соотношение (2.5).

В § 4 рассматривается задача о наилучшей на классе $W_2^r M$ квадратурной формуле с постоянными узлами. Для погрешности квадратурной формулы получено интегральное представление, которое позволяет свести исходную задачу к задаче о моносплайне, наименее уклоняющемся от нуля в L_2-норме. Показано, что наилучшей является квадратурная формула, точная на натуральных сплайнах.

В § 5 делается первый шаг к обобщению понятия натурального сплайна. Ставится вариационная задача

$$\begin{gathered}\Phi(f):=\int_0^l [(f'')^2+4b^4f^2]\,dx\to\inf,\\ f(t_j)=y_j,\ j\in 1:m;\quad f\in W_2^2.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Такая задача возникает при описании положения балки, лежащей на упругом основании, при воздействии на нее сосредоточенных нагрузок. Вместе с тем задача (1.4) при $b=0$ совпадает с задачей (1.3) при $r=2$ и $[c,d]=[0,l]$. Значит, решение задачи (1.4) будет естественным обобщением натурального кубического сплайна.

На основе стандартного анализа вариационной задачи (1.4) вводится понятие балочного сплайна. Доказывается, что единственным решением задачи (1.4) является интерполяционный балочный сплайн.

В § 6 натуральный сплайн определяется как решение общей вариационной задачи при линейных ограничениях. Получен критерий оптимальности в форме условия ортогональности. Установлено достаточное условие единственности натурального сплайна.

В § 7 в общей ситуации доказаны оптимальность и центральность сплайновых алгоритмов.

В § 8 на примере сферических сплайнов демонстрируется плодотворность вариационного подхода к изучению сплайнов, зависящих от нескольких переменных.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОГО СПЛАЙНА. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

Возьмем сплайн S класса $(2r-1, m)$ с фиксированными узлами $t_1<t_2< \ldots <t_m$:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{2r-1} a_i x^i + \sum_{j=1}^{m} (x-t_j)_+^{2r-1}.$$

Перепишем в развернутом виде первое из условий (1.1):

$$\sum_{i=r}^{2r-1} \frac{i!}{(i-r)!} a_i x^{i-r} = 0, \quad x<t_1,$$

или иначе

$$\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(r+k)!}{k!} a_{r+k} x^k = 0, \quad x<t_1.$$

Это условие выполняется тогда и только тогда, когда a_r, $a_{r+1}, \ldots, a_{2r-1}$ равны нулю. Таким образом,

$$S(x) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i + \sum_{j=1}^{m} b_j (x-t_j)_+^{2r-1}. \tag{2.1}$$

Второе из условий (1.1) приводит к соотношению

$$\frac{(2r-1)!}{(r-1)!} \sum_{j=0}^{m} b_j (x-t_j)^{r-1} = 0, \quad x>t_m.$$

Из него следует, что

$$0 = \sum_{j=1}^{m} b_j (x-t_j)^{r-1} = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k C_{r-1}^k t_j^k x^{r-1-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k C_{r-1}^k x^{r-1-k} \sum_{j=1}^{m} b_j t_j^k, \quad x>t_m.$$

Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{m} b_j t_j^k = 0, \quad k \in 0:r-1. \tag{2.2}$$

Теперь можно дать эквивалентное определение натурального сплайна. Это сплайн вида (2.1) с $m \geqslant r \geqslant 2$, коэффициенты которого удовлетворяют ограничениям (2.2).

Отметим, что при $m=r$ система (2.2) имеет только нулевое решение. В этом случае натуральный сплайн превращается в полином степени не выше $r-1$.

Запишем представление для r-й производной натурального сплайна:

$$S^{(r)}(x) = \frac{(2r-1)!}{(r-1)!} \sum_{j=1}^{m} b_j (x-t_j)_+^{r-1}.$$

Поскольку $u_+^{r-1} = u^{r-1} + (-1)^r (-u)_+^{r-1}$, то

$$\sum_{j=1}^{m} b_j (x-t_j)_+^{r-1} = \sum_{j=1}^{m} b_j (x-t_j)^{r-1} + (-1)^r \sum_{j=1}^{m} b_j (t_j-x)_+^{r-1}.$$

Однако в силу (2.2) $\sum_{j=1}^{m} b_j (x-t_j)^{r-1} = 0$ для всех вещественных x, поэтому

$$\sum_{j=1}^{m} b_j (x-t_j)_+^{r-1} = (-1)^r \sum_{j=1}^{m} b_j (t_j-x)_+^{r-1}.$$

Окончательно получаем

$$S^{(r)}(x) = (-1)^r \frac{(2r-1)!}{(r-1)!} \sum_{j=1}^{m} b_j (t_j-x)_+^{r-1}. \tag{2.3}$$

Введем отрезок $[c,d]$ так, чтобы

$$c \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leqslant d. \tag{2.4}$$

Обозначим W_2^r пространство функций, имеющих на $[c,d]$ абсолютно непрерывную $(r-1)$-ю производную и суммируемую с квадратом r-ю производную.

Лемма 2.1. *Для любого натурального сплайна S и произвольной функции $f \in W_2^r$ справедливо равенство*

$$\frac{(-1)^r}{(2r-1)!} \int_c^d f^{(r)}(x) S^{(r)}(x) dx = \sum_{j=1}^{m} b_j f(t_j). \tag{2.5}$$

Доказательство. Левую часть равенства (2.5) обозначим J_r. Согласно (2.3)

$$J_r = \sum_{j=1}^{m} b_j \left[\frac{1}{(r-1)!} \int_c^d (t_j-x)_+^{r-1} f^{(r)}(x) dx \right]. \tag{2.6}$$

Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (t-c)^k + \frac{1}{(r-1)!} \int_c^d (t-x)_+^{r-1} f^{(r)}(x) dx.$$

Положив $P_{r-1}(t) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(c)(t-c)^k/k!$, перепишем эту формулу в виде

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_c^d (t-x)_+^{r-1} f^{(r)}(x) dx = f(t) - P_{r-1}(t). \tag{2.7}$$

Теперь подставим (2.7) в (2.6). Получим

$$J_r = \sum_{j=1}^{m} b_j [f(t_j) - P_{r-1}(t_j)].$$

Однако в силу (2.2) $\sum_{j=1}^{m} b_j P_{r-1}(t_j)=0$. Значит,

$$J_r = \sum_{j=1}^{m} b_j f(t_j).$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Интерполяционная задача на натуральных сплайнах*

$$S(t_j)=y_j, \quad j\in 1:m, \tag{2.8}$$

при любых правых частях имеет решение, и оно единственно.

Доказательство. Формально к (2.8) нужно добавить условия (2.2). Тогда получится система линейных уравнений порядка $r+m$ относительно переменных $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, b_1, \ldots, b_m$.

Рассмотрим однородную систему

$$\begin{gathered} S(t_j)=0, \quad j\in 1:m, \\ \sum_{j=1}^{m} b_j t_j^k=0, \quad k\in 0:r-1, \end{gathered} \tag{2.9}$$

и покажем, что она имеет только нулевое решение.

Возьмем любое решение этой системы. Соответствующий натуральный сплайн обозначим S_0. Функция S_0 принадлежит пространству W_2^r, поскольку ее r-я производная непрерывна. Подставив в (2.5) S_0 вместо f и S, получим

$$\int_c^d [S_0^{(r)}(x)]^2 dx=0.$$

Значит, $S_0^{(r)}(x)=0$ на $[c,d]$. Добавим к этому, что по определению натурального сплайна $S_0^{(r)}(x)=0$ при $x<t_1$ и $x>t_m$. С учетом (2.4) придем к тождеству $S_0^{(r)}\equiv 0$. Из него следует, что S_0 является алгебраическим полиномом степени не выше $r-1$.

Полином S_0 имеет m нулей $t_1, \ldots, t_m$. Так как $m\geqslant r$ (это условие включается в определение натурального сплайна), то $S_0\equiv 0$.

Теперь воспользуемся леммой 1.2.2, заменив в ней r на $2r-1$. Согласно этой лемме тождество $S_0\equiv 0$ выполняется тогда и только тогда, когда все коэффициенты S_0 равны нулю. Получили, что система (2.9) имеет только тривиальное решение. Теорема доказана.

Введем фундаментальные натуральные сплайны $H_1, \ldots, H_m$. Они определяются как решения интерполяционных задач $H_i(t_j)=\delta_{ij}$, $j\in 1:m$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Согласно теореме 2.1 фундаментальные натуральные сплайны существуют и единственны. С их помощью любой натуральный сплайн S можно представить в виде

$$S(x)=\sum_{i=1}^{m} S(t_i)\, H_i(x). \tag{2.10}$$

При доказательстве теоремы 2.1 существенную роль сыграл частный случай леммы 2.1. Другой частный случай используется в следующем параграфе. Ввиду особой важности соотношения (2.5) для теории натуральных сплайнов будем называть его *ключевым*.

§ 3. СВОЙСТВО МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЫ

Пусть $f\in W_2^r$. Обозначим $\sigma(f;x)$ натуральный сплайн, интерполирующий f в узлах t_j:

$$\sigma(f;\ t_j)=f(t_j), \quad j\in 1:m.$$

Подставляя в (2.5) $f-\sigma(f;\cdot)$ вместо f, получаем

$$\int_c^d [f^{(r)}(x)-\sigma^{(r)}(f;\ x)]\, S^{(r)}(x)dx=0$$

для любого натурального сплайна S. Это равенство называется условием ортогональности. Из него при $S=\sigma(f;\cdot)$ следует, что

$$\int_c^d [f^{(r)}(x)]^2 dx=\int_c^d [(f^{(r)}(x)-\sigma^{(r)}(f;\ x))+\sigma^{(r)}(f;\ x)]^2 dx=$$

$$=\int_c^d [f^{(r)}(x)-\sigma^{(r)}(f;\ x)]^2 dx+\int_c^d [\sigma^{(r)}(f;\ x)]^2 dx. \tag{3.1}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|f^{(r)}\|_2 := \left(\int_c^d [f^{(r)}(x)]^2 dx\right)^{1/2} \to \inf \tag{3.2}$$

при ограничениях $f\in W_2^r$ и $f(t_j)=y_j$, $j\in 1:m$. Условия $c\leqslant t_1< <t_2<\ldots<t_m\leqslant d$ и $m\geqslant r\geqslant 2$ сохраняются. Множество функций, удовлетворяющих ограничениям задачи (3.2), обозначим Ω.

Введем натуральный сплайн S_* степени $2r-1$ с узлами $t_1, \ldots, t_m$, принимающий в точках t_j значения y_j. Очевидно, что S_* принадлежит Ω.

Теорема 3.1. *Единственным решением задачи* (3.2) *является* S_*.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\sigma(f;\cdot)= =S_*$ для всех $f\in\Omega$. Это следует из соотношений

$$\sigma(f;\ t_j)=f(t_j)=y_j=S_*(t_j), \quad j\in 1:m,$$

и теоремы 2.1. Согласно (3.1)

$$\|f^{(r)}\|_2 \geq \|\sigma^{(r)}(f;\ \cdot)\|_2 = \|S_*^{(r)}\|_2 \quad \forall f \in \Omega. \tag{3.3}$$

Тем самым оптимальность S_* установлена.

Если $\|f^{(r)}\|_2 = \|S_*^{(r)}\|_2$ для некоторой функции f из Ω, то в силу той же формулы (3.1)

$$\int_c^d [f^{(r)}(x) - S_*^{(r)}(x)]^2\, dx = 0. \tag{3.4}$$

Отсюда легко вывести, что $f(x) = S_*(x)$ при $x \in [c, d]$. Действительно, условие (3.4) выполняется лишь тогда, когда разность $f - S_*$ совпадает на $[c, d]$ с алгебраическим полиномом Q_{r-1} степени не выше $r-1$. Поскольку $Q_{r-1}(t_j) = f(t_j) - S_*(t_j) = 0$, $j \in 1:m$, и $m \geq r$, то $Q_{r-1} \equiv 0$.

Таким образом, неравенство (3.3) обращается в равенство только при $f = S_*$. Теорема доказана.

В простейшем случае $r = 2$ получаем следующий результат. Среди всех функций f, принадлежащих W_2^2 и удовлетворяющих при $m \geq 2$ условиям $f(t_j) = y_j$, $j \in 1:m$, наименьшее значение $\|f''\|_2$ имеет натуральный кубический сплайн — и только он.

Замечательное свойство натуральных сплайнов, установленное в теореме 3.1, называется свойством минимальной нормы.

§ 4. НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ И МОНОСПЛАЙНЫ

В этом параграфе нам удобно в качестве $[c, d]$ взять отрезок $[0, 1]$. Обозначим $W_2^r M$ множество функций $f \in W_2^r$, у которых

$$\|f^{(r)}\|_2 := \left(\int_0^1 [f^{(r)}(x)]^2 dx\right)^{1/2} \leq M.$$

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(t)\, dt \approx \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m a_j f(t_j)$$

с вектором коэффициентов $A = (a_1, \ldots, a_m)$ и *фиксированными* узлами $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq 1$. Величины

$$\triangle(A;\ f) = \int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m a_j f(t_j),$$

$$e(A) = \sup_{f \in W_2^r M} |\triangle(A;\ f)|$$

называются погрешностью квадратурной формулы на функции f и множестве $W_2^r M$ соответственно.

Поставим задачу о наилучшей квадратурной формуле на классе $W_2^r M$ при $m \geq r \geq 2$:

$$e(A) \to \inf_{A \in \mathbb{R}^m}. \tag{4.1}$$

Реально в (4.1) конкурируют не все A, а только те, которые порождают квадратурные формулы, точные на полиномах степени не выше $r-1$. Множество таких A обозначим D. Покажем, что

$$e(A) = +\infty \quad \text{при} \quad A \overline{\in} D. \tag{4.2}$$

Условие $A \overline{\in} D$ означает, что существует полином Q_{r-1} степени не выше $r-1$, на котором $c := \Delta(A;\ Q_{r-1}) \neq 0$. Поскольку λQ_{r-1} принадлежит $W_2^r M$ при всех вещественных λ, то $e(A) \geq \sup_\lambda |\Delta(A;\ \lambda Q_{r-1})| = \sup_\lambda |\lambda c| = +\infty$. Отсюда очевидным образом следует (4.2). Аналогичное соображение уже встречалось в § II.3.

Согласно (4.2) задачу (4.1) можно переписать в виде

$$e(A) \to \inf_{A \in D}. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Погрешность $\Delta(A; f)$ квадратурной формулы, точной на полиномах степени не выше $r-1$, при $f \in W_2^r$ допускает представление*

$$\Delta(A;\ f) = \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^1 G(A;\ x) f^{(r)}(x)\, dx, \tag{4.4}$$

$$\text{где} \quad G(A; x) = x^r - \sum_{j=1}^m a_j (x - t_j)_+^{r-1} \tag{4.5}$$

$$\text{и} \quad G(A; x) = (x-1)^r \quad \text{при} \quad x > t_m. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (t - x)_+^{r-1} f^{(r)}(x)\, dx,$$

линейностью функционала $\Delta(A; f)$ по f и точностью квадратурной формулы с вектором коэффициентов A на полиномах степени не выше $r-1$, получаем

$$\Delta(A;\ f) = \Delta\left(A;\ \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (\cdot - x)_+^{r-1} f^{(r)}(x)\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^1 (t-x)_+^{r-1} f^{(r)}(x)\,dx \right) dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m a_j \int_0^1 (t_j - x)_+^{r-1} f^{(r)}(x)\,dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 f^{(r)}(x) \left[\int_0^1 (t-x)_+^{r-1}\,dt - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m a_j (t_j - x)_+^{r-1} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{r!} \int_0^1 f^{(r)}(x) \left[(1-x)^r - \sum_{j=1}^m a_j (t_j - x)_+^{r-1} \right] dx =$$

$$= \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^1 G(A;\ x) f^{(r)}(x)\,dx.$$

Здесь

$$G(A;\ x) = (x-1)^r - (-1)^r \sum_{j=1}^m a_j (t_j - x)_+^{r-1}. \tag{4.7}$$

В силу тождества $u_+^{r-1} = u^{r-1} + (-1)^r (-u)_+^{r-1}$ имеем

$$G(A;\ x) = \left[(x-1)^r + \sum_{j=1}^m a_j (x - t_j)^{r-1} \right] - \sum_{j=1}^m a_j (x - t_j)_+^{r-1}. \tag{4.8}$$

Покажем, что

$$(x-1)^r + \sum_{j=1}^m a_j (x - t_j)^{r-1} \equiv x^r. \tag{4.9}$$

При фиксированном x функция $(x-t)^{r-1}$ является алгебраическим полиномом степени $r-1$. Для нее $\Delta(A;\ (x-\cdot)^{r-1}) = 0$ или в развернутом виде

$$0 = \int_0^1 (x-t)^{r-1}\,dt - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m a_j (x - t_j)^{r-1} =$$

$$= \frac{1}{r} \left[x^r - (x-1)^r - \sum_{j=1}^m a_j (x - t_j)^{r-1} \right].$$

Последнее равенство эквивалентно (4.9).

Объединяя (4.8) и (4.9), приходим к требуемому представлению (4.5) для ядра $G(A; x)$. Формула (4.6) следует из (4.7). Лемма доказана.

Функция вида $x^r - S(x)$, где S — сплайн класса $(r-1, m)$, называется *моносплайном*. По лемме 3.1 вектору $A \in D$ соответствует моносплайн $G(A; x)$, удовлетворяющий дополнительным условиям

$$G(A; x) = x^r \quad \text{при } x < t_1,$$
$$G(A; x) = (x-1)^r \quad \text{при } x > t_m.$$

Справедливо и обратное утверждение: вектор коэффициентов A моносплайна $G(A; x)$ с указанными свойствами принадлежит множеству D, т. е. порождает квадратурную формулу, точную на полиномах степени не выше $r-1$. Действительно, условие (4.6) для моносплайна (4.5) равносильно тождеству (4.9), которое в свою очередь можно переписать в эквивалентной форме

$$\int_0^1 (x-t)^{r-1}\,dt \equiv \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m a_j (x - t_j)^{r-1}. \tag{4.10}$$

В левой и правой частях (4.10) стоят алгебраические полиномы. Приравнивая коэффициенты при x^{r-1-k}, получаем

$$\int_0^1 t^k\,dt = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m a_j t_j^k, \quad k \in 0 : r-1.$$

Это и гарантирует включение $A \in D$.

Таким образом, вектор A принадлежит множеству D тогда и только тогда, когда моносплайн $G(A; x)$ вида (4.5) удовлетворяет условию (4.6).

Лемма 4.2. *При всех $A \in D$ справедливо равенство*

$$e(A) = \frac{M}{r!} \| G(A;\ \cdot) \|_2.$$

Доказательство. Согласно лемме 4.1 и неравенству Коши-Буняковского для любой функции $f \in W_2^r M$ имеем

$$|\Delta(A;\ f)| = \frac{1}{r!} \left| \int_0^1 G(A;\ x) f^{(r)}(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r!} \| G(A;\ \cdot) \|_2 \cdot \| f^{(r)} \|_2 \leqslant \frac{M}{r!} \| G(A;\ \cdot) \|_2. \tag{4.11}$$

На функции $f_*(x)$, у которой $f_*^{(r)}(x) = M G(A; x) / \| G(A; \cdot) \|_2$, оба неравенства в (4.11) обращаются в равенство. Значит,

$$e(A) := \sup_{f \in W_2^r M} |\Delta(A;\ f)| = \frac{M}{r!} \| G(A;\ \cdot) \|_2.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\| G(A;\ \cdot) \|_2 \to \inf \tag{4.12}$$

с ограничением $G(A; x) = (x-1)^r$ при $x > t_m$. На основании леммы 4.2 множество решений этой задачи совпадает с множеством решений задачи (4.3).

Теорема 4.1. *Единственным решением задач* (4.3) *и* (4.12) *является вектор* $A^* = (a_1^*, \ldots, a_m^*)$, *компоненты которого порождают квадратурную формулу, точную на натуральных сплайнах степени* $2r-1$.

Доказательство. Для нахождения a_i^* воспользуемся точностью квадратурной формулы на фундаментальных натуральных сплайнах $H_1, \ldots, H_m$ (см. конец § 2). Имеем

$$\int_0^1 H_i(x)dx = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^m a_j^* H_i(t_j) = \frac{1}{r} a_i^*.$$

Отсюда

$$a_i^* = r\int_0^1 H_i(x)dx, \quad i\in 1:m. \tag{4.13}$$

Очевидно, что вектор $A^* = (a_1^*, \ldots, a_m^*)$ принадлежит множеству D. Обозначим $G^*(x) = G(A^*; x)$.

Возьмем произвольный моносплайн $G(x) = G(A; x)$ вида (4.5), удовлетворяющий ограничению (4.6), и рассмотрим разность $\varepsilon(x) = G(x) - G^*(x)$. По определению

$$\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^m (a_j^* - a_j)(x - t_j)_+^{r-1}$$

и $\varepsilon(x) = 0$ при $x > t_m$. Введем сплайн

$$S(x) = \frac{(r-1)!}{(2r-1)!}\sum_{j=1}^m (a_j^* - a_j)(x - t_j)_+^{2r-1}.$$

Поскольку $S^{(r)}(x) = \varepsilon(x) = 0$ при $x < t_1$ и $x > t_m$, то S — натуральный сплайн степени $2r-1$.

По построению квадратурная формула с коэффициентами a_i^* точна на S. Учитывая лемму 4.1, получаем

$$\int_0^1 G^*(x)S^{(r)}(x)dx = 0.$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\int_0^1 G^*(x)[G(x) - G^*(x)]dx = 0.$$

Из него следует, что

$$\int_0^1 [G(x)]^2 dx = \int_0^1 G^*(x) + (G(x) - G^*(x))]^2 dx =$$

$$= \int_0^1 [G^*(x)]^2 dx + \int_0^1 [G(x) - G^*(x)]^2 dx.$$

В частности, $\|G\|_2 \geqslant \|G^*\|_2$. Это свидетельствует об оптимальности A^*.

Проверим, что A^* — единственное решение задачи (4.12). Равенство $\|G\|_2 = \|G^*\|_2$ достигается лишь тогда, когда $G(A; x) = G(A^*; x)$ на $[0, 1]$. Вместе с тем $G(A; x) = G(A^*; x)$ при $x < t_1$ и $x > t_m$. Значит, $G(A; x) \equiv G(A^*; x)$. Согласно лемме I.2.2 $A = A^*$. Теорема доказана.

Отметим, что в силу (4.13) и (2.10)

$$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^m a_j^* f(t_j) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m f(t_j) H_j(x)dx =$$

$$= \int_0^1 \sigma(f; x)dx,$$

где $\sigma(f; x)$ — интерполяционный натуральный сплайн. Теперь теорему 4.1 можно переформулировать так: единственной наилучшей на классе $W_2^r M$ квадратурной формулой с фиксированными узлами $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m \leqslant 1$ является формула

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 \sigma(f; x)dx.$$

Этот результат подтверждает общий тезис об оптимальности сплайновых алгоритмов.

§ 5. БАЛОЧНЫЕ СПЛАЙНЫ

Теорема 3.1 позволяет определить натуральный сплайн как решение вариационной задачи

$$\int_c^d [f^{(r)}(x)]^2 dx \to \inf,$$

$$f(t_j) = y_j, \quad j\in 1:m; \quad f\in W_2^r.$$

Эта точка зрения оказывается чрезвычайно плодотворной. Ее развитию посвящены данный и следующие два параграфа.

Начнем с непосредственного обобщения натурального кубического сплайна. Рассмотрим вариационную задачу

$$\Phi(f) := \int_0^l [(f'')^2 + 4b^4 f^2]dx \to \inf,$$
$$f(t_j) = y_j, \quad j\in 1:m; \quad f\in W_2^2, \tag{5.1}$$

где $b > 0$ и $0 = t_1 < \ldots < t_m = l$. Она возникает при описании положения упругой балки, вдавленной в точках t_j на глубины y_j в упругое основание. Предположим, что задача (5.1) имеет решение $f_* \in W_2^2$, обладающее дополнительным свойством: на каждом промежутке $[t_1, t_2)$, (t_2, t_3), $\ldots$, $(t_{m-1}, t_m]$ у f_* существует и непрерывна четвертая производная. Выведем необходимое условие оптимальности.

Функция $f_* + \lambda h$, где $h \in W_2^2$ и $h(t_j)=0$, $j \in 1:m$, при любом вещественном λ удовлетворяет ограничениям задачи (5.1). Так как

$$0 \leqslant \Phi(f_* + \lambda h) - \Phi(f_*) = 2\lambda \int_0^l [f_*'' h'' + 4b^4 f_* h]\, dx +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^l [(h'')^2 + 4b^4 h^2]\, dx,$$

то для любой вариации h с указанными свойствами

$$\int_0^l [f_*'' h'' + 4b^4 f_* h]\, dx = 0. \qquad (5.2)$$

Обозначим $F = f_*^{(IV)} + 4b^4 f_*$. Зафиксируем $x_0 \in (t_{j-1}, t_j)$ и покажем, что $F(x_0) = 0$.

Допустим, вопреки утверждению, что $F(x_0) > 0$ (случай $F(x_0) < 0$ рассматривается аналогично). По непрерывности найдется $\delta > 0$, такое, что $F(x) > 0$ на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (t_{j-1}, t_j)$. Подставляя в (5.2) вариацию $h_\delta(x) = (x - x_0 + \delta)_+^2 (x_0 + \delta - x)_+^2$ и интегрируя первое слагаемое два раза по частям, получаем

$$0 = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f_*'' h_\delta'' + 4b^4 f_* h_\delta]\, dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f_*^{(IV)} + 4b^4 f_*] h_\delta\, dx =$$

$$= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} F(x)\,(x - x_0 + \delta)^2 (x_0 + \delta - x)^2\, dx.$$

Однако последний интеграл определенно положительный. Противоречие убеждает нас в справедливости равенства $F(x_0) = 0$. Таким образом, на всех интервалах (t_{j-1}, t_j), $j \in 2:m$, функция f_* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f^{(IV)} + 4b^4 f = 0. \qquad (5.3)$$

Подставим в (5.2) вариацию $h_\delta(x) = x(\delta - x)_+^2$, где $\delta \in (0, t_2)$, и проинтегрируем первое слагаемое два раза по частям. Получим

$$0 = \int_0^\delta [f_*'' h_\delta'' + 4b^4 f_* h_\delta]\, dx = f_*'' h_\delta' \Big|_0^\delta + \int_0^\delta [f_*^{(IV)} +$$

$$+ 4b^4 f_*]\, h_\delta\, dx = -f_*''(0) h_\delta'(0) = -\delta^2 f_*''(0).$$

Отсюда следует, что $f_*''(0) = 0$. Аналогично проверяется равенство $f_*''(l) = 0$. Значит, f_* удовлетворяет граничным условиям $f''(0) = f''(l) = 0$.

Подведем предварительные итоги.

Лемма 5.1. *Решение f_* вариационной задачи (5.1), существование которого мы пока предполагаем, на каждом интервале (t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (t_{m-1}, t_m) удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.3), а его вторая производная f_*'' обращается в нуль на концах отрезка $[0, l]$.*

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение (5.3). Его характеристический полином $p(\lambda) = \lambda^4 + 4b^4$ имеет четыре корня

$$\lambda_0 = b\sqrt{2}\ \exp\,(i\pi/4) = b(1 + i),$$

$$\lambda_1 = b\sqrt{2}\ \exp\,(-i\pi/4) = b(1 - i),$$

$$\lambda_2 = b\sqrt{2}\ \exp\,(3\pi/4) = b(-1 + i),$$

$$\lambda_3 = b\sqrt{2}\ \exp\,(-3\pi/4) = b(-1 - i).$$

Следовательно, фундаментальную систему решений образуют функции

$$u_0(x) = e^{bx} \cos bx, \qquad u_1(x) = e^{bx} \sin bx,$$

$$u_2(x) = e^{-bx} \cos bx, \qquad u_3(x) = e^{-bx} \sin bx.$$

Линейные комбинации

$$K_i(x) = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} u_j(x), \quad i \in 0:3,$$

с неособенной матрицей $\{c_{i\cdot}\}$ также образуют фундаментальную систему. Выберем c_{ij} так, чтобы выполнялись условия $K_i^{(\nu)}(0) = \delta_{i\nu}$, $\nu \in 0:3$, где $\delta_{i\nu}$ — символ Кронекера. В этом случае, как нетрудно проверить,

$$K_0(x) = \operatorname{ch} bx \cos bx,$$

$$K_1(x) = \frac{1}{2b} [\operatorname{ch} bx \sin bx + \operatorname{sh} bx \cos bx],$$

$$K_2(x) = \frac{1}{2b^2} \operatorname{sh} bx \sin bx,$$

$$K_3(x) = \frac{1}{4b^3} [\operatorname{ch} bx \sin bx - \operatorname{sh} bx \cos bx].$$

Здесь $\operatorname{ch} u = (e^u + e^{-u})/2$ — гиперболический косинус, $\operatorname{sh} u = (e^u - e^{-u})/2$ — гиперболический синус. Функции K_i были введены А. Н. Крыловым.

Определение. Балочным сплайном называется функция вида

$$S(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i K_i(x) + \sum_{j=2}^{m-1} d_j K_3((x - t_j)_+)$$

при дополнительном условии

$$S''(0) = S''(l) = 0. \qquad (5.4)$$

По построению балочный сплайн дважды непрерывно дифференцируем на $[0, l]$ и в каждом интервале $(t_1, t_2), \ldots$ $\ldots, (t_{m-1}, t_m)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.3).

Лемма 5.2. *Для любого балочного сплайна S и произвольной функции $f \in W_2^2$ справедливо равенство*

$$\int_0^l [S''f'' + 4b^4 Sf]\, dx = S'''(t_1 + 0) f(t_1) +$$
$$+ \sum_{j=2}^{m-1} [S'''(t_j + 0) - S'''(t_j - 0)] f(t_j) - S'''(t_m - 0) f(t_m). \quad (5.5)$$

Доказательство. Левую часть формулы (5.5) обозначим J. Проинтегрируем первое слагаемое в J два раза по частям. Учитывая (5.4), получаем

$$\int_0^l S''f''\, dx = -\int_0^l S'''f'\, dx = -\sum_{j=2}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} S'''f'\, dx =$$
$$= -\sum_{j=2}^m \left[S'''f \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} S^{(IV)} f\, dx \right].$$

Значит,

$$J = -\sum_{j=2}^m \left[S'''f \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (S^{(IV)} + 4b^4 S) f\, dx \right] =$$
$$= S'''(t_1 + 0) f(t_1) + \sum_{j=2}^{m-1} [S'''(t_j + 0) - S'''(t_j - 0)] f(t_j) -$$
$$- S'''(t_m - 0) f(t_m).$$

Лемма доказана.

Обратимся к интерполяционной задаче на балочных сплайнах:

$$S(t_j) = y_j, \quad j \in 1:m. \quad (5.6)$$

Теорема 5.1. *При любых правых частях решение задачи (5.6) существует и единственно.*

Доказательство. Формально к (5.6) нужно добавить условия (5.4). Тогда получится система линейных уравнений порядка $m+2$ с таким же числом неизвестных $c_0, c_1, c_2, c_3, d_2, \ldots, d_{m-1}$.

Покажем, что однородная система

$$S(t_j) = 0, \quad j \in 1:m,$$
$$S''(0) = S''(l) = 0$$

имеет только тривиальное решение. Возьмем любое решение этой системы. Соответствующий балочный сплайн обозначим S_0. Функция S_0 принадлежит пространству W_2^2, поскольку ее вторая производная непрерывна. Подставив в (5.5) S_0 вместо f и S, получим

$$\int_0^l [(S_0'')^2 + 4b^4 S_0^2]\, dx = 0.$$

Следовательно, $S_0 = 0$ на $[0, l]$. Остается учесть, что система функций

$$K_0(x),\ K_1(x),\ K_2(x),\ K_3(x),\ K_3((x - t_2)_+),\ \ldots,\ K_3((x - t_{m-1})_+)$$

линейно независима на $[0, l]$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Единственным решением задачи* (5.1) *является интерполяционный балочный сплайн S_*.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию f, удовлетворяющую ограничениям задачи (5.1), и подставим в (5.5) $f - S_*$ вместо f и S_* вместо S. Получим

$$\int_0^l [S_*''(f'' - S_*'') + 4b^4 S_*(f - S_*)]\, dx = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(f) = \int_0^l [((f'' - S_*'') + S_*'')^2 + 4b^4((f - S_*) + S_*)^2]\, dx =$$
$$= \Phi(S_*) + \int_0^l [(f'' - S_*'')^2 + 4b^4(f - S_*)^2]\, dx.$$

В частности, $\Phi(f) \geqslant \Phi(S_*)$. Оптимальность S_* установлена.

Поскольку равенство $\Phi(f) = \Phi(S_*)$ достигается лишь тогда, когда $f = S_*$ на $[0, l]$, то S_* — единственное решение задачи (5.1). Теорема доказана.

§ 6. ОБЩАЯ ЗАДАЧА О НАТУРАЛЬНЫХ СПЛАЙНАХ

Пусть имеются линейное пространство $\mathbf{X}$ и вещественное гильбертово пространство $\mathcal{T}$. Скалярное произведение элементов f_1, f_2 из $\mathcal{T}$ обозначим $\langle f_1, f_2 \rangle$. Норма в $\mathcal{T}$ вводится обычным способом: $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$. По определению гильбертово пространство является полным.

Предположим, что на $\mathbf{X}$ заданы линейные функционалы $L_1, \ldots, L_m$ и линейный оператор T, отображающий $\mathbf{X}$ в $\mathcal{T}$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\| T(f) \|^2 \to \inf,$$
$$L_j(f) = y_j,\ j \in 1:m;\ f \in \mathbf{X}. \quad (6.1)$$

Решение σ этой задачи, если оно существует, называется натуральным сплайном.

Введем обозначения

$$\Omega = \{f\in \mathbf{X} \mid L_j(f)=y_j,\ j\in 1:m\},$$

$$I(f) = (L_1(f),\ \dots,\ L_m(f)),$$

$$N(I) = \{h\in\mathbf{X} \mid I(h)=0\}.$$

Предположим, что множество Ω непусто. Возьмем $f_0\in\Omega$. Тогда $\Omega=\{f=f_0-h \mid h\in N(I)\}$. С учетом этого представления задачу (6.1) можно переписать в виде

$$\| T(f_0) - T(h) \|^2 \to \inf_{h\in N(I)} .$$

Множество $T(N(I))$ линейное. Допустим, что оно замкнуто в $\mathcal{T}$ (является подпространством). В этом случае задача

$$\| T(f_0) - z \|^2 \to \inf_{z\in T(N(I))}$$

нахождения элемента подпространства $T(N(I))$, ближайшего к $T(f_0)$, имеет решение и оно единственно (см., например, [56, с. 60]). В частности, существует решение и у задачи (6.1).

Теорема 6.1. *Для того чтобы элемент* $\sigma\in\Omega$ *был решением задачи* (6.1), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ортогональности*

$$\langle T(\sigma),\ T(h)\rangle = 0 \quad \forall h\in N(I) \tag{6.2}$$

(рис. 17).

Доказательство. Необходимость. Пусть σ — решение задачи (6.1) и $h\in N(I)$. Очевидно, что $\sigma+\lambda h$ принадлежит Ω при любом вещественном λ. Функция $\varphi(\lambda)=\|T(\sigma)+\lambda T(h)\|^2$ достигает минимума при $\lambda=0$, поэтому $\varphi'(0)=0$. Остается учесть, что $\varphi'(0)=2\langle T(\sigma),\ T(h)\rangle$.

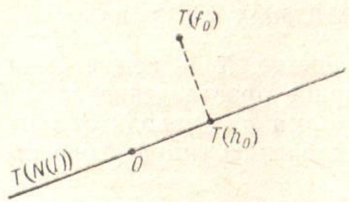


Рис. 17. Иллюстрация к определению натурального сплайна $\sigma=f_0-h_0$

Достаточность. Возьмем произвольный элемент $f\in\Omega$. Его можно представить в виде $f=\sigma-h$, где $h\in N(I)$. Согласно (6.2)

$$\| T(f)\|^2 = \| T(\sigma) - T(h)\|^2 = \| T(\sigma)\|^2 + \| T(h)\|^2 \geqslant \| T(\sigma)\|^2.$$

Отсюда следует, что σ — решение задачи (6.1). Теорема доказана.

Эта теорема позволяет выяснить, является ли некоторый элемент σ натуральным сплайном. Следующая теорема может быть полезна при проверке единственности натурального сплайна.

Положим $N(T)=\{h\in\mathbf{X} \mid T(h)=0\}$.

Теорема 6.2. *Решение задачи* (6.1) *единственно, если оно существует и* $N(T)\cap N(I)=\{0\}$.

Доказательство. Пусть имеется два решения σ_1 и σ_2. Тогда разность $h=\sigma_1-\sigma_2$ принадлежит $N(I)$. Согласно теореме 6.1

$$\langle T(\sigma_1),\ T(h)\rangle=0, \quad \langle T(\sigma_2),\ T(h)\rangle=0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $\langle T(h),\ T(h)\rangle=0$. Значит, $h\in N(T)$. Поскольку $h\in N(I)\cap N(T)$, то $h=0$. Теорема доказана.

§ 7. СПЛАЙНОВЫЕ АЛГОРИТМЫ

Сохранив обозначения предыдущего параграфа, введем множество

$$\mathbb{W} = \{f\in\mathbf{X} \mid \|T(f)\|\leqslant M\}. \tag{7.1}$$

Очевидно, что оно выпуклое и уравновешенное.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала $L:\mathbf{X}\to\mathbf{R}$ по значениям линейных функционалов $L_1,\ \dots,\ L_m$ на множестве $\mathbb{W}$. Напомним (см. § II.2), что величины

$$e(\Phi) = \sup_{f\in\mathbb{W}} | L(f) - \Phi(L_1(f),\ \dots,\ L_m(f))|,$$

$$R = \inf_{\Phi:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}} e(\Phi) \tag{7.2}$$

называются соответственно погрешностью метода Φ и оптимальной погрешностью, а функция Φ_*, на которой достигается инфимум в (7.2),— оптимальным методом или алгоритмом.

Зафиксируем $f\in\mathbb{W}$ и введем вспомогательную задачу о натуральных сплайнах, аналогичную (6.1):

$$\begin{gathered} \| T(g)\|^2 \to \inf, \\ L_j(g)=L_j(f),\ j\in 1:m;\ g\in\mathbf{X}. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Ограничения этой задачи можно записать в векторной форме $I(g)=I(f)$, $g\in X$. Они выполняются, например, при $g=f$.

Предположим, что линейное множество $T(N(I))$ замкнуто в $\mathcal{T}$ и $N(T)\cap N(I)=\{0\}$. Тогда согласно результатам предыдущего параграфа у задачи (7.3) существует единственное решение. Обозначим его $\sigma(f)$.

Определение. Алгоритм

$$\Phi_0(I(f)) = L(\sigma(f))$$

называется сплайновым.

В дальнейшем дополнительно считаем, что система

$$L_j(g) = y_j, \ j \in 1:m; \ g \in \mathbf{X},$$

совместна при любых правых частях.

Лемма 7.1. *Сплайновый алгоритм является линейным, т. е. может быть представлен в виде*

$$L(\sigma(f)) = \sum_{k=1}^{m} \overset{*}{a}_k L_k(f), \quad f \in \mathbf{X}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Обозначим σ_k единственное решение экстремальной задачи

$$\| T(g) \|^2 \to \inf,$$

$$L_j(g) = \delta_{jk}, \quad j \in 1:m; \quad g \in \mathbf{X},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. По теореме 6.1

$$\langle T(\sigma_k), T(h) \rangle = 0 \quad \forall h \in N(I). \tag{7.5}$$

Элемент $\sigma = \sum_{k=1}^{m} L_k(f)\sigma_k$ удовлетворяет ограничениям задачи (7.3). Кроме того, согласно (7.5) выполняется условие ортогональности

$$\langle T(\sigma), T(h) \rangle = 0 \quad \forall h \in N(I).$$

Значит, σ — решение задачи (7.3). В силу единственности $\sigma = \sigma(f)$, т. е.

$$\sigma(f) = \sum_{k=1}^{m} L_k(f)\sigma_k.$$

Применив к обеим частям последнего равенства функционал L, получим (7.4) с $\overset{*}{a}_k = L(\sigma_k)$. Лемма доказана.

Теорема 7.1. *Сплайновый алгоритм оптимален.*

Доказательство. По теореме II.2.1 для погрешности оптимального восстановления справедлива формула (соотношение двойственности)

$$R = \sup_{f \in W \cap N(I)} | L(f) |. \tag{7.6}$$

Нам нужно показать, что

$$\sup_{f \in W} | L(f) - L(\sigma(f)) | \leqslant R. \tag{7.7}$$

Возьмем произвольный элемент $f \in W$ и положим $h = f - \sigma(f)$. Поскольку $I(\sigma(f)) = I(f)$, то $I(h) = 0$, т. е. $h \in N(I)$. Согласно теореме 6.1 $\langle T(\sigma(f)), T(h) \rangle = 0$. С учетом этого равенства получаем

$$M^2 \geqslant \| T(f) \|^2 = \| T(\sigma(f)) + T(h) \|^2 =$$

$$= \| T\sigma(f)) \|^2 + \| T(h) \|^2 \geqslant \| T(h) \|^2.$$

Значит, $h \in W$.

Имеем $h \in W \cap N(I)$. В силу (7.6)

$$| L(f) - L(\sigma(f)) | = | L(h) | \leqslant R,$$

откуда и следует (7.7). Теорема доказана.

Введем важное понятие *центрального алгоритма*. Временно будем считать, что $W \subset \mathbf{X}$ — произвольное выпуклое множество. Положим

$$U(f) = \{ y = L(g) \mid I(g) = I(f), \ g \in W \}.$$

Это — множество числовых значений, которые принимает функционал L на тех $g \in W$, информация о которых совпадает с информацией об f. В силу выпуклости W множество $U(f)$ также выпукло, т. е. представляет собой промежуток на вещественной оси.

Центральным называется алгоритм Φ_c, который информации $I(f)$ ставит в соответствие середину промежутка $U(f)$. Таким образом,

$$\Phi_c(I(f)) = \frac{1}{2} (\sup U(f) + \inf U(f)).$$

Если $U(f)$ — бесконечный промежуток, то в качестве середины можно взять любую его точку.

Лемма 3.2. *Центральный алгоритм является оптимальным.*

Доказательство. Обозначим $\operatorname{rad} U(f)$ половину длины промежутка $U(f)$:

$$\operatorname{rad} U(f) = \frac{1}{2} (\sup U(f) - \inf U(f)).$$

Не исключено, что $\operatorname{rad} U(f) = +\infty$. Для погрешности центрального алгоритма на множестве W имеем

$$e(\Phi_c) = \sup_{f \in W} | L(f) - \Phi_c(I(f)) | =$$

$$= \sup_{f \in W} \sup_{\{g \in W \mid I(g)=I(f)\}} |L(g) - \Phi_c(I(f))| =$$

$$= \sup_{f \in W} \sup_{y \in U(f)} |y - \Phi_c(I(f))| = \sup_{f \in W} \operatorname{rad} U(f).$$

Аналогично для произвольного алгоритма Φ

$$e(\Phi) = \sup_{f \in W} \sup_{y \in U(f)} |y - \Phi(I(f))| \geqslant \sup_{f \in W} \operatorname{rad} U(f).$$

Значит, $e(\Phi) \geqslant e(\Phi_c)$. Лемма доказана.

Вернемся к множеству W вида (7.1) и предположим, что выполнены условия, при которых определен сплайновый алгоритм $\Phi_0(I(f)) = L(\sigma(f))$. В следующей теореме устанавливается центральность сплайнового алгоритма. Это неожиданный и глубокий результат, усиливающий теорему 7.1.

Теорема 7.2. *Сплайновый алгоритм является центральным.*

Доказательство. При фиксированном $f \in W$ введем множество

$$V(f) = \{g \in W \mid I(g) = I(f)\}.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{rad} U(f) = \inf_y \sup_{g \in V(f)} |L(g) - y|, \tag{7.8}$$

и число y_0, на котором достигается инфимум, совпадает с $\Phi_c(I(f))$.

Если $g \in V(f)$, то разность $h = g - \sigma(f)$ принадлежит $N(I)$. По теореме 6.1 $\langle T(\sigma(f)), T(h) \rangle = 0$. С учетом этого равенства получаем

$$M^2 \geqslant \| T(g) \|^2 = \| T(\sigma(f)) + T(h) \|^2 = \| T(\sigma(f)) \|^2 + \| T(h) \|^2.$$

Отсюда

$$\| T(h) \|^2 \leqslant M^2 - \| T(\sigma(f)) \|^2. \tag{7.9}$$

Наоборот, если $h \in N(I)$ и выполнено (7.9), то элемент $g = \sigma(f) + h$ принадлежит $V(f)$. Таким образом,

$$V(f) = \{g = \sigma(f) + h \mid h \in N(I),\ \| T(h) \|^2 \leqslant M^2 - \| T(\sigma(f)) \|^2\} =$$

$$= \{g = \sigma(f) + h \mid h \in N(I),\ \| T(h) \| \leqslant M \lambda(f)\},$$

где $\lambda(f) = (1 - \| T(\sigma(f)) \|^2 / M^2)^{1/2}$.

Теперь имеем

$$\operatorname{rad} U(f) \leqslant \sup_{g \in V(f)} |L(g) - L(\sigma(f))| =$$

$$= \sup \{|L(h)| \mid h \in N(I),\ \|T(h)\| \leqslant M \lambda(f)\} =$$

$$= \lambda(f) \sup \{|L(h)| \mid h \in N(I),\ \|T(h)\| \leqslant M\}. \tag{7.10}$$

Согласно (7.6) и определению W последний супремум равен R. Значит,

$$\operatorname{rad} U(f) \leqslant R \lambda(f). \tag{7.11}$$

Введем обозначение

$$H(f) = \{h \in N(I) \mid \|T(h)\| \leqslant M \lambda(f)\}.$$

С его помощью множество $V(f)$ можно представить в виде $V(f) = \sigma(f) + H(f)$. Зафиксируем вещественное число y и положим $a = y - L(\sigma(f))$. В силу уравновешенности $H(f)$

$$\sup_{g \in V(f)} |L(g) - y| = \sup_{h \in H(f)} |L(h) - a| =$$

$$= \sup_{h \in H(f)} \max \{|L(h) - a|,\ |L(-h) - a|\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{h \in H(f)} |L(h)| = R \lambda(f).$$

Учитывая произвольность y и (7.8), получаем

$$\operatorname{rad} U(f) \geqslant R \lambda(f). \tag{7.12}$$

Неравенства (7.11) и (7.12) приводят к равенству

$$\operatorname{rad} U(f) = R(1 - \| T(\sigma(f)) \|^2 / M^2)^{1/2}.$$

Вместе с тем согласно (7.10)

$$\operatorname{rad} U(f) = \sup_{g \in V(f)} |L(g) - L(\sigma(f))|.$$

Последнее означает, что $L(\sigma(f))$ является серединой промежутка $U(f)$, т. е. $L(\sigma(f)) = \Phi_c(I(f))$. Теорема доказана.

§ 8. СФЕРИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Обозначим Ω единичную сферу в $\mathbf{R}^3$ и введем на Ω сферические координаты (θ, φ), связанные с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) формулами

$$x_1 = \sin\theta \cos\varphi,\ x_2 = \sin\theta \sin\varphi,\ x_3 = \cos\theta. \tag{8.1}$$

Допустим, что в точках $\eta_j = (\theta_j, \varphi_j)$ заданы числовые значения y_j, $j \in 1:m$. Ставится задача: определить на Ω наиболее плавную функцию $S = S(\theta, \varphi)$, удовлетворяющую интерполяционным условиям

$$S(\eta_j) = y_j, \quad j \in 1:m.$$

Для характеристики плавности воспользуемся оператором Бельтрами (сферическим оператором Лапласа)

$$\Delta = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Тогда интересующая нас задача может быть записана в виде

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [\Delta(f)]^2\, d\omega \to \inf, \\ &f(\eta_j) = y_j, \; j \in 1:m, \end{aligned} \tag{8.2}$$

где $d\omega$ — элемент площади сферы, $d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

При решении задачи (8.2) нельзя ограничиться функциями, дважды непрерывно дифференцируемыми на Ω. В качестве основного пространства **X** приходится вводить множество функций f, для которых $\Delta(f)$ существует в некотором обобщенном смысле.

Предварительно рассмотрим пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых с квадратом на сфере Ω. Скалярное произведение и норму в $L_2(\Omega)$ определим обычным способом:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg\, d\omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, g(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

В $L_2(\Omega)$ имеется полная ортогональная система, состоящая из так называемых сферических функций $Y_n^l(\theta, \varphi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $l \in -n:n$ [16, с. 374—387]. По определению

$$\langle Y_n^l, Y_{n'}^{l'}\rangle = 0, \text{ если } n \neq n' \text{ или } l \neq l'.$$

Кроме того,

$$\Delta(Y_n^l) = -n(n+1)\, Y_n^l, \quad l \in -n:n. \tag{8.3}$$

Последнее означает, что Y_n^l являются собственными функциями оператора Бельтрами, соответствующими собственному значению $\lambda = -n(n+1)$ кратности $2n+1$.

Положим $u_{nl} = Y_n^l / \|Y_n^l\|$, $\xi = (\theta, \varphi)$. Любую функцию $f \in L_2(\Omega)$ можно разложить в ряд Фурье по сферическим функциям

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{l=-n}^n a_{nl}\, u_{nl}(\xi). \tag{8.4}$$

Здесь $a_{nl} = \langle f, u_{nl}\rangle$ — коэффициенты Фурье. В силу полноты системы $\{u_{nl}\}$ ряд (8.4) сходится к f в норме пространства $L_2(\Omega)$. При этом

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{l=-n}^n a_{nl}^2 = \|f\|^2. \tag{8.5}$$

Применим формально оператор Δ к членам ряда (8.4). С учетом (8.3) получим

$$\Delta(f;\, \xi) = -\sum_{n=0}^\infty \sum_{l=-n}^n n(n+1)\, a_{nl}\, u_{nl}(\xi). \tag{8.6}$$

Это равенство положим в основу определения обобщенной производной $\Delta(f)$.

Будем говорить, что функция $f \in L_2(\Omega)$ имеет обобщенную производную $\Delta(f)$, если

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{l=-n}^n n^2(n+1)^2 a_{nl}^2 < +\infty. \tag{8.7}$$

Саму производную определим равенством (8.6). Линейное пространство функций f, у которых существует обобщенная производная $\Delta(f)$, обозначим **X**.

Лемма 8.1. *Для любой функции $f \in$ **X** ее ряд Фурье* (8.4) *сходится равномерно на Ω.*

Доказательство. Воспользуемся формулой сложения для полиномов Лежандра [16, с. 386]:

$$P_n(\xi\eta) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{l=-n}^n u_{nl}(\xi)\, u_{nl}(\eta), \quad \xi, \eta \in \Omega. \tag{8.8}$$

Здесь P_n — полином Лежандра степени n, нормированный условием $P_n(1) = 1$, а $\xi\eta$ — скалярное произведение трехмерных векторов, координаты которых вычисляются по сферическим координатам точек ξ, η согласно формулам (8.1).

Зафиксируем $\eta \in \Omega$, возведем обе части равенства (8.8) в квадрат и проинтегрируем их по сфере Ω. Получим

$$\int_\Omega P_n^2(\xi\eta)\, d\omega(\xi) = \left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^2 \sum_{l=-n}^n u_{nl}^2(\eta).$$

Поскольку $|\xi\eta| \leqslant 1$ и $|P_n(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in [-1, 1]$, то

$$\int_\Omega P_n^2(\xi\eta)\, d\omega(\xi) \leqslant 4\pi,$$

$$\sum_{l=-n}^n u_{nl}^2(\eta) \leqslant \frac{1}{4\pi}(2n+1)^2 \quad \forall\, \eta \in \Omega. \tag{8.9}$$

Теперь имеем

$$|a_{nl}\, u_{nl}(\xi)| \leqslant a_{nl}^2 n^2(n+1)^2 + \frac{1}{n^2(n+1)^2} u_{nl}^2(\xi),$$

$$\sum_{l=-n}^n |a_{nl} u_{nl}(\xi)| \leqslant \sum_{l=-n}^n n^2(n+1)^2 a_{nl}^2 + \frac{(2n+1)^2}{4\pi\, n^2(n+1)^2} =: A_n.$$

Согласно (8.7) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится, поэтому ряд (8.4) сходится равномерно на Ω. Лемма доказана.

На основании этой леммы функцию $f \in \mathbf{X}$ можно считать непрерывной на Ω.

Лемма 8.2. *Если* $f \in \mathbf{X}$ *и* $\Delta(f)=0$ *почти везде на* Ω, *то* $f(\xi) \equiv \equiv \mathrm{const}$.

Действительно, в силу (8.6) и (8.5)

$$0 = \|\Delta(f)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^{n} n^2(n+1)^2 a_{nl}^2.$$

Отсюда следует, что $a_{nl} = 0$ при $n>0$ и

$$f(\xi) = a_{00} u_{00}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} a_{00}.$$

Вернемся к задаче (8.2) и перепишем ее в окончательном виде

$$\begin{aligned} &\|\Delta(f)\|^2 \to \inf, \\ &f(\eta_j) = y_j,\ j \in 1:m;\ f \in \mathbf{X}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Задача (8.10) включается в общую схему § 6. Роль оператора T и гильбертова пространства $\mathcal{T}$ играют соответственно Δ и $L_2(\Omega)$, а оператор I определяется формулой $I(f) = (f(\eta_1), \ldots$ $\ldots, f(\eta_m))$.

Введем функцию

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} P_n(\xi\eta). \tag{8.11}$$

Поскольку при выбранной нормировке полиномов Лежандра выполняется неравенство $|P_n(x)| \leqslant 1$ для $x \in [-1, 1]$, то ряд (8.11) сходится равномерно. Значит, функция G является непрерывной по совокупности переменных на $\Omega \times \Omega$.

В дальнейшем нас интересует G как функция от ξ при фиксированном η, $G = G(\cdot, \eta)$. Покажем, что $G(\cdot, \eta)$ имеет обобщенную производную $\Delta(G(\cdot, \eta))$. Согласно (8.8)

$$G(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{n^2(n+1)^2} u_{nl}(\xi) u_{nl}(\eta).$$

Отсюда следует формула для коэффициентов Фурье g_{nl} функции $G(\cdot, \eta)$:

$$g_{nl} = \frac{1}{n^2(n+1)^2} u_{nl}(\eta).$$

С учетом (8.9) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-n}^{n} n^2(n+1)^2 g_{nl}^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{4\pi n^2(n+1)^2} < +\infty.$$

Значит, $G(\cdot, \eta) \in \mathbf{X}$. При этом в силу (8.6) и (8.8)

$$\Delta(G(\cdot, \eta); \xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{n(n+1)} u_{nl}(\eta) u_{nl}(\xi) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\xi\eta). \tag{8.12}$$

Последний ряд сходится по ξ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 8.3. *Для любой функции* $f \in \mathbf{X}$ *справедливо представление*

$$f(\eta) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega f\, d\omega + \int_\Omega \Delta(G(\cdot, \eta); \xi) \cdot \Delta(f; \xi)\, d\omega(\xi). \tag{8.13}$$

Доказательство. На основании (8.6), (8.12) и формулы Парсеваля имеем

$$\langle \Delta(G(\cdot, \eta)), \Delta(f) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-n}^{n} a_{nl} u_{nl}(\eta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^{n} a_{nl} u_{nl}(\eta) - a_{00} u_{00}(\eta).$$

Остается воспользоваться леммой 8.1 и равенством

$$a_{00} u_{00}(\eta) = \langle f, u_{00} \rangle u_{00}(\eta) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega f\, d\omega.$$

Лемма доказана.

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_m$ — попарно различные точки на единичной сфере Ω.

Определение. Сферическим сплайном называется функция вида

$$S(\xi) = c + \sum_{j=1}^{m} d_j G(\xi, \eta_j)$$

при дополнительном условии

$$\sum_{j=1}^{m} d_j = 0. \tag{8.14}$$

Лемма 8.4. *Для любого сферического сплайна* S *и произвольной функции* $f \in \mathbf{X}$ *выполняется ключевое соотношение*

$$\int_\Omega \Delta(S)\, \Delta(f)\, d\omega = \sum_{j=1}^{m} d_j f(\eta_j). \tag{8.15}$$

Доказательство немедленно следует из (8.13) и (8.14). Действительно,

$$\int_\Omega \Delta(S)\,\Delta(f)\,d\omega = \sum_{j=1}^m d_j \int_\Omega \Delta(G(\cdot,\eta_j))\,\Delta(f)\,d\omega =$$

$$= \sum_{j=1}^m d_j\Big[f(\eta_j) - \frac{1}{4\pi}\int_\Omega f\,d\omega\Big] = \sum_{j=1}^m d_j f(\eta_j).$$

Рассмотрим интерполяционную задачу на сферических сплайнах

$$S(\eta_i) = y_i, \quad i \in 1:m. \tag{8.16}$$

Теорема 8.1. *При любых правых частях задача* (8.16) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Достаточно проверить, что однородная система

$$c + \sum_{j=1}^m d_j G(\eta_i, \eta_j) = 0, \quad i \in 1:m,$$
$$\sum_{j=1}^m d_j = 0 \tag{8.17}$$

имеет только тривиальное решение. Возьмем любое решение $c, d_1, \ldots, d_m$ этой системы. Соответствующий сферический сплайн обозначим S_0. Подставляя в (8.15) S_0 вместо S и f и учитывая, что $S_0(\eta_j)=0$, $j\in 1:m$, получаем

$$\int_\Omega [\Delta(S_0)]^2\,d\omega = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^m d_j\,\Delta(G(\cdot,\eta_j);\ \xi) = 0$$

для почти всех $\xi\in\Omega$. Согласно (8.12) последнее равенство можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^m d_j P_n(\xi\eta_j) = 0. \tag{8.18}$$

В силу (8.8) члены ряда (8.18) попарно ортогональны. Значит, все они равны нулю, т. е. при $n=1, 2, \ldots$

$$\sum_{j=1}^m d_j P_n(\xi\eta_j) = 0 \quad \forall \xi\in\Omega. \tag{8.19}$$

Соотношение (8.19) выполняется и при $n=0$. Поскольку x^n можно представить в виде линейной комбинации полиномов Лежандра $P_0, P_1, \ldots, P_n$, то при $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{j=1}^m d_j(\xi\eta_j)^n = 0 \quad \forall\xi\in\Omega. \tag{8.20}$$

Возьмем $\xi=\eta_1$. Тогда $\xi\eta_1=1$ и $\xi\eta_j<1$ при $j\in 2:m$. Обозначим $J_1=\{j\in 2:m \mid \xi\eta_j=-1\}$, $J=2:m\setminus J_1$. Множество J_1 либо пусто, либо состоит из одного элемента. Вместе с тем $|\xi\eta_j|<1$ при $j\in J$. Согласно (8.20) имеем

$$d_1 + \sum_{j\in J_1}(-1)^n d_j + \sum_{j\in J} d_j(\xi\eta_j)^n = 0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$ сначала по четным n, а затем по нечетным, получаем

$$d_1 + \sum_{j\in J_1} d_j = 0, \quad d_1 - \sum_{j\in J_1} d_j = 0.$$

Последнее возможно только при $d_1=0$.

Аналогично устанавливается, что $d_2=0, \ldots, d_m=0$. Равенство $c=0$ следует теперь из (8.17). Теорема доказана.

Обратимся к задаче (8.10). Обозначим S_* сферический сплайн, удовлетворяющий интерполяционным условиям $S_*(\eta_j)=y_j$, $j\in 1:m$. По определению $S_*\in \mathbf{X}$.

Теорема 8.2. *Единственным решением задачи* (8.10) *является S_*.*

Доказательство. Проще всего воспользоваться общими результатами из § 6. Напомним обозначения

$$N(I) = \{h\in\mathbf{X} \mid h(\eta_j)=0, \quad j\in 1:m\},$$

$$N(\Delta) = \{h\in\mathbf{X} \mid \Delta(h)=0\}.$$

Если $h\in N(I)$, то согласно лемме 8.4

$$\langle\Delta(S_*),\ \Delta(h)\rangle = 0.$$

Это значит, что выполнено условие ортогональности. По теореме 6.1 S_* — решение задачи (8.10).

Пусть $h\in N(\Delta)\cap N(I)$. В частности, $h\in N(\Delta)$. Согласно лемме 8.2 $h(\xi)\equiv\mathrm{const}$. Поскольку к тому же $h\in N(I)$, то $h(\xi)\equiv 0$. Таким образом, $N(\Delta)\cap N(I)=\{0\}$. На основании теоремы 6.2 заключаем, что S_* — единственное решение задачи (8.10). Теорема доказана.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

1. Введем функции

$$\Phi_k(x) = \frac{(-1)^r(r-1)!}{(2r-1)!}\sum_{j=k}^{k+r}\frac{(x-t_j)_+^{2r-1}}{\omega_k'(t_j)},$$

где $\omega_k(x) = (x-t_k)(x-t_{k+1})\ldots(x-t_{k+r})$. Показать, что система

$$1,\ x,\ \ldots,\ x^{r-1},\ \Phi_1(x),\ \ldots,\ \Phi_{m-r}(x)$$

образует базис в пространстве натуральных сплайнов степени $2r-1$.

2. Решить вариационную задачу

$$\int_c^d [f'(x)]^2 dx \to \inf,$$

$$f(t_j)=y_j, \quad j\in 1:m; \quad f\in W_2^1$$

при стандартных предположениях $c\leqslant t_1<\ldots<t_m\leqslant d$ и $m\geqslant 2$.

3. Пусть $f\in W_2^r$. Рассмотрим задачу наилучшего приближения:

$$\int_c^d [f^{(r)}-S^{(r)}]^2 dx \to \inf,$$

где инфимум берется по всем натуральным сплайнам S степени $2r-1$. Проверить, что единственным с точностью до алгебраического полинома степени не выше $r-1$ решением этой задачи является интерполяционный натуральный сплайн $\sigma(f)$.

4. Указать квадратурную формулу с равноотстоящими узлами

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^m a_j f(j/m),$$

наилучшую на классе функций

$$K=\{f\in W_2^1 \mid (\int_0^1 [(f')^2+\alpha^2 f^2]\,dx)^{1/2}\leqslant M\}.$$

Здесь $\alpha>0$ — параметр.

5. Найти наилучшую квадратурную формулу на классе $W_1^2 M$ в случае, когда варьируются не только коэффициенты, но и узлы.

6. Установить существование и единственность натурального сплайна

$$S(x)=\sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i+\sum_{j=1}^m b_j (x-t_j)_+^{2r-1},$$

удовлетворяющего соотношениям

$$(-1)^r (2r-1)!\,\alpha b_i+S(t_j)=y_j, \; j\in 1:m.$$

Доказать, что этот сплайн является единственным решением задачи о сглаживании:

$$F(f):=\int_c^d [f^{(r)}(x)]^2 dx+\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^m [f(t_j)-y_j]^2 \to \inf_{f\in W_2^r}.$$

Здесь $m\geqslant r\geqslant 2$, $c\leqslant t_1<\ldots<t_m\leqslant d$ и $\alpha>0$.

7. Пусть $0<t_1<\ldots<t_m<2\pi$, $m\geqslant 1$. Периодическим натуральным сплайном называется функция вида

$$S(x)=\sum_{i=0}^{2r-1} a_i x^i+\sum_{j=1}^m b_j (x-t_j)_+^{2r-1}$$

при условиях $S^{(\nu)}(0)=S^{(\nu)}(2\pi)$, $\nu\in 0:2r-1$.

Обозначим $\widetilde{W}_2^r$ пространство функций $h\in W_2^r[0,2\pi]$, у которых $h^{(\nu)}(0)=h^{(\nu)}(2\pi)$, $\nu\in 0:r-1$. Показать, что для любого периодического натурального сплайна S и произвольной функции $h\in\widetilde{W}_2^r$ выполняется ключевое соотношение

$$\frac{(-1)^r}{(2r-1)!}\int_0^{2\pi} S^{(r)}(x)\,h^{(r)}(x)\,dx=\sum_{j=1}^m b_j h(t_j).$$

Вывести из него свойство минимальной нормы.

8. Зафиксируем систему точек $x_i=x_0+ih$, $i\in 0:N$, $h>0$, и узлы $t_j=x_{l(j)}$, $j\in 1:m$, $0\leqslant l(1)<\ldots<l(m)\leqslant N$, $m\geqslant 2$. Дискретным натуральным кубическим сплайном называется функция S со следующими свойствами:

(*i*) $S(x)=P_j(x)$ на $[t_j, t_{j+1}]$, $j\in 1:m-1$, где P_j — полиномы третьей степени;

(*ii*) $S(x)=P_0(x)$ на $(-\infty, t_1]$, $S(x)=P_m(x)$ на $[t_m, +\infty)$, где P_0 и P_m — полиномы первой степени;

(*iii*) два соседних полинома P_{j-1} и P_j совпадают в трех точках t_j-h, t_j, t_j+h.

Проверить, что S допускает представление

$$S(x)=a_0+a_1x+\sum_{j=1}^m b_j(x-t_j+h)(x-t_j)_+(x-t_j-h),$$

причем $\sum_{j=1}^m b_j=0$, $\sum_{j=1}^m b_j t_j=0$.

9. Установить существование и единственность дискретного натурального кубического сплайна S_*, удовлетворяющего интерполяционным условиям

$$S_*(t_j)=y_j, \quad j\in 1:m.$$

Доказать, что S_* является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=0}^{N-2} [\Delta^2 f(x_i)]^2 \to \inf,$$

$$f(t_j)=y_j, \quad j\in 1:m,$$

где $\Delta^2 f(x_i)=f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)$ — конечная разность второго порядка.

7 Зак. 546

10. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — попарно различные точки на плоскости. Введем простейший натуральный сплайн двух переменных

$$S(X) = c + \sum_{j=1}^{m} d_j \|X - X_j\|.$$

Коэффициенты d_j подчиним условию $\sum_{j=1}^{m} d_j = 0$. Проверить, что интерполяционная задача

$$S(X_j) = y_j, \quad j \in 1:m,$$

однозначно разрешима при любых правых частях.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Глава I

1. Подставив вместо $(x - t_j)_+$ тождественно равное ему выражение $\frac{1}{2}(x - t_j + |x - t_j|)$, получим

$$\alpha_0 = a_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} b_j t_j, \quad \alpha_1 = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

По этому поводу см. также [5].

3. Можно, например, в качестве простых узлов интерполяции взять $t_2, \ldots, t_{m-1}$, а в качестве двойных — c, t_1, t_m, d.

4. Неравенство

$$\max_{x \in [c, d]} |f(x) - S(f; x)| \leqslant \frac{1}{8} M h^2$$

для $f \in W_\infty^2 M$ следует из теоремы 5.1. На функции $f_*(x) = Mx^2/2$ неравенство обращается в равенство.

Дальнейшие результаты имеются в [33].

5. Пусть $f \in W_\infty^2 M$. Положим $t_0 = c$, $t_{m+1} = d$. Функция $g(t) = f'(t) - S'(f; t)$ на интервале (t_{j-1}, t_j), $j \in 1:m+1$, допускает представление

$$g(t) = f'(t) - \frac{1}{h}[f(t_j) - f(t_{j-1})].$$

Поскольку $\int_{t_{j-1}}^{t_j} g(t)\,dt = 0$, то при $x \in (t_{j-1}, t_j)$

$$|g(x)| = \frac{1}{h}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} (g(x) - g(t))\,dt\right| = \frac{1}{h}\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} (f'(x) - f'(t))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{h}\int_{t_{j-1}}^{t_j} |x - t|\,dt \leqslant \frac{M}{h}\int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1})\,dt = \frac{1}{2} M h.$$

Тем самым установлено неравенство

$$\sup_{\substack{x \in [c, d] \\ x \overline{\in} \{t_1, \ldots, t_m\}}} |f'(x) - S'(f; x)| \leqslant \frac{1}{2} M h.$$

На функции $f_*(x)=Mx^2/2$ неравенство обращается в равенство.

Более общий результат имеется в [34].

6. Условие

$$P(x):=a_0(x-z_0)+\sum_{j=0}^{3} b_j(x-z_j)^3=0,\quad x\in[z_3,+\infty),$$

выполняется тогда и только тогда, когда $P\equiv 0$ на $(-\infty,+\infty)$ или, что равносильно, $P^{(\nu)}(z_0)=0$, $\nu\in 0:3$. Для определения коэффициентов B-сплайна получаем систему линейных уравнений

$$b_1h^3+b_2(2h)^3+b_3(3h)^3=0,$$
$$a_0+3b_1h^2+3b_2(2h)^2+3b_3(3h)^2=0,$$
$$b_1h+b_2(2h)+b_3(3h)=0,$$
$$b_0+b_1+b_2+b_3=0,$$
$$b_3=1.$$

Эта система имеет единственное решение $a_0=6h^2$, $b_0=-2$, $b_1=5$, $b_2=-4$, $b_3=1$. Таким образом,

$$B(x)=6h^2(x-z_0)_+-2(x-z_0)_+^3+5(x-z_1)_+^3-$$
$$-4(x-z_2)_+^3+(x-z_3)_+^3.$$

Покажем, что $B(x)>0$ при $x\in(z_0,z_3)$. Производная B' на (z_0,z_3) допускает представление

$$B'(x)=6h^2-6(x-z_0)^2+15(x-z_1)_+^2-12(x-z_2)_+^2.$$

Непосредственно проверяется, что $B'(x)>0$ при $x\in(z_0,z_1)$, $B'(z_1)=0$ и $B'(x)<0$ при $x\in(z_1,z_3)$. Значит, $B(x)$ возрастает на $[z_0,z_1]$ и убывает на $[z_1,z_3]$. Остается учесть, что $B(z_0)=0$, $B(z_3)=0$.

7. Для полинома $\omega(z)=\prod_{k=0}^{r+1}(z-z_k)$ имеем

$$\omega'(z_j)=(z_j-z_0)\ldots(z_j-z_{j-1})(z_j-z_{j+1})\ldots(z_j-z_{r+1})=$$
$$=(-1)^{r+1-j}j!\,(r+1-j)!\,h^{r+1}.$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^{r+1}\frac{(x-z_j)_+^r}{\omega'(z_j)}=\frac{1}{(r+1)!\,h^{r+1}}\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{r+1-j}C_{r+1}^j(x-z)_+^r.$$

Отсюда следует, что

$$B(x)=\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{r+1-j}C_{r+1}^j(x-z_j)_+^r=$$
$$=\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^jC_{r+1}^j(z_j-x)_+^r.$$

Доказательство симметричности $B(x)$ относительно середины интервала (z_0,z_{r+1}) проводится так:

$$B(z_{r+1}-x)=\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^kC_{r+1}^k(x-(r+1-k)h)_+^r=$$
$$=\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{r+1-j}C_{r+1}^j(x-jh)_+^r=B(z_0+x).$$

8. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(z)=\sum_{s=0}^{r}\frac{f^{(s)}(z_k)}{s!}(z-z_k)^s+\frac{1}{r!}\int_{z_k}^{z_{k+r+1}}(z-x)_+^r f^{(r+1)}(x)dx.$$

Пользуясь свойствами разделенных разностей, получаем

$$f[z_k,z_{k+1},\ldots,z_{k+r+1}]=\sum_{j=k}^{k+r+1}\frac{f(z_j)}{\omega'(z_j)}=$$

$$=\frac{1}{r!}\int_{z_k}^{z_{k+r+1}}\left[\sum_{j=k}^{k+r+1}\frac{(z_j-x)_+^r}{\omega'(z_j)}\right]f^{(r+1)}(x)dx=$$

$$=\frac{1}{r!}\int_{z_k}^{z_{k+r+1}}B_{rk}(x)f^{(r+1)}(x)dx.$$

9. У полиномов, стоящих в левой и правой частях тождества (7.8), приравнять коэффициенты при z^{r-1}.

10. Отметим, что

$$N_{rk}(x)=\sum_{s=1}^{n}a_sN_{rs}(x),$$

где $a_k=1$ и $a_s=0$ при $s\neq k$. Теперь можно воспользоваться программой из § 7. Программа станет более эффективной, если исключить лишние операции над нулями.

Глава II

1. Имеем

$$R=\sup_{\{f\in W_\infty^rM\,|\,\|f^{(r)}\|=M;\ f(x_i)=0,\ i\in 1:n\}}f(x_0)=$$

$$=\sup_{\{f\in W_\infty^r\,|\,f\neq 0;\ f(x_i)=0,\ i\in 1:n\}}\frac{Mf(x_0)}{\|f^{(r)}\|}=$$

$$=M\sup_{\{f\in W_\infty^r\,|\,f(x_0)=1;\ f(x_i)=0,\ i\in 1:n\}}\frac{1}{\|f^{(r)}\|}=\frac{M}{E}.$$

Отсюда следует, что $E=M/R$. Значение E достигается на функции $f_0(x)=T(x)/T(x_0)$, где T — совершенный сплайн степени r с $n-r$ узлами, обращающийся в нуль в точках $x_1,\ldots,x_n$.

2. В данном случае $n=r$. По теореме 2.1 для погрешности оптимального восстановления справедлива формула

$$R(x)=\sup_{\{f\in W_\infty^rM\,|\,f^{(\nu)}(x_\nu)=0,\ \nu\in 0:r-1\}}|f(x)|.$$

Поскольку функция $f\in W^r_\infty M$ с $f^{(\nu)}(x_\nu)=0$, $\nu\in 0:r-1$, допускает представление

$$f(t)=\int_{x_0}^{t} dt_1\int_{x_1}^{t_1} dt_2\dots\int_{x_{r-1}}^{t_{r-1}} f^{(r)}(t_r)\,dt_r,$$

то $R(x)<+\infty$.

Полиномы $P_0, P_1, \dots, P_{r-1}$, указанные в формулировке задачи, при $\nu\in 0:r-1$ удовлетворяют соотношению $P_k^{(\nu)}(x_\nu)=\delta_{k\nu}$, где $\delta_{k\nu}$ — символ Кронекера. Поэтому система уравнений

$$\sum\nolimits_{\nu=0}^{r-1} a_\nu P_k^{(\nu)}(x_\nu)=P_k(x),\quad k\in 0:r-1,$$

имеет единственное решение $a_k=P_k(x)$, $k\in 0:r-1$. На основании результатов § 3 заключаем, что единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$\Phi_*(I(f))=\sum\nolimits_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu(x).$$

3. Полином $P_k(x)=c_0+c_1x+\dots+c_kx^k$, удовлетворяющий соотношению

$$P_k^{(\nu)}(x_\nu)=\delta_{k\nu},\quad \nu\in 0:k, \qquad (1)$$

единствен. Для доказательства достаточно заметить, что однородная система

$$P_k^{(k)}(x_k)=0,\ P_k^{(k-1)}(x_{k-1})=0,\ \dots,\ P_k(x_0)=0$$

имеет только тривиальное решение.

Полином (*) удовлетворяет (1). Остается показать, что в случае равноотстоящих узлов полином $P_k(x)=(x-x_0)(x-x_k)^{k-1}/k!$ также удовлетворяет (1). Это следует из формулы

$$P_k^{(\nu)}(x)=\frac{1}{(k-\nu)!}(x-x_\nu)(x-x_k)^{k-\nu-1},\quad \nu\in 0:k-1,$$

которая легко проверяется индукцией по ν.

В связи с двумя последними задачами см. [18, с. 84—86].

4. Полином Чебышева $T_3(t)=4t^3-3t$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ три нуля $-\sqrt{3}/2$, 0, $\sqrt{3}/2$ и четыре точки альтернанса -1, $-1/2$, $1/2$, 1. Из кусков этого полинома составим функцию

$$Q(t)=\begin{cases} T_3(t),\ t\in[-1, 1/2];\\ (-1)^j T_3(t-j),\ t\in[j-1/2,\ j+1/2],\quad j\in 1:m-1;\\ (-1)^m T_3(t-m),\ t\in[m-1/2,\ m+1]. \end{cases}$$

Обозначим $\tau_j=j-1/2$. Нетрудно проверить, что $Q^{(\nu)}(\tau_j-0)=Q^{(\nu)}(\tau_j+0)$ при всех $\nu\in 0:2$ и $j\in 1:m$.

Функция $\tilde Q(t)=Q(t)/24$ является совершенным сплайном степени $r=3$ с узлами $\tau_1, \dots, \tau_m$ и нулями $-\sqrt{3}/2$, 0, 1, 2, …, m, $m+\sqrt{3}/2$. Кроме того,

$$\|\tilde Q\|:=\max_{t\in[-1,\ m+1]}|\tilde Q(t)|=1/24$$

и в точках $v_0=-1$, $v_1=\tau_0$, $v_2=\tau_1$, …, $v_{m+2}=\tau_{m+1}$, $v_{m+3}=m+1$ выполняется соотношение

$$\tilde Q(v_i)=(-1)^{3+i}\,\|\tilde Q\|,\quad i\in 0:m+3.$$

Сделаем линейное преобразование

$$x=\frac{2}{m+2}\left(t-\frac{m}{2}\right),$$

переводящее отрезок $[-1,\ m+1]$ в $[-1,\ 1]$. Согласно теореме 4.1 совершенный сплайн $T_{3,\,m}$ можно представить в виде

$$T_{3,\,m}(x)=\tilde Q\left(\frac{m}{2}+\frac{m+2}{2}x\right)\Big/\left(\frac{m+2}{2}\right)^3=\frac{1}{3(m+2)^3}\,Q\left(\frac{m}{2}+\frac{m+2}{2}x\right).$$

В частности,

$$\|T_{3,\,m}\|:=\max_{x\in[-1,\ 1]}|T_{3,\,m}(x)|=(3(m+2)^3)^{-1}.$$

Узлы и нули $T_{3,\,m}$ получаются из узлов и нулей $\tilde Q$ с помощью указанного линейного преобразования.

5. Функция $\mathring{T}_{rm}$ в крайней слева точке альтернанса положительна. Доказательство основано на том, что $\mathring{T}_{rm}(x)=(x+1)^r/r!$ в окрестности точки $x=-1$.

6. Обозначим $U_r(t)$ полином Чебышева II рода степени r со старшим коэффициентом, равным единице. При $t\in(-1, 1)$ он допускает представление

$$U_r(t)=\frac{\sin((r+1)\arccos t)}{2^r\sqrt{1-t^2}}.$$

В силу выбора узлов t_j имеем

$$\omega(t):=(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{r+1})=(t^2-1)U_r(t),$$

$$\omega'(t)=2tU_r(t)+(t^2-1)U_r'(t).$$

Непосредственно проверяется, что

$$\omega'(t_0)=-2U_r(-1)=(-1)^{r+1}(r+1)/2^{r-1};$$

$$\omega'(t_{r+1})=2U_r(1)=(r+1)/2^{r-1};$$

$$\omega'(t_j)=(t_j^2-1)\,U_r'(t_j)=(-1)^{r+1-j}(r+1)/2^r,\ j\in 1:r.$$

Значит,

$$B(x)=(-1)^{r+1}\sum\nolimits_{j=0}^{r+1}\frac{(x-t_j)_+^r}{\omega'(t_j)}=$$

$$= \frac{2^{r-1}}{r+1}\left\{(x+1)_+^r + 2\sum_{j=1}^{r}(-1)^j(x-t_j)_+^r + (-1)^{r+1}(x-1)_+^r\right\}. \qquad (2)$$

При $x\in[-1, 1]$ получаем

$$\frac{r+1}{r!\,2^{r-1}}B(x) = \frac{(x+1)^r}{r!} + \frac{2}{r!}\sum_{j=1}^{r}(-1)^j(x-t_j)_+^r = \mathring{T}_{rr}(x). \qquad (3)$$

Функция $B(x)$ вида (2) называется совершенным B-сплайном. Некоторые свойства совершенных B-сплайнов приведены в [79, с. 139—142].

7. Производная $B'(x)$ совершенного B-сплайна является сплайном класса $(r-1,\ r+2)$ с двумя бесконечными нуль-интервалами кратности $r-1$ каждый. Поскольку

$$Z(B') \leqslant r-1+(r+2)-2=2r-1,$$

то $B'(x)$ на интервале $(-1,\ 1)$ может обратиться в нуль только в одной точке. С учетом симметрии получаем

$$\|B\| := \max_{x\in[-1,\ 1]}|B(x)|=B(0).$$

Остается сослаться на формулу (3).

8. Оптимальную погрешность обозначим $R_\nu(x)$. Поскольку $MT\in W_\infty^r M$ и $I(MT)=\mathbb{O}$, то по теореме 2.1

$$R_\nu(x) = \sup_{\{f\in W_\infty^r M \mid I(f)=\mathbb{O}\}} |f^{(\nu)}(x)| \geqslant M|T^{(\nu)}(x)|. \qquad (4)$$

Дальнейшее опирается на оценку

$$|f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}(f;\ x)| \leqslant M|T^{(\nu)}(x)|,$$

справедливую для любой функции $f\in W_\infty^r M$ и указанных x. Проверим ее.

Допустим, рассуждая от противного, что для некоторой функции $f\in W_\infty^r M$

$$|f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}(f;\ x)| > M|T^{(\nu)}(x)|.$$

Выберем константу λ, $|\lambda|<1/M$, так, чтобы ν-я производная функции $\varphi(t) = \lambda[f(t)-S(f;\ t)] - T(t)$ в точке x обратилась в нуль. Используя соотношения $\varphi^{(\alpha)}(x_k)=0$, $\alpha\in 0:\sigma_k-1$, $k\in 1:p$, и теорему Ролля, легко показать, что $\varphi^{(\nu)}$ имеет нули, отличные от x, суммарной кратности не менее $n-\nu$. Так как $\varphi^{(\nu)}(x)=0$, то $Z(\varphi^{(\nu)}) \geqslant n-\nu+1$. Снова применяя теорему Ролля, получаем

$$Z(\varphi^{(r-2)}) \geqslant n-r+3 = m+3. \qquad (5)$$

Вместе с тем функция $h=\varphi^{(r-2)}$ принадлежит классу H (см. § I.5). Поэтому по следствию из леммы I.5.2 $Z(\varphi^{(r-2)}) \leqslant m+2$, что противоречит (5).

Итак,

$$R_\nu(x) \leqslant \sup_{f\in W_\infty^r M} |f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}(f;\ x)| \leqslant M|T^{(\nu)}(x)|. \qquad (6)$$

Объединяя (4) и (6), приходим к требуемому результату.

9. Поскольку в данном случае $n=r=3$, то оптимальными будут линейные методы, точные на одночленах $1,\ t,\ t^2$. При восстановлении производных $f'(0)$, $f''(0)$ таким свойством обладают следующие методы:

$$\Phi_*^{(1)}(I(f)) = \frac{f(h)-f(-h)}{2h},$$

$$\Phi_*^{(2)}(I(f)) = \frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2}.$$

Найдем оптимальные погрешности.

Для произвольной функции $f\in W_\infty^3 M$ имеем

$$f(h)=f(0)+f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2+\rho_1,$$

$$f(-h)=f(0)-f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2+\rho_2,$$

где $|\rho_i| \leqslant Mh^3/6$ при $i\in 1:2$. Отсюда выводим, что

$$\left|\frac{f(h)-f(-h)}{2h} - f'(0)\right| \leqslant \frac{Mh^2}{6},$$

$$\left|\frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2} - f''(0)\right| \leqslant \frac{Mh}{3}.$$

Первое неравенство обращается в равенство на функции $f_1(t)=Mt^3/6$, а второе — на функции $f_2(t)=M|t|^3/6$. Значит,

$$\sup_{f\in W_\infty^3 M} |f'(0)-\Phi_*^{(1)}(I(f))| = \frac{Mh^2}{6},$$

$$\sup_{f\in W_\infty^3 M} |f''(0)-\Phi_*^{(2)}(I(f))| = \frac{Mh}{3}.$$

10. Очевидно, что

$$R_\varepsilon \geqslant \inf_{\Phi} \sup_{\{f\in W \mid \|I(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon\}} \max\{|L(f)-\Phi(\mathbb{O})|,$$

$$|-L(f)-\Phi(\mathbb{O})|\} \geqslant \sup_{\{f\in W \mid \|I(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon\}} |L(f)| =: V_\varepsilon. \qquad (7)$$

Если $V_\varepsilon = +\infty$, то утверждение доказано. Допустим, что $V_\varepsilon < +\infty$. Введем множества

$$G_\varepsilon(y) = \{t=L(f) \mid f\in W,\ \|I(f)-y\|_\infty \leqslant \varepsilon\},$$

$$\Omega = \{y\in\mathbb{R}^n \mid G_\varepsilon(y) \neq \varnothing\}.$$

Для $y \in \Omega$ множество $G_\varepsilon(y)$ представляет собой промежуток на вещественной оси. Обозначим $\rho_\varepsilon(y)$ половину длины этого промежутка, т. е.

$$\rho_\varepsilon(y) = \frac{1}{2}(\sup G_\varepsilon(y) - \inf G_\varepsilon(y)) =$$

$$= \sup_{\substack{t_1 \in G_\varepsilon(y), \\ t_2 \in G_\varepsilon(y)}} \frac{t_2 - t_1}{2} = \sup_{\substack{f_1 \in W,\ f_2 \in W, \\ \|I(f_1)-y\|_\infty \leqslant \varepsilon, \\ \|I(f_2)-y\|_\infty \leqslant \varepsilon}} \left| L\left(\frac{f_2-f_1}{2}\right)\right|.$$

Поскольку W — выпуклое уравновешенное множество, то $(f_2-f_1)/2 \in W$. Кроме того, $\|I((f_2-f_1)/2)\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Значит,

$$\rho_\varepsilon(y) \leqslant \sup_{\{f \in W\ \|I(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon\}} |L(f)| = V_\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{y \in \Omega} \rho_\varepsilon(y) \leqslant V_\varepsilon. \tag{8}$$

В частности, для $y \in \Omega$ промежуток $G_\varepsilon(y)$ конечен.

Рассмотрим метод

$$\Phi_\varepsilon(y) = \frac{1}{2}(\sup G_\varepsilon(y) + \inf G_\varepsilon(y)),\ y \in \Omega.$$

Значения $\Phi_\varepsilon(y)$ при $y \bar{\in} \Omega$ безразличны. Имеем

$$R_\varepsilon \leqslant \sup_{\substack{f \in W,\ y \in \mathbb{R}^n, \\ \|I(f)-y\|_\infty \leqslant \varepsilon}} |L(f) - \Phi_\varepsilon(y)| =$$

$$= \sup_{y \in \Omega} \sup_{t \in G_\varepsilon(y)} |t - \Phi_\varepsilon(y)| = \sup_{y \in \Omega} \rho_\varepsilon(y). \tag{9}$$

Объединяя (7)—(9), приходим к равенству $R_\varepsilon = V_\varepsilon$.

Глава III

1. Имеем

$$\Phi_k^{(r)}(x) = (-1)^r \sum_{j=k}^{k+r} \frac{(x-t_j)_+^{r-1}}{\omega_k'(t_j)} =: B_k(x).$$

Функция B_k является B-сплайном степени $r-1$ с узлами $t_k, \ldots, t_{k+r}$ (см. (I.6.7)). Согласно лемме I.6.1, $B_k(x) = 0$ вне (t_k, t_{k+r}). Следовательно, $\Phi_k^{(r)}(x) = 0$ при $x > t_m$. Получили, что $\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-r}$ — натуральные сплайны.

Линейное пространство натуральных сплайнов (функций вида (2.1), удовлетворяющих условию (2.2)) имеет размерность m. Система

$$1,\ x,\ \ldots,\ x^{r-1},\ \Phi_1(x),\ \ldots,\ \Phi_{m-r}(x)$$

образует базис этого пространства, поскольку состоит из m линейно независимых натуральных сплайнов.

2. Введем непрерывную ломаную S_* с узлами $t_1, \ldots, t_m$, принимающую в точках t_j значения y_j и постоянную при $x < t_1$ и $x > t_m$. Ломаная S_* удовлетворяет ограничениям исходной задачи.

Для произвольной функции f, удовлетворяющей тем же ограничениям, выполняется условие ортогональности

$$\int_c^d (f' - S_*')S_*'\,dx = 0.$$

Поэтому

$$\int_c^d [f']^2 dx = \int_c^d [f' - S_*']^2 dx + \int_c^d [S_*']^2\,dx.$$

Отсюда следует как оптимальность, так и единственность S_*.

3. Согласно лемме 2.1

$$\int_c^d [f^{(r)}(x) - \sigma^{(r)}(f;\ x)]\,[\sigma^{(r)}(f;\ x) - S^{(r)}(x)]\,dx = 0.$$

Учитывая это, получаем

$$\int_c^d [f^{(r)}(x) - S^{(r)}(x)]^2 dx = \int_c^d [f^{(r)}(x) - \sigma^{(r)}(f;\ x)]^2 dx +$$

$$+ \int_c^d [\sigma^{(r)}(f;\ x) - S^{(r)}(x)]^2 dx.$$

Остальное очевидно.

Указанное свойство интерполяционных натуральных сплайнов называется свойством наилучшего приближения [1, с. 154].

4. Воспользуемся общими результатами из § 7. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу о натуральных сплайнах

$$\int_0^1 [(g')^2 + \alpha^2 g^2]\,dx \to \inf,$$

$$g(t_j) = f(t_j),\ j \in 0:m;\ g \in W_2^1.$$

где $t_j = j/m$. Ее решение $\sigma(f)$ является абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей на каждом интервале (t_{j-1}, t_j), $j \in 1:m$, дифференциальному уравнению $g'' - \alpha^2 g = 0$. Общее решение последнего уравнения имеет вид $g(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$. Нас интересует частное решение $g(x) = (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})/2 =: \mathrm{sh}\,(\alpha x)$.

Построим фундаментальные натуральные сплайны

$$H_j(x) = \begin{cases} \mathrm{sh}\,\alpha(x - t_{j-1})/\mathrm{sh}\,\alpha h, & t_{j-1} \leqslant x \leqslant t_j, \\ \mathrm{sh}\,\alpha(t_{j+1} - x)/\mathrm{sh}\,\alpha h, & t_j \leqslant x \leqslant t_{j+1}, \\ 0 \text{ вне } [t_{j-1}, t_{j+1}]. \end{cases}$$

Здесь $h = 1/m$. Тогда

$$\sigma(f;\ x) = \sum_{j=0}^m f(t_j) H_j(x).$$

Согласно теореме 7.1 квадратурная формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 \sigma(f;\ x)\,dx$$

оптимальна на классе K.

Положив $a_j = \int_0^1 H_j(x)\,dx$, получим

$$\int_0^1 \sigma(f;\ x)\,dx = \sum_{j=0}^m a_j f(t_j).$$

Остается вычислить коэффициенты a_j.

Имеем

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\operatorname{sh}\alpha(x-t_{j-1})}{\operatorname{sh}\alpha h}\,dx = \frac{\operatorname{ch}\alpha h-1}{\alpha \operatorname{sh}\alpha h} =$$

$$= \frac{e^{\alpha h}-2+e^{-\alpha h}}{\alpha(e^{\alpha h}-e^{-\alpha h})} = \frac{e^{\alpha h/2}-e^{-\alpha h/2}}{\alpha(e^{\alpha h/2}+e^{-\alpha h/2})} = \frac{1}{\alpha}\, th\, \frac{\alpha h}{2}.$$

Следовательно,

$$a_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\operatorname{th}\dfrac{\alpha h}{2} & \text{при } j=0 \text{ и } j=m; \\[2ex] \dfrac{2}{\alpha}\operatorname{th}\dfrac{\alpha h}{2} & \text{при } j=1:m-1. \end{cases}$$

В связи с этой задачей см. [63].

5. Наилучшей на классе $W_1^2 M$ квадратурной формуле

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m a_j^* f(t_j^*)$$

соответствует моносплайн

$$G_*(x) = x^2 - \sum_{j=1}^m a_j^*(x-t_j^*)_+,$$

удовлетворяющий ограничению $G_*(x)=(x-1)^2$ при $x>t_m^*$ и наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0, 1]$ в равномерной метрике. Нетрудно понять, что G_* имеет вид, изображенный на рис. 18. Узлы находятся из условий

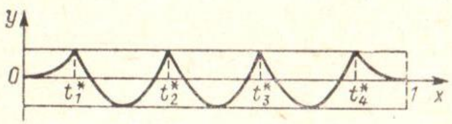


Рис. 18. График моносплайна $y=G_*(x)$

$$t_1^*=h_1;\quad t_m^*=1-h_1;$$

$$t_j^* = t_1^* + (j-1)h,\ j\in 2:m-1;$$

$$h_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2,\quad 2h_1+(m-1)h=1.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$h = \frac{1}{m-1+1/\sqrt{2}},\qquad h_1 = \frac{1}{2(\sqrt{2}(m-1)+1)}.$$

Поскольку

$$G_*(x) = \left(x-t_j^*+\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \text{при } x\in[t_{j-1}^*, t_j^*],\ j\in 2:m,$$

то $a_j^* = G_*'(t_j^*-0) - G_*'(t_j^*+0) = 2h,\quad j\in 2:m-1;$

$$a_1^* = a_m^* = 2h_1 + h.$$

Общий результат о существовании и единственности наилучшей квадратурной формулы на классе $W_1^r M$ получен в [38].

6. Покажем, что однородная система уравнений

$$(-1)^r(2r-1)!\,\alpha b_j + S(t_j) = 0,\ j\in 1:m,$$

$$\sum_{j=1}^m b_j t_j^k = 0,\ k\in 0:r-1,$$

имеет только тривиальное решение. Возьмем произвольное решение этой системы. Соответствующий натуральный сплайн обозначим S_0. Согласно (2.5)

$$\frac{(-1)^r}{(2r-1)!}\|S_0^{(r)}\|_2^2 = \sum_{j=1}^m b_j S_0(t_j) = (-1)^{r+1}(2r-1)!\,\alpha\sum_{j=1}^m b_j^2.$$

Значит,

$$\|S_0^{(r)}\|_2^2 = -\alpha[(2r-1)!]^2\sum_{j=1}^m b_j^2.$$

Последнее равенство возможно лишь тогда, когда все b_j равны нулю.

Теперь отметим, что $S_0(x) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x^i$ и $S_0(t_j)=0,\ j\in 1:m$. Поскольку $m\geqslant r$, то все a_i также равны нулю.

Обозначим S_* единственный натуральный сплайн, удовлетворяющий соотношениям

$$(-1)^r(2r-1)!\,\alpha b_j + S_*(t_j) = y_j,\ j\in 1:m. \tag{10}$$

Он является единственным решением задачи о сглаживании. Действительно,

$$F(S_*+h)-F(S_*) = \|h^{(r)}\|_2^2 + 2\int_c^d S_*^{(r)}(x)h^{(r)}(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^m [2h(t_j)(S_*(t_j)-y_j)+h^2(t_j)].$$

Учитывая (2.5) и (10), получаем

$$F(S_*+h)-F(S_*) = \|h^{(r)}\|_2^2 + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^m h^2(t_j).$$

Отсюда следует, что S_* — единственная функция из W_2^r, на которой достигается минимум функционала F.

Задача о сглаживании рассматривается в [31, с. 163—167].

7. По условию

$$S^{(r+\nu)}(0)h^{(r-\nu-1)}(0) = S^{(r+\nu)}(2\pi)h^{(r-\nu-1)}(2\pi),\ \nu\in 0:r-1.$$

В связи с этим

$$J := \int_0^{2\pi} S^{(r)}(x)h^{(r)}(x)\,dx = S^{(r)}(x)h^{(r-1)}(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} S^{(r+1)}(x)h^{(r-1)}(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^{2\pi} S^{(r+1)}(x)h^{(r-1)}(x)\,dx = \ldots = (-1)^{r-1}\int_0^{2\pi} S^{(2r-1)}(x)h'(x)\,dx =$$

$$= (-1)^{r-1}\sum_{j=1}^{m+1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} S^{(2r-1)}(x)h'(x)\,dx.$$

Здесь $t_0=0,\ t_{m+1}=2\pi$. Так как функция $S^{(2r-1)}(x)$ постоянна на каждом интервале (t_{j-1}, t_j), то

$$J = (-1)^r\{S^{(2r-1)}(0)h(0) - S^{(2r-1)}(t_1-0)h(t_1) +$$

$$+\sum_{j=2}^m [S^{(2r-1)}(t_{j-1}+0)h(t_{j-1}) - S^{(2r-1)}(t_j-0)h(t_j)] +$$

$$+S^{(2r-1)}(t_m+0)h(t_m)-S^{(2r-1)}(2\pi)h(2\pi)\}=$$
$$=(-1)^r\sum_{j=1}^m[S^{(2r-1)}(t_j+0)-S^{(2r-1)}(t_j-0)]h(t_j).$$

Теперь воспользуемся леммой I.2.1. Получим

$$J=(-1)^r(2r-1)!\sum_{j=1}^m b_jh(t_j).$$

Ключевое соотношение доказано.

Проверим, что интерполяционная задача на периодических натуральных сплайнах

$$S(t_j)=y_j,\ j\in 1:m,$$

однозначно разрешима при любых правых частях. Возьмем любое решение однородной системы

$$S(t_j)=0,\ j\in 1:m,$$
$$S^{(\nu)}(0)=S^{(\nu)}(2\pi),\ \nu\in 0:2r-1.$$

Соответствующий сплайн обозначим S_0. Функция $h=S_0$ принадлежит пространству $\widetilde{W}_2^r$, поэтому в силу ключевого соотношения

$$\int_0^{2\pi}[S_0^{(r)}(x)]^2dx=0.$$

Имеем $S_0(x)=\sum_{i=0}^{r-1}a_ix^i$ при $x\in[0,2\pi]$. Из условий

$$S_0^{(r-2)}(0)=S_0^{(r-2)}(2\pi),\ S_0^{(r-3)}(0)=S_0^{(r-3)}(2\pi),\ \ldots,\ S_0(0)=S_0(2\pi)$$

последовательно получаем $a_{r-1}=0,\ a_{r-2}=0,\ \ldots,\ a_1=0$. Таким образом, $S_0(x)=a_0$. Поскольку $S_0(t_j)=0,\ j\in 1:m$, то $a_0=0$.

Интерполяционный периодический натуральный сплайн является единственным решением экстремальной задачи

$$\int_0^{2\pi}[h^{(r)}(x)]^2dx\to\inf,$$
$$h(t_j)=y_j,\ j\in 1:m;\ h\in\widetilde{W}_2^r.$$

Это доказывается так же, как в § 3.

8. По определению разность $P_j(x)-P_{j-1}(x)$ обращается в нуль в трех точках $t_j-h,\ t_j,\ t_j+h$. Значит,

$$P_j(x)-P_{j-1}(x)=b_j(x-t_j+h)(x-t_j)(x-t_j-h),$$

где b_j — некоторая константа. Для S получаем представление

$$S(x)=P_0(x)+\sum_{j=1}^m b_j(x-t_j+h)(x-t_j)_+(x-t_j-h).$$

Так как при $x>t_m$

$$0=S''(x)=6\sum_{j=1}^m b_j(x-t_j),$$

то $\sum_{j=1}^m b_j=0,\ \sum_{j=1}^m b_jt_j=0.$

9. Для дискретного натурального кубического сплайна S и произвольной функции g, заданной на сетке $\{x_j\}$, выполняется ключевое соотношение

$$J:=\frac{1}{6h^3}\sum_{i=0}^{N-2}\Delta^2S(x_i)\Delta^2g(x_i)=\sum_{j=1}^m b_jg(t_j).\tag{11}$$

Докажем это.

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\Delta^2S(x_i)=6h^2\sum_{j=1}^m b_j(x_i-t_j+h)_+=$$
$$=6h^2\sum_{j=1}^m b_j(t_j-x_i-h)_+.\tag{12}$$

Далее, имеет место дискретный аналог формулы Тейлора

$$g(x_k)=g(x_0)+\frac{\Delta g(x_0)}{h}(x_k-x_0)+$$
$$+h\sum_{i=0}^{N-2}\frac{\Delta^2g(x_i)}{h^2}(x_k-x_i-h)_+,\tag{13}$$

где $\Delta g(x_i)=g(x_{i+1})-g(x_i)$. Действительно,

$$h\sum_{i=0}^{N-2}\frac{\Delta^2g(x_i)}{h^2}(x_k-x_i-h)_+=\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k-2}(\Delta g(x_{i+1})-\Delta g(x_i))\times$$
$$\times(x_k-x_i-h)=\Delta g(x_{k-1})-\frac{1}{h}\Delta g(x_0)(x_k-x_0-h)+\sum_{i=1}^{k-2}\Delta g(x_i)=$$
$$=\frac{\Delta g(x_0)}{h}(x_k-x_0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Delta g(x_i)=$$
$$=g(x_k)-g(x_0)+\frac{\Delta g(x_0)}{h}(x_k-x_0).$$

На основании (12) и (13) получаем

$$J=\sum_{j=1}^m b_j\left[\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{N-2}(t_j-x_i-h)_+\Delta^2g(x_i)\right]=$$
$$=\sum_{j=1}^m b_j[g(t_j)-g(x_0)-\frac{\Delta g(x_0)}{h}(t_j-x_0)]=$$
$$=\sum_{j=1}^m b_jg(t_j).$$

Ключевое соотношение (11) установлено.

Обратимся к интерполяционной задаче. Запишем однородную систему

$$S(t_j)=0,\ j\in 1:m,$$
$$\sum_{j=1}^m b_j=0,\ \sum_{j=1}^m b_jt_j=0\tag{14}$$

и возьмем произвольное ее решение. Соответствующий сплайн обозначим S_0. Согласно (11)

$$\sum_{i=0}^{N-2}[\Delta^2S_0(x_i)]^2=0.$$

Отсюда и из (13) следует, что

$$S_0(x_k)=S_0(x_0)+\frac{\Delta S_0(x_0)}{h}(x_k-x_0).$$

Поскольку $S_0(t_j)=0$ при $j\in 1:m$ и $m\geqslant 2$, то $S_0(x_k)=0$ при всех $k\in 0:N$.

Имеем

$$0=S_0(t_1)=a_0+a_1t_1,\quad 0=S_0(t_1+h)=a_0+a_1(t_1+h).$$

Значит, $a_0=a_1=0$. Из равенств

$$S_0(t_2+h)=0,\ \ldots,\ S_0(t_{m-1}+h)=0$$

последовательно получаем $b_1=0, \ldots, b_{m-2}=0$. Остается учесть условия

$$b_{m-1}+b_m=0, \quad b_{m-1}t_{m-1}+b_m t_m=0,$$

в силу которых $b_{m-1}=b_m=0$. Так как множество решений однородной системы (14) состоит из одного нулевого вектора, то интерполяционная задача $S(t_j)=y_j$, $j\in 1:m$, однозначно разрешима при любых правых частях.

Интерполяционный сплайн является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=0}^{N-2}[\Delta^2 f(x_i)]^2 \to \inf,$$

$$f(t_j)=y_j, \ j\in 1:m.$$

Это доказывается так же, как в § 3.

10. Возьмем любое решение однородной системы

$$c+\sum_{j=1}^m d_j \| X_k-X_j \| =0, \quad k\in 1:m,$$

$$\sum_{j=1}^m d_j=0. \tag{15}$$

Для него

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m d_k d_j \| X_k-X_j \| =0. \tag{16}$$

Покажем, что

$$-\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m d_k d_j \| X_k-X_j \| =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \|X\|^{-3}\left|\sum_{j=1}^m d_j \exp\left(i\langle X_j,\ X\rangle\right)\right|^2 dX=:J, \tag{17}$$

если только $\sum_{j=1}^m d_j=0$. Действительно,

$$\left|\sum_{j=1}^m d_j \exp\left(i\langle X_j,\ X\rangle\right)\right|^2=\sum_{k,\,j} d_k d_j[\cos(\langle X_k-X_j,\ X\rangle)-1].$$

Поэтому

$$J=-\sum_{k,\,j} d_k d_j\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\sin^2(\langle X_k-X_j,\ X\rangle/2)}{\|X\|^3}dX\right). \tag{18}$$

Справедлива формула

$$L:=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\sin^2(\langle A,\ X\rangle)}{\|X\|^3}dX=\|A\|. \tag{19}$$

При $A=\mathbf{O}$ она тривиальна. Пусть $A\neq\mathbf{O}$. Обозначим $a=\|A\|, \xi=A/\|A\|=(\sin\theta, \cos\theta)$ Тогда

$$L=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2(a\rho\sin(\varphi+\theta))}{\rho^2}d\varphi\right)d\rho=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\int_0^\infty\frac{\sin^2(a\rho\sin\varphi)}{\rho^2}d\rho\right)d\varphi.$$

Поскольку

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2 b\rho}{\rho^2}d\rho=\frac{\pi}{2}|b|,$$

$$\text{то } L=\frac{a}{2}\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi=a.$$

Объединив (18) и (19), придем к (17).

Согласно (16) и (17)

$$\sum_{j=1}^m d_j \exp\left(i\langle X_j,\ X\rangle\right)=0 \quad \forall X\in\mathbf{R}^2. \tag{20}$$

Отсюда следует, что все d_j равны нулю. Это утверждение докажем индукцией по m. При $m=1$ оно очевидно. В случае $m>1$ поделим (20) на $\exp(i\langle X_m,\ X\rangle)$. Получим

$$\sum_{j=1}^{m-1} d_j \exp\left(i\langle Z_j,\ X\rangle\right)+d_m\equiv 0, \tag{21}$$

где $Z_j=X_j-X_m$. Дифференцирование приводит к тождеству

$$\sum_{j=1}^{m-1} d_j Z_j \exp\left(i\langle Z_j,\ X\rangle\right)\equiv\mathbf{O}.$$

По индуктивному предположению $d_j Z_j=\mathbf{O}$ при всех $j\in 1:m-1$. Вместе с тем векторы Z_j отличны от нуля. Значит, все d_j, $j\in 1:m-1$, равны нулю. Согласно (21) и $d_m=0$.

Теперь ясно, что однородная система (15) имеет только нулевое решение. Это гарантирует однозначную разрешимость интерполяционной задачи

$$S(X_j)=y_j, \quad j\in 1:m.$$

По поводу обобщений см. [61, 64].

КОММЕНТАРИИ

К главе I

Ранняя история теории сплайнов подробно описана в [1], более поздняя — в [79]. Появлению сплайнов предшествовали работы по оскуляторной интерполяции [65].

Оценка $Z(S) \leqslant r+m$ установлена в [66]. Учет суммарной индексной длины нуль-интервалов приводит к более точной оценке (3.1). С ее помощью доказаны многие утверждения в первых двух главах данной книги.

При изложении вопроса о кратной сплайн-интерполяции авторы следуют работе [37]. Критерий (4.7) разрешимости задачи простой интерполяции получен в [77]. Теорема 5.1 об оценке погрешности кратной сплайн-интерполяции доказана в [80].

Систематическое изучение B-сплайнов началось с работы Шенберга [74]. Рекуррентное соотношение (7.4) для нормализованных B-сплайнов установлено в [58, 59], а тождество (7.8) — в [69].

Численный метод для решения систем линейных уравнений с почти блочно-диагональной матрицей предложен в [60]. В [21] имеется пакет программ на языке ФОРТРАН для решения различных вычислительных задач, связанных со сплайнами.

Остановимся на задаче наилучшего равномерного приближения непрерывной функции полиномиальными сплайнами:

$$\varphi(S):=\max_{x\in[c,\,d]}|f(x)-S(x)|\to\min,$$

где минимум берется по всем сплайнам S класса $(r,\,m)$ с фиксированными узлами $c<t_1<\ldots<t_m<d$. Эта задача всегда разрешима. Обозначим $t_0=c$, $t_{m+1}=d$. В [72, 78] доказана следующая нестандартная теорема:

Сплайн S^* наилучшего приближения функции f в случае $\varphi(S^*)>0$ характеризуется тем, что на некотором отрезке $[t_\nu,\,t_{\nu+\mu+1}]$ разность $\Delta^*(x)=f(x)-S^*(x)$ альтернирует $r+\mu+1$ раз, т. е. в $[t_\nu,\,t_{\nu+\mu+1}]$ существуют $r+\mu+2$ точки $x_0<x_1<\ldots<x_{r+\mu+1}$, в которых $|\Delta^*(x_i)|=\varphi(S^*)$ и $\Delta^*(x_i)=-\Delta^*(x_{i-1})$ при $i\in 1:r+\mu+1$.

Данная книга посвящена в основном полиномиальным сплайнам с простыми узлами. Их непосредственным обобщением являются полиномиальные сплайны с кратными узлами:

$$S(x)=\sum_{l=0}^{r}a_lx^l+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1}b_{jl}(x-t_j)_+^{r-l}.$$

Здесь $r\geqslant 0$ и $k_j\in 1:r+1$. Число k_j называется кратностью узла t_j. Для таких сплайнов нет единого подхода к определению кратности изолированных нулей и нуль-интервалов (см. [79, с. 184]). Мы дадим определение, естественно согласованное с определением из § 3 и учитывающее последние достижения в этой области [79, с. 154—161].

Кратность изолированного нуля ξ, отличного от узлов t_j, равна наименьшему натуральному ν, при котором $S^{(\nu)}(\xi)\neq 0$.

Пусть $\xi=t_j$, $A_\nu=S^{(\nu)}(\xi-0)$, $B_\nu=S^{(\nu)}(\xi+0)$, и существуют хотя бы одно A_ν и хотя бы одно B_ν, отличные от нуля. Положим

$$p=\min\{\nu\mid A_\nu\neq 0\},\quad q=\min\{\nu\mid B_\nu\neq 0\},\quad \mu=\max\{p,\,q\}. \tag{1}$$

Точка ξ считается изолированным нулем кратности μ, если $(-1)^{\mu+p}A_pB_q>0$, и изолированным нулем кратности $\mu+1$, если $(-1)^{\mu+p}A_pB_q<0$.

Нетрудно проверить, что в нуле четной кратности знак S не меняется, а в нуле нечетной кратности — меняется.

Введем фиктивные узлы $t_0=-\infty$, $t_{m+1}=+\infty$ с кратностями $k_0=k_{m+1}=r+1$. Интервал $(t_i,\,t_j)$ при $1\leqslant i<j\leqslant m$ называется конечным нуль-интервалом сплайна S, если $S\equiv 0$ в $(t_i,\,t_j)$, но $S\not\equiv 0$ как в $(t_{i-1},\,t_i)$, так и в $(t_j,\,t_{j+1})$. Кратность конечного нуль-интервала $\xi=(t_i,\,t_j)$ определяется следующим образом. Положим $A_\nu=S^{(\nu)}(t_i-0)$, $B_\nu=S^{(\nu)}(t_j+0)$ и найдем числа $p,\,q,\,\mu$ по формулам (1). Тогда кратность ξ равна μ, если $(-1)^{\mu+p}A_pB_q>0$, и равна $\mu+1$, если $(-1)^{\mu+p}A_pB_q<0$.

Кратностью бесконечного нуль-интервала $(t_0,\,t_j)$, где $j\in 1:m$, называется наименьшее $\nu\in 0:r$, при котором $S^{(\nu)}(t_j+0)\neq 0$. Аналогично определяется кратность бесконечного нуль-интервала $(t_i,\,t_{m+1})$.

В окрестности узла t_j сохраняют непрерывность производные сплайна S до порядка $r-k_j$ включительно. Поэтому для конечного нуль-интервала $\xi=(t_i,\,t_j)$ имеем $p\geqslant r-k_i+1$, $q\geqslant r-k_j+1$. Отсюда следует, что кратность ξ не меньше $\max\{p,\,q\}\geqslant r+1-\min\{k_i,\,k_j\}$. Эта оценка справедлива и для бесконечного нуль-интервала, если учесть, что $k_0=k_{m+1}=r+1$.

Отметим, что кратность нуль-интервала может равняться нулю.

Обозначим $Z(S)$ количество всех изолированных нулей и нуль-интервалов сплайна S с учетом их кратности. Индексной длиной нуль-интервала $\xi=(t_i,\,t_j)$ назовем число

$$l(\xi)=\min\{k_i,\,k_j\}+\sum_{\nu=i+1}^{j-1}k_\nu.$$

Можно доказать следующее утверждение, аналогичное лемме 3.1:

Если сплайн S, не равный тождественно нулю на $(-\infty,\,+\infty)$, имеет нуль-интервалы $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_q$, то

$$Z(S)\leqslant r+\sum_{j=1}^{m}k_j-\sum_{l=1}^{q}l(\xi_l).$$

В [10—13, 15, 36, 79] рассмотрены задачи интерполяции и наилучшего равномерного приближения функций полиномиальными сплайнами с кратными узлами.

Дальнейшим обобщением полиномиальных сплайнов являются чебышевские сплайны [26, с. 435—438]. Наиболее полные результаты по интерполяции, равномерному приближению и приближению в среднем функций чебышевскими сплайнами с кратными узлами получены в [48].

К главе II

Теорема 2.1 о существовании оптимального линейного метода восстановления и теорема 2.2 о достаточных условиях его единственности опубликованы в [49]. Там же указано соотношение двойственности. Работа [49] способствовала появлению широкого интереса к задачам оптимального восстановления линейных функционалов и операторов [3, 6, 14, 70, 71, 73]. Современное состояние этого направления исследований отражено в монографии [55].

Задачи (4.2) и (4.7) о совершенных сплайнах, наименее уклоняющихся от нуля в равномерной метрике, как при отсутствии ограничений на параметры, так и при наличии однородных граничных условий, решены в основном в [53; 54, с. 130—137]. Теорема Борсука применяется для доказательства существования совершенных сплайнов и моносплайнов с заданными альтернансными свойствами во многих работах, начиная, по-видимому, с [14]. Приведенные в книге доказательства единственности решения задач (4.2), (4.7) принадлежат авторам.

Основная теорема алгебры для совершенных сплайнов установлена в [68]. Изложение в книге следует работе [45]. Идея использования лемм 5.1 и 5.2 для обоснования подобного рода результатов предложена в [40]. Экстремальные свойства совершенных сплайнов и их приложения детально изучены в [57].

Теорема 6.1 об оптимальной интерполяции на классе $W^r_\infty M$ доказана в [71]. Отметим два частных случая этой теоремы.

1. Рассмотрим информацию

$$I(f)=\{f^{(\nu)}(\pm 1),\quad \nu\in 0:r-1\}.$$

Соответствующий совершенный сплайн T степени r с r узлами совпадает с $\mathring{T}_{rr}$. Как следует из задачи 6, узлами $\mathring{T}_{rr}$ являются нули полинома Чебышева II рода

$$t_j=\cos\frac{(r+1-j)\pi}{r+1},\quad j\in 1:r.$$

Значит, $R(x)=M\,|\,\mathring{T}_{rr}(x)\,|$ и

$$\Phi_*(I(f))=S(f;\,x)=\sum\nolimits_{i=0}^{r-1}\alpha_i x^i+\sum\nolimits_{j=1}^{r}\beta_j(x-t_j)_+^{r-1},$$

где коэффициенты α_i, β_j определяются из условий

$$S^{(\nu)}(f;\,\pm 1)=f^{(\nu)}(\pm 1),\quad \nu\in 0:r-1.$$

По этому поводу см. [6].

2. В случае информации

$$I(f)=\{f^{(\nu)}(\pm 1),\quad \nu\in 0:r-2\}$$

соответствующий совершенный сплайн T степени r с $r-2$ узлами построен в [7]. Узлами T являются корни полинома $Q_{r-2}(t)=t^{r-2}+c_1t^{r-3}+\ldots+c_{r-2}$, наименее уклоняющегося от нуля на $[-1,\ 1]$ в интегральной метрике с весом $p(t)=1-t^2$.

Соотношение $R_{r,\,2n}=\frac{1}{2}R^{(1)}_{rn}$ в периодическом случае получено в [14].

Поперечники по Гельфанду $d^n(W^r_\infty M)$ вычислены в [53].

§ 8 написан на основе работы [44]. Оптимальная пассивная стратегия поиска максимума периодической функции с ограниченной старшей производной указана в [25]. Исследованию оптимальных методов максимизации функций, удовлетворяющих условию Липшица, посвящена книга [52].

Некоторые специальные задачи оптимального восстановления рассмотрены в [53, 46].

К главе III

Свойство минимальной нормы для натуральных кубических сплайнов установил Холлидей [67]. Шёнберг доказал, что единственной оптимальной на классе W^r_2M квадратурной формулой с фиксированными узлами является формула, точная на натуральных сплайнах [75]. Эти факты легли в основу теории натуральных сплайнов.

Содержание § 2—4 традиционное (см., например, [31, с. 150—163]). Все результаты этих параграфов переносятся на случай натуральных сплайнов с кратными узлами [35].

Оптимальным квадратурным формулам и моносплайнам минимальной нормы посвящены монография [42] и обзорная статья [22]. В [39] рассмотрены наиболее извивающиеся моносплайны.

В неявной форме натуральные сплайны уже давно возникали в механике. В этой связи отметим замечательную работу А. Н. Крылова [30]. В § 5 один из результатов работы [30] (расчет балки, лежащей на упругом основании, при действии на нее сосредоточенных нагрузок) переведен на язык сплайнов.

Общие сплайновые алгоритмы подробно изучаются в [55, с. 85—100]. Оптимальность и центральность сплайновых алгоритмов по существу установлены в [63].

§ 8 о сферических сплайнах написан на основе работы [62].

В заключение укажем еще один путь обобщения понятия сплайна. Для этого заметим, что функция $g_r(x)=x_+^{r-1}/(r-1)!$ удовлетворяет уравнению $y^{(r)}(x)=\delta(x)$, где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака. Последнее означает, что

$$(-1)^r\int_{-\infty}^{+\infty}g_r(x)h^{(r)}(x)dx=h(0)\qquad(2)$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции h. Равенство (2) легко проверяется интегрированием по частям. Таким образом, g_r является фундаментальной функцией оператора d^r/dx^r.

С помощью фундаментальных функций других дифференциальных операторов можно построить более общие сплайны, зависящие как от одной, так и от нескольких переменных.

Для примера введем сплайны, соответствующие полигармоническому оператору на плоскости. Обозначим $X=(x_1,\ x_2)$, $\rho=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$,

$$\Delta^r=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^r,\quad r\geqslant 2.$$

Как известно, фундаментальная функция оператора Δ^r имеет вид

$$G_r(X)=\frac{1}{2^{2r-1}\pi[(r-1)!]^2}\rho^{2r-2}\ln\rho.$$

Она характеризуется тем, что

$$\int_{\mathbb{R}^2}G_r(X)\Delta^r h(X)dX=h(0)$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции h.

Возьмем на плоскости попарно различные точки $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m$. Функция

$$S(X)=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant r-1}c_\alpha X^\alpha+\sum\nolimits_{j=1}^{m}d_jG_r(X-X_j)\qquad(3)$$

при дополнительном условии

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m}d_jX_j^\alpha=0,\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant r-1,$$

называется натуральным сплайном, соответствующим полигармоническому оператору Δ^r. Здесь $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$, $X^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$, α_1, α_2 — целые неотрицательные числа.

Сплайны (3) при $r=2$ рассматриваются в [47, 50].

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., 1972. 320 с.

2. Александров П. С. Комбинаторная топология. М., 1947. 660 с.

3. Бахвалов Н. С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций.— Журн. вычисл. мат. и матем. физ., 1971, т. 11, № 4, с. 1014—1018.

4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М., 1966. 632 с.

5. Бернштейн С. Н. Об интерполировании.— В кн.: Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М., 1952, с. 5—7.

6. Боянов Б. Д. Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций.— Матем. заметки, 1975, т. 17, № 4, с. 511—524.

7. Василенко А. В. Оптимальное восстановление функций с ограниченной r-й производной по $(r-2)$-кратной информации. № 3060. Деп. от 29 января 1981 г. ВИНИТИ. 12 с.

8. Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск, 1983. 216 с.

9. Василенко В. А., Зюзин М. В., Ковалков А. В. Сплайн-функции и цифровые фильтры. Новосибирск, 1984. 156 с.

10. Васильев А. А. Аппроксимация сплайнами произвольного дефекта с двусторонними ограничениями.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1980, № 19, с. 20—27.

11. Васильев А. А. Аппроксимация с интерполяцией сплайнами произвольного дефекта.— Матем. заметки, 1981, т. 29, № 5, с. 743—748.

12. Васильев А. А., Малоземов В. Н., Певный А. Б. Интерполяция и аппроксимация сплайнами произвольного дефекта.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1979, № 19, с. 23—30.

13. Васильев А. А., Малоземов В. Н., Певный А. Б. Основы теории B-сплайнов с кратными узлами.— В кн.: Методы вычислений. Вып. 13. Л., 1983, с. 171—185.

14. Великин В. Л. Оптимальная интерполяция периодических дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной.— Матем. заметки, 1977, т. 22, № 5, с. 663—670.

15. Вершик А. М., Малоземов В. Н., Певный А. Б. Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация.— Сиб. матем. журн., 1975, т. 16, № 5, с. 925—938.

16. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1981. 512 с.

17. Гавурин М. К., Малоземов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л., 1984. 176 с.

18. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954. 328 с.

19. Гребенников А. И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. М., 1983. 208 с.

20. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л., 1977. 184 с.

21. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М., 1985. 304 с.

22. Женсыкбаев А. А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы.— Успехи матем. наук, 1981, т. 36, № 4, с. 107—159.

23. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М., 1980. 352 с.

24. Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А. Сплайны в инженерной геометрии. М., 1985. 224 с.

25. Злизняк Н. Ф., Лигун А. А. Об оптимальных стратегиях

поиска глобального максимума функции.— Журн. вычисл. мат. и матем. физ., 1978, т. 18, № 2, с. 314—321.

26. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М., 1976. 568 с.

27. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. М., 1984. 352 с.

28. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. М., 1959. 212 с.

29. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956. 392 с.

30. Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л., 1931. 154 с.

31. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., 1975. 496 с.

32. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. Сплайн-аппроксимация функций. М., 1983. 80 с.

33. Малоземов В. Н. Об отклонении ломаных.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1966, № 7, с. 150—153.

34. Малоземов В. Н. К полигональной интерполяции.— Матем. заметки, 1967, т. 1, № 5, с. 537—540.

35. Малоземов В. Н. Натуральные сплайны произвольного дефекта.— В кн.: Методы вычислений. Вып. 13. Л., 1983, с. 163—171.

36. Малоземов В. Н., Певный А. Б. Аппроксимация сплайнами произвольного дефекта.— Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 3, с. 572—575.

37. Малоземов В. Н., Певный А. Б. О сплайн-интерполяции.— Матем. заметки, 1979, т. 26, № 6, с. 817—822.

38. Малоземов В. Н., Певный А. Б. О наилучшей квадратурной формуле на классе W_1^{r+1}.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 1, с. 37—40.

39. Малоземов В. Н., Певный А. Б. Наиболее извивающиеся моносплайны.— Сиб. матем. журн., 1982, т. 23, № 2, с. 128—134.

40. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций.— Изв. АН СССР, серия матем., 1974, т. 38, № 3, с. 583—614.

41. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.— Изв. АН СССР, серия матем., 1946, т. 10, № 3, с. 207—256.

42. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., 1979. 256 с.

43. Певный А. Б. О наилучшей квадратурной формуле типа Маркова на одном классе функций.— Журн. вычисл. мат. и матем. физ., 1982, т. 22, № 3, с. 559—565.

44. Певный А. Б. Об оптимальных стратегиях поиска максимума функции с ограниченной старшей производной.— Журн. вычисл. мат. и матем. физ., 1982, т. 22, № 5, с. 1061—1066.

45. Певный А. Б. Нелинейные интерполяционные задачи для моносплайнов.— Изв. вузов. Математика, 1982, № 6, с. 37—39.

46. Певный А. Б. Об оптимальных формулах численного дифференцирования. № 1701. Деп. от 7 декабря 1982 г. ВИНИТИ. 9 с.

47. Певный А. Б. Натуральные сплайны двух и трех переменных.— В кн.: Методы вычислений. Вып. 14. Л., 1985, с. 160—170.

48. Романов В. С. Приближение функций чебышевскими сплайнами: Автореф. канд. дис. Л., 1982. 14 с.

49. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Автореф. канд. дис. М., 1966. 12 с.

50. Смоляк С. А. Сплайны и их применение.— Экономика и матем. методы, 1971, т. 7, № 3, с. 419—431.

51. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976. 248 с.

52. Сухарев А. Г. Оптимальный поиск экстремума. М., 1975. 100 с.

53. Тихомиров В. М. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$.— Матем. сб., 1969, т. 80, № 2, с. 290—304.

54. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976. 304 с.

55. Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М., 1983. 384 с.

56. Треногин В. А. Функциональный анализ. М., 1980. 496 с.

57. Швабауэр О. Я. Экстремальные свойства совершенных сплайнов и их приложения: Автореф. канд. дис. Алма-Ата, 1983. 16 с.

58. Cox M. G. The numerical evaluation of B-splines. —J. Inst. Math. Appl., 1972, vol. 10, N 2, p. 134—149.

59. De Boor C. On calculating with B-splines.—J. Approx Theory, 1972, vol. 6, N 1, p. 50—62.

60. De Boor C., Weiss R. SOLVEBLOK, A package for solving almost block diagonal linear systems.—ACM Trans. Math. Software, 1980, vol. 6, N 1, p. 80—87.

61. Duchon J. Splines minimizing rotation—invariant seti-norms in Sobolev spaces.—Lect Notes in Math., 1977, vol. 571, p. 85—100.

62. Freeden W. On spherical spline interpolation and approximation.—Math. Meth. Appl Sci., 1981, vol. 3, N 4, p. 551—575.

63. Colomb M., Weinberger H. Optimal approximation and error bounds.—In: On numerical approximation. Madison, 1959, p. 117—190.

64. Goobman T. N. T., Lee S. L. Cardinal interpolation by D^m-splines.—Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1983, vol. 94A, p. 149—161.

65. Greville T. N. E. The general theory of osculatory interpolation.—Trans. Actuar. Soc. Amer., 1944, vol. 45, p. 202—265.

66. Johnson R. S. On monosplines of least deviation.—Trans. Amer. Math. Soc., 1960, vol. 96, N 3, p. 458—477.

67. Holladay J. C. A smoothest curve approximation.—Math. Tables Aids Comput., 1957, vol. 11, N 60, p. 233—243.

68. Karlin S. Interpolation properties of generalized perfect splines and solutions of certain extremal problems.—Trans. Amer. Math. Soc., 1975, vol. 206, N 1, p. 25—66.

69. Marsden M. An identity for spline functions and its application to variation diminishing spline approximation.—J. Approx. Theory, 1970, vol. 3, N 1, p. 7—49.

70. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery.—In: Optimal estimation in approximation theory. New York, 1977, p. 1—54.

71. Micchelli C. A., Rivlin T. J., Winograd S. The optimal recovery of smooth functions.—Numer. Math., 1976, vol. 26, N 2, p. 191—200.

72. Rice J. Characterization of Chebyshev approximation by splines.—SIAM J. Numer. Anal., 1967, vol. 4, N 4, p. 557—567.

73. Rivlin T. J. The optimal recovery of functions.—Contemp. Math., 1982, vol. 9, N 1, p. 121—151.

74. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions.—Quart. Appl. Math., 1946, vol. 4, N 1, 2, p. 45—99, 112—141.

75. Schoenberg I. J. Spline interpolation and best quadrature formulae.—Bull. Amer. Math. Soc., 1964, vol. 70, N 1, p. 143—148.

76. Schoenberg I. J. On best approximations of linear operators.—Indagat. Math., 1964, vol. 26, N 2, p. 155—163.

77. Schoenberg I. J., Whitney A. On Polya frequency functions. III.—Trans. Amer. Math. Soc., 1953, vol. 74, N 2, p. 246—259.

78. Schumaker L. L. Uniform approximation by Tchebysheffian spline functions.—J. Math. Mech., 1968, vol. 18, N 4, p. 369—378.

79. Schumaker L. L. Spline functions: basic theory. New York, 1981.

80. Von Golitschek M. On n-widths and interpolation by polynomial splines.—J. Approx. Theory, 1979, vol. 26, N 1, p. 132—141.