Н. П. КОРНЕЙЧУК

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

518
К 67
УДК 517.5

Экстремальные задачи теории приближения. Н. П. Корнейчук. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976.

В монографии с современной точки зрения рассматриваются задачи, связанные с получением точной оценки погрешности наилучшего приближения на классах функций и с оптимальным выбором аппроксимирующего аппарата. Подробно изложены разработанные в последние годы новые методы, позволившие получить окончательные результаты в ряде экстремальных задач теории аппроксимации.

Книга предназначена для студентов и аспирантов математических специальностей, она будет полезна научным работникам в области теоретической и прикладной математики.

Илл. 21.

Николай Павлович Корнейчук

Экстремальные задачи теории приближения

М., 1976 г., 320 стр. с илл.

Редакторы *Б. И. Голубов, Г. Я. Пирогова*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*. Корректоры *О. А. Сегал, Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 18/III 1976 г. Подписано к печати 23/VII 1976 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 10. Условн. печ. л. 16,8. Уч.-изд. л. 16,48. Тираж 7 000 экз. Т-11092. Цена книги 1 р. 25 к. Заказ № 544.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

К $\dfrac{20204-101}{053(02)-76}$ 44-76

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория приближения — одна из наиболее интенсивно развивающихся областей математики.

В последние десятилетия наблюдается проникновение идей и методов теории аппроксимации в самые различные разделы математической науки, особенно прикладных направлений. Одновременно с этим перестраивается и ставится на более широкую и прочную основу фундамент теории приближения, заложенный классическими работами Чебышева и Вейерштрасса, Джексона и Бернштейна о приближении многочленами индивидуальных функций и целых их классов.

Задачи аппроксимационного содержания, задаваемые на классах функций (или, более общо, на множествах произвольного банахова пространства), во многих случаях являются задачами на экстремум: требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший аппарат приближения.

Такого рода задачи и рассматриваются в этой книге. Однако выбор материала определялся не только экстремальным характером задач. В основу книги положены исследования по экстремальным задачам теории наилучшего приближения функций действительного переменного, в которых получены окончательные результаты, т. е. решение доведено до точных констант, и где ни убавить, ни прибавить уже, в сущности, ничего нельзя.

Следует сказать, что наиболее существенные результаты окончательного характера получены на классах периодических функций, что, впрочем, нетрудно объяснить: классы периодических функций обладают определенной симметрией экстремальных свойств, в то время как на экстремальных свойствах функций, заданных на конечном отрезке, существенно сказывается возмущающее действие концов промежутка. Рассматривая экстремальные задачи на конкретных классах функций, мы в этой книге ограничиваемся периодическим случаем.

Подчеркнем, что основное содержание книги связано с задачами наилучшего приближения. Хотя мы и затрагиваем вопрос о наилучших линейных методах аппроксимации, широкий круг фактов и результатов, связанных с экстремальными задачами для линейных методов, остался вне рамок книги.

Мы предполагаем знакомство читателя с основными фактами теории функций действительного переменного (в частности, с основами теории меры и интеграла Лебега), а также с элементами функционального анализа, самыми общими понятиями которого мы оперируем на протяжении всей книги.

Конечно, при рассмотрении конкретных задач можно было бы обойтись без таких терминов, как линейное нормированное пространство, норма, компактность, оператор и т. д., но изложение от этого не стало бы проще и понятнее, не говоря уже о том, что оно, конечно, не стало бы короче.

Но дело не только в языке. Идеи и методы функционального анализа позволили вскрыть глубокие связи между различными по постановке задачами, получить утверждения глобального характера, объясняющие с единой точки зрения целую совокупность частных фактов. Пример тому — фундаментальные теоремы о двойственности экстремальных задач в линейных нормированных пространствах, которые служат в этой книге отправным пунктом при рассмотрении конкретных случаев.

Автор, впрочем, далек от мысли переоценивать роль методов функционального анализа при решении задач, поставленных в конкретных пространствах. Знание глубоких фактов функционального анализа позволяет взглянуть на проблему с самой общей точки зрения, значительно расширить круг возможных подходов к ее решению, а иногда — сразу указать общую схему, в которую она укладывается. Однако там, где нужно получить точную количественную оценку экстремальных свойств функций конкретного класса, свойств, лежащих, так сказать, на грани допустимого, там общие методы, именно в силу своей общности, обычно оказываются бессильными.

Попытки найти точный результат в той или иной конкретной экстремальной задаче, как правило, где-то в глубине упираются в некоторую совсем элементарно формулируемую задачу, связанную с получением простого на вид и интуитивно легко воспринимаемого, но далеко не просто доказываемого неравенства. И тут требуется тонкий анализ, умение найти новый, нестандартный подход к исследованию глубоко лежащих свойств функций рассматриваемого класса. Мы стараемся акцентировать внимание читателя на этих узловых моментах, приводя подробные доказательства связанных с ними результатов. Во многих из этих доказательств важную роль играют геометрические соображения (особенно в главах 5, 6, 7, 10) и суть дела становится прозрачной, если сделать соответствующий чертеж.

Вопрос о том, какие вспомогательные факты доказывать, а где можно ограничиться ссылкой, автор пытается решить, приняв следующий принцип: ссылки делать только на то, что исчерпывающе доказано в университетских учебниках по теории функций и функциональному анализу. Правда, в одном месте мы вынуждены отступить от этого, на наш взгляд, разумного правила; в последней главе некоторые результаты по оценке поперечников базируются на глубокой (хотя интуитивно и легко воспринимаемой) теореме Борсука, строгое доказательство которой можно найти лишь в специальной литературе.

Вспомогательный материал по теории функций и функциональному анализу, который в нужном нам объеме не содержится в учебниках, включен в виде отдельных параграфов в те главы, где он нужен. Некоторые факты общего характера вынесены в дополнение.

Основной материал прочитан автором в виде спецкурсов в Днепропетровском государственном университете.

В обсуждении новых результатов, включенных в монографию, активное участие принимали сотрудники кафедры теории функций этого университета, за что автор приносит им благодарность. В. М. Тихомиров, В. И. Рубан и В. Ф. Бабенко прочитали в рукописи отдельные главы книги, их замечания помогли улучшить изложение некоторых мест. В частности, В. И. Рубаном предложена новая схема оценки снизу поперечников при доказательстве основных теорем § 10.4, позволившая обойтись без теоремы Борсука. Всем им, а также редактору книги Б. И. Голубову, очень внимательно прочитавшему рукопись, автор искренне благодарен.

Н. Корнейчук

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\forall$ — квантор общности: «для всех»

$\exists$ — квантор существования: «существует»

$\varnothing$ — пустое множество

$x \in A$ — элемент x принадлежит множеству A

$x \notin A$ — элемент x не принадлежит множеству A

$A \bigcup B$ — объединение множеств A и B

$A \bigcap B$ — пересечение множеств A и B

$A \backslash B$ — разность множеств A и B

$A \times B$ — прямое произведение множеств A и B

$A \subset B$ — множество A содержится в множестве B

$\{x : Px\}$ — совокупность элементов x, обладающих свойством Px.

$f(A)$ — образ множества A при отображении f

R_1 — совокупность всех действительных чисел

R_n — n-мерное евклидово пространство

$[\alpha]$ — целая часть числа α

$\operatorname{sign} \alpha$ — величина, равная 1, если $\alpha > 0$, равная -1, если $\alpha < 0$, и нулю, если $\alpha = 0$

$\inf A$ — точная нижняя грань чисел, входящих в множество $A \subset R_1$

$\sup A$ — точная верхняя грань чисел, входящих в множество $A \subset R_1$

def — по определению

$\|x\| = \|x\|_X$ — норма элемента x в линейном нормированном пространстве X

X^* — пространство, сопряженное с линейным нормированным пространством X

$F^\perp$ — множество функционалов $f \in X^*$ таких, что $f(x) = 0 \ \forall x \in F$, где $F \subset X$

$\operatorname{mes} E$ — лебегова мера множества E

$\dim X$ — размерность линейного пространства X

$\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \operatorname{vrai} |f(t)|$ — существенная верхняя грань функции $|f(t)|$ на $[a, b]$, т. е. наименьшее из чисел $N \in R_1$, для которых неравенство $|f(t)| > N$ выполняется на множестве меры нуль

C, L_p, M, V — пространства 2π-периодических функций с соответствующей метрикой

X^r — множество r-х 2π-периодических интегралов от $f \in X$, где X есть C, L_p, M или V

$W_X^r = \{f : f \in X^r, \|f^{(r)}\|_X \leq 1\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$

$E(x, F) = E(x, F)_X$ — наилучшее приближение элемента x множеством F в пространстве X

$E(\mathfrak{M}, F)_X$ — точная верхняя грань величин $E(x, F)_X$ по всем $x \in \mathfrak{M}$

$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, F)_X$ — точная нижняя грань величин $\sup\limits_{x \in \mathfrak{M}} \|x - Ax\|_X$ по всем линейным ограниченным операторам A из X в $F \subset X$

$T_n(t)$ — тригонометрический полином порядка $n-1$

F_{2n-1}^T — подпространство тригонометрических полиномов $T_n(t)$ порядка $n-1$

$E_n(f)_X = E(f, F_{2n-1}^T)_X$

$E_n(\mathfrak{M})_X = E(\mathfrak{M}, F_{2n-1}^T)_X$

$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M})_X = \mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_{2n-1}^T)_X$

$d_n(\mathfrak{M}, X)$ — n-мерный поперечник (по Колмогорову) множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X

$d_n'(\mathfrak{M}, X)$ — n-мерный линейный поперечник множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X

$g * \varphi$ — свертка функций g и φ

$g * \mathfrak{M}$ — класс сверток $g * \varphi$, где $\varphi \in \mathfrak{M}$

$D_r(t)$ — функция Бернулли

$\omega(f, t)_X$ — модуль непрерывности функции f в пространстве X; $\omega(f, t)_C = \omega(f, t)$

H^ω — класс функций $f \in C$, у которых $\omega(f, t) \leq \omega(t)$

$W^r H^\omega$ $(r = 1, 2, \ldots)$ — класс функций f из C^r, у которых $f^{(r)} \in H^\omega$

$\ddot{f}(t)$ — убывающая перестановка функции f

$\Phi(f, x)$ — Σ-перестановка функции f

$\Phi_{ar}(x)$ — стандартная Σ-перестановка

$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ — вариация функции f на отрезке $[a, b]$

ГЛАВА 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

§ 1.1. Задачи теории приближения

В настоящее время в теории приближения принято естественным образом выделять три типа, а лучше сказать, три цикла задач, которые в определенной степени соответствуют и основным хронологическим этапам развития исследований в теории аппроксимации.

Эти три цикла задач мы сформулируем в произвольном линейном нормированном пространстве X и будем на протяжении всей книги говорить о них как о задачах I, II или III.

Задача I. *Приближение фиксированного элемента $x \in X$ фиксированным множеством F из X.*

В качестве меры приближения естественно взять, во-первых, величину

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\|, \tag{1.1}$$

которая в дальнейшем будет называться *наилучшим приближением элемента x* множеством F. (Конечно, величина (1.1) есть не что иное, как расстояние $\rho(x, F)$ элемента x от множества F. Но мы с самого начала примем, так сказать, аппроксимационную терминологию.)

В качестве аппроксимирующего множества F в этой книге будут рассматриваться подпространства (конечной или бесконечной размерности), а также выпуклые замкнутые множества.

Если существует элемент $u_0 \in F$, реализующий в (1.1) точную нижнюю грань, т. е. такой, что

$$\|x - u_0\| = E(x, F),$$

то u_0 называется *элементом наилучшего приближения* для x в множестве F (или *ближайшим к x* элементом в F).

Здесь сразу возникают следующие вопросы, относящиеся к задаче I:

1) Существует ли для любого x из X в множестве F элемент наилучшего приближения? Ясно, что для положительного ответа на этот вопрос необходимо, во всяком случае, чтобы F было замкнутым.

Множество F, обладающее тем свойством, что для любого $x \in X$ в нем есть ближайший элемент, называют иногда *множеством существования.* Мы этим термином также будем пользоваться.

2) Если для любого $x \in X$ ближайший элемент в множестве F существует, то будет ли он единственным (для любого $x \in X$)? Ответ на этот вопрос может зависеть как от структуры множества F, так и от метрики пространства X.

Самые общие факты, связанные с существованием и единственностью элемента наилучшего приближения, будут приведены в § 1.3 этой главы.

3) Каковы характеристические свойства элемента наилучшего приближения? Речь идет об указании необходимых и достаточных условий, которым должен удовлетворять ближайший к x элемент в множестве F.

Вопрос о характеристических свойствах ближайшего элемента является более тонким, чем вопросы существования и единственности; получение удобных для практического использования критериев требует учета более тонкой специфики пространства X и аппроксимирующего множества F. Нужные нам факты в этом направлении для конкретных функциональных пространств будут изложены в главе 3.

Если F есть множество существования и единственности, то каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный ближайший к нему в множестве F элемент $u = P(x)$. Этим задан некоторый оператор P (*оператор наилучшего приближения*), отображающий X в F. Ниже мы увидим, что в общем случае этот оператор не является аддитивным. Поэтому представляет интерес наряду с величиной (1.1) рассмотреть также меру приближения, задаваемую выбором линейного оператора A ($AX \subset F$) и измеряемую величиной

$$\|x - Ax\|.$$

Можно считать, что оператор A определяет некоторый *линейный метод приближения* элементов $x \in X$ множеством F. Этот линейный метод мы тоже будем обозначать через A.

Задача II. *Приближение фиксированного множества* $\mathfrak{M} \subset X$ *фиксированным множеством* F *того же пространства* X.

Если исходить из наилучшего приближения (1.1) элемента x множеством F, то меру приближения в задаче II естественно определять величиной

$$E(\mathfrak{M}, F) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E(x, F) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F} \| x - u \|, \qquad (1.2)$$

которая характеризует отклонение множества $\mathfrak{M}$ от множества F.

Элемент $x_0 \in \mathfrak{M}$ (если он существует), для которого

$$E(x_0, F) = E(\mathfrak{M}, F),$$

называют *экстремальным* (в данном случае наиболее удаленным) элементом в $\mathfrak{M}$ относительно F.

В конкретных случаях задача II может состоять в том, чтобы точно выразить (или хотя бы оценить) величину (1.2) через характеристики, с помощью которых задано множество $\mathfrak{M}$. Практический смысл задачи II можно видеть в том, что знание величины (1.2) позволяет указать минимальную гарантированную оценку погрешности приближения любого элемента из $\mathfrak{M}$ с помощью множества F.

Если же приближение осуществляется с помощью линейного оператора A, то нас будет интересовать точная верхняя грань

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} \| x - Ax \|, \qquad (1.3)$$

а также величина

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, F) = \inf_{AX \subset F} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \| x - Ax \|, \qquad (1.4)$$

где точная нижняя грань распространена на все линейные операторы A, отображающие X в F. Можно сказать, что величина (1.4) характеризует *наилучшее линейное приближение* множества $\mathfrak{M}$ элементами множества F.

Линейный оператор $\tilde{A}$ ($\tilde{A}X \subset F$) (если он существует), реализующий в (1.4) точную нижнюю грань, т. е. такой, что

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}}\|x-\tilde{A}x\|=\mathscr{E}(\mathfrak{M}, F),$$

определяет *наилучший для* $\mathfrak{M}$ *линейный метод приближения.*

Ясно, что если A есть оператор из X в F, то

$$\|x-Ax\|\geqslant E(x, F)\quad \forall x\in X$$

и, следовательно,

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}}\|x-Ax\|\geqslant E(\mathfrak{M}, F);$$

а так как это справедливо для любого линейного оператора A $(AX\subset F)$, то

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, F)\geqslant E(\mathfrak{M}, F). \qquad (1.5)$$

Разумеется, весьма интересным представляется выяснение случаев, когда в (1.5) будет знак равенства. Если при этом существует наилучший линейный метод $\tilde{A}$, то

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}}\|x-\tilde{A}x\|=E(\mathfrak{M}, F),$$

и можно сказать, что линейный метод $\tilde{A}$ реализует на множестве $\mathfrak{M}$ верхнюю грань наилучших приближений элементами множества F.

Круг задач первого и второго циклов можно расширить, если рассматривать приближение элемента x или множества $\mathfrak{M}$ из X некоторой расширяющейся последовательностью аппроксимирующих множеств

$$F_1\subset F_2\subset\ldots\subset F_n\subset\ldots, \qquad (1.6)$$

где индекс n может соответствовать, например, размерности множества F_n. Из включений (1.6) и определения величины $E(x, F)$ следует, что для любого $x\in X$

$$E(x, F_1)\geqslant E(x, F_2)\geqslant\ldots\geqslant E(x, F_n)\geqslant\ldots,$$

и, следовательно, для любого множества $\mathfrak{M}\subset X$

$$E(\mathfrak{M}, F_1)\geqslant E(\mathfrak{M}, F_2)\geqslant\ldots\geqslant E(\mathfrak{M}, F_n)\geqslant\ldots$$

Теперь можно говорить об изучении числовых последовательностей $E(x, F_n)$ и $E(\mathfrak{M}, F_n)$, в частности, о выяснении точной или хотя бы порядковой асимптотики их при $n\to\infty$.

Аналогичные задачи при аппроксимации последовательностью множеств (1.6) можно ставить и для величин (1.3) и (1.4).

З а д а ч а III. *Наилучшее приближение фиксированного множества* $\mathfrak{M} \subset X$ *заданным классом множеств* $\{F\}$ *из* X.

Имеется в виду, что задан класс в каком-то смысле «равноценных» множеств F, например подпространств одной и той же размерности, и требуется выбрать то из них, которое наименее отклоняется от $\mathfrak{M}$. Таким образом, речь идет о выборе для $\mathfrak{M}$ наилучшего аппроксимирующего множества.

В этой книге задача III будет рассматриваться только в указанном выше случае, когда $\{F\} = \{F_n\}$ есть множество всех подпространств в X фиксированной размерности n. Применительно к этому случаю мы и сформулируем некоторые аспекты задачи III.

В 1936 г. А. Н. Колмогоров [1] поставил задачу вычисления величин

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_n} E(\mathfrak{M}, F_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (1.7)$$

где точная нижняя грань берется по всем подпространствам F_n размерности n. Для центрально-симметричных множеств $\mathfrak{M}$ (т. е. таких, что из $x \in \mathfrak{M}$ следует, что и $-x \in \mathfrak{M}$) величина $d_n(\mathfrak{M}, X)$ получила название n-мерного *поперечника по Колмогорову* множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X. Она равна половине наименьшей «ширины» множества $\mathfrak{M}$ и характеризует минимальную погрешность, которую можно обеспечить, приближая $\mathfrak{M}$ всевозможными n-мерными подпространствами.

Для произвольного множества $\mathfrak{M}$ поперечник естественно определить через точную нижнюю грань по всевозможным сдвигам $F_n + a$ подпространств размерности n.

Если существует подпространство F_n^*, на котором нижняя грань в (1.7) достигается, то F_n^* называется *экстремальным подпространством* для множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X. Экстремальное подпространство F_n^* является наилучшим (в классе всех подпространств $\{F_n\}$) аппаратом приближения множества $\mathfrak{M}$.

Если минимизировать не наилучшее приближение $E(\mathfrak{M}, F_n)$, а наилучшее линейное приближение $\mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_n)$

множества $\mathfrak{M}$ подпространствами F_n размерности n, то придем к задаче вычисления линейного поперечника

$$d'_n(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_n} \mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X. Из (1.5) следует, что

$$d'_n(\mathfrak{M}, X) \geqslant d_n(\mathfrak{M}, X) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.9}$$

и особый интерес приобретает исследование случаев знака равенства в (1.9) и отыскание соответствующих этим случаям экстремальных подпространств F_n^*, для которых

$$E(\mathfrak{M}, F_n^*) = \mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_n^*) = d_n(\mathfrak{M}, X) = d'_n(\mathfrak{M}, X).$$

В настоящее время по каждой из сформулированных задач I, II и III имеется значительное количество фундаментальных исследований, и немыслимо все их осветить с достаточной полнотой в одной книге. Мы сразу же очертим круг вопросов, составляющих основное содержание этой книги, сказав, что главной целью является изложение результатов, связанных с точным решением задач II и III о наилучшем приближении фиксированных множеств в конкретных пространствах периодических функций. В качестве аппарата приближения в задаче II будут рассматриваться главным образом подпространства тригонометрических полиномов фиксированного порядка; есть, однако, результаты по приближению выпуклым множеством.

Линейные методы в задаче II будут затронуты лишь в связи с выяснением вопроса о возможности реализации с их помощью верхней грани наилучших приближений на заданном классе функций.

Что касается задачи I, то мы ограничимся изложением лишь тех фактов по приближению фиксированного элемента, которые потребуются нам в основных главах, посвященных задачам II и III.

§ 1.2. Общие свойства наилучшего приближения

При фиксированном аппроксимирующем множестве F из X величиной (1.1) задается на X некоторый функционал: каждому $x \in X$ ставится в соответствие число $E(x, F)$. Назовем этот функционал функционалом наилучшего приближения и отметим некоторые его общие свойства, считая везде ниже X вещественным линейным нормированным пространством.

Предложение 1.2.1. *Функционал наилучшего приближения $E(x, F)$ непрерывен, каково бы ни было множество F. Если же F — подпространство, то функционал $E(x, F)$ является полуаддитивным:*

$$E(x_1+x_2, F) \leqslant E(x_1, F)+E(x_2, F) \tag{1.10}$$

и положительно однородным, т. е.

$$E(\lambda x, F) = |\lambda| E(x, F), \tag{1.11}$$

где λ — любое действительное число ($\lambda \in R_1$).

Доказательство. Пусть x и y — произвольные элементы из X. Для любого $u \in F$ имеем

$$\|x-u\| \leqslant \|x-y\|+\|y-u\|,$$

а переходя слева и справа к нижней *) грани по $u \in F$, получим

$$E(x, F) \leqslant \|x-y\|+E(y, F),$$

т. е.

$$E(x, F)-E(y, F) \leqslant \|x-y\|. \tag{1.12}$$

Так как в (1.12) x и y можно поменять местами, то справедливо неравенство

$$|E(x, F)-E(y, F)| \leqslant \|x-y\|, \tag{1.13}$$

из которого немедленно вытекает непрерывность функционала наилучшего приближения.

Пусть теперь F — подпространство. Для любых $u_1, u_2 \in F$ имеем

$$E(x_1+x_2, F) = \inf_{u \in F} \|(x_1+x_2)-u\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(x_1+x_2)-(u_1+u_2)\| \leqslant \|x_1-u_1\|+\|x_2-u_2\|,$$

и переход в правой части к нижней грани по u_1 и u_2 из F дает (1.10).

*) Здесь и в дальнейшем мы ради краткости вместо «точная нижняя (верхняя) грань» пишем просто «нижняя (верхняя) грань».

Далее, если F — подпространство, то для $x \in X$ и $\lambda \in R_1$ ($\lambda \neq 0$) можем написать

$$E(\lambda x, F) = \inf_{u \in F} \|\lambda x - u\| = |\lambda| \inf_{u \in F} \left\| x - \frac{u}{\lambda} \right\| = \\ = |\lambda| \inf_{u \in F} \|x - u\| = |\lambda| E(x, F)$$

и соотношение (1.11) доказано. Из него, в частности, следует (в предположении, что F — подпространство) равенство

$$E(-x, F) = E(x, F) \qquad (\forall x \in X).$$

Заметим, что если F — не подпространство, то соотношения (1.10) и (1.11) могут и не иметь места (простейший пример: $X = R_1$, $F = [-1, 1]$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$). С другой стороны, даже если F — подпространство, функционал наилучшего приближения не является, вообще говоря, аддитивным. Чтобы убедиться в этом, достаточно в двумерном евклидовом пространстве R_2 элементов $x = \{\xi_1, \xi_2\}$ рассмотреть приближение элементов $x_1 = \{0, 1\}$ и $x_2 = \{0, -1\}$ подпространством $F = \{\xi_1, 0\}$.

Теперь, предполагая, что F есть множество существования и единственности, отметим некоторые свойства оператора наилучшего приближения P, сопоставляющего элементу $x \in X$ ближайший к нему элемент $u = P(x)$ из F. Оператор P неявно задается равенством

$$\|x - P(x)\| = \inf_{u \in F} \|x - u\| = E(x, F).$$

Предложение 1.2.2. *Если F — подпространство из X, являющееся множеством существования и единственности, то оператор P является однородным:*

$$P(\lambda x) = \lambda P(x) \qquad (x \in X, \lambda \in R_1)$$

и, следовательно, нечетным, т. е.

$$P(-x) = -P(x) \qquad \forall x \in X.$$

Если, кроме того, подпространство F конечномерно, то оператор P непрерывен.

Однородность оператора P вытекает из цепочки равенств, в которой используется (1.11):

$$\|\lambda x - \lambda P(x)\| = |\lambda| \|x - P(x)\| = |\lambda| E(x, F) = \\ = E(\lambda x, F) = \|\lambda x - P(\lambda x)\|.$$

Докажем непрерывность оператора P в предположении, что F конечномерно.

Пусть $x_m \to x_0$, $u_m = P(x_m)$ и $u_0 = P(x_0)$. Так как

$$\|x_m\| \leq K \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots)$$

(сходящаяся последовательность ограничена), то

$$\|x_m - u_m\| = E(x_m,\ F) \leq \|x_m\| \leq K$$

и, следовательно,

$$\|u_m\| \leq \|u_m - x_m\| + \|x_m\| \leq 2K \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots),$$

т. е. последовательность $\{u_m\}$ элементов из F также ограничена. Предположим, что

$$u_m \not\to u_0 = P(x_0).$$

В конечномерном пространстве всякое ограниченное множество компактно, поэтому в $\{u_m\}$ существует сходящаяся подпоследовательность. В силу сделанного предположения найдется такая подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$, что

$$u_{m_k} \to u' \neq u_0,$$

причем $u' \in F$, ибо F замкнуто. Но $u_{m_k} = P(x_{m_k})$ — элемент наилучшего приближения в F для x_{m_k}, поэтому

$$\|x_{m_k} - u_{m_k}\| \leq \|x_{m_k} - u_0\| \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

откуда при $k \to \infty$, с учетом непрерывности нормы, получим

$$\|x_0 - u'\| \leq \|x_0 - u_0\|,$$

что невозможно, ибо в силу единственности элемента наилучшего приближения, если $u \in F$ и $u \neq u_0$, то

$$\|x_0 - u_0\| < \|x_0 - u\|.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\lim_{m \to \infty} P(x_m) = P(x_0).$$

Отметим еще один факт, связанный с понятием выпуклости.

Напомним определение. Множество D линейного пространства X называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками x_1 и x_2 оно содержит и соединяющий их отрезок, т. е. совокупность точек вида $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Предложение 1.2.3. *Если F — выпуклое множество (в частности, подпространство) линейного нормированного пространства X, то множество F_x элементов наилучшего приближения для $x\in X$ в F является выпуклым.*

В случае, когда F_x пусто или состоит из одного элемента, предложение 1.2.3 тривиально. Пусть F_x не пусто и состоит более чем из одного элемента. Если u_1 и $u_2\in F_x$, т. е. если

$$\|x-u_1\|=\|x-u_2\|=\inf_{u\in F}\|x-u\|\overset{\text{def}}{=}d,$$

то для любого α, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, элемент $\bar u=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2$ принадлежит F и

$$\|x-\bar u\|=\|\alpha(x-u_1)+(1-\alpha)(x-u_2)\|\leqslant$$
$$\leqslant\alpha\|x-u_1\|+(1-\alpha)\|x-u_2\|=\alpha d+(1-\alpha)d=d.$$

Но так как неравенство $\|x-\bar u\|<d$ для $\bar u\in F$ невозможно, то $\|x-\bar u\|=d$, т. е. $\bar u\in F_x$.

§ 1.3. Общие теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения

Не углубляясь в тонкости существования и единственности, мы здесь докажем лишь несколько общих и довольно простых утверждений, которые нам потребуются в следующих главах книги.

Предложение 1.3.1. *Любое конечномерное подпространство F линейного нормированного пространства X является множеством существования.*

Нужно показать, что для любого $x\in X$ в конечномерном подпространстве F существует элемент наилучшего приближения. Фиксируем $x\in X\setminus F$ (если $x\in F$, то доказывать нечего). Так как F замкнуто, то

$$\inf_{u\in F}\|x-u\|\overset{\text{def}}{=}d>0,$$

а в силу определения точной нижней грани для каждого $m=1,\ 2,\ \ldots$ существует элемент $u_m\in F$ такой, что

$$\|x-u_m\|<d+\frac{1}{m}.$$

Последовательность элементов $\{u_m\}$ ограничена, ибо

$$\|u_m\| \leqslant \|u_m - x\| + \|x\| < d + 1 + \|x\| \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots),$$

и так как в конечномерном пространстве любое ограниченное множество компактно, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{u_{m_j}\}$:

$$\lim_{j \to \infty} u_{m_j} = u_0,$$

причем $u_0 \in F$ в силу замкнутости F. Теперь, написав

$$d \leqslant \|x - u_{m_j}\| < d + \frac{1}{m_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots),$$

в пределе при $j \to \infty$ получим

$$\|x - u_0\| = d,$$

т. е. предельный элемент u_0 является ближайшим к x в множестве F.

Мы можем значительно расширить круг своих представлений о множествах существования, введя следующее определение.

Множество F нормированного пространства X называется *локально компактным*, если компактно в X любое ограниченное подмножество из F, т. е. любая ограниченная последовательность элементов из F содержит сходящуюся подпоследовательность.

Так как при доказательстве предложения 1.3.1 из свойств подпространства F мы использовали только его замкнутость и вытекающую из конечномерности локальную компактность, то, буквально повторяя приведенные выше рассуждения, мы получим следующее утверждение.

Предложение 1.3.2. *Любое замкнутое локально компактное множество F линейного нормированного пространства X является множеством существования.*

Касаясь проблемы единственности, мы здесь укажем один факт общего характера, когда единственность обусловлена структурой метрики пространства X.

Норму пространства X называют *строго выпуклой*, если сфера $\|x\| = 1$ в X не содержит отрезков, т. е. из $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, следует, что $\|\alpha x + (1 - \alpha) y\| < 1$ $(0 < \alpha < 1)$.

Строгая выпуклость нормы равносильна тому, что равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ для $x \neq 0$ и $y \neq 0$ возможно, только когда $x = cy$ $(c > 0)$. (Говорят, что в этом случае пространство X *строго нормировано*.) Действительно, если $x \neq y$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, то равенство $\alpha x = c(1-\alpha) y$ $(c > 0,$ $0 < \alpha < 1)$ невозможно, ибо из него следовало бы, что $\alpha \|x\| = c(1-\alpha)\|y\|$, $\alpha = c(1-\alpha)$ и $x = y$. Но если $\alpha x \neq$ $\neq c(1-\alpha) y$ и пространство X строго нормировано, то

$$\|\alpha x + (1-\alpha) y\| < \|\alpha x\| + \|(1-\alpha) y\| = \alpha \|x\| + (1-\alpha)\|y\| = 1,$$

т. е. норма в X строго выпукла.

Обратно, если норма строго выпукла, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq cy$, то элементы

$$x' = \frac{x}{\|x\|}, \qquad y' = \frac{y}{\|y\|}$$

удовлетворяют условиям $x' \neq y'$, $\|x'\| = \|y'\| = 1$, и потому

$$\|\alpha x' + (1-\alpha) y'\| < 1 \qquad (0 < \alpha < 1).$$

При $\alpha = \|x\| / (\|x\| + \|y\|)$ последнее неравенство запишется в виде

$$\left\| \frac{x+y}{\|x\| + \|y\|} \right\| < 1,$$

так что X строго нормировано.

Предложение 1.3.3. *Если норма пространства X строго выпукла и для $x \in X$ в подпространстве $F \subset X$ существует элемент наилучшего приближения u_0, то этот элемент единствен.*

В самом деле, предположим, что кроме u_0 ближайшим к x в подпространстве F является также элемент u_1. Тогда в силу предложения 1.2.3 ближайшим к x в F является и элемент $\bar{u} = 1/2\,(u_0 + u_1)$. Поэтому

$$\|(x - u_0) + (x - u_1)\| = 2\|x - \bar{u}\| = 2E(x, F) =$$
$$= \|x - u_0\| + \|x - u_1\|.$$

Так как норма в X строго выпукла и, значит, X строго нормировано, то

$$x - u_0 = c(x - u_1) \qquad (c > 0).$$

Если теперь $c = 1$, то сразу видно, что $u_1 = u_0$; если же $c \neq 1$, то

$$x = (1-c)^{-1}(u_0 - cu_1)$$

и, следовательно, $x \in F$, а тогда $u_1 = u_0 = x$. Предложение 1.3.3 доказано.

ГЛАВА 2

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Может быть, одним из самых замечательных фактов современного анализа явилось установление, в самых общих терминах, соотношений, связывающих различные по постановке экстремальные задачи. Эти соотношения, получившие название *теорем двойственности*, играют фундаментальную роль в теории приближения, теории оптимального управления, математическом программировании.

В этой главе будет доказано несколько утверждений, сводящих задачу наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве X к двойственной задаче на вычисление верхней грани в сопряженном пространстве X^*. Эти результаты будут служить отправным пунктом при решении экстремальных задач в конкретных функциональных пространствах.

Вывод соотношений двойственности существенным образом базируется на теореме Хана — Банаха о продолжении линейных ограниченных функционалов и на следствиях из нее, одним из которых является, в частности, теорема отделимости. Мы сформулируем в § 2.1 эти утверждения, отсылая интересующихся их доказательством к учебникам Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [1], А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1].

§ 2.1. Теорема Хана — Банаха и отделимость выпуклых множеств

Теорема Хана—Банаха. *Всякий линейный ограниченный функционал f, заданный на линейном многообразии D линейного нормированного пространства X, может быть продолжен на все пространство X с сохранением нормы, т. е. существует линейный ограниченный функционал φ, заданный на всем X и такой, что:*

1) $\varphi(x) = f(x) \quad \forall x \in D$,

2) $\|\varphi\|_X \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} |\varphi(x)| = \sup\limits_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in D}} |f(x)| \overset{\text{def}}{=} \|f\|_D$.

Следствие 1. *Для любого элемента* $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, *существует функционал* $f \in X^*$ *такой, что* $\|f\| = 1$ *и* $f(x_0) = \|x_0\|$.

Следствие 2. *Пусть* F — *подпространство линейного нормированного пространства* X. *Для любого* $x_0 \in X \setminus F$ *существует функционал* $f \in X^*$ *такой, что*:

1) $f(x) = 0 \quad \forall x \in F$,

2) $\|f\| = 1$,

3) $f(x_0) = E(x_0, F) = \inf\limits_{u \in F} \|x_0 - u\|$.

Чрезвычайно важную роль в задачах геометрического характера играет теорема отделимости выпуклых множеств (А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин [1], стр. 130).

Выпуклое множество D (см. § 1.2) линейного пространства X называют *выпуклым телом*, если оно имеет непустое ядро, под которым понимается совокупность точек x из D таких, что для любого $y \in X$ при некотором $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ имеет место включение $x + ty \in D$ при всех $|t| < \varepsilon$. Если X нормировано, то это равносильно наличию у D внутренних точек.

Теорема отделимости. *Пусть* A *и* B — *непересекающиеся выпуклые множества в вещественном линейном нормированном пространстве* X, *причем хотя бы одно из них является выпуклым телом. Тогда существует ненулевой функционал* $f \in X^*$, *разделяющий множества* A *и* B, *т. е. такой, что*

$$f(x) \leqslant f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

§ 2.2. Теоремы двойственности в случае приближения конечномерным подпространством

В случае, когда аппроксимирующим множеством является конечномерное подпространство, двойственные соотношения совсем просто выводятся из теоремы Хана — Банаха и ее следствий, без привлечения теоремы отделимости.

Везде X будет обозначать линейное нормированное пространство, X^* — пространство, сопряженное с X, элементами которого являются заданные на X линейные ограниченные функционалы f с нормой

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} |f(x)|.$$

Теорема 2.2.1. *Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — фиксированная система элементов пространства X, то для любого $x \in X$*

$$\inf_{\lambda_k} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| = \sup_{\substack{f \in X^*, \, \|f\| \leqslant 1, \\ f(x_k) = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, n)}} f(x), \tag{2.1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным числам λ_k, а верхняя — по всем функционалам $f \in X^*$ с нормой $\|f\| \leqslant 1$, которые обращаются в нуль на элементах x_k. Верхняя грань достигается на некотором функционале $f_0 \in X^*$, $\|f_0\| = 1$.

Доказательство. Пусть F — множество элементов $u \in X$ вида

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Таким образом, F есть линейное многообразие, содержащее не более чем n линейно независимых элементов, т. е. F — конечномерное подпространство в X. Через $F^{\perp}$ обозначим множество функционалов $f \in X^*$ таких, что

$$f(u) = 0 \quad \forall u \in F.$$

Соотношение (2.1), которое мы должны доказать, перепишется теперь в виде

$$\inf_{u \in F} \|x - u\| = \sup_{\substack{f \in F^{\perp} \\ \|f\| \leqslant 1}} f(x). \tag{2.2}$$

Если $x \in F$, то (2.2) тривиально, ибо обращается в равенство $0 = 0$. Пусть $x \notin F$. В силу предложения 1.3.1 существует элемент $u_0 \in F$ такой, что

$$\|x - u_0\| = \inf_{u \in F} \|x - u\| \stackrel{\text{def}}{=} d,$$

причем $d > 0$. Для любого функционала $f \in F^{\perp}$ с нормой $\|f\| \leqslant 1$ имеем

$$f(x) = f(x) - f(u_0) = f(x - u_0) \leqslant \|f\| \|x - u_0\| \leqslant \|x - u_0\| = d,$$

так что

$$\sup_{\substack{f \in F^{\perp} \\ \|x\| \leqslant 1}} f(x) \leqslant d. \tag{2.3}$$

С другой стороны, в силу следствия 2 из теоремы Хана — Банаха существует функционал $f_0 \in F^*$ такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x) = d$. Это значит, что на самом деле в (2.3) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

Теорема 2.2.2. *Если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — фиксированная система функционалов из X^*, то для любого $f \in X^*$*

$$\inf_{\lambda_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \right\| = \sup_{\substack{x \in X,\ \|x\| \leqslant 1, \\ f_k(x) = 0 \\ (k=1, 2, \ldots, n)}} f(x), \tag{2.4}$$

где нижняя грань распространена на всевозможные системы чисел λ_k, а верхняя берется по всем элементам $x \in X$ с нормой $\|x\| \leqslant 1$, на которых обращается в нуль каждый из функционалов f_k.

Доказательство. Обозначим через H множество элементов $x \in X$, для которых $f_k(x) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ясно, что H есть замкнутое (в силу непрерывности f_k) линейное многообразие, т. е. подпространство в X.

Наряду с функционалом $f \in X^*$ будем рассматривать его сужение f_H на подпространство H, т. е. заданный на H линейный ограниченный функционал такой, что $f_H(x) = f(x)$ для всех $x \in H$. Очевидно, что

$$\|f_H\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| \leqslant 1}} f_H(x) = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| \leqslant 1}} f(x).$$

Продолжением функционала f_H на все пространство X является не только функционал f, но и любой функционал вида

$$\varphi = f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k, \tag{2.5}$$

где λ_k — произвольные числа, ибо если $x \in H$, то $f_k(x) = 0$ и $\varphi(x) = f(x) = f_H(x)$. Покажем, что любое продолжение функционала f_H с H на X имеет вид (2.5). При этом, не теряя общности, мы можем считать функционалы $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n$ линейно независимыми. Существует (см., например, Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], стр. 210) система элементов $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$, биортогональная системе функционалов $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, т. е. такая, что $f_i(x_k) = 0$, если $k \neq i$ и $f_l(x_l) = 1$. Если $x \in X$, то элемент

$$y = x - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k$$

принадлежит H, ибо

$$f_i(y) = f_i(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) f_i(x_k) =$$
$$= f_i(x) - f_i(x) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, любой элемент $x \in X$ можно представить в виде

$$x = y + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k, \qquad y \in H. \tag{2.6}$$

Фиксируем $f \in X^*$ и обозначим через φ продолжение функционала f_H с H на X. Для любого $x \in X$, учитывая представление (2.6), а также то, что $\varphi(y) = f(y)$, будем иметь

$$\varphi(x) = f(y) + \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k\right) =$$
$$= f\left(x - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, x_k\right) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, \varphi(x_k) =$$
$$= f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, \varphi(x_k) =$$
$$= f(x) - \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \varphi(x_k)]\, f_k(x),$$

т. е. функционал φ представим в виде (2.5) с $\lambda_k = \lambda_k(\varphi) = f(x_k) - \varphi(x_k)$.

Так как при продолжении норма функционала может только увеличиться, то для любого набора коэффициентов λ_k

$$\|\varphi\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \right\| \geqslant \|f_H\|.$$

С другой стороны, в силу теоремы Хана — Банаха существует продолжение функционала f_H с H на X, сохраняющее норму, т. е. существует система коэффициентов $\tilde{\lambda}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), для которой

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \tilde{\lambda}_k f_k \right\| = \|f_H\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| \leqslant 1}} f(x).$$

Теорема 2.2.2 доказана.

Как мы увидим в следующих главах, базируясь на соотношениях (2.1) и (2.4), можно построить эффективные методы решения экстремальных задач теории приближения в конкретных функциональных пространствах. Впервые этот путь к точным результатам в задачах наилучшего приближения использовал С. М. Никольский [3].

§ 2.3. Соотношения двойственности в случае приближения выпуклым замкнутым множеством

Здесь мы получим существенное обобщение теоремы 2.2.1 на случай, когда аппроксимирующим множеством является произвольное выпуклое замкнутое множество и, в частности, произвольное (не обязательно конечномерное) подпространство.

При выводе двойственного соотношения для приближения выпуклым множеством ключевую роль будет играть теорема отделимости.

Основной результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 2.3.1. *Если F — выпуклое замкнутое*) множество линейного нормированного пространства X, то для любого элемента $x \in X$ справедливо соотношение*

$$\inf_{u \in F} \|x - u\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leqslant 1}} [f(x) - \sup_{u \in F} f(u)], \tag{2.7}$$

где X^* — пространство, сопряженное с X. При каждом $x \in X/F$ существует функционал $f_0 \in X^*$ с нормой $\|f_0\| = 1$, реализующий верхнюю грань в правой части (2.7).

Укажем весьма простую геометрическую интерпретацию соотношения (2.7) в случае, когда X есть R_2 — веществен-

---

*) Условие замкнутости множества F в теореме 2.3.1 несущественно; оно введено для некоторого упрощения дальнейших выкладок. Кроме того, аппроксимирующее множество обычно предполагается замкнутым.

ная плоскость с прямоугольными координатами x_1 и x_2. При этом будем иметь в виду, что в правой части (2.7) верхнюю грань можно брать только по функционалам $f \in X^*$ таким, что $\|f\| = 1$ и $f(x) \geq \sup\limits_{u \in F} f(u)$.

Линейный функционал $f \in R_2^*$ определяется вектором $a = \{a_1, a_2\} \in R_2$, причем $\|f\| = \|a\|_{R_2}$ и $f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ для любого $x = \{x_1, x_2\} \in R_2$. Если $\|f\| = 1$, то $|f(x)|$ совпадает с расстоянием точки x от прямой $l(f)$, на которой $f(x) = 0$, и для выпуклого замкнутого множества $F \subset R_2$

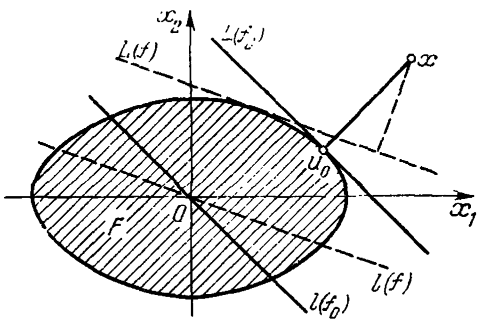

Рис. 1.

величина $f(x) - \sup\limits_{u \in F} f(u)$, если она неотрицательна, дает расстояние точки x ($x \notin F$) от ближайшей к ней опорной к F прямой $L(f)$ (рис. 1). Это расстояние в силу выпуклости F будет наибольшим, если проекция u_0 точки x на прямую $L(f) = L(f_0)$ будет принадлежать F, т. е. будет ближайшей к x точкой в множестве F.

Переходим к доказательству теоремы 2.3.1. Считая множество F фиксированным, введем обозначения:

$$E(x) \overset{\text{def}}{=} \inf_{u \in F} \|x - u\|.$$

$$N(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in \bar{S}^*} [f(x) - \sup_{u \in F} f(u)], \tag{2.8}$$

где $\bar{S}^*$ — замкнутый единичный шар в X^*, т. е.

$$\bar{S}^* = \{f : f \in X^*, \quad \|f\| \leq 1\}.$$

$E(x)$ и $N(x)$ являются неотрицательными числовыми функциями, заданными на X. Мы должны доказать, что

$$E(x) = N(x) \quad \forall x \in X. \tag{2.9}$$

Так как

$$f(x) - \sup_{u \in F} f(u) = \inf_{u \in F} [f(x) - f(u)] = \inf_{u \in F} f(x-u),$$

то для $x \in F$ функция $N(x)$, так же как и $E(x)$, обращается в нуль, и мы можем в дальнейшем считать, что $x \in X \setminus F$.

Неравенство $N(x) \leqslant E(x)$ почти тривиально. Действительно, если u_0 есть элемент наилучшего приближения для x в множестве F, т. е. $E(x) = \|x - u_0\|$, то

$$N(x) \leqslant \sup_{f \in S^*} [f(x) - f(u_0)] = \sup_{f \in S^*} f(x - u_0) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{f \in S^*} \|f\| \|x - u_0\| \leqslant \|x - u_0\| = E(x).$$

Если же элемент наилучшего приближения для x в F отсутствует, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $u_1 \in F$ такой, что

$$\|x - u_1\| < E(x) + \varepsilon.$$

Проводя те же оценки, получим

$$N(x) \leqslant \|x - u_1\| < E(x) + \varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то

$$N(x) \leqslant E(x). \tag{2.10}$$

Доказывая справедливость противоположного неравенства $E(x) \leqslant N(x)$, отметим сначала следующий простой, но полезный факт, немедленно вытекающий из определения нормы функционала.

Предложение 2.3.2. *Если* $f \in X^*$, *и* $\eta > 0$, *то*

$$\sup_{\|x\| < \eta} f(x) = \eta \|f\|.$$

В самом деле, для всех элементов x из X с нормой $\|x\| < \eta$ справедлива оценка

$$f(x) \leqslant \|f\| \|x\| < \eta \|f\|.$$

С другой стороны, в силу равенств

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} f(x) = \sup_{\|x\| < 1} f(x)$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент x_ε, $\|x_\varepsilon\| < 1$ такой, что

$$f(x_\varepsilon) > \|f\| - \frac{\varepsilon}{\eta}.$$

Положив $z_\varepsilon = \eta x_\varepsilon$, будем иметь

$$f(z_\varepsilon) = \eta f(x_\varepsilon) > \eta \|f\| - \varepsilon,$$

причем $\|z_\varepsilon\| < \eta$, так что ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ предложение 2.3.2 доказано.

Теперь, считая x фиксированным, $x \in X \setminus F$, и заметив, что $E(x) > 0$ (в силу замкнутости множества F), рассмотрим в пространстве X открытый шар

$$U(x, E(x)) = \{y\colon\ y \in X,\ \|y - x\| < E(x)\}$$

с центром в точке x и радиусом $E(x)$. Очевидно, шар $U(x, E(x))$ есть выпуклое тело, причем он не пересекается с множеством F, ибо если предположить существование элемента u_1 такого, что $u_1 \in F$ и $u_1 \in U(x, E(x))$, то будем иметь

$$E(x) \leqslant \|x - u_1\| < E(x),$$

что абсурдно.

Таким образом, к множествам F и $U(x, E(x))$ можно применить теорему отделимости, в силу которой существует ненулевой функционал $f \in X^*$ такой, что

$$f(u) \leqslant f(y) \quad \forall u \in F, \quad \forall y \in U(x, E(x)).$$

Так как $\|f\| \neq 0$, то, положив $f_1 = f/\|f\|$, получим функционал $f_1 \in X^*$ с нормой

$$\|f_1\| = 1, \tag{2.11}$$

который также разделяет множества F и $U(x, E(x))$: для всех $u \in F$ и всех $y \in U(x, E(x))$ выполняется неравенство

$$f_1(u) \leqslant f_1(y). \tag{2.12}$$

Переходя в левой части (2.12) к верхней грани по $u \in F$, а в правой — к нижней грани по $y \in U(x, E(x))$, получим соотношение

$$\sup_{u \in F} f_1(u) \leqslant \inf_{y \in U(x,\, E(x))} f_1(y). \tag{2.13}$$

Любой элемент $y \in U(x, E(x))$ можно представить в виде $y = x + z$, где $\|z\| = \|y - x\| < E(x)$; обратно, если $\|z\| < E(x)$, то элемент $y=x+z$, очевидно, принадлежит шару $U(x, E(x))$. Поэтому

$$\inf_{y\in U(x,E(x))} f_1(y)=\inf_{\|z\|<E(x)} f_1(x+z)=$$
$$=\inf_{\|z\|<E(x)} f_1(x-z)=f_1(x)-\sup_{\|z\|<E(x)} f_1(z)$$

и соотношение (2.13) можно переписать в виде

$$\sup_{u\in F} f_1(u)\leqslant f_1(x)-\sup_{\|z\|<E(x)} f_1(z). \tag{2.14}$$

Но в силу предложения 2.3.2 и равенства (2.11)

$$\sup_{\|z\|<E(x)} f_1(z)=E(x),$$

а потому, с учетом определения (2.8) и опять же равенства (2.11), из (2.14) будем иметь

$$E(x)\leqslant f_1(x)-\sup_{u\in F} f_1(u)\leqslant N(x). \tag{2.15}$$

Соотношения (2.10) и (2.15) дают (2.9).

Остается убедиться, что при каждом фиксированном $x\in X\setminus F$ найдется функционал $f_0\in X^*$ с нормой $\|f_0\|=1$, для которого

$$f_0(x)-\sup_{u\in F} f_0(u)=\sup_{f\in S^*}\left[f(x)-\sup_{u\in F} f(u)\right]=N(x). \tag{2.16}$$

Из определения верхней грани следует, что для каждого $n=1, 2, \ldots$ существует функционал $f_n\in S^*$ такой, что

$$N(x)-\frac{1}{n}<f_n(x)-\sup_{u\in F} f_n(u)\leqslant N(x),$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty}\left[f_n(x)-\sup_{u\in F} f_n(u)\right]=N(x). \tag{2.17}$$

Теперь нужно воспользоваться тем, что в пространстве X^* всякое ограниченное множество слабо компактно. Этот факт в случае, когда X сепарабельно (а в дальнейшем теорема 2.3.1 будет применяться только к сепарабельным пространствам), доказан в учебнике А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1], стр. 188; в общем случае доказательство этого утверждения можно найти, например, в книге Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [1], стр. 459.

Итак, фигурирующая в (2.17) последовательность $\{f_n\}$ из $\bar{S}_n^*$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что слабо сходится уже $\{f_n\}$, т. е. при любом $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет предел. Положив

$$f_0(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \tag{2.18}$$

получим заданный на X линейный функционал f_0, причем легко проверяется, что f_0, так же как и f_n, принадлежит шару $\bar{S}^*$.

Сопоставив (2.17) и (2.18), приходим к соотношению

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{u \in F} f_n(u) = f_0(x) - N(x). \tag{2.19}$$

Докажем, что для предельного функционала f_0 выполняется (2.16). Так как, очевидно,

$$f_0(x) - \sup_{u \in F} f_0(u) \leqslant N(x),$$

то надо лишь установить невозможность неравенства

$$\sup_{u \in F} f_0(u) > f_0(x) - N(x) \overset{\text{def}}{=} \gamma.$$

Но если

$$\sup_{u \in F} f_0(u) = \gamma_1 > \gamma,$$

а числа $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ выбраны из условия $\gamma_1 - \varepsilon_1 > \gamma + \varepsilon$, то найдется элемент $u_0 \in F$ такой, что $f_0(u_0) > \gamma_1 - \varepsilon_1$, а с другой стороны, в силу (2.19) для $n \geqslant n_\varepsilon$ будет $f_n(u_0) < \gamma + \varepsilon$. Следовательно, для всех $n \geqslant n_\varepsilon$

$$f_0(u_0) - f_n(u_0) > \gamma_1 - \varepsilon_1 - \gamma - \varepsilon > 0$$

в противоречии с (2.18).

Норма экстремального функционала f_0, удовлетворяющего (2.16), не может быть меньше единицы. В самом деле, если $\|f_0\| < 1$, то функционал $f_1 = \lambda f_0$, где $\lambda = 1/\|f_0\|$, очевидно, принадлежит шару S^* и

$$f_1(x) - \sup_{u \in F} f_1(u) = \lambda f_0(x) - \lambda \sup_{u \in F} f_0(u) = \lambda N(x) > N(x),$$

что невозможно.

Теорема 2.3.1 полностью доказана. Важным ее частным случаем является следующее утверждение, обобщающее теорему 2.2.1.

Теорема 2.3.3. *Если F — подпространство линейного нормированного пространства X, то для любого $x \in X$*

$$\inf_{u \in F} \|x-u\| = \sup_{\substack{f \in F^{\perp} \\ \|f\| \leq 1}} f(x), \tag{2.20}$$

где $F^{\perp}$ — множество функционалов $f \in X^*$ таких, что $f(u)=0$ $\forall u \in F$. Верхнюю грань в правой части (2.20) реализует некоторый функционал $f_0 \in F^{\perp}$ с нормой $\|f_0\|=1$.

Действительно, если $f \notin F^{\perp}$, то для некоторого $u' \in F$ будет $f(u')=\alpha \neq 0$, и так как $\lambda u' \in F$ при любом λ и $f(\lambda u')=\lambda\alpha$, то при каждом фиксированном x

$$f(x) - \sup_{u \in F} f(u) = -\infty.$$

Это значит, что при вычислении верхней грани по f в правой части (2.7) можно рассматривать только те функционалы f из $\bar{S}^*$, которые одновременно принадлежат и множеству $F^{\perp}$; но тогда (2.7) запишется в виде (2.20).

Достижимость верхней грани в (2.20) следует из соответствующего факта в теореме 2.3.1.

Ясно, что теорема 2.2.1 содержится в теореме 2.3.3, и мы могли отдельно ее не доказывать. Но когда речь идет о приближении конечномерным подпространством (а именно этот случай будет чаще всего иметь место в дальнейшем), то незачем для обоснования двойственных соотношений идти через теорему 2.3.1, если есть более простой путь.

§ 2.4. Критерии элемента наилучшего приближения, вытекающие из соотношений двойственности

Теоремы 2.3.1 и 2.3.3 позволяют указать общие критерии ближайшего элемента в выпуклом замкнутом множестве или в подпространстве.

Теорема 2.4.1. *Пусть F $(F \neq X)$ — замкнутое выпуклое множество линейного нормированного пространства X. Для того чтобы элемент $u_0 \in F$ был элементом наилучшего приближения в F для $x \in X \setminus F$, необходимо и достаточно существование функционала $f_0 \in X^*$ со следующими свойствами:*

1) $\|f_0\|=1$,
2) $\|x-u_0\|=f_0(x-u_0)$,
3) $f_0(u_0)=\sup\limits_{u\in F} f_0(u)$.

Доказательство. Пусть для элемента $u_0\in F$

$$\inf_{u\in F}\|x-u\|=\|x-u_0\| \tag{2.21}$$

и f_0 — функционал с нормой $\|f_0\|=1$, реализующий в соотношении (2.7) точную верхнюю грань. Тогда

$$\|x-u_0\|=f_0(x)-\sup_{u\in F} f_0(u). \tag{2.22}$$

Покажем, что функционал f_0 удовлетворяет условию 3) теоремы. Действительно, если предположить, что

$$f_0(u_0)<\sup_{u\in F} f_0(u),$$

и учесть оценку

$$f_0(x)-f_0(u_0)\leqslant\|f_0\|\|x-u_0\|=\|x-u_0\|,$$

то получим

$$\|x-u_0\|\geqslant f_0(x)-f_0(u_0)>f_0(x)-\sup_{u\in F} f_0(u)$$

в противоречии с (2.22). Таким образом,

$$\|x-u_0\|=f_0(x)-f_0(u_0)=f_0(x-u_0)$$

и необходимость условий 1) — 3) для функционала f_0 установлена.

Обратно, пусть для элементов $x\in X\setminus F$ и $u_0\in F$ нашелся функционал $f_0\in X^*$, удовлетворяющий условиям 1) — 3). Тогда для любого элемента $u\in F$ будем иметь

$$\|x-u_0\|=f_0(x-u_0)=f_0(x-u)+[f_0(u)-f_0(u_0)].$$

Так как разность в квадратных скобках ввиду условия 3) неположительна, то

$$\|x-u_0\|\leqslant f_0(x-u)\leqslant\|f_0\|\|x-u\|\leqslant\|x-u\|,$$

т. е. элемент u_0 удовлетворяет (2.21). Теорема 2.4.1 доказана.

Теорема 2.4.2. *Пусть F — подпространство линейного нормированного пространства X. Для того чтобы элемент $u_0\in F$ доставлял наилучшее приближение в F элементу $x\in X\setminus F$, необходимо и достаточно существование* *функционала* $f_0 \in X^*$, *удовлетворяющего следующим условиям:*

1) $\|f_0\| = 1$,
2) $\|x - u_0\| = f_0(x)$,
3) $f_0(u) = 0 \quad \forall u \in F$.

Действительно, если

$$\inf_{u \in F} \|x - u\| = \|x - u_0\| \qquad (u_0 \in F) \tag{2.23}$$

и функционал f_0 с нормой $\|f_0\| = 1$ реализует верхнюю грань в (2.20), то

$$\|x - u_0\| = f_0(x)$$

и для f_0 условия 1)—3) выполнены.

Обратно, если для функционала f_0 из X^* выполняются соотношения 1)—3), то для любого $u \in F$

$$\|x - u\| \geq f_0(x - u) = f_0(x) = \|x - u_0\|,$$

т. е. имеет место (2.23).

Заметим, что если подпространство F конечномерно, то теорему 2.4.2 мы могли вывести, базируясь на соотношении (2.1).

§ 2.5. Двойственные соотношения для задач наилучшего приближения в пространствах $L_p(a, b)$ и $C[a, b]$

$C[a, b]$, как обычно, будет обозначать пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

$L_p(a, b) \quad (1 \leq p < \infty,\ L_1(a, b) = L(a, b))$ есть пространство суммируемых (т. е. интегрируемых по Лебегу) на (a, b) в p-й степени функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_{L_p(a, b)} = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p},$$

а $L_\infty(a, b) = M(a, b)$ — пространство измеримых существенно ограниченных на (a, b) функций $x(t)$, норма в котором задается равенством

$$\|x\|_{L_\infty(a, b)} = \|x\|_{M(a, b)} = \sup_{a \leq t < b} \mathrm{vrai}\, |x(t)|.$$

Несмотря на существенное различие в задании нормы в пространствах $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и $L_\infty(a, b)$, многие факты, как мы увидим ниже, будут формулироваться одновременно для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Это связано с тем, что для $x(t) \in M(a, b)$ (см., например, С. М. Никольский, [4], стр. 14)

$$\|x\|_{M(a, b)} = \lim_{p \to \infty} \|x\|_{L_p(a, b)},$$

т. е. $M(a, b)$ есть предельный случай пространства $L_p(a, b)$.

Посмотрим сначала, как в пространствах $C[a, b]$ и $L_p(a, b)$ реализуется общее соотношение двойственности (2.1) для наилучшего приближения линейными комбинациями фиксированной конечной системы элементов.

Что касается $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то мы могли бы, записывая правую часть (2.1) для этого случая, сразу воспользоваться известными в функциональном анализе теоремами об общем виде линейных ограниченных функционалов в $L(a, b)$ и $L_p(a, b)$ $(1 < p < \infty)$. Мы однако изберем иной путь — через теорему 2.2.2, — который потребует некоторых (впрочем, весьма небольших) выкладок, но зато позволит получить нужный результат также и для $L_\infty(a, b)$.

Пусть $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ — фиксированные функции из $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Положив

$$f_k(y) = \int_a^b x_k(t)\, y(t)\, dt \qquad \left(y(t) \in L_{p'}(a, b);\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right),$$

мы зададим в пространстве $L_{p'}(a, b)$ n линейных ограниченных функционалов f_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Действительно, используя при $1 < p < \infty$ неравенство Гельдера (см. (Д.1) *)), а при $p = 1$ и $p = \infty$ просто заменяя $|y(t)|$ или соответственно $|x_k(t)|$ нормой в $M(a, b)$, получим

$$|f_k(y)| \leqslant \int_a^b |x_k(t)\, y(t)|\, dt \leqslant \|x_k\|_{L_p(a, b)} \|y\|_{L_{p'}(a, b)}.$$

Таким образом, $f_k \in L^*_{p'}(a, b)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

---

*) (Д.1), (Д.2), … — номера формул из Дополнения в конце книги.

Если $x(t)$ — любая функция из $L_p(a, b)$, то, полагая

$$f(y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \qquad (y \in L_{p'}(a, b)),$$

мы определим на $L_{p'}(a, b)$ линейный ограниченный функционал f, $f \in L^*_{p'}(a, b)$. Пусть

$$\varphi_\lambda = f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k, \tag{2.24}$$

где $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ — произвольный набор числовых коэффициентов. Ясно, что $\varphi_\lambda \in L^*_{p'}(a, b)$, причем

$$\varphi_\lambda(y) = \int_a^b \left[x(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k(t)\right] y(t)\, dt \qquad \forall y(t) \in L_{p'}(a, b).$$

Вычисляя норму функционала φ_λ и пользуясь при этом доказанным в Дополнении соотношением (Д.12), будем иметь

$$\|\varphi_\lambda\| = \sup_{\|y\|_{L_{p'}(a, b)} \leq 1} |\varphi_\lambda(y)| = \\ = \sup_{\|y\|_{L_{p'}(a, b)} \leq 1} \left| \int_a^b \left[x(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k(t)\right] y(t)\, dt \right| = \\ = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|_{L_p(a, b)}.$$

С учетом (2.24) получаем, что для любых λ_k имеет место равенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \right\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|_{L_p(a, b)}$$

и теорема 2.2.2 приводит к соотношению

$$\min_{\lambda_k} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|_{L_p(a, b)} = \min_{\lambda_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \right\| = \\ = \sup_{\substack{\|y\|_{L_{p'}(a, b)} \leq 1 \\ f_k(y) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, n}} f(y).$$

Если учесть представление функционалов f_k и f, то окончательно получим

$$\min_{\lambda_k} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k(t) \right\|_{L_p(a,b)} = \sup_{\substack{\|y\|_{L_{p'}(a,b)} \leq 1 \\ y \perp x_k, \\ k=1, \ldots, n}} \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt, \tag{2.25}$$

где $y \perp x_k$ означает, что

$$\int_a^b x_k(t)\, y(t)\, dt = 0.$$

Отметим частные случаи соотношения (2.25), соответствующие случаям $p = 1$ и $p = \infty$:

$$\min_{\lambda_k} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k(t) \right\|_{L(a,b)} = \sup_{\substack{\|y\|_{M(a,b)} \leq 1 \\ y \perp x_k,\ k=1, \ldots, n}} \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt, \tag{2.26}$$

$$\min_{\lambda_k} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k(t) \right\|_{M(a,b)} = \sup_{\substack{\|y\|_{L(a,b)} \leq 1 \\ y \perp x_k,\ k=1, \ldots, n}} \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \tag{2.27}$$

При $n = 1$ и $x_1(t) \equiv 1$ равенство (2.25) запишется в виде

$$\min_{\lambda} \| x(t) - \lambda \|_{L_p(a,b)} = \sup_{\substack{\|y\|_{L_{p'}(a,b)} \leq 1 \\ \int_a^b y(t)\, dt = 0}} \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \tag{2.28}$$

Рассматривая задачу наилучшего приближения в $C[a, b]$, мы будем исходить из самого общего случая, когда аппроксимирующим множеством является замкнутое выпуклое множество; двойственность для приближения подпространством получим как частный случай.

В учебниках по функциональному анализу доказывается (см., например, А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин [1], стр. 347), что всякий функционал $f \in C^*[a, b]$ представим в виде интеграла Стилтьеса:

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dg(t) \qquad \forall x(t) \in C[a, b], \tag{2.29}$$

где $g(t)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на $[a, b]$, причем

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) = \|f\|.$$

Поэтому, если F — некоторое множество из $C[a, b]$, то для любой функции $x(t) \in C[a, b]$

$$\sup_{\substack{f \in C^*[a, b] \\ \|f\| \leqslant 1}} \left[f(x) - \sup_{u \in F} f(u)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) \leqslant 1} \left[\int_a^b x(t)\,dg(t) - \sup_{u \in F} \int_a^b u(t)\,dg(t)\right]. \tag{2.30}$$

С другой стороны, любой функции $g(t)$ с вариацией $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) \leqslant 1$ соответствует задаваемый равенством (2.29) функционал $f \in C^*[a, b]$, причем (см. (Д.15))

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dg(t)\right| \leqslant \|x\|_{C[a, b]} \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g),$$

так что $\|f\| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)$. Это значит, что в (2.30) на самом деле имеет место знак равенства.

Таким образом, теоремы 2.3.1 и 2.3.3 для случая $X = C[a, b]$ получают следующую формулировку.

Предложение 2.5.1. *Если F — выпуклое замкнутое множество в $C[a, b]$, то для любой функции $x(t) \in C[a, b]$*

$$\inf_{u \in F} \|x(t) - u(t)\|_{C[a, b]} =$$
$$= \sup_{\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) \leqslant 1} \left(\int_a^b x(t)\,dg(t) - \sup_{u \in F} \int_a^b u(t)\,dg(t)\right). \tag{2.31}$$

В частности, если F — подпространство, то

$$\inf_{u \in F} \| x(t) - u(t) \|_{C[a, b]} = \sup_{\substack{g \in F^{\perp}, \\ \bigvee_a^b (g) \leqslant 1}} \int_a^b x(t)\, dg(t), \tag{2.32}$$

где $F^{\perp}$ — множество функций $g(t)$ с ограниченным изменением на $[a, b]$, удовлетворяющих условию

$$\int_a^b u(t)\, dg(t) = 0 \quad \forall u(t) \in F.$$

Существуют функции $g(t)$ с вариацией на $[a, b]$, равной единице, реализующие в (2.31) и (2.32) точную верхнюю грань.

Разумеется, что в случае конечномерного подпространства F вторую часть сформулированного утверждения мы могли вывести из теоремы 2.2.1.

З а м е ч а н и е. Соотношения (2.31) и (2.32) имеют место при $[a, b] = [0, 2l]$ и в пространстве C_{2l} непрерывных на всей оси $2l$-периодических функций, ибо рассуждения, которыми они доказаны, в равной степени справедливы и для функций $x(t) \in C[0, 2l]$, удовлетворяющих условию $x(0) = x(2l)$ и, следовательно, допускающих непрерывное продолжение с периодом $2l$ на всю ось.

Укажем конкретную реализацию теорем 2.3.1 и 2.3.3 в случае $X = L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Известно (Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], стр. 193), что любой функционал $f \in L_p^*(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ задается равенством

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \quad \forall x(t) \in L_p(a, b), \tag{2.33}$$

где $y(t) \in L_{p'}(a, b)$ $(1/p + 1/p' = 1)$, причем

$$\| f \| = \| y \|_{L_{p'}(a, b)}. \tag{2.34}$$

Верно и обратное: каждая функция $y(t) \in L_{p'}(a, b)$ определяет равенством (2.33) функционал $f \in L_p^*(a, b)$, удовлетворяющий условию (2.34). Поэтому из теорем 2.3.1 и 2.3.3 вытекает

Предложение 2.5.2. *Если F — выпуклое замкнутое множество в $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то для любой функции $x(t) \in L_p(a, b)$*

$$\inf_{u \in F} \|x(t) - u(t)\|_{L_p(a, b)} =$$

$$= \sup_{\|y\|_{L_{p'}(a, b)} \leqslant 1} \left(\int_a^b x(t) y(t)\, dt - \sup_{u \in F} \int_a^b u(t) y(t)\, dt \right) \quad (2.35)$$

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

В частности, если F — подпространство, то

$$\inf_{u \in F} \|x(t) - u(t)\|_{L_p(a, b)} = \sup_{\substack{y \in F^{\perp}, \\ \|y\|_{L_{p'}(a, b)} \leqslant 1}} \int_a^b x(t) y(t)\, dt \qquad (2.36)$$

$$(1 \leqslant p < \infty, \ 1/p + 1/p' = 1),$$

где $F^{\perp}$ — множество функций $y(t) \in L_{p'}(a, b)$, для которых

$$\int_a^b u(t) y(t)\, dt = 0 \quad \forall u(t) \in F.$$

Верхняя грань в (2.35) и (2.36) достигается на некоторых функциях $y(t)$ из $L_{p'}(a, b)$ с нормой $\|y\|_{L_{p'}(a, b)} = 1$.

Ясно, что при $(a, b) = (0, 2l)$ утверждения предложения 2.5.2 справедливы и для соответствующих пространств $2l$-периодических функций.

ГЛАВА 3

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФИКСИРОВАННОГО ЭЛЕМЕНТА В ПРОСТРАНСТВАХ C И L_p

Эта глава в общем плане книги имеет вспомогательный характер. В ней будет доказано несколько фактов, связанных с существованием, единственностью и характеристическими свойствами элемента наилучшего приближения в пространствах C и L_p. Основное внимание уделено критериям элемента наилучшего приближения, которые будут позже использованы при решении других экстремальных задач.

Рассмотрен также важный для дальнейшего пример на вычисление наилучшего приближения в метрике L функций Бернулли.

Наряду с введенными в § 2.5 пространствами $C[a, b]$ и $L_p(a, b)$ будут рассматриваться пространства 2π-периодических функций:

C — пространство непрерывных на всей оси периода 2π функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

L_p ($1 \leqslant p < \infty$, $L_1 = L$) — пространство 2π-периодических суммируемых на $(0, 2\pi)$ в p-й степени функций $f(t)$, норма в котором определена равенством

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

(интеграл везде понимается в смысле Лебега).

$M = L_\infty$ — пространство 2π-периодических существенно ограниченных на всей оси функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_M = \|f\|_{L_\infty} = \sup_t \operatorname{vrai} |f(t)|.$$

Ясно, что если f непрерывна, то $\|f\|_M = \|f\|_C$.

Условимся еще вместо $\|f\|_{L_p}$ писать $\|f\|_p$, имея в виду, что $\|f\|_1 = \|f\|_L$, $\|f\|_\infty = \|f\|_M$.

§ 3.1. О существовании и единственности элемента наилучшего приближения в C и L_p

Заметим сразу, что, как следует из общих предложений 1.3.1 и 1.3.2, в пространствах C и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, равно как и в пространствах $C[a, b]$ и $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, любое локально компактное множество и, в частности, любое конечномерное подпространство является множеством существования.

В пространствах C и L_p периодических функций естественным аппаратом приближения являются тригонометрические полиномы. В дальнейшем через $T_n(t)$ мы всегда будем обозначать тригонометрический полином

$$T_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \tag{3.1}$$

порядка $n-1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Система функций

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos(n-1)t, \sin(n-1)t, \tag{3.2}$$

линейной комбинацией которых является $T_n(t)$, линейно независима. Действительно, если

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \equiv 0,$$

то, умножая обе части тождества последовательно на функции системы (3.2) и интегрируя по периоду $(0, 2\pi)$, обнаружим, что все коэффициенты α_k и β_k равны нулю.

Таким образом, при фиксированном n множество полиномов (3.1) является подпространством (в C или в L_p) размерности $2n-1$. Мы его будем обозначать F_{2n-1}^T, а для наилучшего приближения функции $f \in X$, где X есть C или L_p, подпространством F_{2n-1}^T введем традиционное обозначение:

$$E_n(f)_X = E\left(f, F_{2n-1}^T\right)_X = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_X.$$

Из общего утверждения 1.3.1 вытекает

Предложение 3.1.1. *Для любой функции $f(t) \in X$, где X есть C или L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, в подпространстве F_{2n-1}^T*

существует полином наилучшего приближения, т. е. существует тригонометрический полином $T_n^*(t) = T_n^*(f, t)$ порядка $n-1$ такой, что

$$E_n(f)_X = \|f - T_n^*\|_X.$$

В пространствах $C[a, b]$ и $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ функций, заданных на конечном промежутке, одним из простейших и удобных аппаратов приближения являются алгебраические многочлены

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.3}$$

При фиксированном n множество многочленов (3.3) в силу линейной независимости функций $1, t, t^2, \ldots, t^n$ является подпространством размерности $n+1$. В силу 1.3.1 справедливо

Предложение 3.1.2. *Для любой функции $f(t) \in X[a, b]$, где $X[a, b]$ есть $C[a, b]$ или $L_p(a, b)$, среди всех многочленов* (3.3) *при каждом фиксированном n существует многочлен $P_n^*(t)$ наилучшего приближения, для которого*

$$\inf_{P_n} \|f - P_n\|_{X[a, b]} = \|f - P_n^*\|_{X[a, b]}.$$

Вопрос о единственности элемента наилучшего приближения не играет роли при решении тех задач, которым посвящено основное содержание книги, и мы не будем в него углубляться. Отметим только, что к пространству L_p $(1 < p < \infty)$ применимо предложение 1.3.3. Действительно, знак равенства в соотношении

$$\|f + \varphi\|_p \leqslant \|f\|_p + \|\varphi\|_p,$$

являющемся сокращенной записью неравенства Минковского, при $1 < p < \infty$ возможен лишь при условии $f(t) = c\varphi(t)$ $(c > 0)$ (см. Дополнение), поэтому пространство L_p $(1 < p < \infty)$ строго нормировано, а это, как мы уже знаем, равносильно строгой выпуклости нормы.

Таким образом, в любом подпространстве пространства L_p или $L_p(a, b)$ при $1 < p < \infty$ элемент наилучшего приближения единствен.

Что касается пространств C и L, то норма их не является строго выпуклой. Например, в пространстве C, положив $f(t)=\cos t$, $\varphi(t)=\cos 2t$, будем иметь

$$\|f\|_C=\|\varphi\|_C=1, \qquad f(t)\not\equiv\varphi(t),$$

однако при всех α $(0<\alpha<1)$

$$\|\alpha f+(1-\alpha)\varphi\|_C=\alpha f(0)+(1-\alpha)\varphi(0)=1.$$

Впрочем, для многих важных подпространств, в частности для подпространства F^T_{2n-1} тригонометрических полиномов, единственность элемента наилучшего приближения как в C, так и в L имеет место, однако это уже связано со спецификой самих подпространств.

В следующем параграфе единственность тригонометрического полинома наилучшего приближения для функций пространства C будет выведена как следствие из теоремы Чебышева.

Аналогично обстоит дело с проблемой единственности и в пространствах $C[a, b]$ и $L(a, b)$, норма которых не является строго выпуклой. Заметим, что среди многочленов (3.3) при фиксированном n для любой функции $f\in C[a, b]$ многочлен наилучшего приближения единствен (см. ниже предложение 3.2.4).

§ 3.2. Теоремы Чебышева и Валле-Пуссена

Изложение вопросов, связанных с характеристическими свойствами элемента наилучшего приближения, мы начнем со знаменитой теоремы Чебышева о критерии многочлена наилучшего равномерного приближения. Хотя эта теорема может быть выведена (совсем не просто, впрочем) из общих соотношений двойственности, мы приведем здесь ее традиционное элементарное доказательство, причем как для периодического, так и для непериодического случаев.

Теорема 3.2.1 (П. Л. Чебышев [1]). *Тригонометрический полином $\tilde{T}_n(t)$ доставляет функции $f(t)\in C$ наилучшее равномерное приближение среди всех тригонометрических полиномов порядка $n-1$ в том и только в том случае, когда на периоде $0\le t<2\pi$ существует $2n$ точек x_k:*

$$0\le x_1<x_2<\ldots<x_{2n}<2\pi,$$

в которых разность $\Delta(t)=f(t)-\tilde{T}_n(t)$ достигает по абсолютной величине максимального значения $\|\Delta\|=\|\Delta\|_C$, *поочередно меняя знак, т. е.*

$$\Delta(x_1) = -\Delta(x_2) = \Delta(x_3) = -\Delta(x_4) = \ldots = -\Delta(x_{2n}) = \pm\|\Delta\|. \tag{3.4}$$

Докажем необходимость условий теоремы. Пусть $\tilde{T}_n(t)$ — полином наилучшего равномерного приближения для $f \in C$, т. е.

$$\|f - \tilde{T}_n\|_C = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_C = E_n(f)_C \overset{\text{def}}{=} d. \tag{3.5}$$

Ясно, что разность $\Delta(t) = f(t) - \tilde{T}_n(t)$ имеет нули, ибо иначе $\tilde{T}_n$ не доставлял бы функции f наилучшего приближения. Заметим далее, что в силу периодичности функций условия теоремы инвариантны относительно сдвига аргумента, т. е. если $2n$ точек x_k, обладающих указанными свойствами, существуют на $[0, 2\pi)$, то $2n$ точек $y_k = x_k + a$ обладают этими свойствами на промежутке $[a, a+2\pi)$, где a — любое число, и наоборот. Поэтому мы можем считать, что $\Delta(0) = \Delta(2\pi) = 0$.

Обозначим через e множество точек промежутка $(0, 2\pi)$, в которых разность $\Delta(t)$ принимает значения $\pm d$. Среди точек множества e будем различать e^+-точки, в которых $\Delta(t) = d$, и e^--точки, в которых $\Delta(t) = -d$. Множество e содержит как e^+, так и e^--точки, т. е. график $\Delta(t)$ обязательно касается обеих прямых $y = \pm d$. Действительно, если бы было, например, $\Delta(t) < d$ для всех t, то для полинома $T_n(\varepsilon, t) = \tilde{T}_n(t) + \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ было бы $\|f - T_n(\varepsilon)\|_C < d$; что невозможно в силу (3.5).

На промежутке $(0, 2\pi)$ можно выбрать точки z_k $(0 = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_m < 2\pi)$ так, что будут выполняться следующие условия:

1) $\Delta(z_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$;

2) каждый из отрезков

$$\sigma_1 = [z_0, z_1],\ \sigma_2 = [z_1, z_2],\ \ldots,\ \sigma_m = [z_{m-1}, z_m],\ \sigma_{m+1} = [z_m, 2\pi] \tag{3.6}$$

содержит хотя бы одну e-точку, причем все e-точки, лежащие на одном отрезке, одного знака: либо e^+-точки, либо e^--точки;

3) знаки e-точек на соседних отрезках σ_k и σ_{k+1} $(k = 1, 2, \ldots, m)$ противоположны (рис. 2).

Чтобы доказать необходимость условий теоремы, достаточно установить, что число отрезков (3.6) не меньше чем $2n$, т. е. что $(m+1)/2 \geq n$.

Положим $\nu = [(m+1)/2]$ ($[\alpha]$ — целая часть числа α) и покажем, что $\nu \geq n$.

Рассуждаем от противного. Пусть $\nu < n$, т. е. $\nu \leq n-1$, и

$$\tau_\nu(t) = \tau_\nu(\lambda, t) = \lambda \sin\frac{t-z_0}{2}\sin\frac{t-z_1}{2} \ldots \sin\frac{t-z_{2\nu-1}}{2}. \qquad (3.7)$$

Так как

$$\sin\frac{t-z_i}{2}\sin\frac{t-z_{i+1}}{2} = \alpha\cos t + \beta\sin t + \gamma,$$

где α, β и γ — некоторые числа, то $\tau_\nu(t)$, как произведение ν тригонометрических полиномов первого порядка,

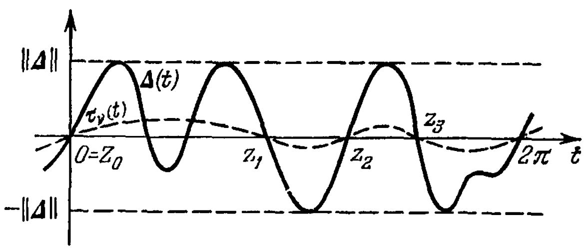

Рис. 2.

является тригонометрическим полиномом порядка ν. Поэтому, кроме точек $z_0, z_1, \ldots z_{2\nu-1}$, полином $\tau_\nu(t)$ на полуинтервале $[0, 2\pi)$ других нулей не имеет, причем z_k — единственные точки, в которых $\tau_\nu(t)$ меняет знак.

Пусть σ^+ — объединение отрезков σ_k из (3.6), содержащих e^+-точки, а σ^- — объединение отрезков из (3.6), которые содержат e^--точки. В силу непрерывности найдется положительное число $h > 0$ такое, что

$$-d+h \leq \Delta(t) \leq d \qquad (t \in \sigma^+), \qquad (3.8)$$
$$-d \leq \Delta(t) \leq d-h \qquad (t \in \sigma^-). \qquad (3.9)$$

Теперь выберем в (3.7) множитель λ по знаку и величине так, чтобы выполнялись соотношения

$$\operatorname{sign}\Delta(t) = \operatorname{sign}\tau_\nu(t) \qquad (t \in e), \qquad (3.10)$$
$$\max_{0\leq t\leq 2\pi} |\tau_\nu(\lambda, t)| < h/2. \qquad (3.11)$$

По предположению, $\nu \leqslant n-1$, поэтому функция $\tilde{T}_n(t) + \tau_\nu(t)$ есть также тригонометрический полином порядка $n-1$, и мы получим противоречие, если окажется, что

$$\|f-(\tilde{T}_n+\tau_\nu)\|_C = \|\Delta-\tau_\nu\|_C < d. \qquad (3.12)$$

Пусть, например, $\sigma_k \subset \sigma^+$. Тогда ввиду (3.10) $\tau_\nu(t)>0$ во внутренних точках отрезка σ_k, а так как в точках z_k не только $\tau_\nu(t)$, но и $\Delta(t)$ обращается в нуль, то в силу (3.8) и (3.11) разность $\Delta(t)-\tau_\nu(t)$ в каждой точке $t \in \sigma_k$ по абсолютной величине строго меньше d и, значит,

$$\max_{t \in \sigma_k} |\Delta(t)-\tau_\nu(t)| < d. \qquad (3.13)$$

Справедливость такого неравенства для $\sigma_k \in \sigma^-$ совершенно аналогичным образом вытекает из (3.9), (3.10), (3.11) и того факта, что $\Delta(z_k)=\tau_\nu(z_k)=0$. Таким образом, неравенство (3.13) должно выполняться на каждом промежутке σ_k $(k=1, 2, \ldots, m)$, что равносильно (3.12). Необходимость доказана.

Достаточность условий теоремы Чебышева устанавливается гораздо проще. Надо доказать, что если для полинома $\tilde{T}_n(t)$ выполнены эти условия, то для любого полинома $T_n(t)$ будет

$$\|f-T_n\|_C \geqslant \|f-\tilde{T}_n\|_C = \|\Delta\|.$$

Предположив, что это не так, т. е. что для некоторого полинома $T_n(t)$

$$\|f-T_n\|_C < \|\Delta\|, \qquad (3.14)$$

рассмотрим тригонометрический полином $S_n(t)=T_n(t)-\tilde{T}_n(t)$ $(S_n(t)\not\equiv 0)$, который запишем в виде

$$S_n(t)=[f(t)-\tilde{T}_n(t)]-[f(t)-T_n(t)].$$

Разность в первых квадратных скобках в точках x_k, о которых говорится в условии теоремы, принимает значения $\pm\|\Delta\|$, поочередно меняя знак. Поэтому ввиду (3.14), предполагая для определенности, что $\Delta(x_1)>0$, будем иметь

$$\operatorname{sign} S_n(x_k)=\operatorname{sign}\Delta(x_k) \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n).$$

Но тогда с учетом (3.4) полином $S_n(t)$ должен на периоде $[0, 2\pi)$ иметь по меньшей мере $2n-1$ нулей, что для нетривиального тригонометрического полинома порядка $n-1$ невозможно.

Теорема 3.2.1 доказана.

В качестве следствия из теоремы Чебышева получаем

Предложение 3.2.2. *Для каждой функции $f \in C$ тригонометрический полином наилучшего приближения (фиксированного порядка) единствен.*

В самом деле, пусть

$$E_n(f)_C = \|f - \tilde{T}_n\|_C = \|f - T_n^*\|_C.$$

Тогда в силу 1.2.3 полином $\frac{1}{2}[\tilde{T}_n(t) + T_n^*(t)]$ также доставляет наилучшее приближение функции f, и по теореме Чебышева существует $2n$ точек x_k $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$ на периоде, в которых

$$[f(x_k) - \tilde{T}_n(x_k)] + [f(x_k) - T_n^*(x_k)] = \pm 2E_n(f)_C \quad (3.15)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Каждая из квадратных скобок по абсолютной величине не превосходит $E_n(f)_C$, и потому равенства (3.15) возможны, лишь если

$$f(x_k) - \tilde{T}_n(x_k) = f(x_k) - T_n^*(x_k) = \pm E_n(f)_C,$$

т. е.

$$\tilde{T}_n(x_k) = T_n^*(x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Остается заметить, что тригонометрические полиномы порядка $n-1$, совпадающие более чем в $(2n-2)$-х точках на периоде, совпадают тождественно.

Критерий, аналогичный теореме 3.2.1, имеет место и в пространстве $C[a, b]$.

Теорема 3.2.3 (П. Л. Чебышева [1]). *Алгебраический многочлен*

$$\tilde{P}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{\alpha}_k t^k$$

доставляет функции $f \in C[a, b]$ наилучшее равномерное приближение на $[a, b]$ среди всех многочленов степени n в том и только в том случае, если существуют $n+2$ точки x_k:

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \leqslant b,$$

в которых разность $\Delta(t)=f(t)-\tilde{P}_n(t)$ принимает значения $\pm\|\Delta\|_{C[a,b]}$, поочередно меняя знак.

Доказательство необходимости проводится по схеме доказательства теоремы 3.2.1, исключая, разумеется, соображения, связанные с периодичностью.

Следует ввести в рассмотрение множество e точек отрезка $[a, b]$, в которых разность $\Delta(t)$ принимает значения $\pm\|\Delta\|_{C[a,b]}$, выделить отрезки

$$[a, z_1],\ [z_1, z_2],\ \ldots,\ [z_m, b]; \qquad \Delta(z_k)=0 \quad (k=1, 2, \ldots, m),$$

содержащие e-точки только одного знака, причем знак e-точек меняется от отрезка к отрезку, и убедиться, что число этих отрезков $\geqslant n+2$. Читатель, разобравший доказательство теоремы 3.2.1, без труда проведет самостоятельно все выкладки, связанные с рассуждением от противного и построением поправки

$$q(t)=q(\lambda, t)=\lambda(t-z_1)(t-z_2)\ldots(t-z_m)$$

к многочлену $\tilde{P}_n(t)$.

Достаточность доказывается так же, как и в теореме 3.2.1, с использованием того факта, что нетривиальный алгебраический многочлен степени n не может иметь более чем n нулей.

Из теоремы 3.2.3, аналогично периодическому случаю, выводится

Предложение 3.2.4. *Для каждой функции $f\in C[a, b]$ алгебраический многочлен наилучшего приближения (фиксированной степени) единствен.*

Для оценки снизу наилучшего равномерного приближения бывают полезны следующие теоремы.

Теорема 3.2.5 (Валле-Пуссен [1]). *Пусть $f(t)\in C$. Если для некоторого тригонометрического полинома $T_n^*(t)$ порядка $n-1$ на периоде $[0, 2\pi)$ существуют $2n$ точек x_k:*

$$0\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{2n}<2\pi,$$

в которых разность $\Delta(t)=f(t)-T_n^*(t)$ принимает значения с чередующимися знаками:

$$\operatorname{sign}\Delta(x_k)=-\operatorname{sign}\Delta(x_{k+1})\neq 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n-1),$$

то

$$E_n(f)_C\geqslant\min_{1\leqslant k\leqslant 2n}|\Delta(x_k)|.$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что

$$E_n(f)_C < \min_{1\leqslant k\leqslant 2n} |\Delta(x_k)| \stackrel{\text{def}}{=} \eta.$$

Если $\tilde{T}_n(t)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения для f, то

$$\|f-\tilde{T}_n\|_C = E_n(f)_C < \eta$$

и, в частности,

$$|f(x_k)-\tilde{T}_n(x_k)| < \eta \leqslant |f(x_k)-T_n^*(x_k)| \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n). \tag{3.16}$$

Рассмотрим разность

$$S_n(t)=\tilde{T}_n(t)-T_n^*(t)=\Delta(t)-[f(t)-\tilde{T}_n(t)]. \tag{3.17}$$

Из (3.16) и (3.17) следует, что

$$\operatorname{sign} S_n(x_k)=\operatorname{sign}\Delta(x_k) \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n),$$

и тригонометрический многочлен $S_n(t)$ порядка $n-1$ должен в силу условия теоремы иметь на $[0, 2\pi)$ по меньшей мере $2n-1$ нулей, что невозможно, ибо ввиду (3.16) $S_n(t)\not\equiv 0$.

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 3.2.6 (Валле-Пуссен [1]). *Пусть $f\in C[a, b]$. Если для некоторого алгебраического многочлена $P_n^*(t)$ степени n существуют $n+2$ точки*

$$a\leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}\leqslant b,$$

в которых разность $\Delta(t)=f(t)-P_n^*(t)$ принимает чередующиеся по знаку значения, то

$$\inf_{P_n}\|f-P_n\|_{C[a, b]} \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n+2} |\Delta(x_k)|.$$

§ 3.3. Критерии элемента наилучшего приближения в L_p $(1\leqslant p<\infty)$ в случае приближения подпространством

Заметим сразу, что хотя L_p у нас есть пространство 2π-периодических функций, все рассуждения и результаты этого параграфа не связаны с периодичностью, так что под L_p можно понимать и $L_p(0, 2\pi)$.

Рассматривая сначала случай $1 < p < \infty$, докажем следующую теорему.

Теорема 3.3.1. *Пусть F — фиксированное подпространство в L_p $(1 < p < \infty)$. Для того чтобы функция $\varphi_0 \in F$ доставляла функции $f \in L_p$ наилучшее приближение в подпространстве F, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \, |f(t) - \varphi_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign}[f(t) - \varphi_0(t)] \, dt = 0 \qquad \forall \varphi \in F. \tag{3.18}$$

Доказательство. Мы можем считать, что $f \notin F$. Пусть $\varphi_0(t)$ — функция наилучшего приближения для f в подпространстве F. В силу предложения 2.5.2 и, в частности, соотношения (2.36) существует функция $h_0(t) \in L_{p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$ с нормой $\|h_0\|_{p'} = 1$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} h_0(t) \varphi(t) \, dt = 0 \quad \forall \varphi \in F \tag{3.19}$$

и

$$\|f - \varphi_0\|_p = \int_0^{2\pi} f(t) h_0(t) \, dt = \int_0^{2\pi} [f(t) - \varphi_0(t)] h_0(t) \, dt. \tag{3.20}$$

Применяя неравенство Гельдера, можем написать

$$\int_0^{2\pi} (f - \varphi_0) h_0 \, dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t) - \varphi_0(t)| \, |h_0(t)| \, dt \leqslant$$
$$\leqslant \|f - \varphi_0\|_p \|h_0\|_{p'} = \|f - \varphi_0\|_p, \tag{3.21}$$

причем в силу (3.20) везде здесь должен быть знак равенства. Это означает (§ Д. 1), что (все выписанные ниже соотношения справедливы почти всюду)

$$|h_0(t)| = \alpha \, |f(t) - \varphi_0(t)|^{p-1}, \tag{3.22}$$

где α — положительная константа. Кроме того, из равенства

$$\int_0^{2\pi} (f - \varphi_0) h_0 \, dt = \int_0^{2\pi} |f - \varphi_0| \, |h_0| \, dt$$

следует, что

$$[f(t) - \varphi_0(t)] h_0(t) \geqslant 0. \tag{3.23}$$

В силу (3.22) множество точек, в которых обращается в нуль только один из сомножителей в левой части (3.23), имеет нулевую меру, и потому из (3.23) вытекает соотношение

$$\operatorname{sign} h_0(t) = \operatorname{sign}[f(t) - \varphi_0(t)]. \qquad (3.24)$$

Теперь с учетом (3.22) и (3.24) будем иметь

$$h_0(t) = |h_0(t)| \operatorname{sign} h_0(t) = \\ = \alpha |f(t) - \varphi_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign}[f(t) - \varphi_0(t)],$$

что вместе с (3.19) дает (3.18). Необходимость доказана.

Доказывая достаточность, предположим, что для функции $\varphi_0 \in F$ условие (3.18) выполнено. Тогда для любой $\varphi \in F$ будем иметь

$$\|f - \varphi_0\|_p^p = \int_0^{2\pi} (f - \varphi_0) |f - \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign}(f - \varphi_0)\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (f - \varphi_0 + \varphi - \varphi) |f - \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign}(f - \varphi_0)\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (f - \varphi) |f - \varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign}(f - \varphi_0)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{2\pi} |f - \varphi| |f - \varphi_0|^{p-1}\, dt.$$

Так как $(p-1)p' = p$, а функции f и φ_0 принадлежат L_p, то $|f - \varphi_0|^{p-1} \in L_{p'}$. Поэтому, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\int_0^{2\pi} |f - \varphi| |f - \varphi_0|^{p-1}\, dt \leqslant \|f - \varphi\|_p \|f - \varphi_0\|_p^{p/p'} = \\ = \|f - \varphi\|_p \|f - \varphi_0\|_p^{p-1}.$$

Итак, для любой функции $\varphi \in F$

$$\|f - \varphi_0\|_p^p \leqslant \|f - \varphi\|_p \|f - \varphi_0\|_p^{p-1},$$

т. е.

$$\|f - \varphi_0\|_p \leqslant \|f - \varphi\|_p,$$

а это означает, что φ_0 есть функция наилучшего приближения для f в подпространстве F. Теорема 3.3.1 доказана.

В случае $p=1$ необходимость условия (3.18) требует некоторых оговорок.

Теорема 3.3.2. *Пусть F — фиксированное подпространство пространства L. Для того чтобы фукция φ_0 из F доставляла наилучшее в метрике L приближение функции $f \in L$, достаточно, а в случае, когда множество точек t, в которых $f(t)=\varphi_0(t)$, имеет меру нуль, и необходимо выполнение соотношения*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\operatorname{sign}[f(t)-\varphi_0(t)]\,dt=0 \qquad \forall\varphi\in F. \tag{3.25}$$

Доказательство. Пусть

$$\|f-\varphi_0\|_L=\inf_{\varphi\in F}\|f-\varphi\|_L \tag{3.26}$$

и $h_0(t)$ — функция из $M=L_\infty$, реализующая в (2.36) при $p=1$ верхнюю грань. Тогда

$$\|f-\varphi_0\|_L=\int_0^{2\pi} f(t)\,h_0(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(f-\varphi_0)\,h_0\,dt.$$

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi}(f-\varphi_0)\,h_0\,dt=\int_0^{2\pi}|f-\varphi_0|\,dt. \tag{3.27}$$

Если множество точек, в которых $f(t)=\varphi_0(t)$, имеет меру нуль, то равенство (3.27) для функции h_0 возможно тогда и только тогда, когда почти всюду

$$h_0(t)=\operatorname{sign}|f(t)-\varphi_0(t)|.$$

Из этого соотношения и того, что $\int_0^{2\pi} h_0(t)\,\varphi(t)\,dt=0$ $\forall\varphi\in F$, следует (3.25).

С другой стороны, если для $\varphi_0\in F$ выполнено (3.25), то, какова бы ни была функция $\varphi\in F$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi}|f-\varphi_0|\,dt=\int_0^{2\pi}(f-\varphi_0)\operatorname{sign}(f-\varphi_0)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(f-\varphi)\operatorname{sign}(f-\varphi_0)\,dt\leqslant\int_0^{2\pi}|f-\varphi|\,dt,$$

т. е. $\varphi_0(t)$ удовлетворяет соотношению (3.26). Теорема 3.3.2 доказана.

Переформулируем теоремы 3.3.1 и 3.3.2 для случая приближения тригонометрическими полиномами.

Предложение 3.3.3. *Тригонометрический полином $\tilde{T}_n(t)$ порядка $n-1$ является полиномом наилучшего приближения в метрике L_p $(1<p<\infty)$ для функции $f\in L_p$ тогда и только тогда, если для любого тригонометрического полинома $T_n(t)$ того же порядка*

$$\int_0^{2\pi} T_n(t)\,|f(t)-\tilde{T}_n(t)|^{p-1}\operatorname{sign}[f(t)-\tilde{T}_n(t)]\,dt=0.$$

Предложение 3.3.4. *Для того чтобы тригонометрический полином $\tilde{T}_n$ доставлял наилучшее приближение в метрике L функции $f\in L$, достаточно, а в случае, когда* $\operatorname{mes}\{t:\ f(t)=\tilde{T}_n(t)\}=0$, *и необходимо выполнение соотношения*

$$\int_0^{2\pi} T_n(t)\operatorname{sign}[f(t)-\tilde{T}_n(t)]\,dt=0,$$

каков бы ни был тригонометрический полином $T_n(t)$ порядка $n-1$.

Утверждения, аналогичные предложениям 3.3.3 и 3.3.4, имеют место и в случае наилучшего приближения в пространстве $L_p(0,\ 2\pi)$ алгебраическими многочленами.

§ 3.4. Критерии ближайшего элемента в C и L_p в случае приближения замкнутым выпуклым множеством

Здесь мы переформулируем общий критерий 2.4.1 для пространств C и L_p.

Предложение 3.4.1. *Пусть X_C есть пространство C или $C[0,2\pi]$, F — замкнутое выпуклое множество в X_C и $f\in X_C$. Функция φ_0 из F тогда и только тогда удовлетворяет соотношению*

$$\|f-\varphi_0\|_{X_C}=\inf_{\varphi\in F}\|f-\varphi\|_{X_C}, \tag{3.28}$$

когда существует функция $g_0(t)$ *с ограниченным изменением на* $[0, 2\pi]$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g_0) = 1$,

2) $\|f - \varphi_0\|_{X_C} = \int\limits_0^{2\pi} (f - \varphi_0)\, dg_0$,

3) $\int\limits_0^{2\pi} \varphi_0\, dg_0 = \sup\limits_{\varphi \in F} \int\limits_0^{2\pi} \varphi\, dg_0$.

Действительно, каждому линейному ограниченному функционалу Ψ, заданному на $C[0, 2\pi]$, соответствует функция $g(t)$ с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$ такая, что

$$\Psi(f) = \int\limits_0^{2\pi} f\, dg \quad \forall f \in C[0, 2\pi],$$

$$\|\Psi\| = \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g).$$

Поэтому в соответствии с утверждением необходимости в теореме 2.4.1, если для $\varphi_0 \in F$ имеет место равенство (3.28), то существует функция g_0, для которой выполнены условия 1) — 3).

С другой стороны, если для $\varphi_0 \in F$ можно указать функцию g_0, для которой выполнены 1) — 3), то с учетом этих условий и (Д.15) для любой функции $\varphi \in F$ будем иметь

$$\|f - \varphi_0\|_{X_C} = \int\limits_0^{2\pi} (f - \varphi_0 + \varphi - \varphi)\, dg_0 =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} (f - \varphi)\, dg_0 + \left[\int\limits_0^{2\pi} \varphi\, dg_0 - \int\limits_0^{2\pi} \varphi_0\, dg_0\right] \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{2\pi} (f - \varphi)\, dg_0 \leqslant \|f - \varphi\|_{X_C} \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g_0) = \|f - \varphi\|_{X_C},$$

т. е. справедливо (3.28).

Отметим отдельно частный случай предложения 3.4.1, когда F — подпространство.

Предложение 3.4.2. *Пусть F — подпространство пространства X_C, под которым понимаем C или $C[0, 2\pi]$, и $f \in X_C$. Функция φ_0 из F тогда и только тогда удовлетворяет соотношению* (3.28), *когда существует функция g_0 с ограниченным изменением на* $[0, 2\pi]$ *такая, что*:

1) $\bigvee\limits_0^{2\pi}(g_0) = 1$;

2) $\|f - \varphi_0\|_{X_C} = \int\limits_0^{2\pi} f\, dg_0$;

3) $\forall \varphi \in F \quad \int\limits_0^{2\pi} \varphi\, dg_0 = 0$.

Предложение 3.4.2 выводится из теоремы 2.4.2 точно так же, как 3.4.1 выведено из 2.4.1.

Предложение 3.4.3. *Пусть F — замкнутое выпуклое множество пространства L_p $(1 \leqslant p < \infty)$. Функция $\varphi_0 \in F$ тогда и только тогда удовлетворяет соотношению*

$$\|f - \varphi_0\|_p = \inf_{\varphi \in F} \|f - \varphi\|_p,$$

когда существует функция $h_0(t) \in L_{p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\|h_0\|_{p'} = 1$;

2) $\|f - \varphi_0\|_p = \int\limits_0^{2\pi} (f - \varphi_0) h_0\, dt$;

3) $\int\limits_0^{2\pi} \varphi_0 h_0\, dt = \sup\limits_{\varphi \in F} \int\limits_0^{2\pi} \varphi h_0\, dt$.

Справедливость предложения 3.4.3 немедленно вытекает из теоремы 2.4.1 и того факта, что любому функционалу $\Psi \in L_p^*$ взаимно однозначно соответствует функция $h \in L_{p'}$ такая, что

$$\Psi(f) = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\, h(t)\, dt \quad \forall f \in L_p,$$

$$\|\Psi\| = \|h\|_{p'}.$$

Мы не отмечаем частный случай предложения 3.4.3, когда F — подпространство, ибо более сильный критерий для этого случая сформулирован в 3.3.1 и 3.3.2.

§ 3.5. Функции Бернулли и их наилучшее приближение тригонометрическими полиномами в метрике L

Функциями Бернулли называют 2π-периодические функции

$$D_r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx-\pi r/2)}{k^r}\qquad (r=1,\ 2,\ldots).\qquad (3.29)$$

Как мы увидим в главе 5, они естественным образом возникают при получении интегрального представления дифференцируемых периодических функций. Через наилучшее приближение функций $D_r(x)$ в метрике L тригонометрическими полиномами будут выражаться аппроксимативные характеристики некоторых классов функций.

Так как

$$D_{2\nu}(x)=(-1)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{2\nu}}\qquad (\nu=1,\ 2,\ldots),\qquad (3.30)$$

$$D_{2\nu+1}(x)=(-1)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^{2\nu+1}}\qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots),\qquad (3.31)$$

то функции Бернулли с четными индексами четны, а с нечетными индексами нечетны. Кроме того,

$$D_{2\nu}(\pi-t)=D_{2\nu}(\pi+t),\quad D_{2\nu+1}(\pi-t)=-D_{2\nu+1}(\pi+t),$$

т. е. график $D_{2\nu}(x)$ симметричен относительно прямых $x=m\pi$ $(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$, а график $D_{2\nu+1}(x)$ — относительно точек $x=m\pi, y=0$ (рис. 3). Поэтому, изучая поведение функций $D_r(x)$, достаточно ограничиться промежутком $[0,\ \pi]$.

Для функции $D_1(x)$ имеют место равенства

$$D_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2} & (0<x<2\pi),\\ 0 & (x=0),\end{cases}\qquad (3.32)$$

которые легко получить, разлагая стоящую справа функцию в ряд Фурье. Из определения функций $D_r(x)$ следует, что

$$D_r(x)=\int_{\beta_r}^{x}D_{r-1}(t)\,dt\qquad (r=2,\ 3,\ldots),\qquad (3.33)$$

где константа β_r выбирается так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_0^{2\pi} D_r(x)\,dx = 0;$$

в частности, $\beta_{2\nu+1} = 0$. Таким образом, $D_1 \in M$, $D_r \in C^{r-2}$ $(r \geqslant 2)$.

Из (3.32) следует, что $D_r(x)$ на промежутке $0 < x < 2\pi$ есть алгебраический многочлен степени r. Этот

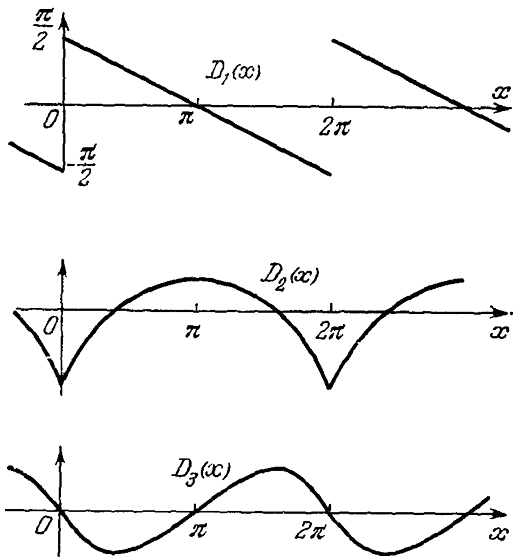

Рис. 3. Функции Бернулли $D_r(x)$ $(r = 1,2,3)$.

многочлен известен в математической литературе как многочлен Бернулли.

Учитывая вид функции $D_1(x)$ и рекуррентное соотношение (3.33), легко понять, что функция $D_{2\nu}(x)$ строго монотонна и имеет ровно один нуль на промежутке $(0, \pi)$, а $D_{2\nu+1}(x)$, обращаясь в нуль в точках $x = 0$ и $x = \pi$, сохраняет знак и имеет один экстремум на $(0, \pi)$ (рис. 3).

Для дальнейшего нам потребуется

Предложение 3.5.1. *Если $f \in L$ и имеет период $2\pi/n$, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)_{\sin kx}^{\cos kx}\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.34}$$

Если при этом $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, то функция $f(x)$ ортогональна всем тригонометрическим полиномам порядка $n-1$.

Действительно, полагая $x = t + 2\pi/n$, будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} f(x)\, dx = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} f(t)\, dt,$$

т. е.
$$\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} f(t)\, dt = 0.$$ Но

$$1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1 - \cos 2\frac{k\pi}{n} - i \sin 2\frac{k\pi}{n} \neq 0$$

при $k = 1, 2, \ldots, n-1$, поэтому имеют место равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx + i \sin kx) f(x)\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

из которых, получим (3.34). Второе утверждение очевидно.

Из предложения 3.5.1 следует, в частности, что для любого тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $n-1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)_{\operatorname{sign} \sin nx}^{\operatorname{sign} \cos nx}\, dx = 0. \tag{3.35}$$

Основной результат этого параграфа составляет

Теорема 3.5.2. *Наилучшее приближение в метрике L функции $D_r(t)$ доставляет тригонометрический полином $\tilde{T}_{nr}(t)$, интерполирующий $D_r(t)$ в нулях $\cos nt$, если r четно, и в нулях $\sin nt$, если r нечетно. При этом*

$$E_n(D_r)_L = \| D_r - \tilde{T}_{nr} \|_L = \frac{4}{n^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}} \tag{3.36}$$

$$(n, r = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Пусть r четно и

$$t_j=\frac{(2j-1)\pi}{2n} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Построим четный тригонометрический полином

$$\tilde{T}_{nr}(t)=\sum_{k=1}^{n} D_r(t_k)\frac{(\cos t-\cos t_1)\ldots(\cos t-\cos t_{k-1})}{(\cos t_k-\cos t_1)\ldots(\cos t_k-\cos t_{k-1})}\times$$
$$\times\frac{(\cos t-\cos t_{k+1})\ldots(\cos t-\cos t_n)}{(\cos t_k-\cos t_{k+1})\ldots(\cos t_k-\cos t_n)},$$

обратив внимание на то, что в k-м слагаемом в числителе и в знаменателе отсутствуют сомножители, в которых вычитается $\cos t_k$. Полином $\tilde{T}_{nr}(t)$ имеет порядок $n-1$, ибо числитель дроби в каждом слагаемом есть произведение $n-1$ полиномов первого порядка.

Очевидно, что в точках t_j значения $\tilde{T}_{nr}(t)$ и $D_r(t)$ совпадают, т. е. если положить

$$\Delta(t)=D_r(t)-\tilde{T}_{nr}(t),$$

то $\Delta(t_j)=0$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Покажем, что точки t_j являются простыми нулями $\Delta(t)$ и других нулей на отрезке $[0,\ \pi]$ функция $\Delta(t)$ не имеет. Предположим, что это не так, т. е. что $\Delta(t)$ обращается в нуль на $[0,\ \pi]$ в $(n+1)$-й точке или хотя бы один из нулей t_j является кратным. Тогда в силу теоремы Ролля $\Delta'(t)$ будет иметь на интервале $(0,\ \pi)$ по меньшей мере n нулей. Но

$$\Delta'(t)=D_{r-1}(t)-\tilde{T}'_{nr}(t),$$

и так как $\tilde{T}'_{nr}(t)$, как производная четного полинома, есть полином нечетный, то $\Delta'(t)$ является нечетной функцией, а потому обращается в нуль также в точках $t=0$ и $t=\pi$. Следовательно, $\Delta'(t)$ имеет на отрезке $[0,\ \pi]$ $n+2$ нуля и, снова по теореме Ролля, четная функция $\Delta''(t)$ должна иметь на $[0,\ \pi]$ по меньшей мере $n+1$ нуль. Продолжая эти рассуждения, придем к выводу, что нечетная функция $\Delta^{(r-1)}(t)$ имеет на интервале $(0,\ \pi)$ n нулей.

Так как

$$\Delta^{(r-1)}(t)=D_1(t)-\tilde{T}_{nr}^{(r-1)}(t)=$$
$$=\frac{\pi-t}{2}-\sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt \qquad (0<t<2\pi),$$

то $\Delta^{(r-1)}(t)$ дифференцируема в интервале $(0, 2\pi)$ и $\Delta^{(r-1)}(\pi)=0$. Но тогда функция

$$\Delta^{(r)}(t)=-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{n-1} kb_k \cos kt \qquad (0<t<2\pi),$$

являющаяся четным тригонометрическим полиномом порядка $n-1$, должна иметь на $(0,2\pi)$ $2n$ нулей, что было бы возможно лишь в случае, когда $\Delta^{(r)}(t)$ есть тождественная константа. Однако ясно, что полином $\tilde{T}_{nr}(t)$, интерполирующий строго монотонную $(0,\pi)$ на функцию $D_r(t)$ в точках t_j, не может быть тождественной константой, а потому константой не являются $\tilde{T}_{nr}^{(r)}(t)$ и $\Delta^{(r)}(t)$.

Итак доказано, что t_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ — единственные и причем простые нули функции $\Delta(t)$ на $[0, \pi]$. Если учесть четность $\Delta(t)$, то приходим к выводу, что $\Delta(t)$ обращается в нуль и меняет знак на периоде $[0, 2\pi]$ в точках

$$t_j=\frac{(2j-1)\pi}{2n} \qquad (j=1, 2, \ldots, 2n)$$

(являющихся нулями $\cos nt$) и только в этих точках. Это значит, что

$$\operatorname{sign}\Delta(t)=\operatorname{sign}[D_r(t)-\tilde{T}_{nr}(t)]=\pm\operatorname{sign}\cos nt. \qquad (3.37)$$

Поэтому, каков бы ни был тригонометрический полином $T_n(t)$ порядка $n-1$, в силу (3.35) и (3.37) будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(t)\operatorname{sign}[D_r(t)-\tilde{T}_{nr}(t)]\,dt=0, \qquad (3.38)$$

и в силу критерия 3.3.4 $\tilde{T}_{nr}(t)$ есть полином наилучшего приближения для $D_r(t)$ в метрике L.

Если r нечетно, то полагаем

$$\tilde{T}_{nr}(t)=\sum_{k=1}^{n-1} D_r(\tau_k)\frac{\sin t}{\sin \tau_k}\frac{(\cos t-\cos\tau_1)\ldots(\cos t-\cos\tau_{k-1})}{(\cos\tau_k-\cos\tau_1)\ldots(\cos\tau_k-\cos\tau_{k-1})}\times$$
$$\times\frac{(\cos t-\cos\tau_{k+1})\ldots(\cos t-\cos\tau_{n-1})}{(\cos\tau_k-\cos\tau_{k+1})\ldots(\cos\tau_k-\cos\tau_{n-1})},$$

где $\tau_k=k\pi/n$ $(k=1,\ 2,\ \ldots n-1)$. Теперь $\tilde{T}_{nr}(t)$ есть нечетный тригонометрический полином порядка $n-1$, интерполирующий функцию $D_r(t)$ в точках τ_k. В силу нечетности разность $\Delta(t)=D_r(t)-\tilde{T}_{nr}(t)$ обращается в нуль также и в точках $t=0$ и $t=\pi$. Рассуждая от противного и используя теорему Ролля, как и в четном случае, убеждаемся, что эти нули для $\Delta(t)$ простые и других нулей функция $\Delta(t)$ на $[0,\ \pi]$ не имеет. Поэтому при нечетном r

$$\operatorname{sign}\left[D_r(t)-\tilde{T}_{nr}(t)\right]=\pm\operatorname{sign}\sin nt \tag{3.39}$$

и ввиду (3.35) соотношение (3.38) также будет иметь место для любого $T_n(t)$, т. е. полином $\tilde{T}_{nr}(t)$, интерполирующий $D_r(t)$ $(r=2\nu+1,\ \ \nu=0,\ 1\ldots)$ в точках $k\pi/n$, доставляет наилучшее приближение функции $D_r(t)$ в метрике L.

Остается подсчитать значение наилучшего приближения

$$E_n(D_r)_L=\int_0^{2\pi}\left|D_r(t)-\tilde{T}_{nr}(t)\right|dt.$$

В случае четного r, учитывая (3.37) и (3.35), будем иметь

$$E_n(D_{2\nu})_L=\pm\int_{-\pi}^{\pi}\left[D_{2\nu}(t)-\tilde{T}_{n,2\nu}(t)\right]\operatorname{sign}\cos nt\,dt=$$
$$=\left|\int_{-\pi}^{\pi}D_{2\nu}(t)\operatorname{sign}\cos nt\,dt\right|.$$

Чтобы вычислить значение последнего интеграла, воспользуемся обобщенным равенством Парсеваля (Г. М. Фихтенгольц [1], стр. 589). Ряд Фурье функции $D_{2\nu}(t)$ записан в (3.30), а разложив $\operatorname{sign}\cos nt$ в ряд Фурье, будем иметь

$$\operatorname{sign}\cos nt=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1}=$$
$$=\frac{4}{\pi}\left(\cos nt-\frac{1}{3}\cos 3nt+\frac{1}{5}\cos 5nt-\ldots\right). \tag{3.40}$$

Перемножая коэффициенты рядов (3.30) и (3.40) с одинаковыми индексами и суммируя полученные произведения, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_{2\nu}(t)\operatorname{sign}\cos nt\,dt = (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{[(2k+1)n]^{2\nu}(2k+1)}.$$

Таким образом,

$$E_n(D_{2\nu})_L = \frac{4}{n^{2\nu}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\nu+1}} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3.41)$$

Если же r нечетно, $r=2\nu+1$, то с помощью соотношений (3.35) и (3.39) найдем

$$E_n(D_{2\nu+1})_L = \pm\int_{-\pi}^{\pi}\left[D_{2\nu+1}(t)-\tilde{T}_{n,\,2\nu+1}(t)\right]\operatorname{sign}\sin nt\,dt =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi} D_{2\nu+1}(t)\operatorname{sign}\sin nt\,dt\right| \qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots).$$

Так как

$$\operatorname{sign}\sin nt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin nt + \frac{1}{3}\sin 3nt + \frac{1}{5}\sin 5nt + \ldots\right),$$

то с учетом (3.31) обобщенное равенство Парсеваля дает

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_{2\nu+1}(t)\operatorname{sign}\sin nt\,dt = \frac{4}{\pi}(-1)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[(2k+1)n]^{2\nu+1}(2k+1)}$$

и, следовательно,

$$E_n(D_{2\nu+1})_L = \frac{4}{n^{2\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2\nu+2}} \qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots). \qquad (3.42)$$

Легко видеть, что равенства (3.41) и (3.42) можно объединить в одном соотношении

$$E_n(D_r)_L = \frac{4}{n^r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \qquad (n,\ r=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3.43)$$

Теорема доказана.

Числовые ряды в правой части (3.43) определяют при $r=1, 2, \ldots$ константы, которые будут часто встречаться в окончательных результатах при решении экстремальных задач теории функций. Если положить

$$\mathcal{K}_r=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \qquad (r=0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{3.44}$$

то (3.43) запишется в виде

$$E_n(D_r)_L=\frac{\pi\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n,\ r=1,\ 2, \ldots). \tag{3.45}$$

Постоянные $\mathcal{K}_r$ известны в математической литературе как константы Фавара. Не представляет особого труда подсчитать, что

$$\mathcal{K}_0=1, \quad \mathcal{K}_1=\pi/2, \quad \mathcal{K}_2=\pi^2/8, \quad \mathcal{K}_3=\pi^3/24, \ \ldots,$$

причем $\mathcal{K}_r$ возрастают по четным индексам и убывают по нечетным, так что

$$1=\mathcal{K}_0<\mathcal{K}_2<\mathcal{K}_4<\ldots<4/\pi<\ldots\mathcal{K}_3<\mathcal{K}_1=\pi/2.$$

В заключение этого параграфа вычислим коэффициенты полиномов $\tilde{T}_{nr}(t)$, доставляющих наилучшее приближение $D_r(t)$ в метрике L. Ясно, что эти коэффициенты однозначно определяются условиями интерполяции. Пусть сначала r четно. Тогда

$$\tilde{T}_{nr}(t)=\frac{\tilde{\mu}_{0r}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\mu}_{kr}\cos kt,$$

и коэффициенты $\tilde{\mu}_{kr}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ мы должны найти из условий

$$D_r\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)=\tilde{T}_{nr}\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right),$$

т. е.

$$(-1)^{r/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}\cos(2i-1)\frac{k\pi}{2n}=$$

$$=\frac{\tilde{\mu}_{0r}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\mu}_{kr}\cos(2i-1)\frac{k\pi}{2n} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{3.46}$$

Хорошо известны соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \cos(2i-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \tag{3.47}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \cos ix = \frac{\sin(n-1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}. \tag{3.48}$$

Первое из них получим, умножив и разделив в левой части каждое слагаемое на $\sin x$ и заменив $\cos(2i-1)x\sin x$ разностью синусов, а второе — тем же способом, умножив и разделив левую часть на $\sin(x/2)$. Считая n фиксированным и полагая в (3.47) $x=(m\pi)/(2n)$, а в (3.48) $x=m\pi/n$ $(m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, получим соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \cos(2i-1)\frac{m\pi}{2n} = \begin{cases} (-1)^s n & (m=2sn), \\ 0 & (m \neq 2sn) \quad (s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{cases} \tag{3.49}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \cos i\frac{m\pi}{n} = \begin{cases} n-1 & (m=2sn), \\ \frac{1}{2}[(-1)^{m-1}-1] & (m \neq 2sn) \quad (s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases} \tag{3.50}$$

Теперь вернемся к (3.46). Суммируя левую и правую части по i от 1 до n, с учетом (3.49) получим

$$\tilde{\mu}_{0r} = (-1)^{r/2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2(-1)^s}{(2sn)^r} = \frac{(-1)^{r/2}}{2^{r-1}n^r} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s^r}.$$

Чтобы вычислить $\tilde{\mu}_{jr}$ $(j=1, 2, \ldots, n-1)$, умножим обе части (3.46) на $\cos(2i-1)j\pi/2n$ и, заменив произведение косинусов на сумму, просуммируем по i. Получим

$$(-1)^{r/2}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos(2i-1)\frac{k+j}{2n}\pi+\cos(2i-1)\frac{k-j}{2n}\pi\right]=$$
$$=\frac{\tilde{\mu}_{0r}}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos(2i-1)\frac{j\pi}{2n}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\mu}_{kr}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos(2i-1)\frac{k+j}{2n}\pi+\cos(2i-1)\frac{k-j}{2n}\pi\right].$$

Вычислив суммы по i с помощью равенств (3.49), придем к соотношению, содержащему из коэффициентов $\tilde{\mu}_{kr}$ только $\tilde{\mu}_{jr}$, и сразу найдем, что

$$\tilde{\mu}_{jr}=(-1)^{r/2}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2sn+j)^r}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2sn-j)^r}\right]=$$
$$=(-1)^{r/2}\left[\frac{1}{j^r}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{(2sn+j)^r}+\frac{1}{(2sn-j)^r}\right)\right]\quad(3.51)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Теперь пусть r нечетно. Полином $\tilde{T}_{nr}(t)$ в этом случае имеет вид

$$\tilde{T}_{nr}(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\nu}_{kr}\sin kt.$$

Условия интерполирования в нулях $\sin nt$ дают:

$$(-1)^{(r-1)/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}\sin i\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\nu}_{kr}\sin i\frac{k\pi}{n}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Умножим обе части всех этих равенств на $\sin i\frac{j\pi}{n}$, затем заменим произведения синусов на разности косинусов и просуммируем по i. Будем иметь

$$(-1)^{(r-1)/2}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\cos i\frac{k-j}{n}\pi-\cos i\frac{k+j}{n}\pi\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\nu}_{kr}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\cos i\frac{k-j}{n}\pi-\cos i\frac{k+j}{n}\pi\right].$$

Подсчитывая значения сумм по i с помощью формул (3.50), получим равенства, содержащие только $\tilde{\nu}_{jr}$, из которых найдем

$$\tilde{\nu}_{jr}=(-1)^{(r-1)/2}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(2sn+j)^r}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(2sn-j)^r}\right]=$$

$$=(-1)^{(r-1)/2}\left\{\frac{1}{j^r}+\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2sn+j)^r}-\frac{1}{(2sn-j)^r}\right]\right\} \quad (3.52)$$

$$(j=1,\ \ldots,\ n-1).$$

В частности, при $r=1$

$$\tilde{\nu}_{j1}=\frac{1}{j}-2j\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{4s^2n^2-j^2}=\frac{\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{j\pi}{2n}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

ГЛАВА 4

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НА КЛАССАХ СВЕРТОК

В этой главе будут изложены результаты по решению задачи II в случае приближения подпространствами (в частности, подпространством тригонометрических полиномов) периодических функций, представимых в виде свертки.

C и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ L_1 = L,\ L_\infty = M)$, как и в предыдущей главе, будут обозначать пространства 2π-периодических функций с соответствующей метрикой.

Мы будем иногда при наличии параметра аргумент, по которому вычисляется норма, заменять точкой; например:

$$\|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Отправным пунктом наших рассуждений будут двойственные соотношения в пространствах L_p, которые мы вывели в главе 2. Предварительно нужно выяснить некоторые простые факты, касающиеся сверток функций.

§ 4.1. Свертка функций; основные свойства и неравенства

Говорят, что функция $f(x)$ является сверткой функций $K(t)$ и $\varphi(t)$ из L, если она представима в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\, dt, \tag{4.1}$$

что символически обозначается так:

$$f = K * \varphi.$$

(Множитель $1/\pi$ перед интегралом в (4.1) поставлен лишь для удобства дальнейших приложений.) Функция $K(t)$ в каждом конкретном случае фиксирована и ее называют ядром свертки. Заметим, что из измеримости и суммируемости $K(t)$ на $(0, 2\pi)$ следует измеримость и суммируемость на квадрате $0 < x,\ t < 2\pi$ $K(x-t)$ как функции двух переменных.

Из 2π-периодичности функций $K(t)$ и $\varphi(t)$ следует 2π-периодичность $f(x)$, а также эквивалентное (4.1) представление

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t)\,\varphi(x-t)\,dt, \tag{4.2}$$

которое получается из (4.1) заменой $x - t = u$.

Мы будем неоднократно пользоваться тем фактом, что норма $\|\psi\|_p$ не меняется при сдвиге или перемене знака аргумента, по которому она вычисляется:

$$\|\psi(\cdot + t)\|_p = \|\psi(t - \cdot)\|_p = \|\psi\|_p \quad \forall t. \tag{4.3}$$

Предложение 4.1.1. *Если $K(t) \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то $f(x) \in L_p$, причем*

$$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{\pi}\|K\|_p \|\varphi\|_L; \tag{4.4}$$

точно так же, если $\varphi \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то $f \in L_p$ и

$$\|f\|_p \leqslant (1/\pi)\|K\|_L \|\varphi\|_p. \tag{4.5}$$

Действительно, предполагая, что $K \in L_p$, с помощью обобщенного неравенства Минковского (см. Дополнение) и с учетом (4.3) будем иметь

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|K(x-t)|^p\,|\varphi(t)|^p\,dx\right)^{1/p} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(t)|\left(\int_0^{2\pi}|K(x-t)|^p\,dx\right)^{1/p} dt = \frac{1}{\pi}\|\varphi\|_L \|K\|_p,$$

откуда следует включение $f \in L_p$ и неравенство (4.4). Если $\varphi \in L_p$, то аналогичным образом, исходя из представления (4.2), получим неравенство (4.5).

Предложение 4.1.2. *Если*

$$K(t) \in L_p\ (1 < p < \infty), \quad \varphi(t) \in L_{p'}\ (1/p + 1/p' = 1),$$

то свертка $f(x)$ *непрерывна на всей оси, причем*

$$\|f\|_C \leqslant \frac{1}{\pi}\|K\|_p\|\varphi\|_{p'}. \tag{4.6}$$

В самом деле, используя неравенство Гельдера, при любых x и h будем иметь

$$|f(x+h)-f(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[K(x+h-t)-K(x-t)]\varphi(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\|K(x+h-\cdot)-K(x-\cdot)\|_p\|\varphi\|_{p'} = \frac{1}{\pi}\|K(\cdot+h)-K(\cdot)\|_p\|\varphi\|_{p'}.$$

Непрерывность f в точке x следует из того, что при $h\to 0$ (Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], стр. 500 и 100)

$$\lim_{h\to 0}\|K(\cdot+h)-K(\cdot)\|_p = 0.$$

Норма $\|f\|_C$ оценивается опять же с помощью неравенства Гельдера и с учетом (4.3):

$$\|f\|_C = \frac{1}{\pi}\max_x\left|\int_0^{2\pi}K(x-t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\|K\|_p\|\varphi\|_{p'}.$$

Предложение 4.1.3. *Если хотя бы одна из функций* $K(t)$ *и* $\varphi(t)$ *принадлежит пространству* $M=L_\infty$, *то* $f(x)$ *непрерывна и*

$$\|f\|_C \leqslant \frac{1}{\pi}\|K\|_M\|\varphi\|_L, \quad \text{если} \quad K\in M,$$
$$\|f\|_C \leqslant \frac{1}{\pi}\|K\|_L\|\varphi\|_M, \quad \text{если} \quad \varphi\in M.$$

Пусть, например, $\varphi\in M$. Тогда

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K(x+h-t)-K(x-t)|\,|\varphi(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_M\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K(x+h-t)-K(x-t)|\,dt = \|\varphi\|_M\frac{1}{\pi}\|K(\cdot+h)-K(\cdot)\|_L \to 0,$$

если $h \to 0$, т. е. $f(x)$ непрерывна. Далее

$$\|f\|_C = \frac{1}{\pi} \max_x \left| \int_0^{2\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \|\varphi\|_M \max_x \int_0^{2\pi} |K(x-t)|\,dt = \frac{1}{\pi} \|\varphi\|_M \|K\|_L.$$

Аналогично, исходя из представления (4.2), рассматривается случай $K \in M$.

§ 4.2. Двойственные соотношения для классов сверток

Для фиксированной функции $f \in L_p$ и фиксированного подпространства $F \subset L_p$ будем полагать

$$E(f, F)_p = \inf_{\varphi \in F} \|f - \varphi\|_p \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Теорема 4.2.1. *Пусть функция $f(x)$ представима в виде свертки* (4.1), *где $K(t) \in L$, а $\varphi(t) \in L_p$* $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, *причем выполнено хотя бы одно из условий:*

а) $K(-t) = \pm K(t)$;

б) *подпространство F вместе с функцией $\psi(t)$ содержит также и функцию $\psi(-t)$.*

Тогда при $1 \leqslant q \leqslant p$ имеет место соотношение

$$\sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} E(f, F)_q = \sup_{\varphi \in H_{q'}(F)} \|f\|_{p'} \quad (1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1), \tag{4.7}$$

где в правой части $f(x)$ есть также свертка (4.1) *с тем же ядром $K(t)$, а $H_{q'}(F)$ — множество функций $\varphi \in L_{q'}$ таких, что $\|\varphi\|_{q'} \leqslant 1$ и*

$$\int_0^{2\pi} \psi(t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \quad \forall \psi \in F.$$

Если $K \in L_q \cap L_{p'}$, в частности, если $K \in M$, то (4.7) *справедливо независимо от соотношения между p и q.*

Доказательство. Из неравенства $p \geqslant q$ следует, что $L_p \subset L_q$, и если $\varphi \in L_p$, то $f \in L_p \subset L_q$. Воспользовавшись соотношением (2.36) (в случае, если F конечномерно, можно исходить из более просто доказываемого равенства (2.25)), можем написать

$$E(f, F)_q = \sup_{h \in H_{q'}(F)} \int_0^{2\pi} f(x)\, h(x)\, dx \tag{4.8}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} E(f, F)_q &= \\ &= \frac{1}{\pi} \sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} \sup_{h \in H_{q'}(F)} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} K(x-t)\, \varphi(t)\, dt \right) h(x)\, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} \sup_{h \in H_{q'}(F)} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} K(t)\, \varphi(x-t)\, dt \right) h(x)\, dx. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Дальнейшее основано на применении теоремы Фубини (см., например, И. П. Натансон [2], стр. 336) о возможности перемены порядка интегрирования. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} |K(t)| \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(x-t)\, h(x)|\, dx \right) dt. \tag{4.10}$$

Так как $h \in L_{q'}$ и при $p \geqslant q$ $\varphi \in L_q$, то по неравенству Гельдера

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(x-t)\, h(x)|\, dx \leqslant \|\varphi\|_q \|h\|_{q'},$$

и, значит, интеграл (4.10) конечен. Если же $K \in L_q$, то

$$\int_0^{2\pi} |K(x-t)\, h(x)|\, dx \leqslant \|K\|_q \|h\|_{q'},$$

и для любой $\varphi \in L$ конечен интеграл

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(t)| \left(\int_0^{2\pi} |K(x-t)\, h(x)|\, dx \right) dt.$$

Таким образом, при сделанных предположениях в условии теоремы 4.2.1 теорема Фубини применима и мы можем переписать (4.9) (поменяв заодно порядок вычисления верхних граней) в виде

$$\sup_{\|\varphi\|_p\leqslant 1} E(f, F)_q =$$

$$= \sup_{h\in H_{q'}(F)} \sup_{\|\varphi\|_p\leqslant 1} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x-t)\,h(x)\,dx\right)dt. \quad (4.11)$$

С помощью обобщенного неравенства Минковского проверяется (как это делалось в § 4.1 для свертки), что функция

$$\Psi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x-t)\,h(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x)\,h(x+t)\,dx \quad (4.12)$$

принадлежит L_p, если этому пространству принадлежит $K(t)$ или $h(t)$. Следовательно, если $K\in L_{p'}$ (независимо от соотношения между p и q) или $K\in L$, но $p\geqslant q$ (и, значит, $h\in L_{q'}\subset L_{p'}$), то $\Psi\in L_{p'}$. Но тогда в силу соотношения (Д.12)

$$\sup_{\|\varphi\|_p\leqslant 1}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\Psi(t)\,dt = \|\Psi\|_{p'}. \quad (4.13)$$

Теперь заметим, что в случае четности или нечетности ядра $K(t)$ (условие а) теоремы) функцию (4.12) можно записать в виде свертки:

$$\Psi(t) = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\,h(x)\,dx.$$

Подставив (4.13) в (4.11), получим (4.7).

Если же выполнено условие б), то для любой функции $\psi\in F$

$$\int_0^{2\pi}\psi(t)\,h(-t)\,dt = \int_0^{2\pi}\psi(-t)\,h(t)\,dt = 0,$$

т. е. вместе с функцией $h(t)$ множеству $H_{q'}(F)$ принадлежит также и $h(-t)$. Но тогда, заменяя сначала t на $-t$, а затем x на $-x$, будем иметь

$$\sup_{h\in H_{q'}(F)}\|\Psi\|_{p'} = \frac{1}{\pi}\sup_{h\in H_{q'}(F)}\left\|\int_0^{2\pi} K(\cdot+x)\,h(x)\,dx\right\|_{p'} =$$

$$= \sup_{h\in H_{q'}(F)}\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\cdot-x)\,h(x)\,dx\right\|_{p'}. \quad (4.14)$$

Под знаком нормы в последнем выражении стоит свертка ядра $K(t)$ с функцией $h \in H_{q'}(F)$, и следовательно, правые части (4.7) и (4.14) совпадают. А так как в силу (4.11), (4.12) и (4.13) совпадают и их левые части, то теорема доказана и при условии б).

Отдельно отметим частный и, может быть, наиболее важный случай теоремы 4.2.1, когда $q=p$.

Предложение 4.2.2. *Пусть функция $f(x)$ представима в виде* (4.1). *Если $K(t) \in L$ и выполнено по крайней мере одно из условий* а) *или* б) *теоремы* 4.2.1, *то*

$$\sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} E(f, F)_p = \sup_{\varphi \in H_{p'}(F)} \|f\|_{p'} \tag{4.15}$$

$$(1/p + 1/p' = 1, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

§ 4.3. Приближение классов сверток тригонометрическими полиномами

Теперь в качестве приближающего подпространства для функций, представимых в виде свертки, будем рассматривать подпространство F_{2n-1}^T тригонометрических полиномов

$$T_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \tag{4.16}$$

порядка $n-1$.

Для наилучшего приближения функции $f \in X$, где X есть L_p или C, полиномами (4.16) мы сохраним обозначение $E_n(f)_X$, т. е. по определению полагаем

$$E_n(f)_X = E\left(f, F_{2n-1}^T\right)_X = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_X.$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций из X, то будем иногда пользоваться сокращенным обозначением

$$E_n(\mathfrak{M})_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E_n(f)_X.$$

В случае $X = L_p$ вместо $E_n(f)_{L_p}$, $E_n(\mathfrak{M})_{L_p}$ будем писать $E_n(f)_p$, $E_n(\mathfrak{M})_p$, исключая, может быть, случаи $p=1$ и $p=\infty$.

При каждом $n=0, 1, 2, \ldots$ через H_X^n $\left(H_{L_p}^n \overset{\text{def}}{=} H_p^n\right)$ обозначаем множество функций $\varphi \in X$ с нормой $\|\varphi\|_X \leqslant 1$, которые при $n \geqslant 1$ ортогональны всем тригонометрическим полиномам порядка $n-1$, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)_{\sin kt}^{\cos kt}\, dt = 0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{4.17}$$

Заметим, что в силу предложения 3.5.1 в множество H_X^n входят, в частности, функции $\varphi \in X$ с нормой $\|\varphi\|_X \leqslant 1$, имеющие период $2\pi/n$ и ортогональные константе.

В этом параграфе рассматриваются классы сверток (4.1) с ядром $K(t) \in L$, у которых $\varphi \in H_X^n$. Эти классы будем иногда обозначать $K * H_X^n$. В частности, $K * H_X^0$ есть класс функций (4.1), у которых $\|\varphi\|_X \leqslant 1$.

Соотношение двойственности (4.8) для $F = F_{2n-1}^T$ с учетом введенных обозначений запишется в виде

$$E_n(f)_p = \sup_{h \in H_{p'}^n} \int_0^{2\pi} f(t)\, h(t)\, dt \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty,\quad 1/p + 1/p' = 1). \tag{4.18}$$

Перенося на наш случай теорему 4.2.1, заметим, что $T_n(-t)$, так же как и $T_n(t)$, является тригонометрическим полиномом порядка n, так что условие б) теоремы 4.2.1 заведомо выполнено, а потому при $p \geqslant q$, а если $K(t) \in L_q \cap L_{p'}$, то при любых p и q, справедливо соотношение

$$E_n(K * H_p^0)_q \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} E_n(f)_q = \sup_{\varphi \in H_{q'}^n} \|f\|_{p'} \tag{4.19}$$

$$(1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty,\quad 1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1).$$

В частности, для любого суммируемого на периоде ядра $K(t)$

$$E_n(K * H_p^0)_p \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} E_n(f)_p = \sup_{\varphi \in H_{p'}^n} \|f\|_{p'} \tag{4.20}$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty,\quad 1/p + 1/p' = 1).$$

Равенство (4.20) показывает, что задача о верхней грани, $E_n(f)_p$ на классе сверток (4.1), заданном условием $\|\varphi\|_p \leqslant 1$, сводится к задаче вычисления верхней грани нормы свертки на множестве $K * H_{p'}^n$ в сопряженной метрике $L_{p'}$. Можно ожидать, что вторая задача, где надо оценивать не наилучшее приближение, а норму функции (хотя и на более тонко задаваемом классе), окажется легче поддающейся точному решению.

Например, используя особенности равномерной метрики, легко доказать следующее

Предложение 4.3.1. *Если $K(t) \in M$ (и, следовательно, свертка $f(x)$ непрерывна), то*

$$\sup_{\varphi \in H^n_{q'}} \|f\|_C = \frac{1}{\pi} E_n(K)_q \quad (1 \leqslant q \leqslant \infty, \ 1/q + 1/q' = 1). \tag{4.21}$$

Действительно, заметив, что вместе с функцией $\varphi(t)$ классу H^n_p принадлежат также и функции $\pm\varphi(\alpha \pm t)$ при любом α, а затем пользуясь соотношением (4.18), будем иметь

$$\sup_{\varphi \in H^n_{q'}} \|f\|_C = \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in H^n_{q'}} \max_x \left| \int_0^{2\pi} K(t)\varphi(x-t)\,dt \right| =$$
$$= \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in H^n_{q'}} \int_0^{2\pi} K(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi} E_n(K)_q.$$

Из (4.19) (при $p = 1$) и (4.21) следует, что если ядро $K(t)$ свертки (4.1) принадлежит пространству M, то

$$\sup_{\|\varphi\|_L \leqslant 1} E_n(f)_q = \frac{1}{\pi} E_n(K)_q \qquad (1 \leqslant q \leqslant \infty), \tag{4.22}$$

т. е. задача свелась к наилучшему приближению конкретной функции — ядра свертки.

Если в соотношении (4.21) $q' = \infty$, т. е. $\varphi \in H^n_M$, то $f(x)$ будет непрерывна при любом $K(t) \in L$, и те же рассуждения приводят к равенствам

$$\sup_{\|\varphi\|_L \leqslant 1} E_n(f)_L = \sup_{\varphi \in H^n_M} \|f\|_C = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L, \tag{4.23}$$

справедливым для свертки с любым суммируемым ядром.

В случае интегральной метрики вместо точного равенства (4.21) можно указать для рассматриваемых величин некоторые оценки сверху.

Если в свертке (4.1) $\varphi \in H_p^n$, то ввиду соотношений (4.17) для любого тригонометрического полинома $T_n(t)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t)\,\varphi(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [K(t) - T_n(t)]\,\varphi(x-t)\,dt$$

и в силу общего неравенства (4.5) для сверток

$$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{\pi}\|K - T_n\|_L \|\varphi\|_p \leqslant \frac{1}{\pi}\|K - T_n\|_L.$$

Следовательно, ввиду произвольности многочлена T_n

$$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{\pi}\inf_{T_n}\|K - T_n\|_L = \frac{1}{\pi}E_n(K)_L,$$

а так как это верно для любой функции (4.1) с $\varphi \in H_p^n$, то

$$\sup_{\varphi \in H_p^n}\|f\|_p \leqslant \frac{1}{\pi}E_n(K)_L \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Сопоставление этого неравенства с (4.20) приводит к оценке

$$\sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} E_n(f)_p \leqslant \frac{1}{\pi}E_n(K)_L \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{4.24}$$

справедливой для любого суммируемого ядра $K(t)$.

При $p = 1$ в (4.24), как это видно из (4.23), имеет место знак равенства.

Дальнейшие результаты по решению задачи II на классах сверток мы получим, наложив на ядро $K(t)$ дополнительное условие.

Условие A_n^*. *При заданном $n = 1, 2, \ldots$ существует натуральное число $n_* \geqslant n$ и тригонометрический полином*

$$T_n^*(t) = \frac{\mu_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\mu_k^*\cos kt + \nu_k^*\sin kt)$$

такие, что для функции

$$\varphi_*(t) = \operatorname{sign}[K(t) - T_n^*(t)] \tag{4.25}$$

почти всюду выполняется соотношение

$$\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t). \tag{4.26}$$

Ясно, что $\varphi_* \in M$ и $\|\varphi_*\|_M = 1$, если только $K(t) \not\equiv T_n^*(t)$. В силу (4.26)

$$\varphi_*(t + 2\pi/n_*) = -\varphi_*(t + \pi/n_*) = \varphi_*(t),$$

т. е. $\varphi_*(t)$ имеет период $2\pi/n_*$. Кроме того, используя сначала (4.26), а затем сделав замену $t + \pi/n_* = u$, с учетом периодичности будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \varphi_*(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} \varphi_*(t + \pi/n_*)\,dt = -\int_0^{2\pi} \varphi_*(t)\,dt,$$

т. е.

$$\int_0^{2\pi} \varphi_*(t)\,dt = 0.$$

Последнее равенство вместе с $2\pi/n_*$-периодичностью φ_* гарантируют для $\varphi_*(t)$ выполнение соотношений (4.17) (см. предложение 3.5.1), поэтому $\varphi_* \in H_M^n$.

Смысл условия A_n^* в том, что фигурирующий в нем полином T_n^* осуществляет наилучшее приближение ядра $K(t)$ в метрике L. Действительно, имеет место

Предложение 4.3.2. *Если $K(t)$ удовлетворяет условию A_n^*, то*

$$E_n(K)_L = \|K - T_n^*\|_L.$$

В самом деле, используя вид функции (4.25) и ее принадлежность классу H_M^n, для любого тригонометрического полинома $T_n(t)$ порядка $n-1$ будем иметь

$$\|K - T_n\|_L = \int_0^{2\pi} [K(t) - T_n(t)] \operatorname{sign}[K(t) - T_n(t)]\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{2\pi} [K(t) - T_n(t)]\,\varphi_*(t)\,dt = \int_0^{2\pi} [K(t) - T_n^*(t)]\,\varphi_*(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} |K(t) - T_n^*(t)|\,dt = \|K - T_n^*\|_L.$$

Докажем теперь следующее утверждение, которое будет играть существенную роль при получении точных результатов для конкретных классов функций.

Теорема 4.3.3. (С. М. Никольский [3]). *Если функции f и φ связаны между собой равенством*

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где ядро $K(t)\in L$ и удовлетворяет условию A_n^*, то для всех $s=0, 1, \ldots, n$ имеют место соотношения

$$\sup_{\varphi\in H_M^s} E_n(f)_M=\sup_{\varphi\in H_M^n}\|f\|_M=\frac{1}{\pi}E_n(K)_L, \tag{4.27}$$

$$\sup_{\varphi\in H_L^s} E_n(f)_L=\sup_{\varphi\in H_L^n}\|f\|_L=\frac{1}{\pi}E_n(K)_L. \tag{4.28}$$

Доказательство. Установим сначала справедливость соотношений (4.27). Второе из них, т. е. равенство

$$\sup_{\varphi\in H_M^n}\|f\|_M=\frac{1}{\pi}E_n(K)_L$$

уже доказано выше (см. (4.23)) даже без условия A_n^*. Положим для любой функции $\varphi\in H_M^0$ (т. е. $\varphi\in M$, $\|\varphi\|_M\leqslant 1$)

$$\tau_n^*(x)=\tau_n^*(\varphi, x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n^*(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{4.29}$$

где $T_n^*(t)$ — полином из условия A_n^*. Подставив в (4.29) под интеграл вместо $T_n^*(x-t)$ соответствующую тригонометрическую сумму и заменив $\cos k(x-t)$ и $\sin k(x-t)$ по известным формулам тригонометрии на сумму и разность, мы после почленного интегрирования увидим, что $\tau_n^*(t)$ есть также тригонометрический полином порядка $n-1$. Поэтому для любой $\varphi\in H_M^0$, т. е. $f\in K*H_M^0$,

$$E_n(f)_C\leqslant\|f-\tau_n^*\|_C=$$

$$=\max_x\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[K(x-t)-T_n^*(x-t)]\,\varphi(t)\,dt\right|=$$

$$=\max_x\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[K(t)-T_n^*(t)]\,\varphi(x-t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K(t)-T_n^*(t)|\,dt=\frac{1}{\pi}E_n(K)_L.$$

Так как $H_n^s \subset H_M^0$ $(s=1, 2, \ldots, n)$, то этим доказано, что

$$\sup_{\varphi \in H_n^s} E_n(f)_C \leqslant \frac{1}{\pi} E_n(K)_L \qquad (s=0, 1, \ldots, n). \tag{4.30}$$

Очевидно, что функция $\varphi_*(-t)$, так же как и $\varphi_*(t)$ имеет период $2\pi/n_*$ и принадлежит классу H_M^n. Поэтому, если положить

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x-t)\,\varphi_*(-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t)\,\varphi_*(t-x)\,dt,$$

то $f_*(x)$ непрерывна, имеет период $2\pi/n_*$ и может быть записана в виде

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [K(t) - T_n^*(t)]\,\varphi_*(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(t)\,\varphi_*(t-x)\,dt,$$

где обозначено

$$K_*(t) = K(t) - T_n^*(t).$$

Но тогда, учитывая, что $\varphi_*(t) = \operatorname{sign} K_*(t)$, будем иметь для $i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$f_*\left(\frac{2i\pi}{n_*}\right) = f_*(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(t)\,\varphi_*(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_*(t)|\,dt = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L,$$

$$f_*\left(\frac{\pi}{n_*} + \frac{2i\pi}{n_*}\right) = f\left(-\frac{\pi}{n_*}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(t)\,\varphi_*\left(t + \frac{\pi}{n_*}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(t)\,\varphi_*(t)\,dt = -\frac{1}{\pi} E_n(K)_L.$$

Кроме того, так как $\|\varphi_*\|_M \leqslant 1$, то для всех x

$$|f_*(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_*(t)|\,dt = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L.$$

Таким образом, функция $f_*(x)$ в точках $i\pi/n_*$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) принимает наибольшее по абсолютной величине значение, последовательно меняя знак. Так как $n_* \geqslant n$, то число этих точек на периоде $[0, 2\pi)$ не меньше чем $2n$ и по критерию Чебышева (теорема 3.2.1)

$$E_n(f_*)_C = \|f_*\|_C = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L. \tag{4.31}$$

Остается заметить, что $f_*(x)$ есть свертка ядра $K(t)$ с функцией $\varphi_*(-t)$, принадлежащей H_M^n, а значит, и H_M^s ($s = 0, 1, \ldots, n$). Поэтому в (4.30) на самом деле имеет место знак равенства и соотношения (4.27) доказаны при всех $s = 0, 1, \ldots, n$, причем, как видно из (4.31), обе верхние грани реализует функция $f_*(x)$.

Переходим к доказательству соотношений (4.28). Справедливость второго из них сразу усматривается из сопоставления (4.20) при $p' = 1$ ($p = \infty$) с (4.27) при $s = 0$:

$$\sup_{\varphi \in H_L^n} \|f\|_L = \sup_{\|\varphi\|_M \leqslant 1} E_n(f)_C = \sup_{\varphi \in H_M^0} E_n(f)_C = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L.$$

Далее, учитывая включения

$$H_L^n \subset H_L^{n-1} \subset \ldots \subset H_L^0,$$

а также (4.23), будем иметь

$$\sup_{\varphi \in H_L^n} E_n(f)_L \leqslant \sup_{\varphi \in H_L^{n-1}} E_n(f)_L \leqslant \ldots \leqslant \sup_{\varphi \in H_L^0} E_n(f)_L = \\ = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L,$$

и все будет доказано, если мы установим, что

$$\sup_{\varphi \in H_L^n} E_n(f)_L \geqslant \frac{1}{\pi} E_n(K)_L. \tag{4.32}$$

Положим $t_i = \frac{i\pi}{n_*}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и для каждого натурального $m > 2n_*/\pi$ построим функцию

$$\varphi_m(t) = \begin{cases} (-1)^i m/4n_* & \left(t_i - \frac{1}{m} < t < t_i + \frac{1}{m},\ i = 0, \pm 1, \ldots\right), \\ 0 & \text{(в остальных точках).} \end{cases}$$

Ясно, что функции φ_m имеют период $2\pi/n_*$, четны и, кроме того, как показывает элементарный подсчет,

$$\int_0^{2\pi} \varphi_m(t)\,dt = 0, \qquad \|\varphi_m\|_L = 1,$$

так что $\varphi_m \in H_L^n$. Положим

$$f_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x-t)\,\varphi_m(-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_*(x+t)\,\varphi_m(t)\,dt,$$

где, как и выше, $K_*(t) = K(t) - T_n^*(t)$, а $T_n^*(t)$ — полином из условия A_n^*. В силу равенства (4.18)

$$E_n(f_m)_L = \sup_{h \in H_M^n} \int_0^{2\pi} f_m(t)\,h(t)\,dt,$$

а так как функция $\varphi_*(t)$ из условия A_n^* принадлежит H_M^n, то, применяя теорему Фубини, будем иметь

$$E_n(f_m)_L \geqslant \int_0^{2\pi} f_m(x)\,\varphi_*(x)\,dx =$$
$$= \int_0^{2\pi} \varphi_*(x)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x+t)\,\varphi_m(t)\,dt\right)dx =$$
$$= \int_0^{2\pi} \varphi_m(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t+x)\,\varphi_*(x)\,dx\right)dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \varphi_m(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\,\varphi_*(-x)\,dx\right)dt = \int_0^{2\pi} \varphi_m(t)\,f_*(t)\,dt.$$

Выше мы установили, что

$$f_*(t_i) = (-1)^i \frac{1}{\pi} E_n(K)_L. \tag{4.33}$$

В силу непрерывности функции $f_*(x)$ для заданного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число m_ε, что для всех $m > m_\varepsilon$ будет

$$|f_*(t)| > \|f_*\|_C - \varepsilon \tag{4.34}$$
$$\left(t_i - \frac{1}{m} < t < t_i + \frac{1}{m},\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right),$$

Учитывая (4.33) и (4.34), а также структуру функции $\varphi_m(t)$, будем иметь при $m > m_\varepsilon$

$$E_n(f_m)_L \geqslant \int_0^{2\pi} \varphi_m(t) f_*(t)\,dt = 2n_* \int_{-1/m}^{1/m} \varphi_m(t) f_*(t)\,dt >$$
$$> 2n_* \frac{m}{4n_*}(\|f_*\|_C - \varepsilon)\frac{2}{m} = \|f_*\|_C - \varepsilon = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L - \varepsilon,$$

а так как $f_m(x)$ есть свертка $K(t)$ с функцией $\varphi_m(-t)$ из H_L^n, то и подавно

$$\sup_{\varphi \in H_L^n} E_n(f)_L \geqslant \frac{1}{\pi} E_n(K)_L - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε неравенство (4.32), а с ним и соотношения (4.28) доказаны.

Отметим, что в то время как верхние грани в (4.27) реализуются на конкретной функции $f_*(x)$, в равенствах (4.28) верхние грани не достигаются, а существует лишь последовательность $f_m(x)$ из H_L^n такая, что

$$\lim_{m\to\infty} E_n(f_m)_L = \lim_{m\to\infty} \|f_m\|_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L.$$

§ 4.4. Наилучшие линейные методы для классов сверток

В качестве меры приближения функции $f \in X$ (X, как и выше, есть L_p или C) тригонометрическими полиномами наряду с наилучшим приближением $E_n(f)_X$ мы будем рассматривать также величину

$$\|f - Af\|_X,$$

где A — заданный линейный оператор, отображающий X в F_{2n-1}^T. Этот оператор можно рассматривать как некоторый линейный метод приближения.

Пусть, как и выше, $f(x)$ есть свертка, т. е.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (f = K * \varphi),$$

где $K \in L$, $\varphi \in H_p^s$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$, т. е. $\varphi \in L_p$, $\|\varphi\|_p \leqslant 1$ и при $s \geqslant 1$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \begin{matrix}\sin kt\\ \cos kt\end{matrix}\,dt = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Ряд Фурье функции $\varphi \in H_p^s$ имеет вид

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=s}^{\infty}{}' (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где штрих при знаке $\sum$ означает, что в случае $s=0$, т. е. $\varphi \in H_p^0$,

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

С помощью системы чисел

$$\{\mu, \nu\} = \{\mu_s, \mu_{s+1}, \ldots, \mu_{n-1}; \nu_s, \nu_{s+1}, \ldots, \nu_{n-1}\} \qquad (\nu_0 = 0)$$

приведем в соответствие свертке $f = K*\varphi$ тригонометрический полином

$$U_{ns}(f; x; \mu, \nu) = \\ = \sum_{k=s}^{n-1}{}' \{\mu_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \nu_k (a_k \sin kx - b_k \cos kx)\} \tag{4.35}$$

(штрих означает, что при $s=0$ слагаемое с нулевым индексом имеет вид $\mu_0 a_0/2$). Заметим, что a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции φ.

Так как

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(x-t)\, \varphi(t)\, dt,$$

$$a_k \sin kx - b_k \cos kx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin k(x-t)\, \varphi(t)\, dt,$$

то

$$U_{ns}(f; x; \mu, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ns}(x-t; \mu, \nu)\, \varphi(t)\, dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q_{ns}(t; \mu, \nu)\, \varphi(x-t)\, dt, \tag{4.36}$$

где

$$Q_{n0}(t;\ \mu,\ \nu)=\frac{\mu_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(\mu_k\cos kt+\nu_k\sin kt),$$

$$Q_{ns}(t;\ \mu,\ \nu)=\sum_{k=s}^{n-1}(\mu_k\cos kt+\nu_k\sin kt)\quad(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Если $f_1=K*\varphi_1$, $f_2=K*\varphi_2$, то, очевидно,

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=K*(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2),$$

и потому

$$U_{ns}(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2;\ x;\ \mu,\ \nu)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}Q_{ns}(x-t;\ \mu,\ \nu)\,[\lambda_1\varphi_1(t)+\lambda_2\varphi_2(t)]\,dt=$$
$$=\lambda_1 U_{ns}(f_1;\ x;\ \mu,\ \nu)+\lambda_2 U_{ns}(f_2,\ x;\ \mu,\ \nu).$$

Это значит, что $U_{ns}(\mu,\ \nu)$ есть линейный оператор, отображающий множество сверток в тригонометрическое подпространство F_{2n-1}^T. В предположении, что $f=K*\varphi$ и $f\in X$, положим

$$\mathscr{E}_n(K*H_p^s;\ \mu,\ \nu)_X=\sup_{\varphi\in H_p^s}\|f-U_{ns}(f;\ \mu,\ \nu)\|_X. \tag{4.37}$$

Эта величина характеризует погрешность приближения методом, задаваемым системой $\{\mu,\ \nu\}$ на всем классе сверток $K*H_p^s$. Метод $U_{ns}(\mu^0,\ \nu^0)$, определяемый коэффициентами

$$\{\mu^0,\ \nu^0\}=\{\mu_s^0,\ \mu_{s+1}^0,\ \ldots,\ \mu_{n-1}^0;\ \nu_s^0,\ \nu_{s+1}^0,\ \ldots,\ \nu_{n-1}^0\},$$

для которого

$$\mathscr{E}_n(K*H_p^s;\ \mu^0,\ \nu^0)_X=\inf_{\mu,\ \nu}\mathscr{E}_n(K*H_p^s;\ \mu,\ s)_X,$$

естественно назвать наилучшим для класса $K*H_p^s$ среди всех методов такого типа. Линейный метод, определяемый оператором $U_{ns}(\mu,\ \nu)$, мы будем называть $(\mu,\ \nu)_s$-методом.

Предложение 4.4.1. *При каждом фиксированном n 1, 2, ... для класса $K*H_p^s$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ существует наилучший $(\mu,\ \nu)_s$-метод.*

Доказательство. Покажем сначала, что

$$F(\mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{E}_n(K*H_p^s;\ \mu, \nu)_X$$

есть непрерывная функция векторных аргументов μ и ν. Действительно, полином $U_{ns}(f;\ x;\ \mu, \nu)$ непрерывно зависит от вектора $\{\mu, \nu\}$, а так как норма есть непрерывная функция своего аргумента, то $\|f - U_{ns}(f;\ \mu, \nu)\|_X$ также непрерывно зависит от $\{\mu, \nu\}$ при фиксированной функции f. Затем, используя представление (4.36), будем иметь для двух векторов $\{\mu, \nu\}$ и $\{\mu', \nu'\}$ (см. § Д. 2, п. 4)

$$|F(\mu, \nu) - F(\mu', \nu')| =$$
$$= \Big|\sup_{f \in K*H_p^s} \|f - U_{ns}(f;\ \mu, \nu)\|_X - \sup_{f \in K*H_p^s} \|f - U_{ns}(f;\ \mu', \nu')\|_X\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{f \in K*H_p^s} \big|\|f - U_{ns}(f;\ \mu, \nu)\|_X - \|f - U_{ns}(f;\ \mu', \nu')\|_X\big| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{f \in K*H_p^s} \|U_{ns}(f;\ \mu, \nu) - U_{ns}(f;\ \mu', \nu')\|_X =$$
$$= \sup_{\varphi \in H_p^s} \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [Q_{ns}(t;\ \mu, \nu) - Q_{ns}(t;\ \mu', \nu')]\, \varphi(x - t)\, dt \right\|_X.$$

Теперь общие неравенства для сверток с непрерывным ядром позволяют написать

$$|F(\mu, \nu) - F(\mu', \nu')| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\varphi \in H_p^s} \frac{1}{\pi} \|Q_{ns}(\mu, \nu) - Q_{ns}(\mu', \nu')\|_X \|\varphi\|_L \leqslant$$
$$\leqslant 2\|Q_{ns}(\mu, \nu) - Q_{ns}(\mu', \nu')\|_X,$$

ибо в силу неравенства Гельдера для $\varphi \in H_p^s$ будет

$$\|\varphi\|_L = \int_0^{2\pi} |\varphi|\, dt \leqslant \|\varphi\|_p \|1\|_{p'} \leqslant 2\pi.$$

Таким образом, непрерывность $F(\mu, \nu)$ следует из непрерывности нормы полинома $Q_{ns}(t;\ \mu, \nu)$ относительно вектора $\{\mu, \nu\}$.

Теперь заметим, что мы можем брать в расчет лишь те векторы $\{\mu, \nu\}$, для которых, например,

$$\left|F(\mu, \nu) - \inf_{\mu, \nu} F(\mu, \nu)\right| < 1$$

и, значит, $|F(\mu, \nu)| \leqslant c$, где c — некоторая константа. Но тогда существует постоянная c_1 такая, что

$$|\mu_k| \leqslant c_1, \quad |\nu_k| \leqslant c_1 \qquad (k=s,\ s+1,\ \ldots,\ n-1).$$

Это значит, что векторы $\{\mu, \nu\}$, для которых $|F(\mu, \nu)| \leqslant c$, образуют замкнутое ограниченное множество в конечномерном пространстве. Остается вспомнить, что непрерывная функция $F(\mu, \nu)$ конечного числа переменных на замкнутом ограниченном множестве достигает своего минимума в некоторой точке $\{\mu^0, \nu^0\}$.

Возвращаясь к величине (4.37), заметим, что для любых $\{\mu, \nu\}$

$$\mathcal{E}_n(K*H_p^s;\ \mu,\ \nu)_X \geqslant E_n(K*H_p^s)_X = \sup_{\varphi \in H_p^s} E_n(f)_X,$$

и особый интерес представляют те случаи, когда наилучший $(\mu, \nu)_s$-метод дает на классе наилучшее приближение, т. е.

$$\inf_{\mu,\nu} \mathcal{E}_n(K*H_p^s;\ \mu,\ \nu)_X = \mathcal{E}_n(K*H_p^s;\ \mu^0,\ \nu^0)_X = E_n(K*H_p^s)_X.$$

Теорема 4.4.2. *Если $K \in M$, то $(\mu, \nu)_s$-метод является наилучшим для класса сверток $K*H_p^s$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty;$ $s=0, 1, \ldots, (n-1))$ в метрике C в том и только в том случае, если $\{\mu, \nu\}$ есть система $\{\mu^0, \nu^0\}$ соответствующих коэффициентов тригонометрического полинома*

$$T_n^0(t) = \frac{\mu_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\mu_k^0 \cos kt + \nu_k^0 \sin kt),$$

обращающего в минимум интеграл

$$\int_0^{2\pi} |K(t) - T_n(t)|^{p'}\, dt \qquad (1/p + 1/p' = 1).$$

При этом

$$\mathcal{E}_n(K*H_p^s;\ \mu^0,\ \nu^0)_C = \inf_{\mu,\nu} \mathcal{E}_n(K*H_p^s;\ \mu,\ \nu)_C = \frac{1}{\pi} E_n(K)_{p'}.$$

В случае $p=\infty$ утверждение теоремы справедливо и при $K \in L$.

Доказательство. Используя представление полинома $U_{ns}(f;\ x;\ \mu,\ \nu)$ в виде свертки (4.36), можем написать

$$f(x)-U_{ns}(f;\ x;\ \mu,\ \nu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[K(x-t)-Q_{ns}(x-t;\ \mu,\ \nu)]\,\varphi(t)\,dt. \tag{4.38}$$

Если $s=0$, т. е. $\varphi\in L_p$ и $\|\varphi\|_p\leqslant 1$, то в силу соотношения (Д.12) и того факта, что вместе с $\varphi(t)$ классу H_p^0 принадлежит также и $\varphi(x-t)$, будем иметь при $K\in M$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_n(K*H_p^0;\ \mu,\ \nu)_C&=\sup_{\|\varphi\|_p\leqslant 1}\max_x\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[K(t)-Q_{n0}(t;\ \mu,\ \nu)]\,\varphi(x-t)\,dt\right|=\\&=\sup_{\|\varphi\|_p\leqslant 1}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[K(t)-Q_{n0}(t;\ \mu,\ \nu)]\,\varphi(t)\,dt\right|=\\&=\frac{1}{\pi}\|K-Q_{n0}(\mu,\ \nu)\|_{p'}\geqslant\frac{1}{\pi}E_n(K)_{p'}.\end{aligned}$$

Если же $1\leqslant s\leqslant n-1$, то аналогичную оценку получим, используя соотношение двойственности (4.18)

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_n(K*H_p^s;\ \mu,\ \nu)_C&=\max_x\sup_{\varphi\in H_p^s}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}[K(t)-Q_{ns}(t;\ \mu,\ \nu)]\,\varphi(x-t)\,dt\right|=\\&=\frac{1}{\pi}\min_{T_s}\|K-Q_{ns}(\mu,\ \nu)-T_s\|_{p'}=\\&=\frac{1}{\pi}\|K-Q_{ns}(\mu,\ \nu)-T_s^0\|_{p'}\geqslant\frac{1}{\pi}E_n(K)_{p'}.\end{aligned}$$

Итак, в предположении $K\in M$

$$\mathscr{E}_n(K*H_p^s;\ \mu,\ \nu)_C\geqslant\frac{1}{\pi}E_n(K)_{p'},$$

причем ясно, что знак равенства здесь имеет место лишь в том случае, если полином Q_{n0}, или при $1\leqslant s\leqslant n-1$ $Q_{ns}+T_s^0$, тождественно совпадает с полиномом T_n^0 наилучшего приближения функции K в метрике $L_{p'}$. Но тогда коэффициенты μ_k и ν_k $(k=s,\ s+1,\ \ldots,\ n-1)$ должны совпадать с соответствующими коэффициентами полинома T_n^0.

Если $p=\infty$, т. е. $p'=1$, то свертка $f(x)$ непрерывна и при $K \in L$, так что все рассуждения тоже проходят, и мы получим

$$\mathscr{E}_n(K*H_M^s;\ \mu^0,\ \nu^0)_C = \inf_{\mu,\nu} \mathscr{E}_n(K*H_M^s;\ \mu,\ \nu)_C = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L.$$

Теорема 4.4.3. *Если ядро $K \in L$ и удовлетворяет условию A_n^*, то $(\mu,\ \nu)_s$-метод является наилучшим в метрике C для класса $K*H_M^s$ и в метрике L для класса $K*H_L^s$ $(0 \leqslant s \leqslant n-1)$, если он определяется вектором $\{\mu^*,\ \nu^*\}$ коэффициентов тригонометрического полинома T_n^* из условия A_n^*. При этом*

$$\mathscr{E}_n(K*H_M^s;\ \mu^*,\ \nu^*)_C = \inf_{\mu,\nu} \mathscr{E}_n(K*H_M^s;\ \mu,\ \nu)_C = \\ = E_n(K*H_M^s)_C = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L, \quad (4.39)$$

$$\mathscr{E}_n(K*H_L^s;\ \mu^*,\ \nu^*)_L = \inf_{\mu,\nu} \mathscr{E}_n(K*H_L^s;\ \mu,\ \nu)_L = \\ = E_n(K*H_L^s)_L = \frac{1}{\pi} E_n(K_L). \quad (4.40)$$

Утверждение теоремы 4.4.3 для классов $K*H_M^s$ немедленно вытекает из теоремы 4.4.2 (при $p=\infty$) и соотношений (4.27), если учесть, что T_n^* есть полином наилучшего приближения ядра $K(t)$ в метрике L.

Что касается классов $K*H_L^s$, то оценка снизу в связи с (4.28) очевидна:

$$\mathscr{E}_n(K*H_L^s;\ \mu,\ \nu)_L \geqslant E_n(K*H_L^s)_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L \quad (0 \leqslant s \leqslant n-1). \quad (4.41)$$

Покажем, что при $\{\mu,\ \nu\} = \{\mu^*,\ \nu^*\}$ здесь будет знак равенства. Если $s=0$, то

$$Q_{n0}(t;\ \mu^*,\ \nu^*) \equiv T_n^*(t)$$

и, оценивая норму свертки

$$f(x) - U_{n0}(f;\ x;\ \mu^*,\ \nu^*) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [K(x-t) - T_n^*(x-t)]\varphi(t)\,dt$$

в метрике L с помощью неравенства (4.4), будем иметь для любой $\varphi \in H_L^0$:

$$\|f-U_{n0}(f;\ \mu^*,\ \nu^*)\|_L \leqslant \frac{1}{\pi}\|K-T_n^*\|_L\|\varphi\|_L \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\|K-T_n^*\|_L = \frac{1}{\pi}E_n(K)_L,$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_n(K*H_L^0;\ \mu^*,\ \nu^*)_L \leqslant \frac{1}{\pi}E_n(K)_L.$$

Пусть теперь $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Заметим, что вместе с $K(t)$ условию A_n^* удовлетворяет и ядро свертки (4.38), т. е. функция $K_1(t)=K(t)-Q_{ns}(t;\ \mu,\ \nu)$, ибо

$$K_1(t)-[T_n^*(t)-Q_{ns}(t;\ \mu,\ \nu)] \equiv K(t)-T_n^*(t)$$

и полином $T_n^*-Q_{ns}$ обладает относительно $K_1(t)$ всеми свойствами, предусмотренными условием A_n^*. С учетом этого факта, а также соотношения (4.20) будем иметь

$$\mathscr{E}_n(K*H_L^s;\ \mu^*,\ \nu^*)_L = \sup_{\varphi\in H_L^s}\|f-U_{ns}(f;\ \mu^*,\ \nu^*)\|_L =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_M\leqslant 1} E_s(f-U_{ns}(f;\ \mu^*,\ \nu^*))_M \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\varphi\|_M\leqslant 1}\|f-U_{ns}(f;\ \mu^*,\ \nu^*)-\tau_s\|_M, \tag{4.42}$$

где полином $\tau_s(x)$ степени $s-1$ определен равенством

$$\tau_s(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\mu_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{s-1}(\mu_k^*\cos k(x-t)+\nu_k^*\sin k(x-t))\right]\varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[T_n^*(x-t)-Q_{ns}(x-t;\ \mu^*,\ \nu^*)]\,\varphi(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$f(x)-U_{ns}(f;\ x;\ \mu^*,\ \nu^*)-\tau_s(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[K(x-t)-T_n^*(x-t)]\,\varphi(t)\,dt,$$

и, продолжая в (4.42) оценку, будем иметь

$$\mathscr{E}_n(K * H_L^s;\ \mu^*,\ \nu^*)_L \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \max_x \sup_{\|\varphi\|_M \leqslant 1} \left| \int_0^{2\pi} [K(x-t) - T_n^*(x-t)]\,\varphi(t)\,dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \max_x \int_0^{2\pi} |K(x-t) - T_n^*(x-t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \|K - T_n^*\|_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L.$$

Итак, имеет место оценка

$$\mathscr{E}_n(K * H_L^s,\ \mu^*,\ \nu^*)_L \leqslant \frac{1}{\pi} E_n(K)_L \qquad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

сопоставив которую с (4.41), получим все утверждения теоремы 4.4.3 для классов $K * H_L^s$.

ГЛАВА 5

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ r-й ПРОИЗВОДНОЙ

Важными классами функций, представимых в виде свертки, *являются классы дифференцируемых периодических* функций. В этой главе будет получен ряд точных результатов по приближению тригонометрическими полиномами классов функций, задаваемых ограничениями на норму r-й производной в той или иной метрике. Большинство из этих результатов непосредственно вытекает из доказанных в главе 4 общих теорем о приближении сверток, но некоторые базируются, кроме того, на теореме сравнения Колмогорова. Этой теореме и вытекающим из нее важным следствиям — они потребуются нам и в следующих главах — посвящен отдельный параграф.

В начале главы вводятся классы функций, а также аппарат функций Стеклова, которым мы в дальнейшем будем широко пользоваться.

§ 5.1. Классы дифференцируемых функций

Через X мы по-прежнему будем обозначать пространство L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ или C, а через X^r $(r = 1, 2, \ldots)$ — множество r-х периодических интегралов от функций из X. Поясним: X^1 есть множество неопределенных интегралов Лебега

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt + c \qquad (|x| < \infty),$$

где $\varphi \in X$, причем $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0$, так что $f(x+2\pi) = f(x)$; аналогично, имея X^{r-1}, определяем X^r. Таким образом, C^r есть множество r раз непрерывно дифференцируемых на всей оси 2π-периодических функций, а L_p^r — совокупность заданных на всей оси функций $f(x)$ периода 2π, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(x)$ локально абсолютно непрерывна *) на $[0, 2\pi]$, а $f^{(r)} \in L_p$. Вместо L_1^r будем писать L^r.

Пусть $f \in L^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{5.1}$$

— ряд Фурье функции f. Так как

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k(x-t)\, dt$$

то, интегрируя r раз по частям, с учетом периодичности $f(x)$ и ее производных, будем иметь

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} f'(t) \sin k(x-t)\, dt = \\ &= -\frac{1}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} f''(t) \cos k(x-t)\, dt = \\ &= -\frac{1}{\pi k^3} \int_0^{2\pi} f'''(t) \sin k(x-t)\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi k^4} \int_0^{2\pi} f^{(4)}(t) \cos k(x-t)\, dt = \ldots, \end{aligned}$$

так что

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi k^r} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \cos\left[k(x-t) - \frac{\pi r}{2}\right] dt. \tag{5.2}$$

Подставив в (5.1) и учитывая, что ряд Фурье можно интегрировать почленно, получим для $f(x)$ интегральное представление

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_r(x-t) f^{(r)}(t)\, dt, \tag{5.3}$$

*) Везде в дальнейшем, говоря об абсолютной непрерывности заданных на всей оси функций, мы имеем в виду локальную абсолютную непрерывность, т. е. абсолютную непрерывность на любом конечном отрезке (для 2π-периодических функций — на $[0, 2\pi]$).

где

$$D_r(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(ku-\frac{\pi r}{2}\right)}{k^r}\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots)$$

— функции Бернулли, рассмотренные в § 3.5.

Через $E_n(f)_X$, как и в главе 4, обозначаем наилучшее приближение функции $f\in X$ тригонометрическими полиномами $T_n(t)$ порядка $n-1$:

$$E_n(f)_X=E(f,\ F^T_{2n-1})_X=\inf_{T_n\in F_{2n-1}}\|f-T_n\|_X.$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций из X, то полагаем

$$E_n(\mathfrak{M})_X=\sup_{f\in\mathfrak{M}}E_n(f)_X$$

и

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X=\inf_{AX\subset F^T_{2n-1}}\ \sup_{f\in\mathfrak{M}}\|f-Af\|_X,$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам A, отображающим X в F^T_{2n-1}.

Так как подпространство F^T_{2n-1} содержит константу, то

$$E_n(f+c)_X=E_n(f)_X,\tag{5.4}$$

где c — любая постоянная. Поэтому везде в дальнейшем, где речь будет идти о наилучшем приближении $E_n(f)_X$ функции (5.3), мы можем считать, что $a_0=0$, т. е. рассматривать только те функции $f\in L^r$, которые представимы в виде свертки:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}D_r(x-t)\,f^{(r)}(t)\,dt\qquad (f=D_r*f^{(r)}).\tag{5.5}$$

Обозначим через $W^r_{L_p}$ $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ класс функций f из L^r_p, у которых $\|f^{(r)}\|_p\leqslant 1$. При каждом $n=1,\ 2,\ \ldots$ в классе $W^r_{L_p}$ выделим подкласс $W^rH^n_{L_p}=W^rH^n_p$ функций $f\in W^r_{L_p}$, ортогональных тригонометрическим полиномам $T_n(t)$ порядка $n-1$, т. е. таких, что

$$\int_0^{2\pi}f(t)_{\sin kt}^{\cos kt}\,dt=0\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).\tag{5.6}$$

Под $H_{L_p}^n = H_p^n$ будем понимать множество функций $f \in L_p$ с нормой $\|f\|_p \leq 1$, удовлетворяющих соотношениям (5.6).

Заметим, что если $f \in W^r H_p^n$ $(r = 1, 2, \ldots)$, то

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5.7}$$

ибо, как следует из (5.6), коэффициенты Фурье функции f с индексами, меньшими n, равны нулю.

Но тогда ряд Фурье r-й производной $f^{(r)}(x)$, который получается формальным дифференцированием ряда (5.7), также не содержит соответствующих членов, т. е. $f^{(r)}(x)$ тоже ортогональна всем полиномам $T_n(x)$, и, значит, $f^{(r)} \in H_p^n$. Обратно, если $f \in W_{L_p}^r$, $f^{(r)} \in H_p^n$ и

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0,$$

то $f \in W^r H_p^n$. Таким образом, класс $W^r H_p^n$ мы можем представлять в виде

$$W^r H_p^n = D_r * H_p^n. \tag{5.8}$$

Если через $W_{L_p}^{r,0}$ обозначить множество функций $f \in W_{L_p}^r$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$, то для $f \in W_{L_p}^{r,0}$ имеет место представление (5.5) и, следовательно,

$$W_{L_p}^{r,0} = D_r * H_p^1,$$

ибо $f^{(r)}$, как производная периодической функции, также имеет нулевое среднее значение на периоде.

Теперь, с учетом сделанного выше замечания, связанного с равенством (5.4), мы можем написать

$$E_n\left(W_{L_p}^r\right)_X = E_n\left(W_{L_p}^{r,0}\right)_X = E_n\,(D_r * H_p^1)_X. \tag{5.9}$$

Введем в рассмотрение еще классы, задаваемые ограничениями на вариацию функции или ее производных. Пусть V — множество 2π-периодических функций $f(t)$, имеющих ограниченную вариацию (ограниченное изменение) на отрезке $[0, 2\pi]$, а V^r $(r = 1, 2, \ldots)$ — множество функций f периода 2π, у которых $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in V$; V^0 будем отождествлять с V. Через

W^r_V $(r=0,\ 1,\ \ldots)$ обозначим класс функций $f\in V_r$, у которых

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f^{(r)})\leqslant 1.$$

Ясно, что

$$W^r_L\subset W^{r-1}_V\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots),$$

ибо, если $f\in W^r_L$, то

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f^{(r-1)})=\int\limits_0^{2\pi}|f^{(r)}(t)|\,dt\leqslant 1.$$

Добавим к этому, что $W^rH^n_L\subset W^{r-1}H^n_V$, где $W^{r-1}H^n_V$ есть подкласс функций $f\in W^{r-1}_V$, удовлетворяющих (5.6).

§ 5.2. Функции Стеклова и их простейшие свойства

Если $f\in L$, то функцию

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}f(x+t)\,dt\qquad (h>0)$$

называют *функцией Стеклова* для $f(x)$. Очевидно, что $f_h(x)$ можно записать также в виде

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}f(t)\,dt,$$

откуда видно, что $f_h(x)$ абсолютно непрерывна и, следовательно, почти всюду

$$[f_h(x)]'=\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)].$$

На рис. 4 приведена функция Стеклова для $f(x)=$ $=\operatorname{sign}\sin x$.

Заметим, что если сама функция f абсолютно непрерывна, то $f'\in L$ и

$$[f'(x)]_h=\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}f'(t)\,dt=\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)],$$

так что с точностью до множества меры нуль

$$[f_h(x)]'=[f'(x)]_h,$$

и мы можем в этом случае писать $f'_h(x)$, допуская, что операции дифференцирования и перехода к функции Стеклова могут выполняться в любой последовательности.

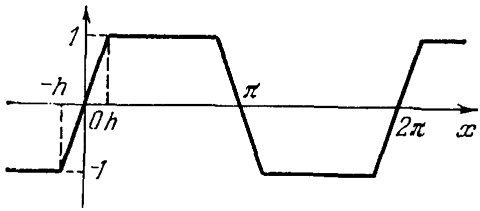

Рис. 4. Функция Стеклова для $f(x)=\operatorname{sign}\sin x$.

Предложение 5.2.1. *Если* $f\in L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, *то*

$$\|f_h\|_p\leqslant\|f\|_p, \tag{5.10}$$

$$\lim_{h\to 0}\|f_h-f\|_p=0. \tag{5.11}$$

В силу обобщенного неравенства Минковского (§ Д.1)

$$\|f_h\|_p=\left\{\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+t)\,dt\right|^p dx\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+t)|^p\,dx\right\}^{1/p}dt=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\|f(\cdot+t)\|_p\,dt=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\|f\|_p\,dt=\|f\|_p$$

и (5.10) доказано. Далее, опять же используя обобщенное неравенство Минковского, будем иметь

$$\|f_h-f\|_p=\left\{\int_0^{2\pi}|f_h-f|^p\,dx\right\}^{1/p}=$$

$$=\left\{\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}[f(x+t)-f(x)]\,dt\right|^p dx\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}dt=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_p\,dt.$$

Теперь сразу получим (5.11), если воспользоваться хорошо известной в теории функций теоремой Лебега *), которая утверждает, что для любой функции $f \in L_p$ (Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], стр. 500)

$$\lim_{t \to 0} \| f(\cdot + t) - f(\cdot) \|_p = 0. \tag{5.12}$$

Основная идея доказательства соотношения (5.12) состоит в том, что для $f \in C$ оно тривиально, а в общем случае, так как C всюду плотно в L_p, то для любого $\varepsilon > 0$ есть функция $\varphi \in C$ такая, что

$$\| f - \varphi \|_p < \varepsilon$$

и, выбрав $\delta = \delta(\varepsilon)$ из условия

$$|t| < \delta \Rightarrow \| \varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot) \|_p < \varepsilon,$$

будем иметь для $|t| < \delta$

$$\| f(\cdot + t) - f(\cdot) \|_p \leq \| f(\cdot + t) - \varphi(\cdot + t) \|_p + \\ + \| \varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot) \|_p + \| \varphi(\cdot) - f(\cdot) \|_p < 3\varepsilon.$$

Заметим, что из (5.11) следует также соотношение

$$\lim_{h \to 0} \| f_h \|_p = \| f \|_p. \tag{5.13}$$

Предложение 5.2.2. *Если $g \in V$, то*

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}} (g_h) = \| g_h' \|_L \leq \overset{2\pi}{\underset{0}{V}} (g).$$

В самом деле, при любом разбиении

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 2\pi$$

будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} | g_h(t_k) - g_h(t_{k-1}) | =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} [g(t_k + t) - g(t_{k-1} + t)]\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left(\sum_{k=1}^{n} | g(t_k + t) - g(t_{k-1} + t) | \right) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \overset{t+2\pi}{\underset{t}{V}} (g)\, dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \overset{2\pi}{\underset{0}{V}} (g)\, dt = \overset{2\pi}{\underset{0}{V}} (g).$$

---

*) Собственно теоремой Лебега обычно называют это утверждение в случае $p = 1$.

Остается заметить, что $g_h(t)$ абсолютно непрерывна, и потому

$$\bigvee_0^{2\pi}(g_h) = \|g_h'\|_L.$$

Из предложения 5.2.2 следует, что если $g \in W_V^{r-1}$ $(r = 1, 2, \ldots)$, то $g_h \in W_L^r$, а если $g \in W^{r-1}H_V^n$, то $g_h \in W^r H_L^n$, ибо ортогональность тригонометрическим полиномам $T_n(t)$ функции g влечет (в силу определения g_h) ортогональность полиномам $T_n(t)$ и функции Стеклова g_h.

Дополнительные сведения о функциях Стеклова, связанные с понятием модуля непрерывности, будут отмечены в § 7.1.

§ 5.3. Результаты по наилучшему приближению классов $W_{L_p}^r$, вытекающие из общих теорем для сверток

В § 3.5 были отмечены некоторые свойства функций Бернулли $D_r(t)$, в частности то, что $D_1 \in M$, $D_r \in C^{r-2}$ $(r = 2, 3, \ldots)$ и $D_r(-t) = (-1)^r D_r(t)$. Было доказано, что при каждых n, $r = 1, 2, \ldots$ существует тригонометрический полином $\tilde{T}_{nr}(t)$ такой, что разность $D_r(t) - \tilde{T}_{nr}(t)$ меняет знак в нулях $\cos nt$ или $\sin nt$ (в зависимости от четности и нечетности r) и что других нулей эта разность не имеет. Это значит, что

$$\operatorname{sign}[D_r(t) - \tilde{T}_{nr}(t)] = \pm \operatorname{sign} \sin n(t - \xi_0),$$

где $\xi_0 = 0$ при r нечетном и $\xi_0 = \pi/(2n)$ при r четном, и следовательно, $D_r(t)$ удовлетворяет условию A_n^* при $n^* = n$ и $T_n^*(t) \equiv \tilde{T}_{nr}(t)$.

Таким образом, функция $D_r(t)$ удовлетворяет всем условиям, которые налагались на ядро свертки $K(t)$ при доказательстве теорем в главе 4, и все эти теоремы мы можем перенести на рассматриваемый теперь случай наилучшего приближения функций вида (5.5).

Наиболее существенные и, главное, окончательные результаты нам дадут те утверждения главы 4, которые сводят задачу к наилучшему приближению ядра $K(t)$ в метрике L, ибо эта последняя задача для $K(t) = D_r(t)$ решена нами в § 3.5.

Из теоремы 4.3.3, соотношений (5.8), (5.9) и (3.45) немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.3.1. *Для всех n, $r=1, 2, \ldots$ имеют место равенства*

$$E_n(W_M^r)_M = \sup_{f \in W^r H_M^n} \|f\|_M = \frac{1}{\pi} E_n(D_r)_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}, \qquad (5.14)$$

$$E_n(W_L^r)_L = \sup_{f \in W^r H_L^n} \|f\|_L = \frac{1}{\pi} E_n(D_r)_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}, \qquad (5.15)$$

где константа $\mathcal{K}_r$ определена равенством (3.44).

Теперь обратимся к общему соотношению (4.19). В нашем случае оно запишется в виде

$$E_n(D_r * H_p^0)_q = \sup_{f \in W^r H_{q'}^n} \|f\|_{p'} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right), \qquad (5.16)$$

но так как класс $W_{L_p}^{r,0} = D_r * H_p^1$ существенно уже класса $D_r * H_p^0$, то соотношения (5.9) и (5.16) дают для наилучшего приближения класса $W_{L_p}^r$ лишь оценку сверху:

$$E_n\left(W_{L_p}^r\right)_q = E_n\left(W_{L_p}^{r,0}\right)_q \leqslant \sup_{f \in W^r H_{q'}^n} \|f\|_{p'}. \qquad (5.17)$$

Однако в (5.17) мы сможем поставить знак равенства если справа $\|f\|_{p'}$ заменим на $E_1(f)_{p'}$, т. е. норму функции f заменим наилучшим приближением константой. Действительно, в силу (4.18)

$$E_n\left(W_{L_p}^r\right)_q = \sup_{f \in W_{L_p}^r} E_n(f)_q = \sup_{f \in W_{L_p}^r} \sup_{h \in H_{q'}^n} \int_0^{2\pi} fh\, dt.$$

Проинтегрировав r раз по частям и учитывая, что $f^{(r)} \in H_p^1$, а r-й интеграл от h можно взять с нулевым средним значением на периоде, и тогда он принадлежит $W^r H_{q'}^n$, будем иметь

$$E_n\left(W_{L_p}^r\right)_q = \sup_{g \in W^r H_{q'}^n} \sup_{\psi \in H_p^1} \int_0^{2\pi} g(t)\, \psi(t)\, dt.$$

Теперь то же соотношение (4.18) позволяет написать равенство

$$E_n\left(W^r_{L_p}\right)_q = \sup_{g \in W^r H^n_{q'}} E_1(g)_{p'} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right), \tag{5.18}$$

из которого, между прочим, следует (5.17), *ибо* $E_1(g)_{p'} \leqslant \|g\|_{p'}$.

Так как $D_r \in M$, то в силу предложения 4.3.1

$$\sup_{f \in W^r H^n_{q'}} \|f\|_C = \frac{1}{\pi} E_n(D_r)_q,$$

что вместе с (5.17) при $p=1$ дает оценку

$$E_n\left(W^r_L\right)_q \leqslant \frac{1}{\pi} E_n(D_r)_q.$$

Наконец, заметим, что из (4.24) и (3.45) вытекает соотношение

$$E_n\left(W^r_{L_p}\right)_p \leqslant \frac{1}{\pi} E_n(D_r)_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}, \tag{5.19}$$

в котором, как это видно из (5.14) и (5.15), при $p=1$ и $p=\infty$ будет знак равенства.

Привлекая к рассмотрению классы W^r_V, докажем следующее утверждение общего характера, полагая, как и в главе 1,

$$E(\mathfrak{M}, F)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E(f, F)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{\varphi \in F} \|f - \varphi\|_X.$$

Предложение 5.3.2. *Если F — любое подпространство из L, то*

$$E\left(W^{r-1}_V, F\right)_L = E\left(W^r_L, F\right)_L \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{5.20}$$

Действительно, из включения $W^r_L \subset W^{r-1}_V$ сразу следует, что

$$E\left(W^r_L, F\right)_L \leqslant E\left(W^{r-1}_V, F\right)_L.$$

С другой стороны, если $f \in W^{r-1}_V$, то ее функция Стеклова $f_h \in W^r_L$, и потому

$$E(f_h, F)_L \leqslant E\left(W^r_L, F\right)_L.$$

В силу предложения 1.2.1

$$E(f, F)_L \leqslant E(f - f_h, F)_L + E(f_h, F)_L \leqslant \|f - f_h\|_L + E(f_h, F)_L,$$

так что

$$E(f, F)_L \leqslant \|f - f_h\|_L + E(W^r_L, F)_L.$$

В пределе при $h \to 0$, ввиду (5.11), будет $E(f, F)_L \leqslant E(W^r_L, F)_L$, а так как это справедливо для любой $f \in W^{r-1}_V$, то

$$E(W^{r-1}_V, F)_L \leqslant E(W^r_L, F)_L,$$

и (5.20) доказано.

Из предложения 5.3.2 и соотношений (5.15) сразу следует, что

$$E_n(W^{r-1}_V)_L = E_n(W^r_L)_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n, r = 1, 2, \ldots).$$

Используя тот же прием, связанный с переходом к функциям Стеклова, легко доказать, что

$$\sup_{f \in W^{r-1}H^n_V} \|f\|_L = \sup_{f \in W^r H^n_L} \|f\|_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n, r = 1, 2, \ldots);$$

поэтому

$$E_n(W^{r-1}_V)_L = \sup_{f \in W^{r-1}H^n_V} \|f\|_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n, r = 1, 2, \ldots). \qquad (5.21)$$

§ 5.4. Функции $\varphi_{\lambda r}$ и g_{nr} и их экстремальные свойства

В соотношениях (5.14) и (5.21) верхние грани реализуют функции, которые будут играть важную роль и в следующих главах.

При любом $\lambda > 0$ положим

$$\varphi_{\lambda 0}(x) = \operatorname{sign} \sin \lambda x = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin (2\nu+1)\lambda x}{2\nu+1},$$

$$\varphi_{\lambda r}(x) = \int_{\pi/2\lambda}^{x} \varphi_{\lambda, r-1}(t)\,dt = \frac{4}{\pi\lambda^r}(-1)^{(r+1)/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos (2\nu+1)\lambda x}{(2\nu+1)^{r+1}} \qquad (5.22)$$

$$(r = 2i+1,\ i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{\lambda r}(x) = \int_{0}^{x} \varphi_{\lambda, r-1}(t)\,dt = \frac{4}{\pi\lambda^r}(-1)^{r/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin (2\nu+1)\lambda x}{(2\nu+1)^{r+1}} \qquad (5.23)$$

$$(r = 2i,\ i = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, при $r \geqslant 1$ $\varphi_{\lambda r}(x)$ есть r-й интеграл от $\varphi_{\lambda 0}$ с периодом $2\pi/\lambda$ и средним значением на периоде, равным нулю.

Из равенств (5.22) и (5.23) легко усмотреть, что при r четном функция $\varphi_{\lambda r}(x)$ обращается в нуль в точках $j\pi/\lambda$ ($j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и график ее симметричен относительно этих точек и прямых $x=(2j+1)\pi/2\lambda$, а при r нечетном $\varphi_{\lambda r}[(2j+1)\pi/2\lambda]=0$ ($j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и график $\varphi_{\lambda r}(x)$

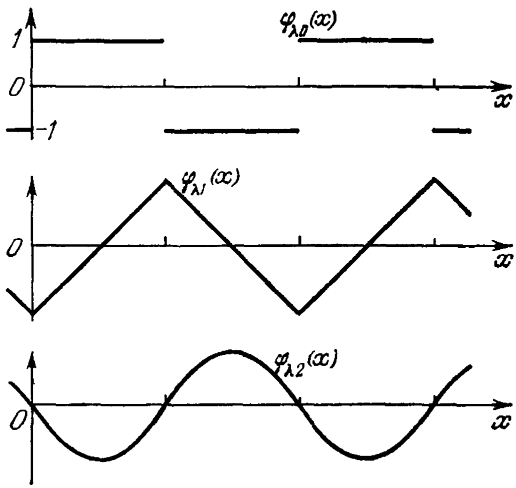

Рис. 5. Функции $\varphi_{\lambda r}(x)$ ($r=0, 1, 2$).

симметричен относительно точек $((2j+1)\pi/2\lambda, 0)$ и прямых $x=j\pi/\lambda$ (рис. 5). Вид функции $\varphi_{\lambda 0}(x)$ и рекуррентные соотношения в (5.22) и (5.23) показывают, что других нулей функции $\varphi_{\lambda r}(x)$ не имеют и что $\varphi_{\lambda r}(x)$ строго монотонна между нулями своей производной, а график $\varphi_{\lambda r}(x)$ является выпуклым на каждом промежутке, где $\varphi_{\lambda r}$ сохраняет знак (при $r \geqslant 2$ — строго выпуклым).

Полагая для ограниченной на всей оси функции f

$$\|f\|_M = \sup_{|x|<\infty} |f(x)|,$$

из отмеченных выше свойств $\varphi_{\lambda r}(x)$ и равенств (5.22) и (5.23) выводим соотношения

$$\|\varphi_{\lambda r}\|_M = |\varphi_{\lambda r}(0)| = \frac{4}{\pi\lambda^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}} \qquad (r=1,\ 3,\ 5,\ \ldots),$$

$$\|\varphi_{\lambda r}\|_M = \left|\varphi_{\lambda r}\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)\right| = \frac{4}{\pi\lambda^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}} \qquad (r=2,\ 4,\ 6,\ \ldots).$$

Таким образом,

$$\|\varphi_{\lambda r}\|_M = \frac{\mathcal{K}_r}{\lambda^r} \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{5.24}$$

где константы $\mathcal{K}_r$ определены равенством (3.44).

Из (5.24) следует, что при $k=0,\ 1,\ \ldots,\ r$

$$\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_M = \frac{\mathcal{K}_{r-k}}{\lambda^{r-k}} = \frac{\mathcal{K}_{r-k}}{\mathcal{K}_r^{1-k/r}}\left(\frac{\mathcal{K}_r}{\lambda^r}\right)^{1-k/r} = \frac{\mathcal{K}_{r-k}}{\mathcal{K}_r^{1-k/r}}\|\varphi_{\lambda r}\|_M^{1-k/r}.$$

Так как

$$\varphi_{\lambda r}^{(k)}(x) = \varphi_{\lambda,r-k}(x) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r),$$

то мы можем сформулировать следующее утверждение:

Предложение 5.4.1. *Имеют место соотношения*

$$\|\varphi_{\lambda r}^{(k)}\|_M = \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_M = c_{rk}\|\varphi_{\lambda r}\|_M^{1-k/r} \tag{5.25}$$
$$(r=1,\ 2,\ \ldots;\ k=1,\ \ldots,\ r),$$

где

$$c_{rk} = \mathcal{K}_{r-k}/\mathcal{K}_r^{1-k/r},$$

а константы $\mathcal{K}_r$ *определены в* (3.44)

Через $\varphi_{nr}(x)$ будем обозначать функции $\varphi_{\lambda r}(x)$ в случае, когда $\lambda = n$ — целое число >0. Функции $\varphi_{nr}(x)$ имеют период $2\pi/n$ и среднее значение на периоде, равное нулю. Так как

$$\|\varphi_{nr}^{(r)}\|_M = \|\varphi_{n0}\|_M = 1,$$

то $\varphi_{nr} \in W^rH_M^n$ и, как следует из (5.24),

$$\|\varphi_{nr}\|_C = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n,\ r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{5.26}$$

Из описанных выше свойств функций $\varphi_{\lambda r}$ следует, что на периоде $[0,\ 2\pi)$ есть $2n$ равноотстоящих точек, в которых функция $\varphi_{nr}(x)$ достигает своего наибольшего по абсолютной величине значения, чередуя знак. Такими точками являются $j\pi/n$ $(j=0, 1, \ldots, 2n-1)$ при r нечетном и $(2j+1)\pi/2n$ $(j=0, 1, \ldots, 2n-1)$ — при r четном. В силу критерия Чебышева среди всех тригонометрических полиномов порядка $n-1$ наилучшее приближение в метрике C функции φ_{nr} $(r=1, 2, \ldots)$ доставляет тождественный нуль. Поэтому $E_n(\varphi_{nr})_C=\|\varphi_{nr}\|_C$ и с учетом (5.14) и (5.26) приходим к равенствам

$$E_n(W_M^r)_C=E_n(\varphi_{nr})_C=\|\varphi_{nr}\|_C=\frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n, r=1, 2, \ldots), \tag{5.27}$$

$$\sup_{f\in W^rH_M^n}\|f\|_C=\|\varphi_{nr}\|_C=\frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n, r=1, 2, \ldots). \tag{5.28}$$

Таким образом, функция $\varphi_{nr}(x)$ реализует обе верхние грани в (5.14), т. е. дает максимальную погрешность наилучшего приближения в C среди всех функций класса W_M^r и одновременно имеет наибольшую норму в C среди функций класса $W^rH_M^n$.

Положим теперь

$$g_{nr}(x)=\frac{1}{4n}\varphi_{nr}(x) \qquad (n=1, 2, \ldots;\ r=0, 1, 2, \ldots).$$

Свойства функций g_{nr} совершенно аналогичны свойствам φ_{nr}; в частности, $g_{nr}(x)$ имеют период $2\pi/n$ и нулевое среднее значение на периоде; поэтому, с учетом равенств

$$\mathop{\mathrm{V}}_0^{2\pi}\left(g_{nr}^{(r)}\right)=\mathop{\mathrm{V}}_0^{2\pi}(g_{n0})=1$$

заключаем, что $g_{nr}\in W^rH_V^n\subset W_V^r$.

Вычислим норму g_{nr} в метрике L:

$$\|g_{nr}\|_L=\mathop{\mathrm{V}}_0^{2\pi}(g_{n,r+1})=4n\|g_{n,r+1}\|_C=\|\varphi_{n,r+1}\|_C=\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}},$$

т. е.

$$\|g_{n,r-1}\|_L=\frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (r=1, 2, \ldots).$$

Далее, функция $\operatorname{sign} g_{nr}(x)$ с точностью до знака совпадает либо с $\operatorname{sign}\sin nx$, либо с $\operatorname{sign}\cos nx$ (в зависимости от четности или нечетности r). В силу критерия 3.3.4 и ортогональности g_{nr} тригонометрическим полиномам порядка $n-1$ тождественный нуль и в метрике L является для $g_{nr}(x)$ (а значит, и для $\varphi_{nr}(x)$) полиномом наилучшего приближения среди всех тригонометрических полиномов $T_n(t)$. Это значит, что

$$E_n(g_{n,r-1})_L = \|g_{n,r-1}\|_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n,\ r=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.29}$$

Теперь ясно, что функция $g_{n,r-1}(x)$ реализует обе верхние грани в (5.21), т. е.

$$E_n(W_V^{r-1})_L = E_n(g_{n,r-1})_L = \|g_{n,r-1}\|_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\ (n,\ r=1,\ 2,\ \ldots), \tag{5.30}$$

$$\sup_{g \in W^{r-1}H_V^n} \|g\|_L = \|g_{n,r-1}\|_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\ (n,\ r=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.31}$$

Что касается класса W_L^r $(r=1,\ 2,\ \ldots)$, то в нем не существует функции, реализующей верхние грани в (5.15). Можно указать, как и при доказательстве соответствующих утверждений в теореме 4.3.3, лишь последовательность $\{f_m\} \subset W^rH_L^n$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} E_n(f_m)_L = \lim_{m\to\infty} \|f_m\|_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{5.32}$$

Действительно, привлекая аппарат функций Стеклова и положив (при фиксированных n и r)

$$f_m(x) = [g_{n,r-1}(x)]_{h_m} = \frac{1}{2h_m}\int_{-h_m}^{h_m} g_{n,r-1}(x+t)\,dt,$$

где $h_m = 1/m$, получим последовательность функций $\{f_m\} \subset \subset W^rH_L^n$, для которой $\|f_m\|_L = E_n(f_m)_L$ и при $m\to\infty$ $\|f_m\|_L \to \|g_{n,r-1}\|_L$, так что выполнены предельные соотношения (5.32).

§ 5.5. Наилучшие линейные методы для классов W_M^r, W_L^r и W_V^r

Мы могли бы, как и в § 5.2, где исследовалось наилучшее приближение, перенести на классы W_M^r и W_L^r результаты гл. 4 по наилучшим линейным методам. Однако, может быть, более поучительно будет вывести нужные факты, непосредственно рассматривая приближение функций этих классов с помощью тригонометрических полиномов

$$U_n(f;\ x;\ \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5.33}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье приближаемой функции $f(x)$, а $\lambda_k = \lambda_k(n)$ — числовые множители, находящиеся в нашем распоряжении.

Ясно, что полином $U_n(f;\ x;\ \lambda)$ линейно зависит от f и, таким образом, заданием коэффициентов λ_k мы задаем некоторый линейный метод приближения, который мы будем называть λ-методом. Положим

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M};\ \lambda)_X = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f - U_n(f;\ \lambda)\|_X,$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций, и заметим сразу, что при любом векторе коэффициентов $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}\}$

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M};\ \lambda)_X \geqslant E_n(\mathfrak{M})_X,$$

так что

$$\inf_\lambda \mathscr{E}_n(\mathfrak{M};\ \lambda)_X \geqslant E_n(\mathfrak{M})_X, \tag{5.34}$$

где X, как и прежде, есть пространство C или L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Если $f \in L^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$, то соотношение (5.2) позволяет записать полином $U_n(f;\ x;\ \lambda)$ в виде

$$U_n(f;\ x;\ \lambda) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{k^r} \left(\cos k(x-t) - \frac{\pi r}{2} \right) \right] f^{(r)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{k^r} \cos \left(kt - \frac{\pi r}{2} \right) \right] f^{(r)}(x-t)\, dt,$$

Учитывая (5.3), а также тот факт, что

$$\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\,dt = 0,$$

разность $f - U_n(f;\ \lambda)$ мы можем теперь представить следующим образом:

$$f(x) - U_n(f;\ x;\ \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[D_r(t) - \frac{\alpha_0}{2} - T_{nr}(t;\ \lambda)\right] f^{(r)}(x-t)\,dt, \tag{5.35}$$

где

$$T_{nr}(t;\ \lambda) = \begin{cases} (-1)^{r/2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\lambda_k}{k^r}\cos kt & (r=2i;\ i=1,\ 2,\ \ldots), \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\lambda_k}{k^r}\sin kt & (r=2i-1;\ i=1,\ 2,\ldots), \end{cases}$$

а α_0 — произвольное число, которое мы выберем позже.

Пусть $f \in L_p^r$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ r = 1,\ 2,\ \ldots)$, т. е. $f^{(r)} \in L_p$. Общее неравенство (4.5) для сверток применительно к (5.35) позволяет написать

$$\|f - U_n(f;\ \lambda)\|_p \leqslant \frac{1}{\pi}\left\|D_r - \frac{\alpha_0}{2} - T_{nr}(\lambda)\right\|_L \|f^{(r)}\|_p. \tag{5.36}$$

(При $p=\infty$ (5.36) получим, просто оценивая интеграл в (5.35) по абсолютной величине и заменив $|f^{(r)}(x-t)|$ на $\|f^{(r)}\|_M$.)

В правой части (5.36), которая дает оценку приближения λ-методом любой $f \in L_p^r$, только сомножитель $\|D_r - \alpha_0/2 - T_{nr}(\lambda)\|_L$ зависит от находящихся в нашем распоряжении коэффициентов $\alpha_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}$ и естественно их выбрать так, чтобы этот сомножитель имел минимальное значение.

Ясно, что всегда

$$\left\|D_r - \frac{\alpha_0}{2} - T_{nr}(\lambda)\right\|_L \geqslant E_n(D_r)_L = \|D_r - \tilde{T}_{nr}\|_L, \tag{5.37}$$

где $\tilde{T}_{nr}(t)$ — полином наилучшего приближения для D_r

в метрике L, построенный в § 3.5. Этот полином имеет вид

$$\tilde{T}_{nr}(t)=\begin{cases}\frac{\tilde{\mu}_{0r}}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\tilde{\mu}_{kr}\cos kt & (r=2i;\ i=1,\ 2,\ \ldots),\\ \sum\limits_{k=1}^{n-1}\tilde{\nu}_{kr}\sin kt & (r=2i-1;\ i=1,\ 2,\ldots),\end{cases}$$

причем коэффициенты $\tilde{\mu}_{kr}$ и $\tilde{\nu}_{kr}$ нами вычислены (см. (3.51) и (3.52)).

Будем считать, что при r нечетном $\alpha_0=0$. Тогда полиномы $\frac{\alpha_0}{2}+T_{nr}(t;\ \lambda)$ и $\tilde{T}_{nr}(t)$ имеют одинаковую четность, и мы поступим наилучшим образом, выбрав $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}$ и — при r четном — α_0 так, чтобы эти полиномы тождественно совпадали. Для этого надо при каждом фиксированном n положить $\alpha_0=\tilde{\mu}_{0r}$, если $r=2i$, и

$$\lambda_k=\tilde{\lambda}_k=\tilde{\lambda}_{kr}=\begin{cases}(-1)^{r/2}k^r\tilde{\mu}_{kr} & (r=2i),\\ (-1)^{(r-1)/2}k^r\tilde{\nu}_{kr} & (r=2i-1).\end{cases} \tag{5.38}$$

Учитывая равенства (3.51) и (3.52), из (5.38) получим для экстремальных коэффициентов $\tilde{\lambda}_{kr}$ следующие выражения:

$$\tilde{\lambda}_{kr}=\begin{cases}1-k^r\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left[\frac{1}{(2\nu n-k)^r}+\frac{1}{(2\nu n+k)^r}\right] & (r=2,4,6,\ldots),\\ 1-k^r\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\nu n-k)^r}-\frac{1}{(2\nu n+k)^r}\right] & (r=1,\ 3,\ 5,\ \ldots)\end{cases}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{5.39}$$

В частности, при $r=1$

$$\tilde{\lambda}_{k1}=1-2k^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu n)^2-k^2}=\frac{k\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}\qquad(k=1,\ \ldots,\ n-1). \tag{5.40}$$

Если $\tilde{\lambda}=\{\tilde{\lambda}_{1r},\ \ldots,\ \tilde{\lambda}_{n-1,\,r}\}$ — вектор коэффициентов (5.39) (r будем полагать фиксированным), то при указанном выше выборе α_0

$$\alpha_0/2+T_{nr}(t, \tilde{\lambda})\equiv\tilde{T}_{nr}(t),$$

так что при $\lambda=\tilde{\lambda}$ в (5.37) будет знак равенства, а (5.36) запишется в виде

$$\|f-U_n(f;\ \tilde{\lambda})\|_p\leqslant\frac{1}{\pi}E_n(D_r)_L\|f^{(r)}\|_p\quad \forall f\in L^r_p. \tag{5.41}$$

Приняв во внимание (3.45), из (5.41) получим оценку

$$\|f-U_n(f;\ \tilde{\lambda})\|_p\leqslant\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_p\quad \forall f\in L^r_p\quad (1\leqslant p\leqslant\infty). \tag{5.42}$$

Если $f\in W^r_{L_p}$, то $\|f^{(r)}\|_p\leqslant 1$ и $\|f-U_n(f;\ \tilde{\lambda})\|_p\leqslant\mathcal{K}_r n^{-r}$; переходя в левой части этого неравенства к верхней грани по $f\in W^r_{L_p}$ и используя введенные выше обозначения, получим соотношение

$$\mathcal{E}_n\left(W^r_{L_p},\ \tilde{\lambda}\right)_p\leqslant\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\qquad (1\leqslant p\leqslant\infty;\ \ n,\ r=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.43}$$

Наиболее существенным и интересным является тот факт, что в (5.43) при $p=1$ и $p=\infty$ имеет место знак равенства. Это немедленно вытекает из сравнения (5.43) с общим неравенством (5.34) и соотношениями (5.14) и (5.15).

Так как, кроме того, для любого λ-метода

$$\mathcal{E}_n(W^r_L,\ \lambda)_L=\mathcal{E}_n(W^{r-1}_V,\ \lambda)_L\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots).$$

(это устанавливается теми же рассуждениями, что и (5.31)), то доказаны следующие равенства:

$$\mathcal{E}_n(W^r_M,\ \tilde{\lambda})_C=\mathcal{E}_n(W^r_L,\ \tilde{\lambda})_L=\mathcal{E}_n(W^{r-1}_V,\ \tilde{\lambda})_L=$$
$$=\mathcal{K}_r n^{-r}\qquad (n,\ r=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.44}$$

Сопоставив (5.44) с (5.14), (5.15) и (5.21), приходим к выводу, что $\tilde{\lambda}$-метод не только является наилучшим среди всех λ-методов для класса W^r_M в метрике C и для классов W^r_L и W^{r-1}_V в метрике L, но и реализует на этих классах наилучшее приближение в соответствующей метрике.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 5.5.1. *Верхнюю грань наилучших приближений тригонометрическими полиномами* $T_n(t)$ *порядка* $n-1$ *на классах* W_M^r $(r=1, 2, \dots)$ *в метрике* C *и на классах* W_L^r и W_V^{r-1} $(r=1, 2, \dots)$ *в метрике* L *реализует* $\tilde{\lambda}$*-метод с коэффициентами* (5.39). *При этом*

$$\mathscr{E}_n(W_M^r, \tilde{\lambda})_C = E_n(W_M^r)_C = \|\varphi_{nr}\|_C = \frac{\mathscr{K}_r}{n^r} \quad (n, r=1, 2, \dots); \tag{5.45}$$

$$\mathscr{E}_n(W_L^r, \tilde{\lambda})_L = \mathscr{E}_n(W_V^{r-1}, \tilde{\lambda})_L = E_n(W_L^r)_L = E_n(W_V^{r-1})_L = \|g_{n,r-1}\|_L = \frac{\mathscr{K}_r}{n^r} \quad (n, r=1, 2, \dots). \tag{5.46}$$

§ 5.6. Теорема сравнения Колмогорова и следствия из нее

При получении точных результатов в задачах II и III существенную роль в ряде случаев будут играть доказанные А. Н. Колмогоровым [2] в 1939 г. утверждения, известные как теорема сравнения и неравенство для норм производных дифференцируемых функций.

Излагая эти и сопутствующие им результаты, мы в значительной степени облегчим себе дальнейшие рассуждения, доказав предварительно следующую элементарную лемму.

Лемма 5.6.1. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *заданы абсолютно непрерывные функции* $g(t)$ *и* $\varphi(t)$, *причем* $\varphi(t)$ *строго возрастает и выпукла вверх на* $[a, b]$. *Если*

а) $g(a)=\varphi(a), \quad g(b)>\varphi(b)$

или

б) $g(b)=\varphi(b), \quad g(a)<\varphi(a)$,

то на интервале (a, b) *существуют точки* α *и* β *такие, что* $g(\alpha)=\varphi(\beta)$ *и* $g'(\alpha)>\varphi'_-(\beta)$ *).

Докажем сначала утверждение леммы в предположении а). Можно считать, что $g(t)>\varphi(t)$ на (a, b), ибо иначе последующие рассуждения можно применить

*) Через $\varphi'_-(x)$ $(\varphi'_+(x))$ здесь и в дальнейшем будет обозначаться левая (правая) производная функции φ в точке x.

к отрезку $[a_1, b]$, где a_1 — самый правый нуль разности $g(t)-\varphi(t)$ на (a, b).

Так как $g(t)$ непрерывна, то она принимает в некоторых точках интервала (a, b) значение, равное $\varphi(b)$. Пусть ξ — самая левая из таких точек, т. е. $g(\xi)=\varphi(b)$

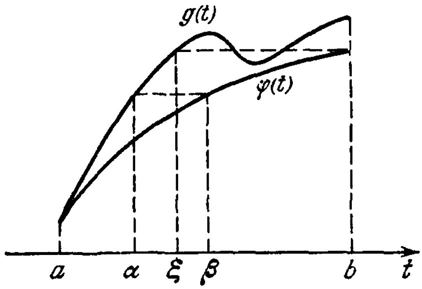

Рис 6.

и $g(t)<\varphi(b)$ $(a\leqslant t<\xi)$ (рис. 6). Функция $\varphi(t)$ строго возрастает, следовательно, $\varphi(\xi)<\varphi(b)$ и, значит,

$$\int_a^\xi \varphi'(t)\,dt<\int_a^\xi g'(t)\,dt.$$

Поэтому существует точка α, $a<\alpha<\xi$, такая, что $\varphi'(\alpha)<g'(\alpha)$. Но так как

$$\varphi(\alpha)<g(\alpha)<g(\xi)=\varphi(b),$$

то в некоторой точке β, $\alpha<\beta<b$, будет $\varphi(\beta)=g(\alpha)$. В силу строгой выпуклости вверх функции $\varphi(t)$ выполняется неравенство $\varphi'_-(\beta)\leqslant\varphi'(\alpha)$ и, следовательно,

$$g'(\alpha)>\varphi'(\alpha)\geqslant\varphi'_-(\beta).$$

Пусть теперь выполнено условие б). Ясно, что в некоторой точке $a+h$, где $0<h<b-a$, будет $g(a+h)=$ $=\varphi(a)$. Положим

$$g_1(t)=g(t+h)\qquad(a\leqslant t\leqslant b-h).$$

Тогда $g_1(a)=\varphi(a)$, $g_1(b-h)=g(b)>\varphi(b-h)$, т. е. для функций g_1 и φ выполнено условие а) на отрезке $[a, b-h]$ и по уже доказанному в некоторых точках α_1 и β, $a<\alpha_1<\beta<b-h$, одновременно выполняются

соотношения

$$g_1(\alpha_1)=\varphi(\beta), \qquad g_1'(\alpha_1)>\varphi_-'(\beta).$$

Положив $\alpha=\alpha_1+h$, получим, что

$$g(\alpha)=\varphi(\beta), \qquad g'(\alpha)>\varphi_-'(\beta) \qquad (\alpha,\ \beta\in(a,\ b)).$$

Лемма доказана.

Замечание. Наряду с леммой 5.6.1 нам потребуются также ее варианты, полученные зеркальным отображением всей картины относительно вертикальных прямых $t=c$ $(c\geqslant b)$ или горизонтальных прямых $y=d$, где $d\leqslant\varphi(a)$, а также суперпозицией этих отображений. Сделав соответствующий чертеж, читатель легко поймет, что любой из этих вариантов легко свести соответствующей заменой переменной к уже рассмотренным.

Пусть $W_M^r(-\infty,\ \infty)$ $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ обозначает класс заданных на всей оси (не обязательно периодических) функций $f(x)$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(x)$ локально абсолютно непрерывна (т. е. абсолютно непрерывна на каждом конечном промежутке) и

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\operatorname{vrai}|f^{(r)}(x)|\leqslant 1.$$

Иначе говоря, $W_M^r(-\infty,\ \infty)$ есть класс r-х интегралов от измеримых функций, существенно ограниченных единицей на всей оси. Будем и здесь полагать, независимо от периодичности,

$$\|f\|_C=\max_{-\infty<x<\infty}|f(x)|; \qquad \|f\|_M=\sup_{-\infty<x<\infty}\operatorname{vrai}|f(x)|. \tag{5.47}$$

Теорема 5.6.2 (теорема сравнения Колмогорова) *). *Пусть* $f\in W_M^r(-\infty,\ \infty)$ *и при некотором* $\lambda>0$

$$\|f\|_C\leqslant\|\varphi_{\lambda r}\|_C,$$

где $\varphi_{\lambda r}$ *определена в* § 5.4. *Если* $f(a)=\varphi_{\lambda r}(\alpha)$, *то*

$$|f'(a)|\leqslant|\varphi_{\lambda r}'(\alpha)|$$

(*при* $r=1$ *в предположении, что производные существуют*).

Доказательство. При $r=1$ утверждение теоремы тривиально, ибо $|\varphi_{\lambda 1}'(x)|=1$ везде, за исключением точек своего экстремума.

*) А. Н. Колмогоров [2].

Далее будет работать индукция, но чтобы обеспечить необходимое «зацепление», докажем следующую лемму.

Лемма 5.6.3. *Пусть* $f \in W_M^k(-\infty, \infty)$ $(k=1, 2, \ldots)$ *и* $\|f\|_C \leqslant \|\varphi_{\lambda k}\|_C$. *Если теорема* 5.6.2 *верна для* $r=k-1$, *то* $\|f'\|_M \leqslant \|\varphi_{\lambda, k-1}\|_M$.

Докажем лемму 5.6.3, рассуждая от противного. Пусть

$$\|f'\|_M = |f'(t_0)| > \|\varphi_{\lambda, k-1}\|_M = \|\varphi'_{\lambda k}\|_M.$$

Так как вместо $f(x)$ мы можем рассматривать функцию $\pm f(t+\tau)$, где τ — любое число, то можно считать, что $f'(t_0) > 0$ и $\|\varphi_{\lambda, k-1}\|_M = \varphi_{\lambda, k-1}(t_0)$. Обозначим через t_1 и t_2 ближайшие слева и справа от t_0 нули функции $\varphi_{\lambda, k-1}(t)$, которая, следовательно, выпукла вверх на (t_1, t_2), строго возрастает на (t_1, t_0) и строго убывает на (t_0, t_2).

Найдется точка α, $t_1 < \alpha < t_2$, в которой будет $f'(\alpha) \leqslant \varphi_{\lambda, k-1}(\alpha)$, ибо предположение $f'(t) > \varphi_{\lambda, k-1}(t)$ $(t_1 < t < t_2)$ означало бы, что

$$\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\,dt > \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{\lambda, k-1}(t)\,dt = 2\|\varphi_{\lambda k}\|_C$$

и, значит, $\|f\|_C > \|\varphi_{\lambda k}\|_C$ — в противоречии с условием леммы 5.6.3. Положим $f_1(t) = \gamma f'(t)$, где число γ, $0 < \gamma < 1$, выбрано так, что $\|f_1\|_M = \|\varphi_{\lambda, k-1}\|_M$. Тогда $\|f_1^{(k-1)}\|_M = \gamma\|f^{(k)}\|_M < 1$, т. е. $f_1 \in W_M^{k-1}(-\infty, \infty)$. Так как

$$f_1(\alpha) = \gamma f'(\alpha) < \varphi_{\lambda, k-1}(\alpha), \qquad f_1(t_0) = \varphi_{\lambda, k-1}(t_0),$$

то применение леммы 5.6.1 (с учетом замечания к ней, если $t_0 < \alpha < t_2$) приводит к противоречию с утверждением теоремы 5.6.2 для $r=k-1$. Лемма 5.6.3 доказана, и мы можем продолжить доказательство теоремы 5.6.2.

Предположим, что теорема 5.6.2 уже доказана при $r=1, 2, \ldots, k-1$ и для функции f выполнены ее условия при $r=k$ $(k \geqslant 2)$. Тогда в силу леммы 5.6.3 $\|f'\|_M \leqslant \|\varphi_{\lambda, k-1}\|_M$. Не теряя общности, мы можем считать, что $a=\alpha$, т. е. $f(\alpha) = \varphi_{\lambda k}(\alpha)$, и $\operatorname{sign} f'(\alpha) = \operatorname{sign} \varphi'_{\lambda k}(\alpha) \neq 0$. (Если $f'(\alpha) = 0$, то доказывать нечего). Рассуждаем от противного: пусть $|f'(\alpha)| > |\varphi'_{\lambda k}(\alpha)|$. Для определенности будем предполагать, что $\varphi_{\lambda k}(\alpha) < 0$ и $\varphi'_{\lambda k}(\alpha) > 0$, т. е. функция $\varphi_{\lambda k}(t)$ возрастает в точке α и на промежутке (t_0, α), где t_0 — ближайший слева ее минимум, она выпукла вниз (рис. 7). Так как

$$\min_x f(x) \geqslant -\|\varphi_{\lambda k}\|_C = \varphi_{\lambda k}(t_0),$$

то в некоторой точке η, $t_0 < \eta < \alpha$, будет $f(\eta) = \varphi_{\lambda k}(\eta)$, т. е.

$$\int_\eta^\alpha [f'(t) - \varphi'_{\lambda k}(t)]\,dt = 0.$$

и, следовательно, разность $f'(t) - \varphi'_{\lambda k}(t)$ должна в некоторой точке $\xi \in (\eta, \alpha)$ обратиться в нуль. Так как функция $\varphi'_{\lambda k}(t) = \varphi_{\lambda, k-1}(t)$ выпукла вверх на (t_0, α) и по предположению $f'(\alpha) > \varphi'_{\lambda k}(\alpha)$, то к функциям $f'(t)$ и $\varphi_{\lambda, k-1}(t)$ на промежутке (ξ, α) применима лемма 5.6.1, которая приводит к противоречию с утверждением теоремы для $r = k-1$.

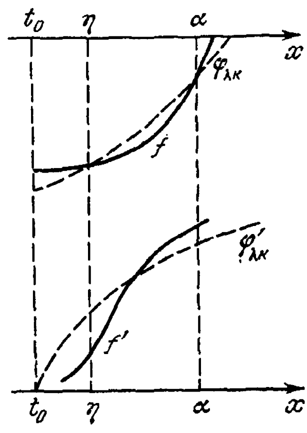

Рис. 7.

Из теоремы сравнения 5.6.2 вытекает ряд следствий; некоторые из них имеют самостоятельное значение.

Предложение 5.6.4. *Если $f \in W^r_M(-\infty, \infty)$ и при некотором $\lambda > 0$ $\|f\|_C \leqslant \|\varphi_{\lambda r}\|_C$, то*

$$\|f^{(k)}\|_M \leqslant \|\varphi_{\lambda, r-k}\|_M \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{5.48}$$

Достаточно, очевидно, проверить справедливость (5.48) для любого r при $k=1$. Если $\|f'\|_M = |f'(a)| > \|\varphi'_{\lambda r}\|_M$, то, выбрав точку α из условия $\varphi_{\lambda r}(\alpha) = f(a)$, будем иметь $|f'(a)| > |\varphi'_{\lambda r}(\alpha)|$ — в противоречии с теоремой сравнения.

Предложение 5.6.5. *Пусть $f \in W^r_M(-\infty, \infty)$, $\|f\|_C \leqslant \|\varphi_{\lambda r}\|_C$, $f(\xi_0) = \varphi_{\lambda r}(\eta_0)$ и $[\alpha, \beta]$ — содержащий точку η_0 отрезок, на котором $\varphi_{\lambda r}$ монотонна. Если $\varphi_{\lambda r}(t)$ на (α, β) возрастает, то выполняются соотношения*

$$f(\xi_0 + u) \leqslant \varphi_{\lambda r}(\eta_0 + u) \quad (0 \leqslant u \leqslant \beta - \eta_0), \tag{5.49}$$

$$f(\xi_0 - u) \geqslant \varphi_{\lambda r}(\eta_0 - u) \quad (0 \leqslant u \leqslant \eta_0 - \alpha); \tag{5.50}$$

в случае убывания $\varphi_{\lambda r}(t)$ *на* (α, β) *знаки неравенств в* (5.49) *и* (5.50) *противоположны. В частности, если* $f(\xi_0) = \varphi_{\lambda r}(\eta_0) = 0$, *то*

$$|f(\xi_0+u)| \leqslant |\varphi_{\lambda r}(\eta_0+u)| \qquad \left(-\frac{\pi}{2\lambda} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2\lambda}\right).$$

Можно считать, что $\xi_0 = \eta_0$, т. е. $f(\eta_0) = \varphi_{\lambda r}(\eta_0)$, а α и β — ближайшие к η_0 нули производной $\varphi'_{\lambda r}(t)$ слева и справа. Предположим, что $\varphi_{\lambda r}(t)$ возрастает на (α, β) и $\varphi_{\lambda r}(\eta_0) \geqslant 0$ (рис. 8) (другие случаи рассматриваются аналогично). Тогда неравенство

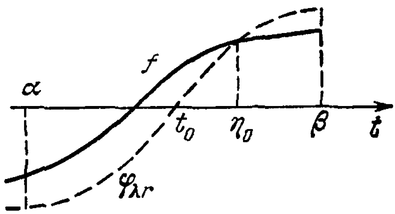

Рис. 8.

$$f(\eta_0+u) \leqslant \varphi_{\lambda r}(\eta_0+u)$$
$$(0 \leqslant u \leqslant \beta - \eta_0)$$

вытекает из тех соображений, что если бы в некоторой точке ξ_1 $(\eta_0 < \xi_1 < \beta)$ было $f(\xi_1) > \varphi_{\lambda r}(\xi_1)$, то, используя лемму 5.6.1, мы сразу пришли бы в противоречие с теоремой сравнения.

Точно так же, опираясь на лемму 5.6.1, устанавливаем, что

$$f(t) \geqslant \varphi_{\lambda r}(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant \eta_0),$$

где t_0 — нуль $\varphi_{\lambda r}(t)$ на (α, β).

Осталось доказать, что

$$f(t) \geqslant \varphi_{\lambda r}(t) \qquad (\alpha \leqslant t < t_0), \tag{5.51}$$

причем уже известно, что $f(t_0) \geqslant \varphi_{\lambda r}(t_0) = 0$. Предположив, что (5.51) не выполняется, мы окажемся в условиях одного из вариантов леммы 5.6.1, которая снова приведет нас к противоречию.

Предложение 5.6.6. *Пусть* $f \in W_M^r(-\infty, \infty)$ *и* $\|f\|_C \leqslant \|\varphi_{\lambda r}\|_C$. *Если*

$$f(\xi_0) = \varphi_{\lambda r}(\eta_0), \qquad f(\xi_1) = \varphi_{\lambda r}(\eta_1),$$

причем точки η_0 *и* η_1 *лежат на одном промежутке монотонности функции* $\varphi_{\lambda r}(t)$, *то* $|\xi_0 - \xi_1| \geqslant |\eta_0 - \eta_1|$.

И здесь, учитывая возможность сдвига по горизонтали, мы вправе считать, что $\xi_0 = \eta_0$. Но если

$$f(\eta_0) = \varphi_{\lambda r}(\eta_0), \qquad f(\xi_1) = \varphi_{\lambda r}(\eta_1),$$

то из неравенства $|\xi_1-\eta_0|<|\eta_1-\eta_0|$ сразу следовало бы, что $|f(\xi_1)|>|\varphi_{\lambda r}(\xi_1)|$ — в противоречии с утверждением 5.6.5.

Пусть $\omega(f, t)$ — модуль непрерывности непрерывной на всей оси функции f, т. е.

$$\omega(f, t)=\sup_{|x'-x''|\leqslant t}|f(x')-f(x'')|.$$

Справедливо

Предложение 5.6.7. *Если* $f\in W_M^r(-\infty, \infty)$ *и* $\|f\|_C\leqslant\|\varphi_{\lambda r}\|_C$, *то*

$$\omega(f, t)\leqslant\omega(\varphi_{\lambda r}, t)\qquad(0\leqslant t<\infty).$$

В самом деле, фиксируем $t>0$, и пусть $|u'-u''|\leqslant t$. Существуют точки α' и α'' такие, что

$$\varphi_{\lambda r}(\alpha')=f(u'),\qquad \varphi_{\lambda r}(\alpha'')=f(u'')$$

и на (α', α'') функция $\varphi_{\lambda r}(x)$ монотонна. Но тогда в силу предложения 5.6.6 $|\alpha'-\alpha''|\leqslant|u'-u''|\leqslant t$, и потому

$$|f(u')-f(u'')|=|\varphi_{\lambda r}(\alpha')-\varphi_{\lambda r}(\alpha'')|\leqslant\omega(\varphi_{\lambda r}, t).$$

Из теоремы сравнения непосредственно вытекает также следующее утверждение, известное как неравенство Колмогорова для норм дифференцируемых функций (А. Н. Колмогоров [2]).

Предложение 5.6.8. *Для любой функции f, являющейся r-м интегралом от измеримой ограниченной на всей оси функции, справедливо неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_M\leqslant c_{rk}\|f\|_M^{1-k/r}\|f^{(r)}\|_M^{k/r}\quad(r=1, 2, \ldots, k=0, 1, \ldots, r)\tag{5.52}$$

где $\|f\|_M$ понимается в смысле (5.47),

$$c_{rk}=\mathscr{K}_{r-k}/\mathscr{K}_r^{1-k/r},$$

а $\mathscr{K}_r$ — константы (3.44). *Неравенство* (5.52) *точное.*

Доказывая неравенство (5.52), заметим, что оно сохраняется при умножении функции f на любое не равное нулю число, так что мы, не теряя общности, можем считать, что $\|f^{(r)}\|_M\leqslant 1$. Дело сводится, таким образом, к доказательству соотношения

$$\|f^{(k)}\|_M\leqslant c_{rk}\|f\|_M^{1-k/r}\qquad(r=1, 2, \ldots; k=0, 1, \ldots, r)$$

для любой $f\in W_M^r(-\infty, \infty)$.

Так как $\|\varphi_{\lambda r}\|_M$ непрерывно зависит от λ, причем $\|\varphi_{\lambda r}\|_M \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $\|\varphi_{\lambda r}\|_M \to \infty$ при $\lambda \to 0$, то значение λ можно выбрать таким, чтобы выполнялось равенство $\|f\|_C = \|\varphi_{\lambda r}\|_C$. В силу предложения 5.6.4 из теоремы сравнения и соотношения (5.25) будем иметь при таком выборе λ

$$\|f^{(k)}\|_M \leqslant \|\varphi_{\lambda, r-k}\|_M = c_{rk}\|\varphi_{\lambda r}\|_M^{1-k/r} = c_{rk}\|f\|_M^{1-k/r}$$
$$(k = 0,\ 1,\ \dots,\ r),$$

что и требовалось. Окончательность неравенства (5.52) следует из того же равенства (5.25).

Заметим, что хотя теорема сравнения доказана А. Н. Колмогоровым при получении неравенства (5.52) и носила вспомогательный характер, на самом деле она сама по себе имеет глубокий смысл. И неудивительно, что впоследствии использование этой теоремы позволило получить ряд новых точных результатов, выясняющих экстремальные свойства функций. Один из примеров такого применения содержится в следующем параграфе.

§ 5.7. Экстремальные свойства функций класса W_M^r в метрике пространства L_p

Здесь мы опять возвращаемся к рассмотрению 2π-периодических функций.

Теорема 5.7.1. *Пусть $f \in W_M^r$ $(r = 1, 2, \dots)$ и при некотором $n = 1, 2, \dots$ выполнены соотношения*

$$\|f\|_C \leqslant \|\varphi_{nr}\|_C, \tag{5.53}$$

$$\max_{a,\,b}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant 2\|\varphi_{n,\,r+1}\|_C. \tag{5.54}$$

Тогда

$$\|f\|_p \leqslant \|\varphi_{nr}\|_p \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

Доказательство. Нужно показать, что при выполнении условий теоремы

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^p\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} |\varphi_{nr}(t)|^p\,dt = 2n\int_0^{\pi/n} |\varphi_{nr}(t)|^p\,dt.$$

Отметим сразу, что предположения относительно функции f гарантируют выполнение для функций f и φ_{nr} условий теоремы сравнения 5.6.2, и мы при доказательстве можем опираться на все отмеченные выше следствия из нее. Кроме того, из (5.54) следует, что $f(x)$ обращается в нуль, и можно полагать, что $f(0)=f(2\pi)=0$.

Пусть $S=\{(a_k, b_k)\}$ — система непересекающихся интервалов из промежутка $(0, 2\pi)$ таких, что

$$f(a_k)=f(b_k)=0, \qquad |f(t)|>0 \quad (a_k<t<b_k).$$

Из системы S выделим и перенумеруем отдельно интервалы $\Delta_i=(a_i, b_i)$ с длиной $b_i-a_i>\pi/n$ и интервалы $\delta_\nu=(a_\nu, b_\nu)$ с длиной $b_\nu-a_\nu\leq\pi/n$. Ясно, что в S может содержаться лишь конечное число m интервалов Δ_i. Таким образом,

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt=\sum_{i=1}^m\int_{\Delta_i}|f(t)|^p\,dt+\sum_\nu\int_{\delta_\nu}|f(t)|^p\,dt, \tag{5.55}$$

и будем отдельно оценивать каждую сумму.

Исходя из тождества

$$|f(x)|^p=|f(x)|\int_0^{|f(x)|}dt^{p-1}\ (p>1)$$

и меняя порядок интегрирования, получим для интегралов первой суммы

$$\int_{a_i}^{b_i}|f(x)|^p\,dx=\int_{a_i}^{b_i}|f(x)|\int_0^{|f(x)|}dt^{p-1}\,dx=$$

$$=\int_0^{\|f\|_C}\left(\int_{E_f^i(t)}|f(x)|\,dx\right)dt^{p-1}, \tag{5.56}$$

где положено

$$E_f^i(t)=\{x\colon x\in(a_i, b_i),\ |f(x)|\geq t\}.$$

Аналогично

$$\int_0^{\pi/n}|\varphi_{nr}(x)|^p\,dx=\int_0^{\|\varphi_{nr}\|_C}\left(\int_{E_\varphi(t)}|\varphi_{nr}(x)|\,dx\right)dt^{p-1}, \tag{5.57}$$

где

$$E_\varphi(t)=\{x: x\in(0, \pi/n),\ |\varphi_{nr}(x)|\geq t\}.$$

Докажем, что для любого t, $0 \leqslant t \leqslant \|\varphi_{nr}\|_C$,

$$\int_{E_f^i(t)} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{E_\varphi(t)} |\varphi_{nr}(x)|\,dx \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \quad (5.58)$$

Фиксируем t, и пусть (a_i', b_i') — наибольший интервал,

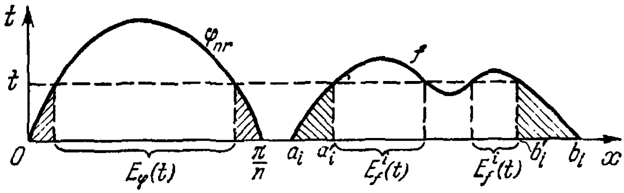

Рис. 9.

содержащийся в (a_i, b_i) такой, что (рис. 9)

$$f(a_i') = f(b_i') = t.$$

В силу предложения 5.6.5

$$\int_{a_i}^{a_i'} |f(x)|\,dx + \int_{b_i'}^{b_i} |f(x)|\,dx \geqslant \int_{(0,\,\pi/n)\setminus E_\varphi(t)} |\varphi_{nr}(x)|\,dx,$$

а так как ввиду условия (5.54)

$$\int_{a_i}^{b_i} |f(x)|\,dx \leqslant \int_0^{\pi/n} |\varphi_{nr}(x)|\,dx,$$

а $E_f^i(t) \subset (a_i', b_i')$, то (5.58) доказано.

Из (5.56) — (5.58), с учетом неравенства (5.53), следует, что

$$\int_{\Delta_i} |f(x)|^p\,dx \leqslant \int_0^{\pi/n} |\varphi_{nr}(x)|^p\,dx \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

и, значит,

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\Delta_i} |f(x)|^p\,dx \leqslant m \int_0^{\pi/n} |\varphi_{nr}(x)|^p\,dx. \quad (5.59)$$

Теперь займемся оценкой интеграла от $|f|^p$ по промежуткам $\delta_\nu=(a_\nu, b_\nu)$, длины которых $\leqslant \pi/n$. В связи с (5.55) и (5.59) нам достаточно доказать, что

$$\sum_\nu \int_{\delta_\nu} |f|^p\,dx \leqslant (2n-m)\int_0^{\pi/n} |\varphi_{nr}|^p\,dx = \int_0^{(2n-m)\pi/n} |\varphi_{nr}|^p\,dx. \tag{5.60}$$

Так как $\operatorname{mes}\bigcup_{i=1}^{m}\Delta_i > m\cdot\pi/n$, то $\operatorname{mes}\bigcup_\nu \delta_\nu \leqslant (2n-m)\cdot\pi/n$. Можно считать, что интервалы δ_ν перенумерованы в порядке убывания их длин, т. е. $|\delta_1|\geqslant|\delta_2|\geqslant\ldots$ Каждому из $2n-m$ первых интервалов $\delta_\nu\ (\nu=1, 2, \ldots, 2n-m)$ сопоставим на промежутке $[((\nu-1)\pi)/n, \nu\pi/n]$ два непересекающихся интервала (x_ν, y_ν) и (z_ν, u_ν) длиной $|\delta_\nu|/2$ каждый, на одном из концов которых $\varphi_{nr}(x)$ обращается в нуль. (Если $\varphi_{nr}(\nu\pi/n)=0$, то $x_\nu=(\nu-1)\pi/n$, $u_\nu=\nu\pi/n$; если же $\varphi_{nr}((2\nu-1)\pi/2n)=0$, то $y_\nu=z_\nu=(2\nu-1)\pi/2n$). Обозначив через c_ν середину интервала $\delta_\nu=(a_\nu, b_\nu)$ и применяя предложение 5.6.5, получим

$$\int_{\delta_\nu} |f|^p\,dx = \int_{a_\nu}^{c_\nu} |f|^p\,dx + \int_{c_\nu}^{b_\nu} |f|^p\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{x_\nu}^{y_\nu} |\varphi_{nr}|^p\,dx + \int_{z_\nu}^{u_\nu} |\varphi_{nr}|^p\,dx \quad (\nu=1, 2, \ldots, 2n-m). \tag{5.61}$$

Теперь заметим, что для $\nu>2n-m$

$$|\delta_\nu|\leqslant|\delta_{2n-m}| = \min_{1\leqslant\nu\leqslant 2n-m}[(y_\nu-x_\nu)+(u_\nu-z_\nu)].$$

Поэтому, если положить

$$e=\bigcup_{\nu=1}^{2n-m}\left(\left[\frac{\nu-1}{n}\pi, \frac{\nu\pi}{n}\right]\setminus(x_\nu, y_\nu)\cup(z_\nu, u_\nu)\right) \tag{5.62}$$

и учесть структуру функции $\varphi_{nr}(x)$, то в силу того же предложения 5.6.5 будем иметь

$$\sup_{x\in\delta_\nu}|f(x)|\leqslant\min_{x\in e}|\varphi_{nr}(x)| \qquad (\nu>2n-m),$$

и, следовательно,

$$\sum_{\nu > 2n-m} \int_{\delta_\nu} |f|^p\,dx \leqslant \int_e |\varphi_{nr}|^p\,dx. \tag{5.63}$$

Сопоставив (5.61), (5.62) и (5.63), получим (5.60). Теорема доказана.

В качестве следствия из нее легко выводится

Теорема 5.7.2. *Имеют место соотношения*

$$\sup_{f \in W^r H_M^n} \|f\|_p = \|\varphi_{nr}\|_p \qquad (1 \leqslant p < \infty;\ n,\ r = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.64}$$

Действительно, для любой $f \in W^r H_M^n$ неравенство (5.53) выполнено в силу (5.28). Из того же соотношения (5.28) следует, что если $f \in W^r H_M^n$, то положив

$$f_1(x) = \int_\gamma^x f(t)\,dt,$$

где γ выбрано так, что среднее значение f_1 на периоде равно нулю, и, следовательно, $f_1 \in W^{r+1} H_M^n$, будем иметь

$$\max_{a,\,b} \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant 2 \|f_1\|_C \leqslant 2 \|\varphi_{n,\,r+1}\|_C.$$

Таким образом, для $f \in W^r H_M^n$ все условия теоремы 5.7.1 выполнены, так что $\|f\|_p \leqslant \|\varphi_{nr}\|_p$. Остается заметить, что $\varphi_{nr} \in W^r H_M^n$.

Соотношения (5.64) выявляют еще один аспект экстремальных свойств функций φ_{nr}.

Если сопоставить (5.17) и (5.64), то получим оценку

$$E_n\left(W_{L_p}^r\right)_L \leqslant \|\varphi_{nr}\|_{p'} \qquad (1/p + 1/p' = 1).$$

Покажем, что на самом деле здесь имеет место знак равенства. При $p = 1$ это нам уже известно (см. (5.15)). Если же $p > 1$ и, значит, $1 \leqslant p' < \infty$, то в силу (5.18)

$$E_n\left(W_{L_p}^r\right)_L = \sup_{f \in W^r H_M^n} E_1(f)_{p'} \geqslant E_1(\varphi_{nr})_{p'} =$$

$$= \inf_c \|\varphi_{nr} - c\|_{p'} = \|\varphi_{nr}\|_{p'},$$

ибо нижняя грань по c реализуется здесь при $c = 0$, в чем мы сразу же убедимся, применив критерий полинома (нулевой степени) наилучшего приближения в L_p (§ 3.3) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_{nr}(x)|^{p-1} \operatorname{sign} \varphi_{nr}(x)\, dx = 0.$$

Таким образом,

$$E_n\left(W^r_{L_p}\right)_L = \|\varphi_{nr}\|_{p'},$$

и мы можем сформулировать следующий окончательный результат.

Теорема 5.7.3. *При всех n, $r = 1, 2, \ldots$ справедливы соотношения*

$$E_n\left(W^r_{L_p}\right)_L = \sup_{f \in W^r H^n_M} \|f\|_{p'} = \|\varphi_{nr}\|_{p'}$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty, \ 1/p + 1/p' = 1).$$

В случае $p = \infty$, учитывая, что норма в L функции $\varphi_{nr}(x) = 4ng_{nr}(x)$ нами подсчитана в § 5.4, получаем равенства

$$E_n(W^r_M)_L = \sup_{f \in W^r H^n_M} \|f\|_L = \|\varphi_{nr}\|_L = \frac{4\mathcal{K}_{r+1}}{n^r} \tag{5.65}$$

$$(n, \ r = 1, 2, \ldots).$$

§ 5.8. Наилучшее приближение класса $W^r_{L_2}$ в метрике L_2

Ради полноты изложения рассмотрим еще самый простой случай решения задачи II на классах $W^r_{L_p}$, когда точный результат легко получить, используя специфику метрики пространства. Речь идет о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве L_2.

Известно (Г. М. Фихтенгольц [1]), что если $f \in L_2$ и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фурье функции f по тригонометрической системе, а

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{5.66}$$

— частичная сумма этого ряда, то

$$E_n(f)_2 = \|f - S_n(f)\|_2, \tag{5.67}$$

т. е. наилучшее приближение тригонометрическими полиномами в метрике L_2 функции f доставляют суммы (5.66).

Пусть $f \in L_2^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$. r-кратным интегрированием по частям найдем (при $k \geqslant 1$)

$$|a_k| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt\right| = \begin{cases} k^{-r}|b_{kr}| & (r = 1, 3, 5, \ldots), \\ k^{-r}|a_{kr}| & (r = 2, 4, 6, \ldots), \end{cases}$$

где a_{kr} и b_{kr} — коэффициенты Фурье функции $f^{(r)}(x)$. Аналогично

$$|b_k| = \begin{cases} k^{-r}|a_{kr}| & (r = 1, 3, 5, \ldots), \\ k^{-r}|b_{kr}| & (r = 2, 4, 6, \ldots). \end{cases}$$

Таким образом,

$$a_k^2 + b_k^2 = k^{-2r}(a_{kr}^2 + b_{kr}^2),$$

и равенство Парсеваля с учетом (5.67) позволяет написать:

$$E_n^2(f)_2 = \left\|\sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right\|_2^2 =$$

$$= \pi\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \pi\sum_{k=n}^{\infty}k^{-2r}(a_{kr}^2 + b_{kr}^2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{n^{2r}}\sum_{k=n}^{\infty}(a_{kr}^2 + b_{kr}^2) \leqslant n^{-2r}\|f^{(r)}\|_2^2.$$

Если же $f \in W_{L_2}^r$, то $\|f^{(r)}\|_2 \leqslant 1$ и, следовательно,

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{1}{n^r} \quad \forall f \in W_{L_2}^r. \tag{5.68}$$

Далее, ряд Фурье функции $f \in W^r H_2^n$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

и, повторяя те же выкладки, основанные на равенстве Парсеваля, найдем, что

$$\|f\|_2 \leqslant \frac{1}{n^r} \quad \forall f \in W^r H_2^n. \tag{5.69}$$

Функция

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, n^r} \sin nx,$$

очевидно, принадлежит классам $W^r_{L_2}$ и $W^r H^n_2$, и так как $S_n(f_0, x) \equiv 0$, то

$$E_n(f_0)_2 = \|f_0\|_2 = \frac{1}{n^r},$$

т. е. неравенства (5.68) и (5.69) на соответствующих классах неулучшаемы.

Заметив, что суммы $S_n(f, x)$ линейно зависят от f, можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5.8.1. *Справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_n(W^r_{L_2}) = E_n(W^r_{L_2})_2 = \\ = \sup_{f \in W^r H^n_2} \|f\|_2 = \frac{1}{n^r} \qquad (n, r = 1, 2, \ldots). \quad (5.70)$$

§ 5.9. Замечание о распространении результатов на классы $W^r_{L_p}K$

Обозначим через $W^r_{L_p}K$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty;\ r = 1, 2, \ldots)$ класс функций $f \in L^r_p$, у которых $\|f^{(r)}\|_p \leqslant K$; в частности, $W^r_{L_p}1$ есть $W^r_{L_p}$. Все результаты, полученные в этой главе для наилучшего и линейного приближения на классах $W^r_{L_p}$ естественным образом — путем умножения правой части соотношений на K, — распространяются на классы $W^r_{L_p}K$. Это вытекает из следующих простых соображений (X будет обозначать C или L_p).

Если F — подпространство из X, то в силу положительной однородности функционала $E(f, F)_X$ (предложение 1.2.1)

$$KE(f, F)_X = E(Kf, F)_X \qquad (K > 0).$$

Переходя к верхней грани по $f \in W^r_{L_p}$ и учитывая, что когда f пробегает класс $W^r_{L_p}$, функция $g = Kf$ пробегает весь класс $W^r_{L_p}K$, будем иметь

$$KE\left(W^r_{L_p}, F\right)_X = \sup_{f \in W^r_{L_p}} E(Kf, F)_X = \sup_{g \in W^r_{L_p}K} E(g, F)_X,$$

т. е.

$$KE\left(W^r_{L_p},\ F\right)_X = E\left(W^r_{L_p}K,\ F\right)_X. \tag{5.71}$$

Если A — линейный оператор из X в F и $g = Kf$ $(K > 0)$, то

$$\| g - Ag \|_X = K \| f - Af \|_X$$

и, следовательно,

$$\sup_{g \in W^r_{L_p}K} \| g - Ag \|_X = K \sup_{f \in W^r_{L_p}} \| f - Af \|_X, \tag{5.72}$$

а переход к нижней грани по всем таким операторам дает

$$\mathscr{E}\left(W^r_{L_p}K,\ F\right)_X = K\mathscr{E}\left(W^r_{L_p}, F\right)_X. \tag{5.73}$$

В частности, если A есть λ-метод (§ 5.5), отображающий X в F^T_{2n-1}, то (5.72) запишется, в соответствии с введенными в § 5.5 обозначениями, в виде

$$\mathscr{E}_n\left(W^r_{L_p}K;\ \lambda\right)_X = K\mathscr{E}_n\left(W^r_{L_p};\ \lambda\right)_X.$$

Таким образом, каждая оценка или точное равенство, полученные выше для наилучшего и линейного приближения классов $W^r_{L_p}$, будут справедливы и для классов $W^r_{L_p}K$, если правую часть умножить на K. В частности, справедливы неравенства

$$E_n\left(W^r_{L_p}K\right)_p \leqslant \mathscr{E}_n\left(W^r_{L_p}K\right)_p \leqslant K\frac{\mathscr{K}_r}{n^r} \qquad (n,\ r = 1,\ 2,\ \ldots),$$

в которых при $p = 1$ и $p = \infty$ везде имеет место знак равенства. Кроме того, для $\tilde{\lambda}$-метода, построенного в § 5.5,

$$\mathscr{E}_n(W^r_MK,\ \tilde{\lambda})_C = \mathscr{E}_n(W^r_LK,\ \tilde{\lambda})_L = E_n(W^r_MK)_C =$$
$$= E_n(W^r_LK)_L = K\mathscr{K}_r n^{-r} \qquad (n,\ r = 1,\ 2,\ \ldots).$$

ГЛАВА 6

ПЕРЕСТАНОВКИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Если проанализировать ход рассуждений, которые привели в главе 5 к точным значениям величин $E_n(W_M^r)_M$ и $E_n(W_L^r)_L$, то легко обнаружить, что решающую роль сыграли соотношения

$$\sup_{g\in W^rH_L^n}\|g\|_L=\|g_{n,r-1}\|_L=\|\varphi_{nr}\|_M=\sup_{g\in W^rH_M^n}\|g\|_M. \tag{6.1}$$

Действительно, если $f\in L_p^r$, то из (4.18) с помощью r-кратного интегрирования по частям получим

$$E_n(f)_p=\sup_{h\in H_{p'}^n}\int_0^{2\pi}f(t)\,h(t)\,dt=\sup_{g\in W^rH_{p'}^n}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)\,g(t)\,dt$$

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right),$$

и равенства (6.1) вместе с экстремальным соотношением (Д.12) сразу позволяют написать точные оценки:

$$E_n(W_M^r)_M\leqslant\sup_{g\in W^rH_L^n}\sup_{\|f\|_M\leqslant 1}\int_0^{2\pi}f(t)\,g(t)\,dt=$$

$$=\sup_{g\in W^rH_L^n}\|g\|_L=\|g_{n,r-1}\|_L,$$

$$E_n(W_L^r)_L\leqslant\sup_{g\in W^rH_M^n}\sup_{\|f\|_L\leqslant 1}\int_0^{2\pi}f(t)\,g(t)\,dt=$$

$$=\sup_{g\in W^rH_M^n}\|g\|_M=\|\varphi_{nr}\|_M.$$

Однако если вместо $W_{L_p}^r$ рассматривать классы, задание которых связано с более чувствительной, чем норма, характеристикой — модулем непрерывности (§ 7.1), то здесь информации, заложенной в соотношениях (6.1), уже недостаточно для получения точного результата. Нужны более глубокие свойства функций из $W^rH_p^n$, определяемые условиями ортогональности их тригонометрическим полиномам.

Ряд этих новых и более тонких свойств удается выявить и описать с помощью аппарата перестановок, причем полученные результаты будут относиться к более широким, чем $W^rH_p^n$, классам функций.

§ 6.1. Перестановки функций

Пусть $\varphi(x)$ — неотрицательная и суммируемая на промежутке (a, b) (конечном или бесконечном) и, следовательно, измеримая и почти всюду конечная на (a, b)

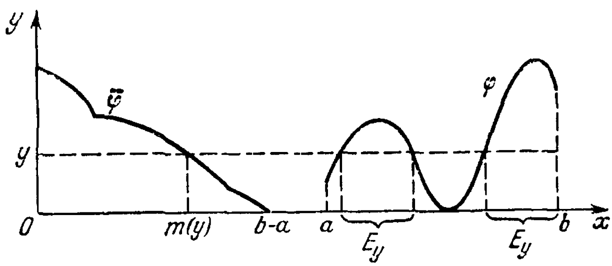

Рис. 10.

функция. Для всех $y \geq 0$ определим $m(y)$ как меру множества E_y точек x из (a, b), на котором $\varphi(x) \geq y$:

$$m(y) = \operatorname{mes} E_y, \quad E_y = \{x : x \in (a, b),\ \varphi(x) \geq y\}.$$

Функция $x = m(y)$, которую называют иногда функцией распределения для $\varphi(x)$, определена на бесконечном промежутке $0 \leq y \leq +\infty$, не возрастает, причем

$$m(0) = b - a, \quad m(+\infty) = \lim_{y \to +\infty} m(y) = 0.$$

Если $m(y)$ непрерывна и строго убывает, то существует обратная ей строго убывающая на $(0, b-a)$ функция $y = \bar{\varphi}(x)$, которую называют *перестановкой* функции $\varphi(x)$ в убывающем порядке или убывающей перестановкой $\varphi(x)$ (рис. 10).

В общем случае $m(y)$ может иметь промежутки постоянства, а также разрывы первого рода в конечном или счетном числе точек, и чтобы однозначно определить обратную функцию, исправим график $m(y)$ следующим образом. В каждой точке разрыва y_0 функции $m(y)$ дополним ее график отрезком $y=y_0$, $m(y_0+0)\leqslant x\leqslant m(y_0-0)$, а затем на каждом промежутке $[\alpha, \beta]$, где функция $m(y)$ постоянна, оставим в ее графике одну точку с координатами, например $y=1/2(\alpha+\beta)$, $x=m(1/2(\alpha+\beta))$. Теперь каждому x, $0<x\leqslant b-a$, соответствует единственная точка с координатами $(x, m^{-1}(x))$, и этим определена на $(0, b-a)$ функция $y=\bar{\varphi}(x)$, которую мы и будем называть убывающей перестановкой, или просто перестановкой, функции $\varphi(x)$.

При любом $y\geqslant 0$ мера множества точек $x\in(0, b-a)$, в которых $\bar{\varphi}(x)\geqslant y$, равна $m(y)$, что становится очевидным, если сделать чертеж. Таким образом,

$$\operatorname{mes}\{x: x\in(0, b-a),\ \bar{\varphi}(x)\geqslant y\} = \\ = \operatorname{mes}\{x: x\in(a, b),\ \varphi(x)\geqslant y\}=m(y),$$

откуда, в частности, следует, если учесть определение интеграла Лебега (И. П. Натансон [2], гл. V, VI), что

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_0^{b-a}\bar{\varphi}(x)\,dx. \tag{6.2}$$

В рассуждениях, связанных с использованием перестановок, полезным бывает

Предложение 6.1.1. *Если E — измеримое множество из (a, b), то*

$$\int_{b-a-\operatorname{mes} E}^{b-a}\bar{\varphi}(x)\,dx\leqslant\int_E\varphi(x)\,dx\leqslant\int_0^{\operatorname{mes} E}\bar{\varphi}(x)\,dx. \tag{6.3}$$

В самом деле, если $\varphi_1(x)\leqslant\varphi(x)$ $(a<x<b)$, а $m_1(y)$ и $m(y)$ — соответствующие функции распределения для φ_1 и φ, то для любого $y\geqslant 0$ $m_1(y)\leqslant m(y)$, и потому $\bar{\varphi}_1(x)\leqslant\leqslant\bar{\varphi}(x)$ $(0<x<b-a)$. В частности, если положить

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\in E),\\ 0 & (x\in(a, b)\setminus E),\end{cases}$$

то будем иметь

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi_1(x)\,dx = \int_0^{b-a} \bar{\varphi}_1(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\operatorname{mes} E} \bar{\varphi}_1(x)\,dx \leqslant \int_0^{\operatorname{mes} E} \bar{\varphi}(x)\,dx,$$

т. е. второе неравенство в (6.3) доказано. Чтобы получить первое, надо положить $E_1 = (a, b)\setminus E$ и вычесть неравенство

$$\int_{E_1} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_0^{\operatorname{mes} E_1} \bar{\varphi}(x)\,dx$$

из соотношения (6.2).

Отметим два очевидных следствия из предложения 6.1.1.

Предложение 6.1.2. *Если*

$$\int_E \varphi(x)\,dx > \int_0^{\delta} \bar{\varphi}(x)\,dx,$$

то $\operatorname{mes} E > \delta$.

Предложение 6.1.3. *Если*

$$\int_E \varphi(x)\,dx < \int_{b-a-\delta}^{b-a} \bar{\varphi}(x)\,dx,$$

то $\operatorname{mes} E < \delta$.

Можно сказать, что перестановка $\bar{\varphi}$ сохраняет норму в L и, если $\varphi(x)$ ограничена, — также и норму в M, ибо в этом случае $\bar{\varphi}(0) = \|\varphi\|_{M(a,b)}$. Ясно также, что перестановка, вообще говоря, не сохраняет вариацию функции φ: ограниченная функция $\varphi(x)$ может иметь на $[a, b]$ бесконечное изменение, а вариация ее перестановки $\bar{\varphi}$ на $[0, b-a]$ конечна. Легко представить, однако, функцию, перестановка которой, в известном смысле, сохраняет информацию о величине ее вариации на $[a, b]$. Такие функции рассматриваются в следующем параграфе.

§ 6.2. Простые функции и их перестановки

Непрерывную на всей числовой оси функцию $\varphi(x)$ будем называть *простой*, если $\varphi(x) = 0$ вне некоторого интервала (α, β), $|\varphi(x)| > 0$ для $x \in (\alpha, \beta)$ и при каждом y, $0<y<\max_x|\varphi(x)|$, уравнение $|\varphi(x)|=y$ имеет ровно два корня.

Интервал (α, β) условимся называть *основным интервалом* простой функции $\varphi(x)$. Ясно, что вместе с $\varphi(x)$ простой является также и функция $|\varphi(x)|$.

С простой функцией $\varphi(x)$ мы будем связывать еще отрезок $[\alpha', \beta']\subset(\alpha, \beta)$, на котором $|\varphi(x)|=\max_x|\varphi(x)|$, причем, если $\max_x|\varphi(x)|$ достигается в одной точке, то мы все же, ради удобства изложения, будем говорить об отрезке $[\alpha', \beta']$, считая, что $\alpha'=\beta'$.

В дальнейшем через $\bar{\varphi}(x)$ мы будем обозначать убывающую перестановку функции $|\varphi(x)|$. Если положить $\delta=\beta-\alpha$, $\delta'=\beta'-\alpha'$, то, очевидно, $\bar{\varphi}(x)=\max_t|\varphi(t)|$ для $0\leqslant x\leqslant\delta'$, $\bar{\varphi}(x)$ строго убывает на промежутке (δ', δ) и $\bar{\varphi}(x)=0$ для $x\geqslant\delta$. Ясно также, что

$$\bar{\varphi}(0)=\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|\varphi(x)|=\frac{1}{2}\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(\varphi).$$

Если $\psi_1(y)$ — функция, обратная к $|\varphi(x)|$ на (α, α'), а $\psi_2(y)$ — функция, обратная к $|\varphi(x)|$ на (β', β), то, очевидно,

$$m(y)\overset{\mathrm{def}}{=}\operatorname{mes}\{x: x\in(\alpha, \beta),\ |\varphi(x)|\geqslant y\}=$$
$$=\psi_2(y)-\psi_1(y)\quad\left(0\leqslant y\leqslant\max_x|\varphi(x)|\right).\tag{6.4}$$

Переходя к исследованию дифференциальных свойств перестановки простой функции, заметим, что равенством

$$\bar{\varphi}(x)=|\varphi(t)|\quad(\delta'<x<\delta;\ \alpha<t<\alpha'\ \text{или}\ \beta'<t<\beta)\tag{6.5}$$

заданы непрерывные и монотонные взаимно однозначные отображения интервалов (α, α') и (β', β) на (δ', δ). Если

$$\bar{\varphi}(x_0)=|\varphi(t_1)|=|\varphi(t_2)|$$
$$(\delta'<x_0<\delta,\ \alpha<t_1<\alpha',\ \beta'<t_2<\beta),$$

то $x_0=t_2-t_1$ (рис. 11). Пусть $x_0+h\in(\delta', \delta)$ и числа h_1 и h_2 выбраны так, что $t_1+h_1\in(\alpha, \alpha')$, $t_2+h_2\in(\beta', \beta)$ и выполняются равенства

$$\bar{\varphi}(x_0+h)=|\varphi(t_1+h_1)|=|\varphi(t_2+h_2)|.\tag{6.6}$$

Ясно, что h_1 и h_2 имеют разные знаки, причем $x_0+h=(t_2+h_2)-(t_1+h_1)$, и потому, с учетом равенства $x_0=t_2-t_1$, имеем

$$|h|=|h_1-h_2|=|h_1|+|h_2|. \tag{6.7}$$

Из этого следует, что любой системе $\{(x_k,\ x_k+\eta_k)\}$ непересекающихся интервалов на $(\delta',\ \delta)$ равенством (6.5)

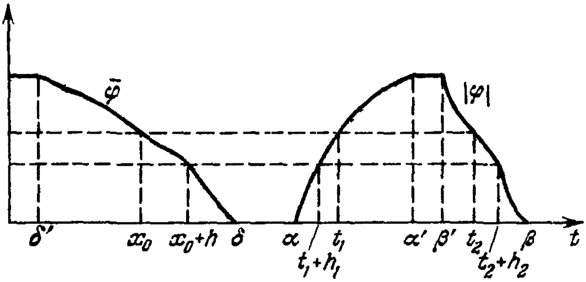

Рис 11.

ставится в соответствие система $\{(t_k,\ t_k+q_k)\}$ непересекающихся интервалов на $(\alpha,\ \alpha')$, причем

$$|\bar\varphi(x_k+\eta_k)-\bar\varphi(x_k)|=|\varphi(t_k+q_k)-\varphi(t_k)|$$

и

$$\sum_k |q_k| \leqslant \sum_k |\eta_k|.$$

Отсюда сразу следует, что из абсолютной непрерывности простой функции $\varphi(x)$ следует абсолютная непрерывность перестановки $\bar\varphi(x)$ и, значит, представимость ее в виде

$$\bar\varphi(x)=-\int\limits_x^\delta \bar\varphi'(u)\,du\ ^{*)}.$$

Следующая лемма дает соотношения между производными простой функции $|\varphi(t)|$ и ее перестановки $\bar\varphi(x)$, вычисленными на одном уровне.

Лемма 6.2.1. *Пусть $\varphi(t)$ — простая функция с основным интервалом $(\alpha,\ \beta)$, $\bar\varphi(x)$ — перестановка функции*

---

*) $\bar\varphi'$ везде будет обозначать $(\bar\varphi)'$; перестановку производной будем обозначать $\overline{\varphi'}$.

$|\varphi(t)|$. *Если*

$$\bar{\varphi}(x_0) = |\varphi(t_1)| = |\varphi(t_2)|$$
$$(\delta' < x_0 < \delta, \ \alpha < t_1 < \alpha', \ \beta' < t_2 < \beta)$$

и в точках t_1 и t_2 $\varphi(t)$ *дифференцируема, то существует производная* $\bar{\varphi}'(x_0)$, *причем*

$$|\bar{\varphi}'(x_0)| \leqslant \min\{|\varphi'(t_1)|, \ |\varphi'(t_2)|\}, \tag{6.8}$$

$$|\bar{\varphi}'(x_0)| \leqslant \frac{1}{4}|\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)|. \tag{6.9}$$

Знак равенства в (6.9) *имеет место тогда и только тогда, когда* $\varphi'(t_1) = -\varphi'(t_2)$.

Доказательство. Сопоставим приращению h в точке x_0 приращения h_1 и h_2 в точках t_1 и t_2 так (рис. 11), чтобы выполнялись равенства (6.6). Тогда

$$|\bar{\varphi}(x_0+h) - \bar{\varphi}(x_0)| = |\varphi(t_1+h_1) - \varphi(t_1)| =$$
$$= |\varphi(t_2+h_2) - \varphi(t_2)|.$$

Считая для определенности $|\varphi'(t_1)| \leqslant |\varphi'(t_2)|$ и заметив, что $|h_1| < |h|$, будем иметь

$$\left|\frac{\bar{\varphi}(x_0+h) - \bar{\varphi}(x_0)}{h}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(t_1+h_1) - \varphi(t_1)}{h_1}\right|. \tag{6.10}$$

Если $\varphi'(t_1) = 0$, то при $h \to 0$ из (6.10) сразу получаем все утверждения леммы. Пусть $\varphi'(t_1) \neq 0$, а, значит, в силу нашего предположения и $\varphi'(t_2) \neq 0$. Тогда в точке $y_0 = \bar{\varphi}(x_0)$ существуют производные функций $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$, обратных к $|\varphi(x)|$ соответственно на (α, α') и (β', β). Поэтому ввиду (6.4)

$$m'(y_0) = \psi_2'(y_0) - \psi_1'(y_0) = \frac{1}{\varphi'(t_2)} - \frac{1}{\varphi'(t_1)} = \frac{\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)}{\varphi'(t_1)\,\varphi'(t_2)},$$

причем $m'(y_0) \neq 0$. Следовательно, производная $\bar{\varphi}'(x_0)$ существует и

$$|\bar{\varphi}'(x_0)| = \left|\frac{\varphi'(t_1)\,\varphi'(t_2)}{\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)}\right|. \tag{6.11}$$

Теперь (6.8) получается из (6.10) при $h \to 0$, а (6.9) следует из (6.11), если учесть, что для чисел a и b, имеющих разные знаки, справедливо неравенство $4|ab| \leqslant (a-b)^2$, причем оно обращается в равенство лишь при $a=-b$, что доказывает последнее утверждение леммы.

Замечание. Выбирая приращение h положительным или отрицательным, с помощью совершенно аналогичных рассуждений придем к неравенствам

$$\begin{aligned} |\overline{\varphi}'_{+}(x_0)| &\leqslant \frac{1}{4}|\varphi'_{-}(t_1)-\varphi'_{+}(t_2)|, \\ |\overline{\varphi}'_{-}(x_0)| &\leqslant \frac{1}{4}|\varphi'_{+}(t_1)-\varphi'_{-}(t_2)|, \end{aligned} \tag{6.12}$$

где через $f'_{+}(x)$ и $f'_{-}(x)$ обозначены соответственно правая и левая производные функции f в точке x.

§ 6.3. Разложение интеграла на сумму простых функций

Теперь можно пояснить общую идею дальнейших рассуждений, направленных на выявление новых свойств дифференцируемых функций. Разложив функцию f особым образом на конечную или счетную сумму простых, мы сопоставим ей с помощью перестановок некоторую монотонную функцию, сохраняющую информацию не только о норме в L функции f, но и о ее вариации.

Пусть D — множество 2π-периодических функций $g(x)$, имеющих в каждой точке x конечные односторонние пределы $g(x-0)$ и $g(x+0)$. Из этого определения ясно, что каждая функция $g \in D$ ограничена. Менее очевидным является тот факт, что функции $g(x)$ из D почти всюду непрерывны (и, значит, интегрируемы по Риману на любом промежутке конечной длины).

Чтобы убедиться в этом, сопоставим каждой точке разрыва $\tilde{x}$ функции $g \in D$ точку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ плоскости, где $\tilde{y}$ — любое число, заключенное между двумя неравными из трех чисел $g(\tilde{x}-0)$, $g(\tilde{x}+0)$ и $g(\tilde{x})$ и не совпадающее ни с одним из этих чисел. Заметим, что в любой окрестности $(\tilde{x}-\delta, \tilde{x}+\delta)$ есть как точки x, в которых $g(x) > \tilde{y}$, так и точки x, в которых $g(x) < \tilde{y}$.

Пусть $\tilde{M} = \{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ — множество всех точек плоскости, поставленных указанным выше образом во взаимно однозначное соответствие точкам разрыва $\tilde{x}$. Докажем, что $\tilde{M}$ состоит только из изолированных точек. Фиксируем

$(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in \tilde{M}$. В силу выбора ординаты $\tilde{y}_0$ существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что в прямоугольнике $\Delta = \{\tilde{x}_0 - \delta < x < \tilde{x}_0 + \delta; \quad \tilde{y}_0 - \varepsilon < y < \tilde{y}_0 + \varepsilon\}$ нет точек $(x, g(x))$ графика функции $g(x)$, причем для всех x из интервала $(\tilde{x}_0 - \delta, \tilde{x}_0)$, а также для всех x из $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_0 + \delta)$ выполняется лишь одно из неравенств: $g(x) < \tilde{y}_0 - \varepsilon$ или $g(x) > \tilde{y}_0 + \varepsilon$. Но тогда в прямоугольник Δ не попадет ни одна из точек $(\tilde{x}, \tilde{y})$ из $\tilde{M}$, отличных от $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$. Следовательно, каждая точка множества $\tilde{M}$ есть изолированная точка этого множества, а потому $\tilde{M}$ не более чем счетно. Значит не более чем счетно и множество точек разрыва функции $g(x) \in D$.

По функции g из D определим исправленную функцию g_1 следующим образом:

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+0) + g(x-0)], & \text{если } g(x+0)g(x-0) > 0, \\ 0, & \text{если } g(x+0)g(x-0) \leqslant 0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Таким образом, $g_1(x)$ совпадает с $g(x)$ в точках ее непрерывности (т. е. почти всюду), а в точке разрыва $g_1(x) = 0$, если числа $g(x+0)$ и $g(x-0)$ разных знаков или хотя бы одно из них равно нулю, $g_1(x) = {}^1/_2[g(x+0) + g(x-0)]$, если числа $g(x+0)$ и $g(x-0)$ имеют одинаковые знаки

Из определения исправленной функции $g_1(x)$ ясно, что в каждой точке разрыва x значение $g_1(x)$ заключено между $g(x-0)$ и $g(x+0)$, и потому

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(g_1) \leqslant \overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(g).$$

Следовательно, если $g(x)$ из D имеет ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$, т. е. $g \in V$, то также $g_1 \in V$ и в каждой точке существуют односторонние пределы $g_1(x+0)$ и $g_1(x-0)$.

Так как $g_1(x)$ совпадает с $g(x)$ почти всюду, то для любой точки x_0 можно выбрать последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_n \to x_0$, $x_n \geqslant x_0$ $(x_n \leqslant x_0)$ и $g(x_n) = g_1(x_n)$. Отсюда сразу следует, что $g_1(x \pm 0) = g(x \pm 0)$ и, с учетом (6.13),

$$g_1(x)=\begin{cases} {}^1/_2[g_1(x+0)+g_1(x-0)], & \text{если } g_1(x+0)\times g_1(x-0)>0, \\ 0, & \text{если } g_1(x+0)\times g_1(x-0)\leqslant 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

Исправленная функция $g_1(x)$ обладает рядом свойств, аналогичных свойствам непрерывных функций, а именно:

i) $g_1(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности любой точки x, где $g_1(x)\neq 0$;

ii) $g_1(x)$ может менять знак, только проходя через нуль;

iii) множество нулей функции $g_1(x)$ замкнуто.

Действительно, если $g_1(x_0)\neq 0$, например $g_1(x_0)>0$, то из (6.14) следует, что $g_1(x_0-0)>0$, $g_1(x_0+0)>0$, и потому для всех x, достаточно близких к x_0, будет $g_1(x)>0$.

Далее пусть $g_1(x_1)>0$, $g_1(x_2)<0$ $(x_1<x_2)$. Положим

$$x_0=\sup_{x_1\leqslant x\leqslant x_2}\{x:\ g_1(x)>0\}.$$

В силу уже доказанного свойства i) $x_1<x_0<x_2$. Для $x_1\leqslant x<x_0$ $g_1(x)>0$, и потому $g_1(x_0-0)\geqslant 0$, а из самого определения точки x_0 следует, что $g_1(x_0+0)\leqslant 0$. Поэтому с учетом (6.14) $g_1(x_0)=0$ и свойство ii) также доказано.

Наконец, если $x_n\to x_0$ и $g_1(x_n)=0$, то хотя бы одно из чисел $g_1(x_0-0)$ и $g_1(x_0+0)$ равно нулю и, следовательно, опять в силу (6.14) $g_1(x_0)=0$.

Обозначим через D^r множество r-х 2π-периодических интегралов от функций $g\in D$. В частности, $f\in D^1$ означает, что

$$f(x)=\int_a^x g(t)\,dt+c,$$

где a и c — любые числа, $g(t)\in D$, причем

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,dt=0.$$

Везде ниже мы будем считать, что если $f\in D^1$, то $f'(x)\equiv g(x)$ уже является исправленной функцией. Это никак не повлияет на исследование свойств функции f, ибо исправленная функция отличается от исходной лишь на множестве меры нуль.

С функцией $f \in D^1$ везде ниже будем связывать точку x_0 такую, что

$$|f(x_0)| = \min_x |f(x)| \tag{6.15}$$

и, следовательно, в силу свойства $ii)$ исправленной функции, $f'(x_0) = g(x_0) = 0$.

Обозначим через F_0 множество нулей функции $g(x)$ на $[x_0, x_0 + 2\pi]$. По свойству iii) исправленной функции F_0 замкнуто, а потому его непрерывный образ $f(F_0)$ есть тоже замкнутое множество. Легко показать, что $\operatorname{mes} f(F_0) = 0$. Действительно, если G — открытое множество, содержащее F_0, а (a_k, b_k) — составляющие множество G интервалы, то

$$\operatorname{mes} f(F_0) \leqslant \operatorname{mes} f(G) =$$
$$= \operatorname{mes} f\left[\bigcup_k (a_k, b_k)\right] \leqslant \sum_k \operatorname{mes} f[(a_k, b_k)] =$$
$$= \sum_k \left[\sup_{a_k < x < b_k} f(x) - \inf_{a_k < x < b_k} f(x)\right] \leqslant \sum_k \overset{b_k}{\underset{a_k}{V}}(f) =$$
$$= \sum_k \int_{a_k}^{b_k} |g(t)|\, dt = \int_G |g(t)|\, dt = \int_{G \setminus F_0} |g(t)|\, dt.$$

Остается заметить, что величину последнего интеграла можно сделать сколь угодно малой за счет уменьшения меры множества $G \setminus F_0$.

Пусть $f \in D^1$ и $f(x) \geqslant 0$. Положим

$$M = \max_x f(x), \qquad m = \min_x f(x).$$

Множество $[m, M] \setminus f(F_0)$ открыто, и потому

$$[m, M] \setminus f(F_0) = \bigcup_n (a_n, b_n),$$
$$(a_n, b_n) \bigcap (a_k, b_k) = \varnothing \qquad (n \neq k),$$

а так как $\operatorname{mes} f(F_0) = 0$, то

$$\sum_n (b_n - a_n) = M - m. \tag{6.16}$$

Обозначая через $[f(x)]_N$ срезку функции $f(x)$ числом N:

$$[f(x)]_N = \min\{f(x),\ N\},$$

сопоставим каждому интервалу $(a_n,\ b_n)$ функцию (рис. 12)

$$f_n(x) = [f(x)]_{b_n} - [f(x)]_{a_n} \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 2\pi)$$

(точка x_0 определена равенством (6.15), т. е. в данном

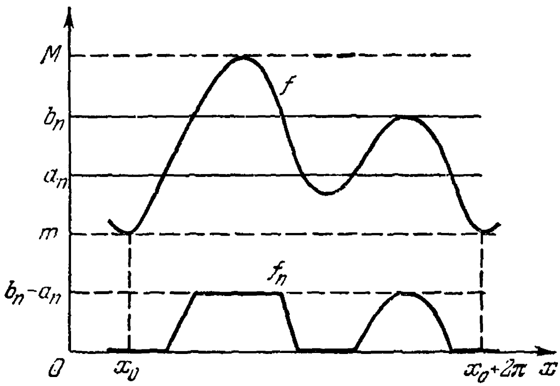

Рис 12.

случае $f(x_0) = \min\limits_x f(x)$). Таким образом, по определению

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) - a_n, & \text{если} \quad a_n \leqslant f(x) < b_n, \\ b_n - a_n, & \text{если} \quad f(x) \geqslant b_n, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) < a_n. \end{cases}$$

Зафиксируем x, $x_0 < x < x_0 + 2\pi$, и пусть натуральное число n_0 определено неравенствами

$$a_{n_0} \leqslant f(x) < b_{n_0}.$$

Тогда

$$f(x) = a_{n_0} + f_{n_0}(x),$$

а так как для всех n таких, что $a_n \geqslant b_{n_0}$, $f_n(x) = 0$, и, кроме того, ввиду (6.16)

$$a_{n_0} = \sum_{b_n \leqslant a_{n_0}} (b_n - a_n) + f(x_0) = \sum_{b_n \leqslant a_{n_0}} f_n(x) + f(x_0),$$

то значение $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\sum_n f_n(x)+f(x_0) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0+2\pi). \tag{6.17}$$

Это верно для любых x из $[x_0, x_0+2\pi]$, а потому

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\,dx=\sum_n \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f_n(x)\,dx+2\pi f(x_0). \tag{6.18}$$

Ясно далее, что

$$\operatorname*{V}_{x_0}^{x_0+2\pi}(f_n)=\int_{e_n} |g|\,dt \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $g=f'$ и

$$e_n=\{x:\ x_0<x<x_0+2\pi, \quad a_n<f(x)<b_n\}.$$

Множества e_n не пересекаются, и если $x \notin \bigcup_n e_n$, то $g(x)=0$. Следовательно,

$$\operatorname*{V}_{x_0}^{x_0+2\pi}(f)=\int_{x_0}^{x_0+2\pi} |g|\,dt=\sum_n \int_{e_n} |g|\,dt=\sum_n \operatorname*{V}_{x_0}^{x_0+2\pi}(f_n). \tag{6.19}$$

Если $a_n<f(x)<b_n$, то $x \notin F_0$ и $f'(x)=g(x)\neq 0$, т. е. точка x является точкой строгой монотонности функции f. Поэтому ясно, что $f_n(x)$ есть сумма неотрицательных простых функций $\varphi_n^i(x)$ с непересекающимися основными интервалами $(\alpha_n^i,\ \beta_n^i) \subset (x_0,\ x_0+2\pi)$. Так как максимум каждой из функций $\varphi_n^i(x)$ равен b_n-a_n, то при каждом n число их p_n конечно. Таким образом,

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{p_n} \varphi_n^i(x) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0+2\pi), \tag{6.20}$$

причем

$$\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f_n(x)\,dx=\sum_{i=1}^{p_n} \int_{\alpha_n^i}^{\beta_n^i} \varphi_n^i(x)\,dx \tag{6.21}$$

и

$$\operatorname*{V}_{x_0}^{x_0+2\pi}(f_n)=\sum_{i=1}^{p_n} \operatorname*{V}_{\alpha_n^i}^{\beta_n^i}(\varphi_n^i). \tag{6.22}$$

Объединяя (6.17) и (6.20), получаем разложение

$$f(x)=\sum_n \sum_{i=1}^{p_n} \varphi_n^i(x)+f(x_0) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0+2\pi) \qquad (6.23)$$

неотрицательной функции $f \in D^1$ на простые функции $\varphi_n^i(x)$. При этом, как это видно из (6.18) и (6.21), а также из (6.19) и (6.22),

$$\|f\|_L \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx=\sum_n \sum_{i=1}^{p_n} \int_{\alpha_n^i}^{\beta_n^i} |\varphi_n^i(x)|\,dx+2\pi|f(x_0)|, \qquad (6.24)$$

$$\overset{x_0+2\pi}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}}(f)=\sum_n \sum_{i=1}^{p_n} \overset{\beta_n^i}{\underset{\alpha_n^i}{\mathrm{V}}}(\varphi_n^i). \qquad (6.25)$$

Если $f(x) \leqslant 0$, то, построив описанным способом разложение для неотрицательной функции $-f(x)$, получим представление $f(x)$ в виде (6.23), где $f(x_0)=\max\limits_x f(x) \leqslant 0$ и $\varphi_n^i(x)$ — простые функции, отрицательные на своих основных интервалах. Соотношения (6.24) и (6.25) при этом сохранятся.

В общем случае, когда $f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, представим, как обычно, f в виде $f=f_+ + f_-$, где

$$f_+(x)=\max\{f(x),\ 0\}, \qquad f_-(x)=\min\{f(x),\ 0\},$$

разложим на простые функции отдельно f_+ и f_-, а затем объединим оба разложения. Мы можем затем для удобства перенумеровать все входящие в объединение разложений простые функции одним индексом.

Итак, любую функцию $f(x)$ из D^1 можно представить в виде конечной или счетной суммы:

$$f(x)=\sum_k \varphi_k(x)+d \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0+2\pi), \qquad (6.26)$$

где $\varphi_k(x)$ — простые функции с основными интервалами

$(\alpha_k,\ \beta_k) \subset (x_0,\ x_0+2\pi)$ и

$$d = f(x_0), \quad |f(x_0)| = \min_x |f(x)|.$$

Предыдущими рассуждениями доказано, что разложение (6.26) обладает следующими свойствами:

1) $|f(x)| = \sum\limits_k |\varphi_k(x)| + |d| \quad (x_0 \leqslant x \leqslant 2\pi + x_0)$.

2) $\|f\|_L = \sum\limits_k \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} |\varphi_k(x)|\,dx + 2\pi\,|d|$.

3) $\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f) = \sum\limits_k \overset{\beta_k}{\underset{\alpha_k}{\mathrm{V}}}(\varphi_k) = 2\sum\limits_k \max\limits_x |\varphi_k(x)|$.

4) Если $[\alpha_k',\ \beta_k']$ — отрезки, на которых $|\varphi_k(x)| = \max\limits_x |\varphi_k(x)|$, то интервалы системы $\{(\alpha_k,\ \alpha_k'),\ (\beta_k',\ \beta_k)\}$ попарно не пересекаются, а любые два основных интервала $(\alpha_k,\ \beta_k)$ и $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$ или не имеют общих точек, или вложены один в другой так, что если, например, $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu) \subset (\alpha_k,\ \beta_k)$, то

$$\alpha_k < \alpha_k' \leqslant \alpha_\nu < \beta_\nu \leqslant \beta_k' < \beta_k.$$

5) Если $x \in (\alpha_i,\ \alpha_i') \cup (\beta_i',\ \beta_i)$, то $f(x) = \varphi_i(x) + \mathrm{const}$, и если производная $f'(x)$ существует, то $f'(x) = \varphi_i'(x) \neq 0$ и $\varphi_k'(x) = 0$ $(k \neq i)$. Это значит, что почти всюду на $(x_0,\ x_0+2\pi)$ имеет место равенство

$$f'(x) = \sum_k \varphi_k'(x),$$

в котором при каждом x не равной нулю может быть лишь одна из функций $\varphi_k'(x)$, так что

$$|f'(x)| = \sum_k |\varphi_k'(x)|. \tag{6.27}$$

Заметим еще, что ряды $\sum\limits_k \varphi_k(x)$ и $\sum\limits_k \varphi_k'(x)$ ограниченно сходятся на $(x_0,\ x_0+2\pi)$, т. е. их частичные суммы почти всюду ограничены одним числом. Это немедленно следует из равенств (6.26) и (6.27), если учесть ограниченность функций $f(x)$ и $f'(x)$.

§ 6.4. Σ-перестановка $\Phi(f, x)$

Отправляясь от разложения (6.26), введем специальный оператор Φ, сопоставив функции $f \in D^1$ функцию

$$\Phi(f, x) = \sum_k \bar{\varphi}_k(x) + |d| \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi), \tag{6.28}$$

где $\bar{\varphi}_k(x)$ — убывающая перестановка функции $|\varphi_k(x)|$. Функцию $\Phi(f, x)$ будем называть *Σ-перестановкой* функции f. Из ее определения, а также из отмеченных в конце § 6.3 свойств разложения (6.26) сразу вытекают следующие свойства:

1°. $\Phi(f, x)$ не возрастает на $[0, 2\pi]$, и если положить

$$\Delta = \sup_k \delta_k \qquad (\delta_k = \beta_k - \alpha_k),$$

то $\Phi(f, x) > |d|$ для $0 \leqslant x < \Delta$ и $\Phi(f, x) = |d|$ для $\Delta \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2°. $\|\Phi(f)\|_L \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^{2\pi} \Phi(f, x)\,dx = \|f\|_L$.

3°. $\Phi(f, 0) = \frac{1}{2} \overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f) + |d| = \frac{1}{2}\|f'\|_L + |d|$.

4°. $\Phi(\lambda f, x) = \lambda\Phi(f, x) \quad (\lambda > 0)$.

Пусть $s = \{k\}$ — множество (конечное или счетное) индексов суммирования в (6.26) и (6.28). При каждом фиксированном x, $0 < x < \Delta$, из множества s всех индексов будем выделять два подмножества $s_1(x)$ и $s_2(x)$ следующим образом:

$$s_1(x) = \{k\colon\ k \in s,\ \delta_k' < x < \delta_k\}, \qquad s_2(x) = \{k\colon\ k \in s,\ x \leqslant \delta_k'\}$$
$$(\delta_k' = \beta_k' - \alpha_k').$$

Если учесть, что при $x \geqslant \delta_k$ $\bar{\varphi}_k(x) = 0$, то можем написать

$$\Phi(f, x) - |d| = \sum_{k \in s_1(x)} \bar{\varphi}_k(x) + \sum_{k \in s_2(x)} \bar{\varphi}_k(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x) \tag{6.29}$$
$$(0 < x < \Delta).$$

Весьма существенно, что при каждом $x \in (0, \Delta)$ сумма $\sigma_1(x)$ содержит конечное число слагаемых. Действительно, если $\delta'_k < x < \delta_k$, то функции $\varphi_k(x)$ соответствует интервал $(t_k, \tau_k) \subset (\alpha_k, \beta_k)$ такой, что (рис. 13)

$$\begin{gathered}\tau_k - t_k = x, \quad \varphi_k(x) = |\varphi_k(t_k)| = |\varphi_k(\tau_k)|, \\ f(t_k) = f(\tau_k), \quad |f(t)| > |f(t_k)| \quad (t_k \leqslant t \leqslant \tau_k).\end{gathered} \tag{6.30}$$

В силу свойства 4) разложения (6.26) интервалы (t_k, τ_k) не пересекаются, а так как все они лежат на $(x_0, x_0 + 2\pi)$, то их число $m = m(x)$ не превосходит $2\pi/x$. Ясно, что

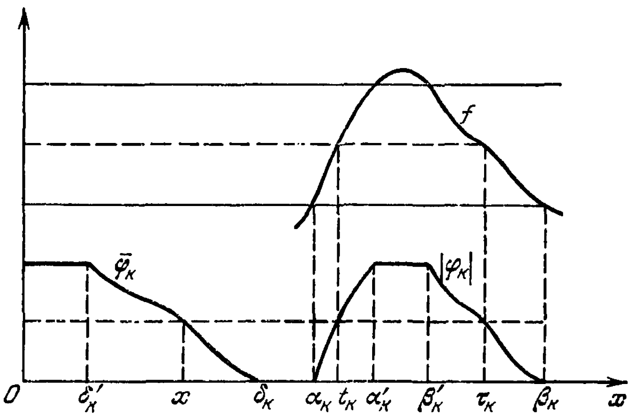

Рис. 13.

в силу того же свойства 4) основные интервалы (α_k, β_k) функций $\varphi_k(x)$, входящих в сумму $\sigma_1(x)$, также пересекаться не могут.

Таким образом,

$$\Phi(f, x) - |d| = \sum_{\nu=1}^{m} \bar{\varphi}_\nu(x) + \sum_{\delta'_i \geqslant x} \bar{\varphi}_i(x) \quad (0 < x < \Delta), \tag{6.31}$$

где $m = m(x) < 2\pi/x$, причем в первую сумму вошли все функции $\varphi_\nu(x)$, для которых $\delta'_\nu < x < \delta_\nu$, а во вторую — все функции $\bar{\varphi}_i(x)$, для которых $\delta'_i \geqslant x$. Надо иметь в виду, что при изменении x меняется и состав слагаемых в каждой сумме правой части (6.31).

Исходя из представления (6.29) можно выразить $\Phi(f, x)$ через интеграл от f' по некоторому множеству из $(x_0, x_0+2\pi)$. Фиксируем $x\in(0, \Delta)$ и заметим, что в случае $k\in s_1(x)$, т. е. $\delta'_k<x<\delta_k$, имеются непересекающиеся промежутки (t_k, τ_k) такие, что $\alpha_k<t_k<\alpha'_k\leqslant\leqslant\beta'_k<\tau_k<\beta_k$ и

$$\varphi_k(x)=|f(t_k)-f(\alpha_k)|=|f(\tau_k)-f(\beta_k)|.$$

В случае же $k\in s_2(x)$, т. е. $\delta'_k\geqslant x$,

$$\bar\varphi_k(x)=\max_x|\varphi_k(x)|=|f(\alpha'_k)-f(\alpha_k)|=|f(\beta'_k)-f(\beta_k)|.$$

В соответствии с (6.29), учитывая строгую монотонность функции $f(x)$ на промежутках (α_k, α'_k) и (β'_k, β_k), можем написать

$$\Phi(f, x)-|d|=\frac{1}{2}\int\limits_{A_1\cup A_2}|f'(t)|\,dt, \tag{6.32}$$

где

$$A_1=A_1(x)=\bigcup_{k\in s_1(x)}[(\alpha_k, t_k)\cup(\tau_k, \beta_k)],$$

$$A_2=A_2(x)=\bigcup_{k\in s_2(x)}[(\alpha_k, \alpha'_k)\cup(\beta'_k, \beta_k)],$$

причем ясно, что $A_1\cap A_2=\varnothing$.

Если положить

$$F_x=[x_0, x_0+2\pi]\setminus\bigcup_{k\in s_1(x)}(t_k, \tau_k),$$

то $A_1\cup A_2\subset F_x$ и из (6.32) получаем оценку

$$\Phi(f, x)-|d|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{F_x}|f'(t)|\,dt. \tag{6.33}$$

Теперь займемся оценкой производной Σ-перестановки $\Phi(f, x)$.

Если $\delta'_k<x<\delta_k$ и в точках $t_k=t_k(x)$ из (α_k, α'_k) и $\tau_k=\tau_k(x)$ из (β'_k, β_k), для которых выполнены соотношения (6.30), функция f (а значит, и φ_k) дифференцируема, то в силу леммы 6.2.1 производная $\bar\varphi'_k(x)$ существует и

$$|\bar\varphi'_k(x)|\leqslant\frac{1}{4}|\varphi'_k(t_k)-\varphi'_k(\tau_k)|=\frac{1}{4}|f'(t_k)-f'(\tau_k)|. \tag{6.34}$$

Так как $f(x)$ абсолютно непрерывна и, значит, $f'(x)$ существует почти всюду, то производная $\bar\varphi_k'(x)$ существует почти всюду на (δ_k', δ_k) и для нее имеет место оценка (6.34), в которой, как уже отмечалось, точки t_k и τ_k определяются выбором x.

Если же $0 < x < \delta_k'$ или $x > \delta_k$, то, очевидно, $\bar\varphi_k'(x) = 0$.

Таким образом, каждая из перестановок $\bar\varphi_k(x)$ в (6.28) почти всюду дифференцируема и при каждом x существует лишь конечное число $m = m(x)$ функций $\bar\varphi_k$, для которых $\bar\varphi_k'(x) \neq 0$, причем для $|\bar\varphi_k'(x)|$ справедлива оценка (6.34).

Предыдущими рассуждениями доказано

Предложение 6.4.1. *Если $f \in D^1$, то почти всюду на* $(0, 2\pi)$

$$\Phi'(f, x) = \sum_k \bar\varphi_k'(x), \tag{6.35}$$

причем для каждого x из $(0, 2\pi)$ может существовать лишь конечное число $m = m(x) < 2\pi/x$ не равных нулю производных $\bar\varphi_k'(x)$. Для всех значений x из $(0, \Delta)$, в которых $\Phi'(f, x)$ существует (т. е. почти всюду на $(0, \Delta)$) справедлива оценка

$$|\Phi'(f, x)| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{m} |\varphi_\nu'(t_\nu) - \varphi_\nu'(\tau_\nu)| =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{m} |f'(t_\nu) - f'(\tau_\nu)|, \tag{6.36}$$

где сумма распространена на все (непересекающиеся) интервалы (t_ν, τ_ν) из $(x_0, x_0 + 2\pi)$ такие, что

$$\tau_\nu - t_\nu = x, \quad f(t_\nu) = f(\tau_\nu), \quad |f(t)| > |f(t_\nu)| \ (t_\nu < t < \tau_\nu).$$

Из первой части предложения 6.4.1 легко выводится следующее утверждение.

Предложение 6.4.2. *Для любой функции $f \in D^1$ функция $\Phi(f, x)$ абсолютно непрерывна на* $[0, 2\pi]$.

Действительно, сходящийся ряд неотрицательных функций можно интегрировать почленно (И. П. Натансон

[2], стр. 135), и потому, учитывая, что вместе с f абсолютно непрерывными являются также и функции $\varphi_k(x)$ и $\bar{\varphi}_k(x)$, будем иметь

$$\Phi(f,\ x)-|d|=\sum_k \bar{\varphi}_k(x)=\sum_k\left(-\int_x^{2\pi}\bar{\varphi}_k'(t)\,dt\right)=$$
$$=-\int_x^{2\pi}\left(\sum_k\bar{\varphi}_k'(t)\right)dt=-\int_x^{2\pi}\Phi'(f,\ t)\,dt.$$

Таким образом, функция $\Phi(f,\ x)$, являясь интегралом от своей производной, абсолютно непрерывна.

Покажем еще, что для односторонних производных утверждения, сформулированные в предложении 6.4.1, имеют место в каждой точке.

В самом деле, если $f\in D^1$, то

$$f'_+(x)=\lim_{h\to 0+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0+0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}g(t)\,dt,$$

где $g\in D$ и, значит, существует конечный правый предел $g(x+0)$. Положив под интегралом $g(t)=g(x+0)+\beta(t)$, где $\beta(t)\to 0$, при $t\to x+0$ получим

$$f'_+(x)=g(x+0)+\lim_{h\to 0+0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\beta(t)\,dt=g(x+0).$$

Аналогично проверяется, что в каждой точке $f'_-(x)=g(x-0)$. Ясно, что вместе с $f(x)$ односторонние производные в каждой точке имеют и все простые функции $\varphi_k(x)$, входящие в разложение (6.26). Если теперь учесть замечание в конце § 6.1, то приходим к выводу, что перестановки $\bar{\varphi}_k(x)$ также имеют односторонние производные в каждой точке, причем для $\delta_k'\leqslant x\leqslant\delta_k$

$$|\bar{\varphi}'_{k\pm}(x)|\leqslant\frac{1}{4}|\varphi'_{k\mp}(t_k)-\varphi'_{k\pm}(\tau_k)|=$$
$$=\frac{1}{4}|g(t_k\mp 0)-g(\tau_k\pm 0)|,$$

где t_k и τ_k связаны с x равенствами (6.30).

Таким образом, в формулировке предложения 6.4.1 оценку (6.36) можно заменить соотношением

$$|\Phi'_{\pm}(f,\ x)| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{m} |g(t_k \mp 0) - g(\tau_k \pm 0)|,$$

где $g = f'$, которое выполняется в каждой точке x промежутка $(0,\ \Delta)$ (при соответствующем выборе знаков).

Нам потребуется еще следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 6.4.3. *Пусть $f \in D^1$, $f(x_0) = 0$ и $S = \{(a_i,\ b_i)\}$ — конечная или счетная система непересекающихся интервалов из $(x_0,\ x_0 + 2\pi)$ таких, что:*

1) $b_i - a_i \leqslant c \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots)$;

2) *любые два интервала системы S разделяет нуль функции f. Тогда*

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} |f(x)|\, dx \leqslant \int_0^c \Phi(f,\ x)\, dx.$$

Действительно, так как f обращается в нуль, то в представлении (6.26) $d = 0$, и мы имеем

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} |f(x)|\, dx = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \left(\sum_k |\varphi_k(t)|\right) dt =$$

$$= \sum_i \sum_k \int_{a_i}^{b_i} |\varphi_k(t)|\, dt = \sum_i \sum_k \int_{(a_i,\, b_i) \cap (\alpha_k,\, \beta_k)} |\varphi_k(t)|\, dt.$$

Но каждая функция $\varphi_k(t)$ может попасть в двойную сумму только один раз, ибо в силу условия 2) леммы ее основной интервал $(\alpha_k,\ \beta_k)$ может иметь общие точки не более чем с одним интервалом системы S. Если учесть еще, что ввиду условия 1) и предложения 6.1.1

$$\int_{a_i}^{b_i} |\varphi_k(t)|\, dt \leqslant \int_0^c |\bar{\varphi}_k(t)|\, dt,$$

то

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} |f(t)|\, dt \leqslant \sum_k \int_0^c \bar{\varphi}_k(t)\, dt = \int_0^c \Phi(f,\ t)\, dt,$$

что и требовалось.

§ 6.5. Основное неравенство

Основной результат этой главы составляет следующая теорема, дающая точную оценку для производной $\Phi'(f, x)$.

Теорема 6.5.1. *Если $f \in D^3$, то во всех точках промежутка* $(0, 2\pi)$, *в которых* $\Phi'(f, x)$ *существует, т. е. почти всюду, справедливо неравенство*

$$|\Phi'(f, x)| \leqslant \frac{1}{4} \int_0^x \Phi(f'', t)\, dt. \tag{6.37}$$

В классе D^3 есть функции, для которых в (6.37) *будет знак равенства в каждой точке интервала* $(0, \Delta)$, *на котором* $\Phi(f, x) > 0$.

Доказательство. Так как Σ-перестановка $\Phi(f, x)$ инвариантна относительно сдвига аргумента функции f, т. е.

$$\Phi(f(t), x) = \Phi(f(t+\alpha), x) \quad \forall \alpha,$$

то, не теряя общности, можно считать, что

$$\min_x |f(x)| = |f(0)|,$$

и в разложении (6.26) мы можем считать $x_0 = 0$.

Если в точке $x \in (0, \Delta)$ (а неравенство (6.37) надо доказывать только для таких точек) существует производная $\Phi'(f, x)$, то в силу предложения 6.4.1

$$|\Phi'(f, x)| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{m} |\varphi'_\nu(t_\nu) - \varphi'_\nu(\tau_\nu)| =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{m} |f'(t_\nu) - f'(\tau_\nu)| = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{m} \left| \int_{t_\nu}^{\tau_\nu} f''(t)\, dt \right|, \tag{6.38}$$

причем непересекающиеся интервалы (t_ν, τ_ν), имеющие каждый длину x, расположены на $(0, 2\pi)$. Можно считать, что

$$0 \leqslant t_1 < \tau_1 \leqslant t_2 < \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m < \tau_m \leqslant 2\pi.$$

При оценке последней суммы в (6.38) мы будем ориентироваться на применение леммы 6.4.3 и потому должны обеспечить выполнение условия 2) этой леммы относительно разделения интервалов интегрирования нулями

$f''(t)$. Для этого нам, может быть, придется сдвигать концы интервала $(t_\nu,\ \tau_\nu)$ внутрь без уменьшения абсолютной величины интеграла. Пусть

$$I_\nu=\int_{t_\nu}^{\tau_\nu} f''(t)\,dt=f'(\tau_\nu)-f'(t_\nu)=\varphi_\nu'(\tau_\nu)-\varphi_\nu'(t_\nu)$$
$$(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Учитывая расположение точек t_ν и τ_ν на основном интервале $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$ функции $\varphi_\nu(x)$, заключаем, что $I_\nu\neq 0$ и $\operatorname{sign} I_\nu=-\operatorname{sign}\varphi_\nu$, где $\operatorname{sign}\varphi_\nu$ понимается как знак функции $\varphi_\nu(x)$ на $(\alpha_\nu,\ \beta_\nu)$.

Те концы интервалов $(t_\nu,\ \tau_\nu)$, в которых f'' обращается в нуль или имеет тот же знак, что и I_ν, мы оставляем на месте, пере обозначив, однако, их на t_ν' и τ_ν'.

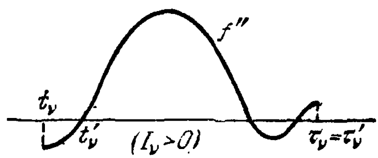

Рис. 14

Пусть $\operatorname{sign} f''(t_\nu)=-\operatorname{sign} I_\nu$. Тогда $f''(t)$ обязательно обращается в нуль на $(t_\nu,\ \tau_\nu)$ и, обозначив через t_ν' ближайший к t_ν справа нуль $f''(t)$ (рис. 14), будем иметь

$$|I_\nu|<\left|\int_{t_\nu'}^{\tau_\nu} f''(t)\,dt\right|.$$

Аналогично, если $f''(\tau_\nu)=-\operatorname{sign} I_\nu$, то вместо τ_ν возьмем τ_ν' — ближайший к τ_ν слева нуль функции f''; абсолютная величина интеграла при этом также увеличится.

Так как $t_\nu'<\tau_\nu'$ и $(t_\nu',\ \tau_\nu')\subset(t_\nu,\ \tau_\nu)$, то мы пришли к системе непересекающихся интервалов $(t_\nu',\ \tau_\nu')$, расположенных на $(0,\ 2\pi)$ и таких, что $\tau_\nu'-t_\nu'\leqslant x$, причем

$$\begin{aligned}&\text{если } I_\nu>0, \text{ то } f''(t_\nu')\geqslant 0,\quad f''(\tau_\nu')\geqslant 0;\\ &\text{если } I_\nu<0, \text{ то } f''(t_\nu')\leqslant 0,\quad f''(\tau_\nu')\leqslant 0.\end{aligned}\tag{6.39}$$

Кроме того, если положить

$$I_\nu'=\int_{t_\nu'}^{\tau_\nu'} f''(t)\,dt,$$

то

$$|I'_\nu| \geqslant |I_\nu|, \quad \operatorname{sign} I'_\nu = \operatorname{sign} I_\nu = -\operatorname{sign} \varphi_\nu.$$

Теперь мы можем продолжить оценку (6.38) следующим образом:

$$4|\Phi'(f, x)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{m} |I_\nu| \leqslant \sum_{\nu=1}^{m} |I'_\nu| \leqslant \sum_{\nu=1}^{m} \int_{t'_\nu}^{\tau'_\nu} |f''(t)|\,dt. \tag{6.40}$$

Положив $t'_{m+1} = t'_1 + 2\pi$, $\tau'_{m+1} = \tau'_1 + 2\pi$, покажем, что любые два интервала (t'_ν, τ'_ν) и $(t'_{\nu+1}, \tau'_{\nu+1})$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ разделены нулем функции f''.

Если I'_ν и $I'_{\nu+1}$ имеют разные знаки, то это сразу видно из (6.39). Пусть $I'_\nu < 0$, $I'_{\nu+1} < 0$, причем, очевидно, следует рассмотреть только тот случай, когда точки τ_ν и $t_{\nu+1}$ не сдвигались (т. е $\tau'_\nu = \tau_\nu$, $t'_{\nu+1} = t_{\nu+1}$) и

$$f''(\tau'_\nu) < 0, \qquad f''(t'_{\nu+1}) < 0. \tag{6.41}$$

В силу нашего предположения функции $\varphi_\nu(x)$ и $\varphi_{\nu+1}(x)$ (мы полагаем $\varphi_{m+1}(x) = \varphi_1(x - 2\pi)$) положительны на своих основных интервалах, поэтому

$$\int_{\tau'_\nu}^{t'_{\nu+1}} f''(t)\,dt = f'(t'_{\nu+1}) - f'(\tau'_\nu) = \varphi'_{\nu+1}(t'_{\nu+1}) - \varphi'_\nu(t'_\nu) > 0,$$

а это с учетом (6.41) показывает, что f'' на интервале $(\tau'_\nu, t'_{\nu+1})$ обращается в нуль.

Случай $I'_\nu > 0$, $I'_{\nu+1} > 0$ рассматривается совершенно аналогично.

Если теперь положить $t_0 = t^* - 2\pi$, где t^* — нуль функции f'', разделяющий (t'_m, τ'_m) и (t'_{m+1}, τ'_{m+1}), то $f''(t_0) = 0$ и на промежутке $(t_0, t_0 + 2\pi)$ мы находимся в условиях применимости леммы 6.4.3. Так как $\tau'_\nu - t'_\nu \leqslant x$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$, то, оценивая последнюю сумму в (6.40) с помощью этой леммы, сразу получим

$$4|\Phi'(f, x)| \leqslant \int_0^x \Phi(f'', t)\,dt$$

и соотношение (6.37) доказано.

Покажем, что знак равенства в (6.37) имеет место в каждой точке $x \in (0, \pi/n)$ для функций $f \in D^3$ периода

$2\pi/n$ $(n=1, 2, \ldots)$, нечетных и таких, что

$$f''\left(\frac{\pi}{2n}-t\right)=f''\left(\frac{\pi}{2n}+t\right) \qquad \left(0<t<\frac{\pi}{2n}\right),$$

если к тому же f'' строго монотонна на $(0, \pi/(2n))$ и $(\pi/(2n), \pi/n)$. Действительно, в этом случае $f(k\pi/n)=0$ и

$$f(x)=\sum_{k=1}^{2n}\varphi_k(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

где простая функция $\varphi_1(x)$ совпадает с $f(x)$ на своем основном интервале $(0, \pi/n)$, а

$$\varphi_k(x)=(-1)^{k-1}\varphi_1\left(x-\frac{(k-1)\pi}{n}\right) \qquad \left(\frac{(k-1)\pi}{n}\leqslant x\leqslant\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$(k=2, 3, \ldots, 2n),$$

причем $\bar{\varphi}_k(x)=\varphi_1(x)$ $(k=2, 3, \ldots, 2n)$. Таким образом, для таких функций

$$\Phi(f, x)=2n\varphi_1(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi/n).$$

Но так как $\varphi_1\left(\frac{\pi}{2n}-t\right)=\varphi_1\left(\frac{\pi}{2n}+t\right)$, то (лемма 6.2.1)

$$|\bar{\varphi}_1'(x)|=\frac{1}{4}|\varphi_1'(x_1)-\varphi_1'(x_2)|,$$

где $|x_2-x_1|=x$, $x_1=\pi/n-x_2$ и, следовательно,

$$4|\Phi'(f, x)|=4\cdot 2n|\bar{\varphi}_1'(x)|=2n|\varphi_1'(x_1)-\varphi_1'(x_2)|=$$
$$=2n\left|\int_{x_1}^{x_2}\varphi_1''(t)\,dt\right|=2n\int_{x_1}^{x_2}|\varphi_1''(t)|\,dt=$$
$$=2n\int_0^x\overline{\varphi_1''(t)}\,dt=\int_0^x\Phi(f'', t)\,dt.$$

Здесь мы учли, что f'' на $(0, 2\pi)$ есть сумма $2n$ простых функций $\varphi_k''(x)$, перестановки модулей которых совпадают с $\overline{\varphi_1''}(x)$. Теорема 6.5.1 полностью доказана.

Сделаем важные для дальнейшего замечания.

Замечание 1. Условиям, гарантирующим в (6.37) знак равенства для $0<x<\pi/n$, удовлетворяют, в частности, введенные в § 5.4 функции $\varphi_{nr}(x)$ и $g_{nr}(x)$ при всех $r=3, 4, \ldots$, так что

$$\Phi'(\varphi_{nr}, x) = -\frac{1}{4}\int_0^x \Phi(\varphi_{n,r-2}, t)\,dt \; (0<x<\pi/n), \quad (6.42)$$

$$\Phi'(g_{nr}, x) = -\frac{1}{4}\int_0^x \Phi(g_{n,r-2}, t)\,dt \; (0<x<\pi/n) \quad (6.43)$$

$$(r=3, 4, 5\ldots).$$

Замечание 2. Рассуждения, связанные с переходом от системы интегралов (t_ν, τ_ν) к (t'_ν, τ'_ν) при оценке $|\Phi'(f, x)|$ в доказательстве теоремы 6.5.1, применимы и в том случае, когда f'' принадлежит D и является исправленной функцией. Действительно, выбирая точки t'_ν и τ'_ν так, чтобы интервалы системы (t'_ν, τ'_ν) $(\nu=1, 2, \ldots, m+1)$ были разделены попарно нулями f'', мы использовали лишь те свойства непрерывной функции, которыми обладает и исправленная функция из D.

§ 6.6. Стандартные Σ-перестановки $\Phi_{ar}(x)$

Основная цель этой главы — выяснение экстремальных свойств дифференцируемых функций, выражаемых в виде теорем сравнения. Роль стандартных функций (функций сравнения) будут играть функции φ_{nr}, g_{nr} и их Σ-перестановки. Мы, однако, сможем в ряде случаев получить более общие результаты, если в качестве стандартных функций сравнения для $\Phi(f, x)$ возьмем следующую последовательность функций $\Phi_{ar}(x)$, непрерывно зависящих от параметра $a>0$:

$$\Phi_{a0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leqslant x < a), \\ 0 & (x \geqslant a); \end{cases}$$

$$\Phi_{ar}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^{a-x} \Phi_{a,r-1}(t)\,dt & (0 \leqslant x < a), \\ 0 & (x \geqslant a) \quad (r=1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Легко подсчитать, что для $0 \leqslant x \leqslant a$

$$\Phi_{a1}(x) = \frac{1}{4}(a-x),$$

$$\Phi_{a2}(x) = \frac{1}{16}(a^2-x^2),$$

$$\Phi_{a3}(x) = \frac{1}{96}(x^3-3ax^2+2a^3), \ldots$$

Графики первых трех функций представлены на рис. 15.

Отметим следующие свойства функций $\Phi_{ar}(x)$, вытекающие непосредственно из их определения:

1) $\Phi_{ar}(x)$ на промежутке $(0, a)$ есть многочлен степени r как относительно x, так и относительно a.

2) При всех $r \geqslant 1$ функция $\Phi_{ar}(x)$ на $(0, a)$ положительна и строго убывает от $\Phi_{ar}(0) = \gamma_r a^r$ (γ_r не зависит от a) до $\Phi_{ar}(a) = 0$.

3) $$\Phi'_{ar}(x) = -\frac{1}{2}\Phi_{a,\,r-1}(a-x) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^x \Phi_{a,\,r-2}(t)\,dt$$

$(0 < x < a,\ r \geqslant 2)$.

4) Если $a < b$, то $\Phi_{ar}(x) < \Phi_{br}(x)$ для $0 \leqslant x < b$ и $r \geqslant 1$.

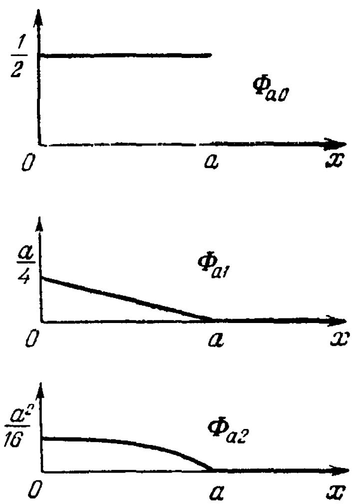

Рис. 15. Функции $\Phi_{ar}(x)$ $(r = 0, 1, 2)$.

5) Если $a < b$, то при всех $0 < x < a$

$$\Phi'_{ar}(x) = \Phi'_{br}(x) \quad (r = 1, 2),$$

$$|\Phi'_{ar}(x)| < |\Phi'_{br}(x)| \quad (r \geqslant 3).$$

6) При всех $\theta > 0$ (не обязательно целых)

$$\Phi_{ar}(\theta x) = \theta^r \Phi_{a/\theta,\,r}(x) \qquad (6.44)$$

$(0 \leqslant x \leqslant a/\theta,\ r = 0, 1, 2, \ldots)$.

Свойства 1) — 3) очевидны. Свойство 4) при $r = 1$ также очевидно, а для $r \geqslant 2$ проверяется с помощью индукции, учитывая рекуррентную формулу определения $\Phi_{ar}(x)$. Свойство 5), для $r = 1$ и 2 тривиально, а для $r \geqslant 3$ следует из 3) и 4).

Наконец, проверим соотношение (6.44) При $r=0$ оно очевидно. Далее имеем

$$\Phi_{a1}(\theta x)=\frac{1}{4}(a-\theta x)=\theta\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\theta}-x\right)=\theta\Phi_{a/\theta,\,1}(x).$$

Пусть (6.44) доказано для $r\leqslant k$. Тогда для $0\leqslant x\leqslant a/\theta$

$$\Phi_{a,\,k+1}(\theta x)=\frac{1}{2}\int_0^{a-\theta x}\Phi_{ak}(t)\,dt=$$

$$=\frac{\theta}{2}\int_0^{a/\theta-x}\Phi_{ak}(\theta t)\,dt=\frac{\theta}{2}\int_0^{a/\theta-x}[\theta^k\Phi_{a/\theta,\,k}(t)]\,dt=$$

$$=\theta^{k+1}\frac{1}{2}\int_0^{a/\theta-x}\Phi_{a/\theta,\,k}(t)\,dt=\theta^{k+1}\Phi_{a/\theta,\,k+1}(x)$$

и свойство 6) также установлено.

Покажем, что для всех $0\leqslant x\leqslant 2\pi$

$$\Phi_{\pi/n,\,r}(x)=\Phi(g_{nr},\ x)\qquad(n,\ r=1,\ 2,\ \ldots),\tag{6.45}$$

т. е. при $a=\pi/n$ функции $\Phi_{ar}(x)$ являются Σ-перестановками функций g_{nr}.

Действительно, если учесть выкладки, проведенные в конце доказательства теоремы 6.5.1 для функций, реализующих знак равенства в (6.37), то легко понять, что

$$\Phi(g_{n1},\ x)=2n\bar{\varphi}_1(x),$$

где $\bar{\varphi}_1$ — перестановка простой, равной $\frac{1}{4n}\left(\frac{\pi}{2n}-|x|\right)$ функции на $\left(-\frac{\pi}{2n},\ \frac{\pi}{2n}\right)$ и, следовательно,

$$\bar{\varphi}_1(x)=\frac{1}{8n}\left(\frac{\pi}{n}-x\right)\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{n}\right),\qquad \bar{\varphi}_1(x)=0\ \left(x>\frac{\pi}{n}\right).$$

Поэтому

$$\Phi(g_{n1},\ x)=\frac{1}{4}(\pi/n-x)=\Phi_{\pi/n,\,1}(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant\pi/n).$$

Далее,

$$g_{n2}(x)=\int_0^x g_{n1}(t)\,dt,\ g_{n2}\left(\frac{k\pi}{n}\right)=0\quad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n)$$

и, как легко подсчитать, перестановка простой функции, совпадающей на $[0, \pi/n]$ с $|g_{n2}(x)|$, равна $\frac{1}{32n}\left(\frac{\pi^2}{n^2}-x^2\right)$, поэтому

$$\Phi(g_{n2}, x)=2n\frac{1}{32n}\left(\frac{\pi^2}{n^2}-x^2\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{\pi^2}{n^2}-x^2\right)=\Phi_{\pi n, 2}(x)$$
$$(0\leqslant x\leqslant \pi/n).$$

Считая, что (6.45) доказано для всех $r=1, 2, \ldots, k-1$, в силу (6.43) и свойства 3) функций Φ_{ar} для всех $0\leqslant x<\pi/n$ будем иметь

$$\Phi'(g_{nk}, x)=-\frac{1}{4}\int_0^x \Phi(g_{n, k-2}, t)\,dt=$$
$$=-\frac{1}{4}\int_0^x \Phi_{\pi/n, k-2}(t)\,dt=\Phi'_{\pi/n, k}(x).$$

Это значит, что $\Phi(g_{nk}, x)$ и $\Phi_{\pi/n, k}(x)$ могут отличаться на $(0, \pi/n)$ только на константу; но так как для $\pi/n\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 2\pi$

$$\Phi(g_{nk}, x)=\Phi_{\pi/n, k}(x)=0,$$

то (6.45) справедливо и для $r=k$, а значит, и для всех $r=0, 1, 2, \ldots$

Функции $\Phi_{ar}(x)$ связаны с константами Фавара (3.44) соотношениями

$$\Phi_{\pi r}(0)=n^r\Phi_{\pi/n, r}(0)=\frac{\mathcal{K}_r}{2} \tag{6.46}$$
$$(n=1, 2, \ldots;\ r=0, 1, \ldots),$$

$$\|\Phi_{\pi, r-1}\|_L\overset{\text{def}}{=}\int_0^{2\pi}\Phi_{\pi, r-1}(t)\,dt=n^r\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n, r-1}(t)\,dt=\mathcal{K}_r. \tag{6.47}$$

Действительно, из (6.45), свойства 3° Σ-перестановки $\Phi(f, x)$ и (5.29) следуют равенства

$$\Phi_{\pi/n, r}(0)=\Phi(g_{nr}, 0)=\frac{1}{2}\bigvee_0^{2\pi}(g_{nr})=\frac{1}{2}\|g_{n, r-1}\|_L=\frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}$$

и, чтобы получить (6.46), надо лишь учесть, что в силу свойства 6) функций $\Phi_{ar}(x)$ $\Phi_{\pi r}(0)=n^r\Phi_{\pi/n,\,r}(0)$. (6.47) получается из (6.46) и равенства

$$\Phi_{\pi r}(0)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Phi_{\pi,\,r-1}(t)\,dt=\frac{1}{2}\|\Phi_{\pi,\,r-1}\|_L,$$

вытекающего из определения $\Phi_{ar}(x)$.

Наконец отметим, что для функций $\Phi_{ar}(x)$ при любом $a>0$ имеют место соотношения

$$\|\Phi_{a,\,r-k-1}\|_L=c_{rk}\|\Phi_{a,\,r-1}\|_L^{1-k/r}\quad(r=1,\,2,\,\ldots;\;k=0,\,1,\,\ldots,\,r),\tag{6.48}$$

где c_{rk} — та же константа, что и в неравенстве Колмогорова (5.52), т. е.

$$c_{rk}=\mathscr{K}_{r-k}/\mathscr{K}_r^{1-k/r},\qquad \mathscr{K}_\nu=\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i(\nu+1)}}{(2i+1)^{\nu+1}}.$$

Действительно, из определения функций Φ_{ar} следует, что соотношение (6.48) можно записать в виде

$$2\Phi_{a,\,r-k}(0)=c_{rk}\,[2\Phi_{ar}(0)]^{1-k/r}\tag{6.49}$$

или, учитывая, что $\Phi_{ar}(0)=\gamma_r a^r$, в виде

$$2\gamma_{r-k}a^{r-k}=c_{rk}\,(2\gamma_r a^r)^{1-k/r}=c_{rk}\,(2\gamma_r)^{1-k/r}a^{r-k},$$

откуда видно, что (6.48) или (6.49) достаточно доказать для какого-нибудь одного значения a. Но положив $a=\pi$, будем иметь, учитывая (6.47),

$$\|\Phi_{\pi,\,r-k-1}\|_L=\mathscr{K}_{r-k}=c_{rk}\mathscr{K}_r^{1-k/r}=c_{rk}\|\Phi_{\pi,\,r-1}\|_L^{1-k/r},$$

т. е. (6.48) справедливо при $a=\pi$, а значит, и при всех $a>0$.

§ 6.7. Теоремы сравнения для Σ-перестановок при ограничениях на норму в метрике пространства L

Результаты этого и следующего параграфов будут связаны с оценкой производной $\Phi'(f,\,x)$, которая, как было установлено выше, существует для $f\in D^1$ почти всюду. Условимся в дальнейшем, выписывая те или иные соотношения, содержащие $\Phi'(f, x)$, предполагать, не оговаривая это каждый раз, что они имеют место на соответствующем промежутке в точках существования $\Phi'(f, x)$ (т. е. почти всюду). Впрочем, во всех этих соотношениях можно под $\Phi'(f, x)$ понимать левую или правую производную, существующую в каждой точке.

Пусть, как и в § 5.1, V — множество 2π-периодических функций $g(x)$, имеющих ограниченное изменение на $[0, 2\pi]$, а V^r $(r=1, 2, \ldots)$ — множество r-х периодических интегралов от $g \in V$ (при условии, разумеется, что $\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt = 0$), $V^0 = V$. W_V^r $(r=0, 1, \ldots)$ есть класс функций $g \in V^r$, у которых

$$\bigvee_0^{2\pi} (g^{(r)}) \leqslant 1.$$

Отметим, что $V \subset D$, ибо если $g \in V$, то в каждой точке существуют конечные односторонние пределы $g(x+0)$ и $g(x-0)$. Следовательно, $V^r \subset D^r$ $(r=1, 2, \ldots)$ и для любой функции $f \in V^1$ имеет место разложение (6.26) на простые функции, а также определена Σ-перестановка $\Phi(f, x)$ со всеми описанными в предыдущих параграфах свойствами.

Лемма 6.7.1. *Если* $g \in W_V^1$, *то*

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{1}{4} \quad (0 < x < 2\pi), \tag{6.50}$$

а если $g \in W_V^2$, *то*

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{x}{8} \quad (0 < x < 2\pi). \tag{6.51}$$

Неравенства точные.

Доказательство. Ясно, что (6.50) и (6.51) нужно доказывать только для x из промежутка $(0, \Delta)$, на котором $\Phi(g, x) > \min\limits_x |f(x)|$. Если $g \in W_V^1$, то в силу предложения 6.4.1, а точнее — в силу соотношения (6.36),

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{m} |g'(\tau_\nu) - g'(t_\nu)| \qquad (0 < x < \Delta),$$

где интервалы (t_ν, τ_ν) не пересекаются и все лежат на промежутке длины 2π. Поэтому

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{1}{4} \bigvee_0^{2\pi} (g') \leqslant \frac{1}{4}$$

и (6.50) доказано.

Пусть теперь $g \in W_V^2$, причем, не теряя общности, можно считать, что g'' — исправленная функция из множества V, содержащегося в D (см. § 6.3.1). Фиксируем $x \in (0, \Delta)$. Как и при доказательстве теоремы 6.5.1, исходя из (6.36) и используя свойства исправленной функции (см. замечание 2 в конце § 6.5), придем к оценке

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{m} \left| \int_{t'_\nu}^{\tau'_\nu} g''(t)\, dt \right| = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{m} |I'_\nu|, \tag{6.52}$$

где попарно не пересекающиеся интервалы (t'_ν, τ'_ν) с длинами $\tau'_\nu - t'_\nu \leqslant x$ лежат на одном периоде и отделены друг от друга, а также от точки $t'_{m+1} = t'_1 + 2\pi$ нулями функции g''. Таким образом, существуют точки γ_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m$; $\gamma_0 = \gamma_m - 2\pi$) такие, что $g''(\gamma_\nu) = 0$ и

$$\gamma_0 \leqslant t'_1 < \tau'_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant t'_2 < \tau'_2 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{m-1} \leqslant$$
$$\leqslant t'_m < \tau'_m \leqslant \gamma_m \leqslant t'_{m+1}.$$

На каждом интервале (t'_ν, τ'_ν) найдется точка η_ν такая, что

$$|I'_\nu| \leqslant |g''(\eta_\nu)| (\tau'_\nu - t'_\nu).$$

Действительно, положив $|I'_\nu| = \mu (\tau'_\nu - t'_\nu)$, мы должны заключить, что неравенство $|g''(t)| < \mu$ не может выполняться во всех точках промежутка (t'_ν, τ'_ν), а потому в некоторой точке $\eta_\nu \in (t'_\nu, \tau'_\nu)$ будет $|g''(\eta_\nu)| \geqslant \mu$.

Итак, у нас есть точки

$$\gamma_0 < \eta_1 < \gamma_1 < \eta_2 < \gamma_2 < \ldots < \eta_m < \gamma_m = \gamma_0 + 2\pi,$$

причем $g''(\gamma_\nu) = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ и

$$|I'_\nu| \leqslant |g''(\eta_\nu)|\, x \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m);$$

поэтому, отправляясь от оценки (6.52), будем иметь

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{x}{4} \sum_{\nu=1}^{m} |g''(\eta_\nu)| =$$

$$= \frac{x}{8} \sum_{\nu=1}^{m} \{|g''(\eta_\nu) - g''(\gamma_{\nu-1})| + |g''(\gamma_\nu) - g''(\eta_\nu)|\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x}{8} \bigvee_{\gamma_0}^{\gamma_0+2\pi} (g'') \leqslant \frac{x}{8},$$

т. е. (6.51) также доказано.

Знак равенства в (6.50) и (6.51) имеет место при всех $x \in (0, \pi/n)$ для функций соответственно g_{n1} и g_{n2}.

Теорема 6.7.2. *Если* $g \in W_V^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ *и* $a > 0$ *выбрано так, что*

$$\Phi(g, 0) = \Phi_{ar}(0), \tag{6.53}$$

то имеют место соотношения

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant |\Phi'_{ar}(x)| \qquad (0 < x < a), \tag{6.54}$$

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant |\Phi'_{ar}(a-0)| \qquad (a \leqslant x \leqslant 2\pi), \tag{6.55}$$

$$\Phi(g, x) \geqslant \Phi_{ar}(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi), \tag{6.56}$$

$$\|g\|_L = \|\Phi(g)\|_L \geqslant \|\Phi_{ar}\|_L. \tag{6.57}$$

Доказательство. Ясно, что (6.56) и (6.57) тривиальным образом следуют из (6.53) и (6.54), так что доказывать надо только (6.54) и (6.55).

Заметим сразу, что из (6.53) в силу свойств Σ-перестановки и функций $\Phi_{ar}(x)$ следует, что при $r \geqslant 2$

$$\|\Phi(g')\|_L = \|g'\|_L \leqslant 2\Phi(g, 0) = 2\Phi_{ar}(0) = \|\Phi_{a, r-1}\|_L. \tag{6.58}$$

Если учесть, что

$$\Phi'_{a1}(x) = -\frac{1}{4}, \quad \Phi'_{a2}(x) = -\frac{x}{8} \quad (0 < x < a),$$

то (6.54) при $r = 1, 2$, а также (6.55) при $r = 1$ уже доказаны в лемме 6.7.1. Справедливость (6.55) при $r = 2$ для $g \in W_V^2$ при условии $\Phi(g, 0) = \Phi_{a2}(0)$ следует из того, что в силу (6.58)

$$\|\Phi(g')\|_L \leqslant \|\Phi_{a1}\|_L = a^2/8,$$

а так как $|\Phi'(g', x)| \leqslant 1/4$, то $\Phi(g', 0) \leqslant a/4$ и (см. (6.36))

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{1}{4} \|g''\|_L = \frac{1}{2} \Phi(g', 0) \leqslant \frac{a}{8} = |\Phi'_{a2}(a-0)|.$$

Теперь рассуждаем по индукции. Пусть теорема верна при $r = 1, 2, \ldots, k-1$ $(k \geqslant 3)$ и для $g \in W_V^k$ при некотором a выполнено равенство $\Phi(g, 0) = \Phi_{ak}(0)$. Тогда (см. (6.58)) $\|\Phi(g')\|_L \leqslant \|\Phi_{a, k-1}\|_L$, и нетрудно заключить, что будет $\Phi(g', 0) \leqslant \Phi_{a, k-1}(0)$. Действительно, предположив, что $\Phi(g', 0) > \Phi_{a, k-1}(0)$, мы выберем $b > 0$ из условия $\Phi(g', 0) = \Phi_{b, k-1}(0)$, и так как при $r = k-1$ теорема верна, то должно быть $\|\Phi_{b, k-1}\|_L \leqslant \|\Phi(g')\|_L \leqslant \leqslant \|\Phi_{a, k-1}\|_L$, что противоречит свойствам функции Φ_{ar}, ибо $b > a$. Таким образом,

$$\Phi(g', 0) \leqslant \Phi_{a, k-1}(0). \tag{6.59}$$

Повторяя цикл рассуждений, из (6.58) и (6.59) найдем, что

$$\|\Phi(g'')\|_L \leqslant \|\Phi_{a, k-2}\|_L \tag{6.60}$$

и

$$\Phi(g'', 0) \leqslant \Phi_{a, k-2}(0). \tag{6.61}$$

Если $\Phi(g'', 0) = \Phi_{c, k-2}(0)$ $(c < a)$, то ввиду справедливости теоремы для $r = k-2$ будем иметь

$$|\Phi'(g'', x)| \leqslant |\Phi'_{c, k-2}(x)| < |\Phi'_{a, k-2}(x)| \qquad (0 < x < c),$$

$$|\Phi'(g'', x)| \leqslant |\Phi'_{c, k-2}(c-0)| \leqslant |\Phi'_{a, k-2}(c)| \leqslant |\Phi'_{a, k-2}(x)| \qquad (c \leqslant x \leqslant a).$$

Таким образом,

$$|\Phi'(g'', x)| \leqslant |\Phi'_{a, k-2}(x)| \qquad (0 \leqslant x \leqslant a). \tag{6.62}$$

Из (6.61) и (6.62) следует, что разность

$$\delta(x) = \Phi_{a, k-2}(x) - \Phi(g'', x)$$

или неотрицательна на $(0, 2\pi)$, или меняет знак с положительного на отрицательный один раз. Но тогда для функции

$$\delta_1(x) = \int_0^x \delta(t)\, dt$$

в каждой точке промежутка $(0, 2\pi)$ выполняется неравенство

$$\delta_1(x) \geqslant \min\{0, \delta_1(2\pi)\},$$

и так как в силу (6.60) $\delta_1(2\pi) \geqslant 0$, то $\delta_1(x) \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Поэтому

$$\int_0^x \Phi(g'', t)\,dt \leqslant \int_0^x \Phi_{a, k-2}(t)\,dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

и применение теоремы 6.5.1 дает

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{1}{4}\int_0^x \Phi(g'', t)\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int_0^x \Phi_{a, k-2}(t)\,dt.$$

Остается учесть, что при $0 < x < a$

$$\frac{1}{4}\int_0^x \Phi_{a, k-2}(t)\,dt = |\Phi'_{ak}(x)|,$$

а при $a \leqslant x \leqslant 2\pi$

$$\frac{1}{4}\int_0^x \Phi_{a, k-2}(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^a \Phi_{a, k-2}(t)\,dt =$$
$$= \lim_{x \to a-0} |\Phi'_{ak}(x)| = |\Phi'_{ak}(a-0)|.$$

Теорема 6.7.2 доказана. Из нее без труда выведем следующее важное для дальнейшего утверждение.

Теорема 6.7.3. *Если* $g \in W_V^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ *и при некотором* $a > 0$

$$\|g\|_L \leqslant \|\Phi_{ar}\|_L, \tag{6.63}$$

то:

1) $\Phi(g, 0) \leqslant \Phi_{ar}(0)$;

2) $|\Phi'(g, x)| \leqslant |\Phi'_{ar}(x)| \qquad (0 < x < a)$;

3) *разность* $\Phi_{ar}(x) - \Phi(g, x)$ *или неотрицательна на* $(0, 2\pi)$, *или меняет знак с положительного на отрицательный один раз*;

4) $\int_0^x \Phi(g, t)\,dt \leqslant \int_0^x \Phi_{ar}(t)\,dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

В самом деле, выберем $b>0$ из условия $\Phi(g, 0) = \Phi_{br}(0)$ (рис. 16); тогда из теоремы 6.7.2 (см. (6.57)) и (6.63) следует, что

$$\|\Phi_{br}\|_L = \|\Phi(g)\|_L \leqslant \|\Phi_{ar}\|_L,$$

т. е. $b \leqslant a$, и потому

$$\Phi(g, 0) = \Phi_{br}(0) \leqslant \Phi_{ar}(0).$$

Снова применяя теорему 6.7.2, с учетом свойств функций $\Phi_{ar}(x)$ будем иметь

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant |\Phi'_{br}(x)| \leqslant |\Phi'_{ar}(x)| \qquad (0<x<b),$$

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant |\Phi'_{br}(b-0)| \leqslant |\Phi'_{ar}(x)| \qquad (b \leqslant x \leqslant a).$$

Утверждения 1) и 2) этим доказаны. Из сопоставления их с (6.63) следуют 3) и 4), так же, как соответствующие

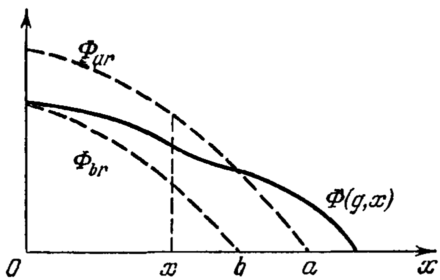

Рис. 16.

утверждения для $\Phi(g'', x)$ и $\Phi_{a,k-2}(x)$ при доказательстве теоремы 6.7.2.

В качестве следствия из теоремы 6.7.3 отметим

Предложение 6.7.4. *Если для функции* $g \in W_V^r$ ($r = 1, 2, \ldots$) *при некотором* $a>0$ *выполнено* (6.53) *или* (6.63), *то*

$$\|g^{(k)}\|_L \leqslant \|\Phi_{a,r-k}\|_L \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Действительно, при сделанных предположениях $\Phi(g, 0) \leqslant \Phi_{ar}(0)$ и, следовательно, $\|g'\|_L \leqslant \|\Phi_{a,r-1}\|_L$. Применяя теорему 6.7.3 к функции $g' \in W_V^{r-1}$, приходим к неравенству $\Phi(g', 0) \leqslant \Phi_{a,r-1}(0)$, т. е. $\|g''\|_L \leqslant \|\Phi_{a,r-2}\|_L$ и т. д.

Из утверждений 6.7.3 и 6.7.4, с учетом соотношений (6.45), вытекает следующий факт.

Теорема 6.7.5. *Если* $g \in W_V^r$ $(r=1, 2, \ldots)$ *и* $\|g\|_L \leq \|g_{nr}\|_L$, *то*

$$\|g^{(k)}\|_L \leq \|g_{n,r-k}\|_L \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1),$$
$$|\Phi'(g,\ x)| \leq |\Phi'(g_{nr},\ x)| \qquad (0<x<\pi/n),$$

причем разность $\Phi(g_{nr},\ x)-\Phi(g,\ x)$ *или неотрицательна на* $(0,\ 2\pi)$, *или меняет знак с* $+$ *на* $-$ *один раз. В частности, все утверждения теоремы справедливы для функций класса* $W^{r+1}H_L^n$.

В пояснении здесь нуждается только последняя фраза. Но если $g \in W^{r+1}H_L^n$, то $g \in W_V^r$ и, кроме того, в силу (5.31) $\|g\|_L \leq \|g_{nr}\|_L$.

Теорема 6.7.5 при $k=1$, в частности, означает, что среди функций класса W_V^r наибольшую вариацию на $[0, 2\pi]$ при одинаковой норме в L имеют функции g_{nr}. Из теоремы 6.7.2 (при $a=\pi/n$) следует также, что наименьшую норму в L при одинаковой вариации среди функций класса W_V^r имеют те же функции g_{nr}.

Чтобы облегчить применение полученных выше результатов при решении некоторых конкретных экстремальных задач наилучшего приближения, докажем следующее утверждение.

Теорема 6.7.6. *Если* $g \in W_V^r$ $(r=1, 2, \ldots)$ *и при некотором* $a>0$

$$\|g\|_L \leq \|\Phi_{ar}\|_L, \tag{6.64}$$

то для любой суммируемой на $(0,\ 2\pi)$ *неотрицательной и невозрастающей функции* $\mu(t)$

$$\int_0^{2\pi} \mu(t)\,\Phi(g,\ t)\,dt \leq \int_0^{2\pi} \mu(t)\,\Phi_{ar}(t)\,dt.$$

Доказательство. С учетом утверждений теоремы 6.7.3 надо рассмотреть лишь тот случай, когда разность

$$\delta(t)=\Phi_{ar}(t)-\Phi(g,\ t)$$

меняет на $(0,\ 2\pi)$ знак. Пусть

$$\delta(t)\geq 0 \qquad (0\leq t\leq \eta), \qquad \delta(t)\leq 0 \qquad (\eta\leq t\leq 2\pi).$$

Так как $\mu(t) \geqslant 0$ и не возрастает, то

$$\int_0^{2\pi} \mu(t)\,\delta(t)\,dt = \int_0^{\eta} \mu(t)\,\delta(t)\,dt + \int_{\eta}^{2\pi} \mu(t)\,\delta(t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \mu(\eta)\int_0^{\eta} \delta(t)\,dt + \mu(\eta)\int_{\eta}^{2\pi} \delta(t)\,dt = \mu(\eta)\int_0^{2\pi} \delta(t)\,dt,$$

и остается заметить, что в силу (6.64) последний интеграл неотрицателен.

Нам потребуется еще вариант теоремы 6.7.6, соответствующий случаю $r=0$.

Теорема 6.7.7. *Если $g \in W_V^0 \cap D^1$, $\|g\|_L \leqslant \|\Phi_{a0}\|_L$ и $g(x)$ обращается в нуль, то для любой суммируемой на $(0, 2\pi)$ неотрицательной и невозрастающей функции $\mu(t)$*

$$\int_0^{2\pi} \mu(t)\,\Phi(g, t)\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} \mu(t)\,\Phi_{a0}(t)\,dt.$$

Действительно, в условиях теоремы $\bigvee\limits_0^{2\pi}(g) \leqslant 1$, $g \in D^1$ и, значит, для g определена Σ-перестановка $\Phi(g, x)$, причем так как $g(x)$ имеет нули, то

$$\Phi(g, 0) = \frac{1}{2}\bigvee_0^{2\pi}(g) \leqslant \frac{1}{2} = \Phi_{a0}(0)$$

и, следовательно, $\Phi(g, x) \leqslant 1/2 = \Phi_{a0}(x)$ для всех $0 < x < a$. Поэтому разность $\delta(t) = \Phi_{a0}(t) - \Phi(g, t)$ или неотрицательна на $(0, 2\pi)$, или меняет знак с $+$ на $-$ один раз. А так как $\int_0^{2\pi} \delta(t)\,dt \geqslant 0$, то остается лишь повторить соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 6.7.6.

Отметим еще несколько фактов, непосредственно вытекающих из теорем 6.7.2 и 6.7.3.

В формулировке следующего утверждения легко усматривается аналогия с теоремой сравнения Колмогорова 5.6.2.

Предложение 6.7.8. *Если $g \in W_V^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ и при некотором $a > 0$*

$$\Phi(g, \xi) = \Phi_{ar}(\xi) \qquad (0 < \xi < a), \tag{6.65}$$

то

$$|\Phi'(g,\ \xi)| \leqslant |\Phi'_{ar}(\xi)|.$$

Доказательство. Если $b>0$ таково, что $\Phi(g,\ 0)=\Phi_{br}(0)$, то в силу теоремы 6.7.2 $\Phi(g,\ \xi)\geqslant\Phi_{br}(\xi)$, а потому, с учетом (6.65), $\Phi_{br}(\xi)\leqslant\Phi_{ar}(\xi)$, откуда сразу следует, что $b\leqslant a$. По теореме 6.7.2, если $0<\xi<b$, то

$$|\Phi'(g,\ \xi)| \leqslant |\Phi'_{br}(\xi)| \leqslant |\Phi'_{ar}(\xi)|,$$

а если $b\leqslant\xi<a$, то

$$|\Phi'(g,\ \xi)| \leqslant |\Phi'_{br}(b-0)| \leqslant |\Phi'_{ar}(b)| \leqslant |\Phi'_{ar}(\xi)|,$$

и все доказано.

Следующие два предложения дают аналоги неравенства (5.52) Колмогорова в метрике L (для периодических функций).

Предложение 6.7.9. *Если* $f\in V^{r-1}$ $(r=2,\ 3,\ \ldots)$, *то*

$$\|f^{(k)}\|_L \leqslant c_{rk}\|f\|_L^{1-k/r}\left[\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r-1)})\right]^{k/r} \tag{6.66}$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1),$$

где c_{rk} — *те же константы, что и в* (5.52). *Неравенство* (6.66) *точное.*

Доказательство. Если (6.66) справедливо для $f\in V^{r-1}$, то оно справедливо и для функции λf при любом λ. Поэтому мы можем считать, что $\bigvee\limits_0^{2\pi}(f^{(r-1)})=1$, и дело сводится к доказательству неравенства

$$\|f^{(k)}\|_L \leqslant c_{rk}\|f\|_L^{1-k/r}$$

для любой функции $f\in W_V^{r-1}$.

Зафиксировав $f\in W_V^{r-1}$, выберем a из условия $\|\Phi_{a,r-1}\|_L=\|f\|_L$. В силу 6.7.4 и соотношения (6.48) будем иметь

$$\|f^{(k)}\|_L \leqslant \|\Phi_{a,r-k-1}\|_L = c_{rk}\|\Phi_{a,r-1}\|_L^{1-k/r} = c_{rk}\|f\|_L^{1-r/k},$$

что и требовалось. Неравенство (6.66) усилить нельзя, ибо для $f=g_{n,r-1}$ в нем имеет место знак равенства, что сразу видно, если сравнить (6.48) и (6.45).

Предложение 6.7.10. *Если* $f \in L^r$ $(r=1, 2, \ldots)$, *то*

$$\|f^{(k)}\|_L \leqslant c_{rk} \|f\|_L^{1-k/r} \|f^{(r)}\|_L^{k/r} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1). \tag{6.67}$$

Неравенство точное.

Так как $L^r \subset V^{r-1}$, то при $r \geqslant 2$ (6.67) следует из (6.66), ибо для $f \in L^r$

$$\bigvee_0^{2\pi} (f^{(r-1)}) = \|f^{(r)}\|_L.$$

Если же $r=1$ и $k=0$, то (6.67) тривиально, ибо $c_{10}=1$.

Хотя в L^r при $r \geqslant 2$ нет функции, реализующей в (6.67) знак равенства, но для каждого $r=2, 3, \ldots$ существует последовательность функций $f_m \in W_L^r$ (например, функций Стеклова для $g_{n, r-1}$) такая, что

$$\lim_{m \to \infty} \|f_m^{(k)} - g_{n, r-k-1}\|_L = 0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1),$$

и неулучшаемость неравенства (6.67) следует из экстремальности функций $g_{n, r-1}$ в теореме 6.7.9.

§ 6.8. Теоремы сравнения для Σ-перестановок при ограничениях на норму в метрике пространства M

Чтобы получить аналоги ряда теорем предыдущего параграфа при ограничениях на норму функции g в равномерной метрике, нам потребуется следующее утверждение, базирующееся на теореме сравнения 5.6.2 Колмогорова и вытекающих из нее следствиях.

Теорема 6.8.1. *Если* $g \in W_M^r$ $(r=0, 1, \ldots)$ *и*

$$\|g\|_M \leqslant \|\varphi_{nr}\|_M, \tag{6.68}$$

$$\max_{a, b} \left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \leqslant 2 \|\varphi_{n, r+1}\|_M, \tag{6.69}$$

то

$$\int_0^x \bar{g}(t)\, dt \leqslant \int_0^x \bar{\varphi}_{nr}(t)\, dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi), \tag{6.70}$$

где через $\bar{f}$ *обозначена убывающая перестановка функции* $|f|$ *на* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. При $r=0$ утверждение теоремы очевидно, поэтому считаем $r\geqslant 1$. Отметим, что из условия (6.69) и периодичности $g(t)$ следует наличие у функции g нулей, а в силу инвариантности перестановки относительно сдвига аргумента можно считать, что $g(0)=0$.

Положим

$$\delta(t)=\overline{\varphi}_{nr}(t)-\overline{g}(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Оставляя в стороне тривиальный случай $\delta(t)\geqslant 0$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, заметим, что достаточно установить справедливость неравенства (6.70) лишь во всех точках промежутка $(0, 2\pi)$, являющихся нулями $\delta(t)$ и правыми концами интервалов, на которых $\delta(t)<0$.

Пусть в точке $\xi\in(0, 2\pi)$ $\delta(\xi)=0$ и

$$\delta(t)<0 \qquad (0<\xi-\varepsilon<t<\xi).$$

Положим

$$z=\overline{g}(\xi)=\overline{\varphi}_{nr}(\xi);$$

тогда

$$\int_0^\xi \overline{g}(t)\,dt=\int_{E_z}|g(t)|\,dt,$$

где

$$E_y=\{x\colon\ x\in(0, 2\pi),\ |g(x)|>y\},$$

причем $\operatorname{mes}E_z=\xi$. Множество E_z состоит из непересекающихся интервалов $(a_k, b_k)\subset(0, 2\pi)$ таких, что

$$|g(a_k)|=|g(b_k)|=\overline{g}(\xi)=z, \qquad |g(t)|>z \qquad (a_k<t<b_k), \tag{6.71}$$

и мы сейчас покажем, что при сделанных предположениях относительно точки ξ число m этих интервалов не больше $2n$.

Предположим противное: пусть в множестве E_z имеется $2n+1$ непересекающихся интервалов (a_k, b_k) $(k=1, 2, \ldots, 2n+1)$, удовлетворяющих условиям (6.71). Можно выбрать $h>0$ настолько малым, что при каждом $k=1, 2, \ldots, 2n+1$ внутри (a_k, b_k) существует интервал $(a_k', b_k')\subset E_{z+h}$, причем, если

$$z+h=|g(a_k')|=|g(b_k')|=\overline{g}(\xi-\gamma_0),$$

то для $\xi-\gamma_0<t<\xi$ $\delta(t)<0$. В силу последнего условия, если $\varphi_{nr}(\xi-\gamma)=z+h$, то $\gamma>\gamma_0$. Очевидно,

$$\gamma_0=\sum_{k=1}^{2n+1}[(b_k-b_k')+(a_k'-a_k)].$$

Выберем на промежутке монотонности $[0, \pi/2n]$ функции $\varphi_{nr}(x)$ точки α и α' таким образом, чтобы было

$$|\varphi_{nr}(\alpha)|=|g(a_k)|=|g(b_k)|=z,$$
$$|\varphi_{nr}(\alpha')|=|g(a_k')|=|g(b_k')|=z+h \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1).$$

Тогда в силу предложения 5.6.6 будем иметь

$$|a_k'-a_k|\geqslant|\alpha'-\alpha|, \qquad |b_k-b_k'|\geqslant|\alpha'-\alpha|$$

и, значит,

$$\gamma_0\geqslant 2(2n+1)|\alpha'-\alpha|>4n|\alpha'-\alpha|=\gamma$$

в противоречии с предыдущим.

Итак, число непересекающихся интервалов (a_k, b_k), составляющих множество E_z, не превосходит $2n$. Поэтому количество p отрезков $[c_i, d_i]$ из $[0, 2\pi]$, каждый из которых содержит хотя бы один из интервалов (a_k, b_k) и удовлетворяет условиям

$$g(c_i)=g(d_i)=0, \quad |g(t)|>0 \qquad (c_i<t<d_i),$$

тоже не больше чем $2n$. Если α_0 и α — точки на $[0, \pi/2n]$ такие, что

$$\varphi_{nr}(\alpha_0)=0\ ^{*)}, \quad |\varphi_{nr}(\alpha)|=\varphi_{nr}(\xi)=\bar{g}(\xi)=|g(a_k)|=|g(b_k)|,$$

то, применив предложение 5.6.5, получим

$$\int\limits_{(c_i,\ d_i)\setminus E_z}|g(t)|\,dt\geqslant 2\left|\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\varphi_{nr}(t)\,dt\right| \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Эти неравенства с учетом условия (6.69) и того, что

---

*) Ясно, что α_0 есть 0 или $\pi/2n$.

$p \leqslant 2n$, позволяют написать

$$\int_0^{\xi} \bar{g}(t)\,dt = \int_{E_z} |g(t)|\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int_{c_i}^{d_i} |g(t)|\,dt - \sum_{i=1}^{p} \int_{(c_i,\,d_i)\setminus E_z} |g(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \int_{c_i}^{d_i} |g(t)|\,dt - 2p \left| \int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi_{nr}(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2p \|\varphi_{n,\,r+1}\|_C - 2p \left| \int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi_{nr}(t)\,dt \right| =$$

$$= 2p \left(\left| \int_0^{\pi/2n} \varphi_{nr}(t)\,dt \right| - \left| \int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi_{nr}(t)\,dt \right| \right) \leqslant$$

$$\leqslant 4n \left| \int_{\alpha}^{\pi/2n-\alpha_0} \varphi_{nr}(t)\,dt \right| = \int_0^{\xi} \bar{\varphi}_{nr}(t)\,dt.$$

Теорема 6.8.1 доказана. Отметим вытекающее из нее

Предложение 6.8.2. *При выполнении условий теоремы* 6.8.1

$$\|g\|_L \leqslant \|\varphi_{nr}\|_L.$$

Если $g \in W^r H^n_M$ ($r = 0, 1, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$), то в силу соотношения (5.28) для g выполнены все условия теоремы 6.8.1, и потому справедливо также

Предложение 6.8.3. *Для любой функции* $g \in W^r H^n_M$

$$\int_0^x \bar{g}(t)\,dt \leqslant \int_0^x \bar{\varphi}_{nr}(t)\,dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Теперь докажем теорему сравнения в терминах Σ-перестановок для функций классов W^r_M.

Теорема 6.8.4. *Пусть* $g \in W^r_M \cap D^1$ ($r = 1, 2, \ldots$), *g имеет нули и*

$$\|g\|_C \leqslant \|\varphi_{nr}\|_C. \tag{6.72}$$

Тогда в каждой точке промежутка $(0, \pi/n)$ *выполнено по крайней мере одно из неравенств*

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant |\Phi'(\varphi_{nr}, x)| \tag{6.73}$$

или

$$\Phi(g, x) \leqslant \Phi(\varphi_{nr}, x). \tag{6.74}$$

При $r \geqslant 3$ *неравенство* (6.73) *выполняется обязательно.*

Доказательство. Пусть $g(t)$ удовлетворяет условиям теоремы, причем можно считать, что $g(0)=0$. Так как $g \in D^1$, то определена Σ-перестановка $\Phi(g, x)$. В силу предложения 6.4.1 при фиксированном $x \in (0, \pi/n)$

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{m} |g'(t_\nu) - g'(\tau_\nu)|, \tag{6.75}$$

где интервалы (t_ν, τ_ν) не пересекаются, все лежат на $(0, 2\pi)$, причем $\tau_\nu - t_\nu = x$ и $g(t_\nu) = g(\tau_\nu)$.

Предположим сначала, что $m > 2n$. Из (6.72) следует, что

$$\max_{a, b} \left| \int_a^b g'(t)\, dt \right| \leqslant 2 \|\varphi_{nr}\|_C,$$

а из (6.72) и включения $g \in W^r_M$ в соответствии с предложением 5.6.4 вытекает, что $\|g'\|_M \leqslant \|\varphi_{n, r-1}\|_M$. Таким образом, к функции g' применима теорема 6.8.1. Положив

$$F_x = [0, 2\pi] \setminus \bigcup_{i=1}^{m} (t_\nu, \tau_\nu)$$

и заметив, что

$$\operatorname{mes} F_x = 2\pi - mx < 2\pi - 2nx,$$

последовательно применяя (6.33), (6.3) и теорему 6.8.1, будем иметь

$$\Phi(g, x) \leqslant \frac{1}{2} \int_{F_x} |g'(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{mes} F_x} \overline{g'(t)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{mes} F_x} \bar{\varphi}_{n, r-1}(t)\, dt < \frac{1}{2} \int_0^{2\pi - 2nx} \bar{\varphi}_{n, r-1}(t)\, dt = \Phi(\varphi_{nr}, x).$$

Пусть теперь $m \leqslant 2n$. Если $r = 1$, то из (6.75) сразу получим

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{m}{2} \|g'\|_M \leqslant \frac{m}{2} \leqslant n = |\Phi'(\varphi_{nr}, x)|.$$

Если же $r\geqslant 2$, то заметим, что $g'\in W_M^{r-1}$ и (см. 5.6.4) $\|g'\|_M\leqslant\|\varphi_{n,r-1}\|_M$, так что к g' применимо предложение 5.6.7, в силу которого, исходя из (6.75), будем иметь

$$4\,|\Phi'(g, x)|\leqslant m\omega(g', x)\leqslant 2n\omega(\varphi'_{nr}, x)=4\,|\Phi'(\varphi_{nr}, x)|.$$

Поясним последнее равенство. Пусть

$$\varphi_{nr}(\theta_0)=0,\qquad \theta_1=\theta_0+\pi/n,\qquad t_0={}^1/_2(\theta_0+\theta_1)$$

и

$$\varphi_0(t)=|\varphi_{nr}(t)|\ (\theta_0\leqslant t\leqslant\theta_1),\qquad \varphi_0(t)=0\qquad (t\notin[\theta_0, \theta_1]).$$

Тогда $\Phi(\varphi_{nr}, x)=2n\bar{\varphi}_0(x)$ и для $x\in(0,\pi/n)$

$$4\,|\Phi'(\varphi_{nr}, x)|=2n\,|\varphi_0'(t_0-x/2)-\varphi_0'(t_0+x/2)|=$$
$$=2n\omega(\varphi'_{nr}, x).$$

Остается показать, что при $r\geqslant 3$ соотношение (6.73) выполняется обязательно. Если $g(t)$ удовлетворяет условиям теоремы при $r\geqslant 3$, то ввиду предложения 5.6.4

$$\|g^{(k)}\|_M\leqslant\|\varphi_{n,r-k}\|_M\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$$

и к каждой из функций $g^{(k)}$ применима теорема 6.8.1, в силу которой

$$\|g^{(k)}\|_L\leqslant\|\varphi_{n,r-k}\|_L\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r)\qquad (6.76)$$

и, следовательно,

$$\Phi(g^{(k)},\ 0)\leqslant\Phi(\varphi_{n,r-k},\ 0)\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).\quad (6.77)$$

Применение же к $g^{(k)}$ уже доказанных утверждений теоремы 6.8.4 приводит к выполнению в каждой точке $x\in\in(0,\ \pi/n)$ одного из соотношений

$$|\Phi'(g^{(k)}, x)|\leqslant|\Phi'(\varphi_{n,r-k}, x)|\ \text{ или }\ \Phi(g^{(k)}, x)\leqslant\Phi(\varphi_{n,r-k}, x),$$

сопоставление которых с (6.77) показывает, что разность $\Phi(\varphi_{n,r-k},\ x)-\Phi(g^{(k)},\ x)$ или $\geqslant 0$, или меняет знак с $+$ на $-$ один раз. Этот факт вместе с (6.76) приводит (как и при доказательстве теоремы 6.7.2) к соотношению

$$\int_0^x\Phi(g^{(k)},\ t)\,dt\leqslant\int_0^x\Phi(\varphi_{n,r-k},\ t)\,dt\qquad (0\leqslant x\leqslant 2\pi,\ 1\leqslant k\leqslant r),$$

и теперь, воспользовавшись теоремой 6.5.1 и равенством (6.42), будем иметь для $0<x<\pi/n$

$$|\Phi'(g, x)| \leqslant \frac{1}{4}\int_0^x \Phi(g'', t)\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int_0^x \Phi(\varphi_{n,r-2}, t)\,dt = \\ = |\Phi'(\varphi_{nr}, x)|.$$

Теорема 6.8.4 полностью доказана.

Очевидно, что утверждения теоремы 6.8.4 справедливы для любой функции $g \in W^r H^n_M \cap D^1$. Отметим, однако, что для $g \in W^1 H^n_M \cap D^1$ и $g \in W^2 H^n_M$ соотношение (6.73) на $(0, \pi/n)$ может и не выполняться. Например, если $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — соответственно первый и второй периодические интегралы от $\operatorname{sign}\sin 2nx$, то для всех $0<x<\pi/2n$

$$|\Phi'(g_1, x)| = 4n = 2\,|\Phi'(\varphi_{n1}, x)|,$$

$$|\Phi'(g_2, x)| = \frac{1}{4}\int_0^x \Phi(g_2'', t)\,dt = nx = 2\,|\Phi'(\varphi_{n2}, x)|.$$

Теорема 6.8.5. *Если* $g \in W^r_M \cap D^1$ $(r=1, 2, \ldots)$, $\|g\|_C \leqslant \|\varphi_{nr}\|_C$ *и, кроме того,*

$$\max_{a,b}\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leqslant 2\|\varphi_{n,r+1}\|_C,$$

то для любой суммируемой неотрицательной и не возрастающей на $(0, 2\pi)$ *функции* $\mu(t)$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \mu(t)\,\Phi(g, t)\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} \mu(t)\,\Phi(\varphi_{nr}, t)\,dt.$$

Действительно, в этом случае для $g(t)$ выполнены условия теоремы 6.8.1, так что $\|g\|_L \leqslant \|\varphi_{nr}\|_L$, а также условия теоремы 6.8.4, в силу которой разность $\Phi(\varphi_{nr}, x) - \Phi(g, x)$ или неотрицательна на $(0, 2\pi)$ или меняет знак один раз с $+$ на $-$. Остается повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 6.7.6.

Отметим, что условиям теоремы 6.8.5 удовлетворяют, в частности, все функции $g \in W^r H^n_M \cap D^1$ $(r=1, 2, \ldots)$. Действительно, в этом случае в силу экстремальных свойств φ_{nr} будет $\|g\|_C \leqslant \|\varphi_{nr}\|_C$ и если положить

$$G(x) = \int_c^x g(t)\,dt,$$

где c выбрано из условия $\int_0^{2\pi} G(t)\,dt = 0$, то $G \in W^{r+1}H_M^n$, так что $\|G\|_C \leqslant \|\varphi_{n,\,r+1}\|_C$ и

$$\max_{a,\,b}\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leqslant 2\|G\|_C \leqslant 2\|\varphi_{n,\,r+1}\|_C.$$

§ 6.9. О справедливости результатов для функций произвольного периода $2l$

В этой главе (так же, как и в предыдущих), исследуя свойства периодических функций, мы считали период равным 2π. Однако совершенно очевидно, что все результаты автоматически распространяются на функции любого периода $2l$ ($l > 0$), если, разумеется, вариацию, норму в L, а также $\sum$-перестановку определять по отрезку длины $2l$. Вместо $\varphi_{nr}(x)$ и $g_{nr}(x)$ роль экстремальных функций будут играть r-е периодические интегралы (с нулевым средним значением) от функций соответственно $\operatorname{sign}\sin\frac{\pi nx}{l}$ и $\frac{1}{4n}\operatorname{sign}\sin\frac{\pi nx}{l}$, т. е. функции $\varphi_{nr}(\pi x/l)$ и $g_{nr}(\pi x/l)$.

Этим замечанием мы воспользуемся в главе 8.

ГЛАВА 7

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ НА КЛАССАХ W^rH^ω

§ 7.1. Модуль непрерывности

Везде в этом параграфе X будет обозначать пространство C или L_p $(1 \leq p < \infty)$ 2π-периодических функций с соответствующей метрикой.

Модулем непрерывности функции $f \in X$ в пространстве X называют функцию

$$\omega(f, t)_X = \sup_{|u| \leq t} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_X \qquad (0 \leq t < +\infty). \quad (7.1)$$

Условимся вместо $\omega(f, t)_{L_p}$ писать $\omega(f, t)_p$, а вместо $\omega(f, t)_C$ — просто $\omega(f, t)$. Таким образом, по определению для $f \in C$

$$\omega(f, t) = \sup_{|u| \leq t} \max_x |f(x+u) - f(x)| =$$
$$= \sup_{|x'-x''| \leq t} |f(x') - f(x'')|. \quad (7.1')$$

Функцию $\omega(f, t)_p$ $(1 \leq p < \infty)$ называют иногда интегральным модулем непрерывности.

Модуль непрерывности (7.1) функции $f \in X$ обладает следующими основными свойствами:

1) $\omega(f, 0)_X = 0$;

2) $\omega(f, t)_X$ не убывает на промежутке $0 \leq t < \infty$;

3) модуль непрерывности (7.1) есть полуаддитивная функция, т. е.

$$\omega(f, t_1 + t_2)_X \leq \omega(f, t_1)_X + \omega(f, t_2)_X \qquad (t_1 > 0,\ t_2 > 0); \quad (7.2)$$

4) $\omega(f, t)_X$ — непрерывная на полуоси $[0, \infty)$ функция.

Свойства 1) и 2) немедленно вытекают из определения модуля непрерывности. Чтобы доказать неравенство (7.2), достаточно в силу (7.1), фиксировав $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$, установить, что для любого $u \geq 0$ такого, что $u \leq t_1 + t_2$, будет

$$\|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_X \leq \omega(f, t_1)_X + \omega(f, t_2)_X.$$

Если $u \leqslant t_1$ или $u \leqslant t_2$, то это очевидно. Пусть

$$\max\{t_1, t_2\} < u \leqslant t_1 + t_2;$$

тогда

$$|u - t_2| = u - t_2 \leqslant t_1,$$

и мы будем иметь

$$\|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_X \leqslant \|f(\cdot+u) - f(\cdot+t_2)\|_X + \\ + \|f(\cdot+t_2) - f(\cdot)\|_X \leqslant \omega(f, t_1)_X + \omega(f, t_2)_X,$$

что и требовалось.

Доказывая свойство 4), заметим сначала, что равенство

$$\lim_{t \to 0+0} \omega(f, t)_X = 0 \tag{7.3}$$

при $X = C$ следует из равномерной непрерывности функций $f \in C$ на всей оси, а при $X = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — из теоремы Лебега, на которую мы уже ссылались в § 5.2. Таким образом, в точке $t = 0$ функция $\omega(f, t)_X$ непрерывна справа. Если $0 < t < \infty$, то в силу (7.2), независимо от знака h (если только $t + h \geqslant 0$), справедливо неравенство

$$|\omega(f, t+h)_X - \omega(f, t)_X| \leqslant \omega(f, |h|)_X$$

и ввиду (7.3) $\omega(f, t+h)_X \to \omega(f, t)$ при $h \to 0$.

Из полуаддитивности модуля непрерывности $\omega(f, t)_X$ следует, что для любого натурального n

$$\omega(f, nt)_X \leqslant n\omega(f, t)_X \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7.4}$$

Действительно, при $n = 1$ это тривиально, а предположив, что (7.4) верно для $n = k$, будем иметь

$$\omega(f, (k+1)t)_X \leqslant \omega(f, kt)_X + \omega(f, t)_X \leqslant \\ \leqslant k\omega(f, t)_X + \omega(f, t)_X = (k+1)\omega(f, t)_X.$$

Если λ — любое положительное число, то вместо (7.4) можно написать

$$\omega(f, \lambda t)_X \leqslant (\lambda + 1)\omega(f, t)_X, \tag{7.5}$$

ибо, обозначив через $[\lambda]$ целую часть λ, в силу монотонности $\omega(f, t)_X$ и соотношения (7.4) получим

$$\omega(f, \lambda t)_X \leqslant \omega(f, ([\lambda]+1)t)_X \leqslant ([\lambda]+1)\omega(f, t)_X \leqslant \\ \leqslant (\lambda+1)\omega(f, t)_X.$$

Укажем некоторые оценки для функций Стеклова (§ 5.2), связанные с модулем непрерывности.

Предложение 7.1.1. *Если* $f \in L_p$ $(1 \leq p < \infty)$ *и* f_h — *функция Стеклова для* f, *то*

$$\|f - f_h\|_p \leq \omega(f, h)_p, \tag{7.6}$$

$$\|f_h'\|_p \leq \frac{1}{h}\,\omega(f, h)_p. \tag{7.7}$$

Неравенство (7.6) немедленно следует из полученного в § 5.2 соотношения

$$\|f - f_h\|_p \leq \|f(\cdot) - f(\cdot + h)\|_p$$

и определения модуля непрерывности $\omega(f, t)_p$. Далее, так как

$$f_h'(x) = \frac{1}{2h}\,[f(x+h) - f(x-h)],$$

то ввиду (7.1) и (7.4)

$$\|f_h'\|_p = \frac{1}{2h}\,\|f(\cdot + h) - f(\cdot - h)\|_p \leq$$

$$\leq \frac{1}{2h}\,\omega(f, 2h)_p \leq \frac{1}{h}\,\omega(f, h)_p.$$

Отметим, что в силу 2π-периодичности функции f

$$\omega(f, t)_X = \omega(f, \pi) \qquad (t \geq \pi).$$

В самом деле, если $|u| > \pi$, то всегда найдется целое (положительное или отрицательное) число m такое, что $|2m\pi - u| \leq \pi$. Но тогда

$$\|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_X = \|f(\cdot + u) - f(\cdot + 2m\pi)\|_X \leq \omega(f, \pi)_X$$

и, следовательно, при $t > \pi$ модуль непрерывности возрастать не может.

В случае $X = C$ свойства 1) — 4) модуля непрерывности $\omega(f, t)$ являются характеристическими в том смысле, что, как мы увидим чуть ниже, любая функция $\omega(t)$, обладающая этими свойствами, и такая, что $\omega(t) = \omega(\pi)$ $(t \geq \pi)$, является модулем непрерывности некоторой функции $f \in C$. Поэтому целесообразно ввести понятие модуля непрерывности вообще, не связывая это понятие с какой-либо конкретной функцией f.

По определению будем называть *модулем непрерывности* заданную на $[0, +\infty)$ непрерывную неубывающую и полуаддитивную функцию $\omega(t)$, в нуле равную нулю. Все эти условия, определяющие модуль непрерывности $\omega(t)$, содержатся в следующих соотношениях:

$$\lim_{t\to 0+0}\omega(t)=\omega(0)=0,\quad 0\leqslant\omega(t_2)-\omega(t_1)\leqslant\omega(t_2-t_1)$$
$$(0\leqslant t_1\leqslant t_2).$$

Если $\omega(t)$ — модуль непрерывности, то, полагая

$$f_0(x)=f_0(-x)=\omega(x)\ (0\leqslant x\leqslant\pi),\quad f_0(x+2\pi)=f(x),$$

получим функцию $f_0\in C$, у которой, как легко проверить, $\omega(f_0,\ t)=\omega(t)$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

Чтобы облегчить проверку функции $\omega(t)$ на полуаддитивность, заметим, что это свойство заведомо выполняется, если отношение $\omega(t)/t$ не возрастает (при возрастании t). Действительно, в этом случае для любых $t_1>0$ и $t_2>0$ будет

$$\omega(t_1+t_2)=t_1\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2}+t_2\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\leqslant$$
$$\leqslant t_1\frac{\omega(t_1)}{t_1}+t_2\frac{\omega(t_2)}{t_2}=\omega(t_1)+\omega(t_2).$$

Если $\omega(t)$ — выпуклая вверх на $[0,\ \infty)$ функция, т. е. для любых $t_1\geqslant 0$ и $t_2\geqslant 0$

$$\alpha\omega(t_1)+(1-\alpha)\,\omega(t_2)\leqslant\omega(\alpha t_1+(1-\alpha)\,t_2)\qquad(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

(точки хорды лежат не выше соответствующих точек стягиваемой ею дуги), то отношение $[\omega(t)-c]/(t-c)$ не возрастает при каждом $c\geqslant 0$. Это сразу становится очевидным, если сделать чертеж (см. также И. П. Натансон [2], стр. 476). Таким образом, справедливо

Предложение 7.1.2. *Всякая непрерывная неубывающая и выпуклая вверх на* $[0,\ +\infty)$ *функция* $\omega(t)$, *в нуле равная нулю, является модулем непрерывности.*

Важными примерами модулей непрерывности являются функции Kt^α $(t\geqslant 0)$, где $0<\alpha\leqslant 1$ и $K>0$, а также функции, совпадающие с Kt^α $(0<\alpha\leqslant 1,\ K>0)$ на $[0,\ \delta]$ и с $K\delta^\alpha$ при $t\geqslant\delta$.

В дальнейшем нам придется иметь дело большей частью с выпуклым вверх модулем непрерывности, поэтому отметим некоторые его дополнительные свойства, вытекающие из выпуклости.

Предложение 7.1.3. *Выпуклая вверх функция $\psi(x)$ в каждой внутренней точке промежутка выпуклости имеет конечные односторонние производные $\psi'_-(x)$ и $\psi'_+(x)$, каждая из которых не возрастает, причем*

$$\psi'_+(x) \leqslant \psi'_-(x). \tag{7.8}$$

Доказательство. Пусть x — внутренняя точка промежутка выпуклости функции ψ и число $h>0$ таково, что $x-h$ и $x+h$ принадлежат этому промежутку. Вытекающее из определения выпуклости вверх неравенство $^1/_2[\psi(x+h)+\psi(x-h)] \leqslant \psi(x)$ перепишем в эквивалентном виде

$$\frac{1}{h}[\psi(x+h)-\psi(x)] \leqslant \frac{1}{h}[\psi(x)-\psi(x-h)]$$

и заметим, что при $h\to 0$ отношение в левой части, будучи ограниченным сверху, не убывает, а отношение справа, будучи ограниченным снизу, не возрастает. Следовательно, эти отношения при $h\to 0$ имеют конечные пределы, равные соответственно $\psi'_+(x)$ и $\psi'_-(x)$ и удовлетворяющие неравенству (7.8).

Если x_1 и x_2 — две внутренние точки промежутка выпуклости ψ и $x_1<x_2$, то для всех $0<h<x_2-x_1$

$$\psi(x_1+h)+\psi(x_2-h) \geqslant \psi(x_1)+\psi(x_2)$$

и, значит,

$$\frac{1}{h}[\psi(x_1+h)-\psi(x_1)] \geqslant \frac{1}{h}[\psi(x_2)-\psi(x_2-h)].$$

В пределе при $h\to 0$ приходим к неравенству $\psi'_+(x_1) \geqslant \psi'_-(x_2)$, так что, с учетом (7.8), тем более $\psi'_+(x_1) \geqslant \psi'_+(x_2)$ и $\psi'_-(x_2) \leqslant \psi'_-(x_1)$.

Предложение 7.1.4. *Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

а) *на промежутке $0<t<\infty$ существуют не возрастающие неотрицательные односторонние производные $\omega'_-(t)$ и $\omega'_+(t)$, причем $\omega'_+(t) \leqslant \omega'_-(t)$;*

б) *$\omega(t)$ — абсолютно непрерывная на $[0, \infty)$ функция.*

Доказательство. Утверждение а) следует из 7.1.3 и монотонности $\omega(t)$. Чтобы доказать б), зададим $\varepsilon>0$, и пусть $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ $(k=1, \ldots, n)$ — система непересекающихся интервалов таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta,$$

где $\delta = \delta(\varepsilon)$ определено из равенства $\omega(\delta) = \varepsilon$. Мы можем считать, что

$$0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n < \beta_n.$$

Из выпуклости вверх $\omega(t)$ следует, что если $0 \leqslant t_1 < t_2$, то для любого $h > 0$

$$\omega(t_2 + h) - \omega(t_2) \leqslant \omega(t_1 + h) - \omega(t_1),$$

поэтому

$$\begin{gathered}
\omega(\beta_1) - \omega(\alpha_1) \leqslant \omega(\beta_1 - \alpha_1), \\
\omega(\beta_2) - \omega(\alpha_2) \leqslant \omega[(\beta_2 - \alpha_2) + (\beta_1 - \alpha_1)] - \omega(\beta_1 - \alpha_1), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega(\beta_n) - \omega(\alpha_n) \leqslant \omega\left[\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k)\right] - \omega\left[\sum_{k=1}^{n-1} (\beta_k - \alpha_k)\right].
\end{gathered}$$

Суммируя, получим

$$\sum_{k=1}^{n} [\omega(\beta_k) - \omega(\alpha_k)] \leqslant \omega\left[\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k)\right] \leqslant \omega(\delta) = \varepsilon.$$

Абсолютная непрерывность выпуклого вверх модуля непрерывности означает, что

$$\omega(t) = \int_0^t \omega'(u)\, du,$$

где $\omega'(u)$ существует почти всюду на $(0, \infty)$ (в силу монотонности $\omega(t)$) и суммируема. Если положить

$$\omega'(u) = \frac{1}{2}[\omega'_+(u) + \omega'_-(u)],$$

то $\omega'(u)$ будет определена в каждой точке $t \in (0, \infty)$, являясь на этом промежутке невозрастающей функцией.

Легко привести пример модуля непрерывности, не являющегося выпуклой вверх функцией. Пусть при

$0<h<1$ (рис. 17)

$$\omega(t)=\begin{cases}\frac{1}{h}t & (0\leqslant t\leqslant h),\\ 1 & (h\leqslant t\leqslant 1),\\ \frac{1}{h}(t-1+h) & (1\leqslant t\leqslant 1+h),\\ 2 & (t\geqslant 1+h).\end{cases}\tag{7.9}$$

Без труда проверяется, что эта функция, не будучи выпуклой вверх, удовлетворяет всем условиям, определяющим модуль непрерывности и, в частности, полуаддитивна.

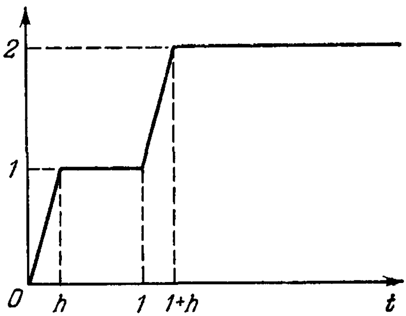

Рис. 17.

Имеет место следующая лемма о выпуклой мажоранте.

Лемма 7.1.5. *Каков бы ни был модуль непрерывности $\omega(t)\not\equiv 0$, существует выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_*(t)$ такой, что*

$$\omega(t)\leqslant\omega_*(t)<2\omega(t)\quad(0<t<\infty).\tag{7.10}$$

Константа 2 в правой части уменьшена быть не может.

Доказательство. Возьмем в качестве $\omega_*(t)$ верхнюю границу наименьшей выпуклой области, содержащей область $\{0\leqslant t<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant\omega(t)\}$. Ясно, что $\omega_*(0)=0$ и $\omega_*(t)$ — непрерывная неубывающая и выпуклая вверх на $[0,\infty)$ функция, т. е. $\omega_*(t)$ есть модуль непрерывности. Из самого определения следует, что $\omega(t)\leqslant\omega_*(t)$.

Докажем, что в каждой точке $t>0$ $\omega_*(t)<2\omega(t)$, причем ясно, что нужно рассмотреть только те точки t, в которых $\omega(t)<\omega_*(t)$. Но если t — такая точка, то существуют t_1 и t_2 такие, что

$$t_1<t<t_2,\quad \omega_*(t_1)=\omega(t_1),\quad \omega_*(t_2)=\omega(t_2)$$

и $\omega_*(t)$ линейна на $[t_1, t_2]$. Следовательно,

$$\omega_*(t)=\omega(t_1)+\frac{\omega(t_2)-\omega(t_1)}{t_2-t_1}(t-t_1)=$$
$$=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\omega(t_1)+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\omega(t_2)$$

и

$$\frac{\omega_*(t)}{\omega(t)} = \frac{t_2-t}{t_2-t_1}\,\frac{\omega(t_1)}{\omega(t)} + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\,\frac{\omega(t_2)}{\omega(t)}. \tag{7.11}$$

Но $t_1 < t$ и, значит, $\omega(t_1)/\omega(t) \leqslant 1$, а так как в силу (7.5)

$$\omega(t_2) = \omega\left(\frac{t_2}{t}\cdot t\right) \leqslant \left(\frac{t_2}{t}+1\right)\omega(t),$$

то

$$\frac{\omega(t_2)}{\omega(t)} \leqslant \frac{t_2+t}{t}.$$

Учитывая эти оценки, из (7.11) получим

$$\frac{\omega_*(t)}{\omega(t)} \leqslant \frac{t_2-t}{t_2-t_1} + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\,\frac{t_2+t}{t} =$$
$$= 1 + \frac{t_2}{t_2-t_1} - \frac{t_1}{t_2-t_1}\,\frac{t_2}{t} < 1 + \frac{t_2}{t_2-t_1} - \frac{t_1}{t_2-t_1} = 2.$$

Неравенства (7.10) доказаны. Легко подсчитать, что если наименьшая выпуклая мажоранта $\omega_*(t)$ построена для модуля непрерывности (7.9), то

$$\frac{\omega_*(1)}{\omega(1)} = 2-h,$$

так что константу 2 в (7.10) уменьшить нельзя.

§ 7.2. Классы $W^r H^\omega$

Классы функций $W^r_{L_p}$, которые рассматривались в главе 5, задавались ограничением на норму r-й производной; структура r-й производной при этом не учитывалась, требовалось лишь, чтобы $\|f^{(r)}\|_p \leqslant 1$.

Более тонкий и в то же время более общий способ задания классов функций связан с заданием мажоранты для модуля непрерывности самой функции или ее r-й производной.

Если $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности, $\omega(t) \not\equiv 0$, то через H^ω будем обозначать множество функций $f(x)$ из C, для которых

$$\omega(f,\ t) \leqslant \omega(t) \qquad (t \geqslant 0). \tag{7.12}$$

Мы уже отмечали в § 7.1, что для $f \in C$ $\omega(f, t) = \omega(f, \pi)$ для $t > \pi$, поэтому включение $f \in H^\omega$ равносильно выполнению неравенства (7.12) при $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Класс H^ω можно определить еще как совокупность всех функций $f \in C$, удовлетворяющих условию

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(|x' - x''|) \qquad \forall x',\ x''.$$

В частности, если $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$, то H^ω есть класс функций f из C, удовлетворяющих на всей оси условию Гельдера степени α с константой K:

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant K|x' - x''|^\alpha.$$

Этот класс будем обозначать KH^α.

Предложение 7.2.1. *Класс KH^1 совпадает с классом W_M^1K абсолютно непрерывных функций f из C, у которых почти всюду $|f'(x)| \leqslant K$.*

Действительно, если $f \in KH^1$, то f абсолютно непрерывна, и так как для всех x и h

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant K,$$

то почти всюду $|f'(x)| \leqslant K$. С другой стороны, если $f \in W_M^1K$, то

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\int_{x'}^{x''} f'(t)\,dt\right| \leqslant K|x' - x''|,$$

т. е. $f \in KH^1$.

Через W^rH^ω $(r = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать класс функций $f \in C^r$, у которых $f^{(r)} \in H^\omega$. Под W^0H^ω понимается H^ω.

W^rKH^α по определению есть частный случай класса W^rH^ω, когда $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$; таким образом, $f \in W^rKH^\alpha$ означает, что $f \in C^r$ и $f^{(r)} \in KH^\alpha$.

Из предложения 7.2.1 следует, что класс W^rKH^1 совпадает с классом $W_M^{r+1}K$.

Предложение 7.2.2. *При фиксированных $\omega(t)$ и $r = 0, 1, 2, \ldots$ функции класса W^rH^ω равностепенно непрерывны, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что из $|x' - x''| < \delta$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех $f \in W^rH^\omega$.*

При $r = 0$ сформулированное утверждение следует из того, что, выбрав $\delta = \delta(\varepsilon)$ из условия $\omega(\delta) \leqslant \varepsilon$, будем иметь для любой функции $f \in H^\omega$ и любых x' и x'' таких, что $|x'-x''|<\delta$,

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant \omega(|x'-x''|) \leqslant \omega(\delta) \leqslant \varepsilon.$$

Если же $f \in W^rH^\omega$ $(r \geqslant 1)$, то, используя представление (§ 5.1)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_r(t) f^{(r)}(x-t)\,dt$$

и учитывая, что $f^{(r)} \in H^\omega$, можем написать

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_r(t)|\,|f^{(r)}(x'-t)-f^{(r)}(x''-t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\|D_r\|_L\,\omega(|x'-x''|) \leqslant \varepsilon,$$

если только $|x'-x''|<\delta$, где $\delta=\delta(\varepsilon)$ выбрано из условия $\omega(\delta) \leqslant \pi\varepsilon/\|D_r\|_L$.

Предложение 7.2.3. *При фиксированных* $\omega(t)$ *и* $r=0, 1, 2, \ldots$ *класс* W^rH^ω *есть выпуклое замкнутое локально компактное в* C *множество.*

И здесь рассмотрим сначала случай $r=0$. Если f_1 и $f_2 \in H^\omega$, то, положив $f=\alpha f_1+(1-\alpha)f_2$ $(0<\alpha<1)$, для любых точек x' и x'' будем иметь

$$|f(x')-f(x'')| =$$
$$= |\alpha f_1(x')+(1-\alpha)f_2(x')-\alpha f_1(x'')-(1-\alpha)f_2(x'')| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha|f_1(x')-f_1(x'')|+(1-\alpha)|f_2(x')-f_2(x'')| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(|x'-x''|),$$

т. е. $f \in H^\omega$, и выпуклость H^ω установлена.

Пусть далее $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность функций из H^ω, сходящаяся к $f(x)$ в метрике C: $\|f_n-f\|_C \to 0$. Фиксировав x' и x'', напишем для любых $n=1, 2, \ldots$

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x')-f_n(x')|+|f_n(x')-f_n(x'')|+|f_n(x'')-f(x'')|,$$

откуда, оценивая каждое слагаемое справа, получим

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant \omega(|x'-x''|)+2\|f-f_n\|_C,$$

а переходя к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что $f \in H^\omega$.

Локальная компактность множества H^ω в пространстве C следует из теоремы Арцела (Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], стр. 236) и предложения 7.2.2.

Рассмотрим случай $r \geqslant 1$. Если f_1 и $f_2 \in W^rH^\omega$, то функция $f = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$ $(0 < \alpha < 1)$ принадлежит C^r и тривиально проверяется (как и в случае $r=0$), что $f^{(r)} \in H^\omega$.

Докажем замкнутость в C класса W^rH^ω. Пусть $f_n \in W^rH^\omega$ $(n=1, 2, \ldots)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_C = 0, \tag{7.13}$$

так что $\|f_n\|_C \leqslant K$ $(n=1, 2, \ldots)$. Записав представления

$$f_n(x) = \frac{a_{0n}}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_r(x-t) f_n^{(r)}(t)\,dt \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

заметим, что

$$|a_{0n}| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f_n(t)\,dt\right| \leqslant 2K \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

и, значит, существует сходящаяся подпоследовательность $\{a_{0n_k}\}$, $a_{0n_k} \to a_{0*}$. Так как $f_{n_k}^{(r)} \in H^\omega$ и на каждом периоде $f_{n_k}^{(r)}$ обращается в нуль, то для любого x найдется точка $\alpha = \alpha_k$ такая, что $|x-\alpha| \leqslant \pi$, $f_{n_k}^{(r)}(\alpha) = 0$ и, следовательно,

$$|f_{n_k}^{(r)}(x)| = |f_{n_k}^{(r)}(x) - f_{n_k}^{(r)}(\alpha)| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(|x-\alpha|) \leqslant \omega(\pi) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Таким образом, последовательность $\{f_{n_k}^{(r)}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ ограничена в C и, ввиду локальной компактности класса H^ω, содержит сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что $f_{n_k}^{(r)} \to \psi$, где $\psi \in H^\omega$ ввиду замкнутости этого класса. Так как среднее значение на периоде каждой из функций $f_{n_k}^{(r)}$ равно нулю, то

$$\left|\int_0^{2\pi} \psi\,dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} (\psi - f_{n_k}^{(r)})\,dt\right| \leqslant \|\psi - f_{n_k}^{(r)}\|_C\, 2\pi \to 0 \qquad (k\to\infty),$$

т. е. $\int_0^{2\pi} \psi(t)\,dt = 0$.

Пусть $f_*(x)$ — r-й периодический интеграл от $\psi(x)$ со средним значением на периоде, равным $a_{0*}/2$. Тогда $f_* \in W^rH^\omega$ и

$$f_*(x) = \frac{a_{0*}}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_r(x-t)\,\psi(t)\,dt.$$

Имеем

$$\|f_{n_k} - f_*\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|a_{0n_k} - a_{0*}| + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |D_r(x-t)|\,|f_{n_k}^{(r)}(t) - \psi(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|a_{0n_k} - a_{0*}| + \frac{1}{\pi}\|D_r\|_L\,\|f_{n_k}^{(r)} - \psi\|_C \to 0 \qquad (k\to\infty)$$

Так как, с другой стороны, ввиду (7.13) $\|f_{n_k} - f\|_C \to 0$, то в силу единственности предела $f = f_*$, т. е. предел последовательности $\{f_n\}$ из W^rH^ω также принадлежит этому классу.

Локальная компактность класса $W^rH^\omega\,(r \geqslant 1)$, как и в случае $r=0$, следует из предложения 7.2.2 и теоремы Арцела.

Замечание. Утверждения, аналогичные 7.2.2 и 7.2.3, имеют место и для классов $W^rH_p^\omega$ ($r=0, 1, \ldots$; $W^0H_p^\omega = H_p^\omega$) функций $f \in L_p^r$, у которых $\omega(f^{(r)}, t)_p \leqslant \omega(t)$. Вместо теоремы Арцела здесь следует воспользоваться теоремой Рисса (Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], стр. 242), равностепенная непрерывность понимается в среднем в p-й степени.

§ 7.3. Функции $f_{nr}(t) = f_{nr}(\omega, t)$

В классе W^rH^ω ($r=0, 1, \ldots$) при выпуклом $\omega(t)$ есть «стандартная» функция, на которой реализуются многие экстремальные свойства функций этого класса, в частности верхние грани наилучших приближений.

Пусть $f_{n0}(x) = f_{n0}(\omega, x)$ — $2\pi/n$-периодическая нечетная функция, определенная на $[0, \pi/n]$ равенствами

$$f_{n0}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\omega(2x) & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2n}\right), \\[2mm] \dfrac{1}{2}\,\omega\left(2\left(\dfrac{\pi}{n} - x\right)\right) & \left(\dfrac{\pi}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{n}\right). \end{cases}$$

Через $f_{nr}(x)=f_{nr}(\omega, x)$ $(r=1, 2, \ldots)$ обозначим r-й периодический интеграл от $f_{n0}(x)$ со средним значением на периоде, равным нулю. Таким образом,

$$f_{nr}(x)=\begin{cases}\int\limits_{\pi/2n}^{x} f_{n,r-1}(t)\,dt & (r=1, 3, 5, \ldots),\\ \int\limits_{0}^{x} f_{n,r-1}(t)\,dt & (r=2, 4, 6, \ldots);\end{cases}$$

$$f_{nr}^{(k)}(x)=f_{n,r-k}(x) \quad (r=1, 2, 3, \ldots;\ k=1, 2, \ldots, r).$$

Графики первых трех функций $f_{nr}(x)$ изображены на рис. 18.

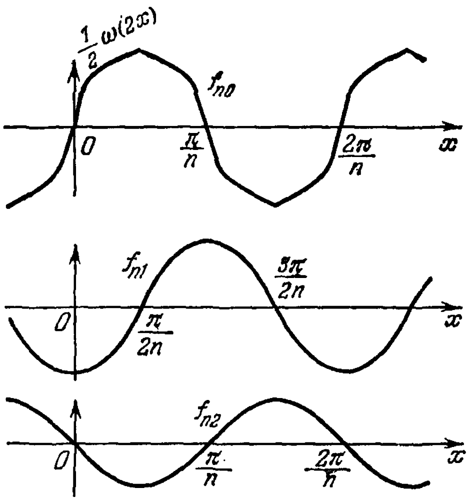

Рис. 18. Функции $f_{nr}(x)=f_{nr}(\omega, x)$ $(r=0,1,2)$

Предложение 7.3.1. *Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то $f_{nr}\in W^rH^\omega$ $(r=0, 1, 2, \ldots)$, причем*

$$\omega(f_{n0}, t)=\omega(t) \quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{n},\ n=1, 2, \ldots\right). \tag{7.14}$$

Чтобы доказать, что $f_{nr}\in W^rH^\omega$, надо лишь убедиться в принадлежности функции f_{n0} классу H^ω, т. е. в том, что

$$|f_{n0}(x')-f_{n0}(x'')|\leqslant\omega(|x'-x''|)\ \forall x', x''. \tag{7.15}$$

Проверим сначала (7.15) для x' и x'', принадлежащих промежутку $[-\pi/2n,\ \pi/2n]$, на котором f_{n0} строго возрастает, принимая на концах наименьшее и наибольшее (относительно всей оси) значения. Если $-\pi/2n \leqslant x' \leqslant \leqslant 0 \leqslant x'' \leqslant \pi/2n$, то из выпуклости $\omega(t)$ сразу выводим:

$$|f_{n0}(x') - f_{n0}(x'')| = f_{n0}(x'') - f_{n0}(x') =$$
$$= \frac{1}{2}[\omega(2x'') + \omega(-2x')] \leqslant \omega(x'' - x') = \omega(|x' - x''|).$$

Если же $0 < x' < x'' \leqslant \pi/2n$, то, используя полуаддитивность модуля непрерывности $\omega(t)$, будем иметь

$$|f_{n0}(x') - f_{n0}(x'')| = \frac{1}{2}\omega(2x'') - \frac{1}{2}\omega(2x') \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\omega(2(x'' - x')) \leqslant \omega(x'' - x') = \omega(|x'' - x'|),$$

причем вследствие нечетности f_{n0} неравенство (7.15) теперь доказано и для x' и x'', принадлежащих промежутку $[-\pi/2n,\ 0]$.

В общем случае, когда x' и x'' — произвольные точки оси, всегда можно указать точки x_1 и x_2 на промежутке $[-\pi/2n,\ \pi/2n]$ такие, что $|x_1 - x_2| \leqslant |x' - x''|$ и

$$f_{n0}(x_1) = f_{n0}(x'), \qquad f_{n0}(x_2) = f_{n0}(x''),$$

и следовательно, в силу уже доказанного,

$$|f_{n0}(x') - f_{n0}(x'')| =$$
$$= |f_{n0}(x_1) - f_{n0}(x_2)| \leqslant \omega(|x_1 - x_2|) \leqslant \omega(|x' - x''|).$$

Доказанное нами соотношение (7.15) равносильно тому, что

$$\omega(f_{n0},\ t) \leqslant \omega(t) \qquad (t \geqslant 0). \tag{7.15'}$$

С другой стороны, если $0 < t \leqslant \pi/n$, то

$$f_{n0}\left(\frac{t}{2}\right) - f_{n0}\left(-\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\omega(t) + \frac{1}{2}\omega(t) = \omega(t),$$

так что при $0 \leqslant t \leqslant \pi/n$ в (7.15′) имеет место знак равенства.

Из самого определения функций $f_{nr}(x)$ следует, что:

а) $f_{nr}(x)$ имеет простые нули в точках $k\pi/n$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) при r четном и в точках $(2k - 1)\pi/2n$ при r нечетном, которые являются центрами симметрии ее графика;

б) $f_{nr}(x)$ достигает максимального по абсолютной величине значения в точках $k\pi/n$ при r нечетном и в точках $(2k-1)\pi/2n$ при r четном;

в) $f_{nr}(x)$ монотонна на каждом промежутке длиной π/n между соседними точками своего экстремума.

Предложение 7.3.2. *Имеют место равенства*

$$E_n(f_{nr})_C = \|f_{nr}\|_C \quad (n=1, 2, \ldots;\ r=0, 1, 2, \ldots) \tag{7.16}$$

$$E_n(f_{nr})_L = \|f_{nr}\|_L \quad (n=1, 2, \ldots;\ r=0, 1, 2, \ldots). \tag{7.17}$$

Действительно, из отмеченных только что свойств $f_{nr}(x)$ следует, что на периоде $[0, 2\pi)$ существует $2n$ равноотстоящих точек, в которых $f_{nr}(x)$ принимает максимальные по абсолютной величине значения, поочередно меняя знак. В силу критерия Чебышева 3.2.1 наилучшее приближение функции f_{nr} в метрике C среди всех тригонометрических полиномов порядка $n-1$ доставляет тождественный нуль, так что справедливо (7.16).

Из свойств а) — в) функции f_{nr} следует также, что

$$\operatorname{sign} f_{nr}(x) = \begin{cases} (-1)^{r/2} \operatorname{sign}\sin nx & (r=0, 2, 4, 6, \ldots), \\ (-1)^{(r+1)/2} \operatorname{sign}\cos nx & (r=1, 3, 5, \ldots) \end{cases}$$

и, значит, в силу предложения 3.5.1 функция $f_{nr}(x)$ ортогональна всем тригонометрическим полиномам порядка $n-1$. Критерий 3.3.4 полинома наилучшего приближения в метрике L позволяет заключить, что для $f_{nr}(x)$ таким полиномом будет, как и в метрике C, тождественный нуль, а потому верно и (7.17).

§ 7.4. Основная лемма

Через $H^\omega[a, b]$ в этом и в следующих параграфах будем обозначать класс заданных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant \omega(|x'-x''|) \qquad \forall x', x'' \in [a, b],$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности.

Лемма 7.4.1. *Пусть суммируемая на промежутке (α, β) функция $\psi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *интеграл*

$$\Psi(x) = \int_\alpha^x \psi(t)\,dt \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta),$$

доопределенный нулем вне (α, β), *есть простая функция в смысле определения* § 6.2, *т. е.* $\Psi(x)$ *строго монотонна на* (α, α') *и* (β', β) $(\alpha<\alpha'\leqslant\beta'<\beta)$, $\Psi(\beta)=0$ *и*

$$\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|\Psi(x)|=|\Psi(t)|\qquad(\alpha'\leqslant t\leqslant\beta');$$

2) *на промежутках* (α, α') *и* (β', β) *функция* $\psi(t)$ *обращается в нуль разве что на множестве меры нуль.*

Тогда

$$M_\omega(\psi)\overset{\text{def}}{=}\sup_{f\in H^\omega[\alpha,\beta]}\left|\int_\alpha^\beta\psi(t)f(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_\alpha^{\alpha'}|\psi(t)|\,\omega(\rho(t)-t)\,dt=\int_{\beta'}^{\beta}|\psi(t)|\,\omega(t-\rho^{-1}(t))\,dt,\qquad(7.18)$$

где функция $\rho(x)$ *определена для* $\alpha\leqslant x\leqslant c=(\alpha'+\beta')/2$ *равенствами*

$$\Psi(x)=\Psi(\rho(x))\qquad(\alpha\leqslant x\leqslant\alpha',\ \beta'\leqslant\rho(x)\leqslant\beta),$$
$$\rho(x)=\alpha'+\beta'-x\qquad(\alpha'<x<c),$$

а $\rho^{-1}(x)$ — *функция, обратная* $\rho(x)$.

Если $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности, то*:

а) *в* (7.18) *имеет место знак равенства, причем верхнюю грань реализуют функции из класса* $H^\omega[\alpha,\beta]$ *вида* $K\pm f_0(x)$, *где* K — *произвольная постоянная и*

$$f_0(x)=\begin{cases}-\displaystyle\int_x^c\omega'(\rho(t)-t)\,dt & (\alpha\leqslant x\leqslant c),\\ \displaystyle\int_c^x\omega'(t-\rho^{-1}(t))\,dt & (c\leqslant x\leqslant\beta);\end{cases}\qquad(7.19)$$

б) *величина* $M_\omega(\psi)$ *может быть записана в виде*

$$M_\omega(\psi)=\int_0^{\beta-\alpha}\overline{\Psi}(t)\,\omega'(t)\,dt,\qquad(7.20)$$

где $\overline{\Psi}(t)$ — *убывающая перестановка функции* $|\Psi(t)|$.

Доказательство. Ниже мы покажем, что в условиях леммы функции $\rho(x)$ и $\rho^{-1}(x)$ абсолютно непрерывны и почти всюду на соответствующих промежутках выполняются соотношения

$$\psi(t)=\psi(\rho(t))\,\rho'(t) \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant c), \tag{7.21}$$

$$\psi(\rho^{-1}(t))\,(\rho^{-1}(t))'=\psi(t) \qquad (c\leqslant t\leqslant\beta). \tag{7.22}$$

А пока, используя эти факты, получим с помощью несложных выкладок утверждения леммы.

Заметим, что функция $\rho(x)$ непрерывно и строго монотонно отображает отрезок $[\alpha, c]$ на отрезок $[c, \beta]$, причем

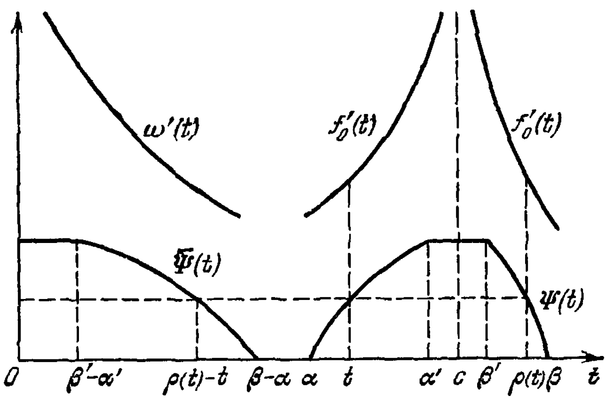

Рис. 19.

$\rho(\alpha)=\beta$, $\rho(c)=c$ (рис. 19). Полагая $t=\rho(z)$ на (β', β) (замена переменной правомерна ввиду абсолютной непрерывности $\rho(x)$), получим для $f\in H^{\omega}_{[\alpha,\beta]}$

$$\int_{\beta'}^{\beta}\psi(t)\,f(t)\,dt=-\int_{\alpha}^{\alpha'}\psi(\rho(z))\,f(\rho(z))\,\rho'(z)\,dz. \tag{7.23}$$

С учетом того, что $\psi(t)=0$ почти всюду на (α', β'), для любой функции $f\in H^{\omega}[\alpha, \beta]$, используя (7.21) и (7.23), будем иметь

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,f(t)\,dt\right|=\left|\int_{\alpha}^{\alpha'}\psi(t)\,f(t)\,dt+\int_{\beta'}^{\beta}\psi(t)\,f(t)\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_{\alpha}^{\alpha'}\psi(t)\,[f(t)-f(\rho(t))]\,dt\right|\leqslant\int_{\alpha}^{\alpha'}|\psi(t)|\,\omega(\rho(t)-t)\,dt. \tag{7.24}$$

Аналогично, полагая $t=\rho^{-1}(z)$ на (α, α') и используя (7.22), найдем

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} \psi f\,dt\right| = \left|\int_{\beta'}^{\beta} \psi(t)\,[f(\rho^{-1}(t)) - f(t)]\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\beta'}^{\beta} |\psi(t)|\,\omega(t-\rho^{-1}(t))\,dt. \tag{7.25}$$

Равенство

$$\int_{\alpha}^{\alpha'} |\psi(t)|\,\omega(\rho(t)-t)\,dt = \int_{\beta'}^{\beta} |\psi(t)|\,\omega(t-\rho^{-1}(t))\,dt \tag{7.26}$$

проверяется элементарно с помощью той же замены переменной $t=\rho^{-1}(z)$. Первая часть леммы доказана.

Пусть теперь $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда $\omega(t)$ есть абсолютно непрерывная функция (предложение 7.1.4) и

$$\omega(t) = \int_0^t \omega'(u)\,du,$$

причем $\omega'(u)$ не возрастает. Докажем, что для функции $f_0(x)$, определенной равенствами (7.19), выполняется соотношение

$$f_0(\rho(x)) - f_0(x) = \omega(\rho(x)-x) \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant c). \tag{7.27}$$

Если $\alpha \leqslant x < c$, то $c \leqslant \rho(x) \leqslant \beta$ и замена $t=\rho(z)$ дает

$$f_0(\rho(x)) = \int_c^{\rho(x)} \omega'(t-\rho^{-1}(t))\,dt = \int_c^x \omega'(\rho(z)-z)\,\rho'(z)\,dz.$$

Тогда

$$f_0(\rho(x)) - f_0(x) = -\int_x^c \omega'(\rho(t)-t)\,[\rho'(t)-1]\,dt =$$
$$= -\int_x^c \omega'(\rho(t)-t)\,d\,[\rho(t)-t] = \omega(\rho(x)-x).$$

Теперь из (7.27) следует, что в (7.24), а в силу (7.26) и в (7.25), для функции $f=f_0$ знак неравенства можно заменить на знак равенства. Так как

$$\Psi(\beta)=\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt=0,$$

то верхнюю грань в (7.18) вместе с f_0 реализует и любая функция вида $K\pm f_0$.

Мы должны еще проверить, что $f_0\in H^\omega[\alpha, \beta]$. Пусть $\alpha\leqslant x'<x''\leqslant\beta$, и сначала предположим, что $x'\leqslant c\leqslant x''$. Функция $\rho(x)-x$ непрерывно и строго монотонно отображает отрезок $[\alpha, c]$ на отрезок $[0, \beta-\alpha]$, поэтому найдется точка x_0, $\alpha\leqslant x_0<c$ такая, что

$$\rho(x_0)-x_0=x''-x'.$$

Пусть для определенности $x'\leqslant x_0$, тогда $x''\leqslant\rho(x_0)$, причем $x_0-x'=\rho(x_0)-x''$. Учитывая возрастание f_0, будем иметь

$$\begin{aligned}|f_0(x'')-f_0(x')|=f_0(x'')-f_0(x')=[f_0(\rho(x_0))-f_0(x_0)]+\\+[f_0(x_0)-f_0(x')]+[f_0(x'')-f_0(\rho(x_0))],\end{aligned}$$

и так как

$$f_0(\rho(x_0))-f_0(x_0)=\omega(\rho(x_0)-x_0)=\omega(|x'-x''|),$$

то надо доказать, что сумма последних двух квадратных скобок неположительна. Но производная $f_0'(x)$ функции $f_0(x)$, как это видно из (7.19), не убывает на (α, c) и не возрастает на (c, β), причем $f_0'(x)=f_0'(\rho(x))$; поэтому

$$\begin{aligned}&[f_0(x_0)-f_0(x')]+[f_0(x'')-f_0(\rho(x_0))]=\\&\qquad=\int_{x'}^{x_0} f'(t)\,dt-\int_{x''}^{\rho(x_0)} f'(t)\,dt\leqslant\\&\qquad\leqslant f'(x_0)(x_0-x')-f'(\rho(x_0))(\rho(x_0)-x'')=0.\end{aligned}$$

Если же x' и x'' лежат по одну сторону от точки c, например $\alpha\leqslant x'<x''\leqslant c$, то, выбрав точку x_1 так, чтобы было $c-x_1=x''-x'$, будем иметь, учитывая уже рассмотренный случай,

$$\begin{aligned}|f_0(x'')-f_0(x')|=\int_{x'}^{x''} f_0'(t)\,dt\leqslant\int_{x_1}^{c} f_0'(t)\,dt=\\=f_0(c)-f_0(x_1)\leqslant\omega(c-x_1)=\omega(|x'-x''|).\end{aligned}$$

Принадлежность функции f_0 классу $H^\omega[\alpha, \beta]$ установлена. Остается доказать соотношение (7.20). Интегрируя по частям и замечая, что $\Psi(x)$ сохраняет знак на (α, β), а функции $\omega'(\rho(t)-t)$ и $1-\rho'(t)$ положительны на (α, c), получим

$$M_\omega(\psi)=\left|\int_\alpha^c \psi(t)\,\omega[\rho(t)-t]\,dt\right|=$$
$$=\left|\int_\alpha^c \Psi(t)\,\omega'[\rho(t)-t](\rho'(t)-1)\,dt\right|=$$
$$=\int_\alpha^c |\Psi(t)|\,\omega'[\rho(t)-t](1-\rho'(t))\,dt.$$

Из определения убывающей перестановки и задания функции $\rho(x)$ следует, что для $\alpha\leqslant t\leqslant\alpha'$

$$|\Psi(t)|=\Psi[\rho(t)-t]. \tag{7.28}$$

Если же $\alpha'\leqslant t\leqslant c$, то $\rho(t)-t\leqslant\beta'-\alpha'$ и для таких t

$$|\Psi(t)|=\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|\Psi(x)|=\bar{\Psi}[\rho(t)-t],$$

так что (7.28) выполняется для всех $\alpha\leqslant t\leqslant c$. Поэтому

$$M_\omega(\psi)=\int_\alpha \Psi[\rho(t)-t]\,\omega'[\rho(t)-t][1-\rho'(t)]\,dt=$$
$$=\int_0^{\beta-\alpha}\Psi(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Теперь обоснуем правомерность сделанных при доказательстве леммы выкладок, а именно докажем, что:

а) функции $\rho(x)$ и $\rho^{-1}(x)$ абсолютно непрерывны соответственно на $[\alpha, c]$ и $[c, \beta]$;

б) равенства $\Psi(x)=\Psi(\rho(x))$ и $\Psi(\rho^{-1}(x))=\Psi(x)$ можно почти всюду дифференцировать.

Мы воспользуемся следующими фактами.

Предложение 7.4.2. *Если абсолютно непрерывная на $[a, b]$ функция $y=f(t)$ строго монотонно отображает отрезок $a\leqslant t\leqslant b$ на отрезок $c\leqslant y\leqslant d$, то для любого измеримого множества $e\subset[a, b]$*

$$\operatorname{mes} f(e)=\int_e f'(t)\,dt. \tag{7.29}$$

При дополнительном предположении, что $f'(t)=0$ разве что на множестве меры нуль, справедливы также утверждения:

i) *если* $\operatorname{mes} f(e)=0$, *то* $\operatorname{mes} e=0$;

ii) *для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta=\delta(\varepsilon)$ *такое, что из* $\operatorname{mes} f(e)<\delta$ *следует* $\operatorname{mes} e<\varepsilon$;

iii) *обратная функция* f^{-1} *абсолютно непрерывна на* $[c, d]$.

Соотношение (7.29) очевидно, если e — интервал или вообще открытое множество. Переход к дополнению убеждает нас в справедливости (7.29), когда e замкнуто. В общем случае равенство (7.29) получим, аппроксимируя e «изнутри» замкнутыми, а «извне» открытыми множествами.

Теперь утверждение i) сразу получается из (7.29) и предположения, что $|f'(t)|>0$ почти всюду, рассуждением от противного.

Доказывая ii), можно, не теряя общности, считать, что f возрастает, т. е. почти всюду на $[a, b]$

$$\varphi(t)\overset{\text{def}}{=}f'(t)>0.$$

Пусть $\bar{\varphi}(t)$ — убывающая перестановка функции φ. Тогда $\bar{\varphi}(t)>0$ для $0\leqslant t<b-a$.

При заданном $\varepsilon>0$, положив

$$\delta=\int_{b-a-\varepsilon}^{b-a}\bar{\varphi}(t)\,dt,$$

из неравенства

$$\operatorname{mes} f(e)=\int_e \varphi(t)\,dt<\delta$$

в силу предложения 6.1.3 сразу получим, что $\operatorname{mes} e<\varepsilon$.

Абсолютная непрерывность обратной функции f^{-1} сразу следует из ii), если учесть, что

$$e=f^{-1}[f(e)].$$

Вернемся к условиям леммы 7.4.1. Очевидно, что

$$\rho(x)=\Psi_1^{-1}[\Psi(x)] \qquad (\alpha\leqslant x\leqslant\alpha'),$$

где Ψ_1^{-1} — функция, обратная к $\Psi(x)$ на промежутке $[\beta', \beta]$. Так как $|\psi(x)|>0$ почти всюду на (β', β), то в силу утверждения iii) предложения 7.4.2 функция $\Psi_1^{-1}(y)$ абсолютно непрерывна на $\left[0, \max\limits_x |\Psi(x)|\right]$, и тогда $\rho(x)$, как суперпозиция строго монотонных абсолютно непрерывных функций, тоже абсолютно непрерывна. Совершенно аналогично устанавливается абсолютная непрерывность $\rho^{-1}(x)$.

Докажем далее, что если

$$\mu(x) = \Psi(\rho(x)) = \int\limits_\alpha^{\rho(x)} \psi(t)\, dt,$$

то почти всюду на (α, α')

$$\mu'(x) = \psi(\rho(x))\, \rho'(x).$$

Пусть e — множество точек x из (α, α'), в которых существует производная $\Psi'(x)$ и, кроме того, если $z = \rho(x)$, то в точке z существует $\Psi'(z)$, а значит, существует и производная обратной функции в точке $y = \Psi(z)$. Легко понять, что $\operatorname{mes} e = \alpha' - \alpha$, ибо в противном случае множество положительной меры отображалось бы функцией $\rho(x)$ в множество меры нуль, что невозможно, так как обратное отображение ρ^{-1} абсолютно непрерывно. Таким образом, $\Psi(x)$ и $\rho(x)$ дифференцируемы в каждой точке множества e, т. е. почти всюду на (α, α'). Если $x_0 \in e$, то

$$\frac{\mu(x_0+h) - \mu(x_0)}{h} = \frac{\Psi(\rho(x_0+h)) - \Psi(\rho(x_0))}{\rho(x_0+h) - \rho(x_0)} \cdot \frac{\rho(x_0+h) - \rho(x_0)}{h}$$

и при $h \to 0$ оба сомножителя в правой части имеют конечные пределы, соответственно $\Psi'(\rho(x_0))$ и $\rho'(x_0)$. А так как, с другой стороны,

$$\mu(x) = \Psi(x) = \int\limits_\alpha^x \psi(t)\, dt,$$

то (7.21) доказано. Аналогично доказывается и соотношение (7.22). Лемма 7.4.1 полностью доказана. Сделаем к ней два замечания.

Замечание 1. Если функция $\psi(t)$ в лемме 7.4.1 симметрична относительно середины $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ интервала (α, β) и, следовательно,

$$\Psi(\gamma - u) = \Psi(\gamma + u) \qquad (0 \leqslant u \leqslant \gamma),$$

то $\rho(x) - x = 2(\gamma - x)$ и, как легко проверить, экстремальная функция f_0 также симметрична относительно точки γ

и имеет простой вид:

$$f_0(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,\omega(2(x-\gamma)) & (\gamma\leqslant x\leqslant\beta),\\ -\frac{1}{2}\,\omega(2(\gamma-x)) & (\alpha\leqslant x\leqslant\gamma).\end{cases}$$

Принадлежность функции f_0 классу $H^\omega[\alpha,\beta]$ в этом случае может быть установлена гораздо проще. Действительно, если x' и x'' расположены по одну сторону от γ, например $\gamma\leqslant x'<x''\leqslant\beta$, то в силу полуаддитивности $\omega(t)$

$$|f_0(x'')-f_0(x')|=\frac{1}{2}[\omega(2x''-2\gamma)-\omega(2x'-2\gamma)]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\,\omega[2(x''-x')]\leqslant\omega(|x''-x'|).$$

Если же $\alpha\leqslant x'<\gamma<x''\leqslant\beta$, то, используя выпуклость $\omega(t)$, будем иметь

$$|f_0(x'')-f_0(x')|=\frac{1}{2}[\omega(2x''-2\gamma)+\omega(2\gamma-2x')]\leqslant$$
$$\leqslant\omega(|x''-x'|)$$

Замечание 2. Утверждения леммы 7.4.1 остаются справедливыми, если снять условие 2), наложенное в ней на функцию $\psi(t)$. Хотя в этом случае функция $\rho(x)$ может и потерять абсолютную непрерывность, однако производимые при доказательстве леммы замены переменной законны и равенства (7.21) и (7.22) справедливы. (Обоснование этих фактов требует более тонких рассуждений.) Впрочем, для дальнейшего нам достаточно иметь утверждение леммы даже в предположении, что $\psi(t)$ вообще не обращается в нуль на (α,α') и $(\beta'\ \beta)$.

§ 7.5. Оценка функционала $F_\omega(g)=\sup\limits_{f\in H^\omega}\int\limits_0^{2\pi}fg\,dt$

Ставя своей целью нахождение точных верхних граней наилучшего приближения тригонометрическими полиномами на классах W^rH^ω, будем исходить из соотношения

(см. начало главы 6)

$$E_n(f)_p = \sup_{g \in W^r H^n_{p'}} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) g(t)\, dt \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1/p + 1/p' = 1),$$

справедливого для любой функции $f \in L^r_p$.

Если $f \in W^r H^\omega$, то $f^{(r)} \in H^\omega$ и, следовательно,

$$E_n(W^r H^\omega)_p \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in W^r H^\omega} E_n(f)_p = \sup_{f \in H^\omega} \sup_{g \in W^r H^n_{p'}} \int_0^{2\pi} fg\, dt,$$

а так как верхние грани можно вычислять в произвольном порядке (см. (Д. 17)), то

$$E_n(W^r H^\omega)_p = \sup_{g \in W^r H^n_{p'}} \sup_{f \in H^\omega} \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt \qquad (7.30)$$

$(n = 1, 2, \ldots;\ r = 0, 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1/p + 1/p' = 1)$. Дело сводится, таким образом, к получению оценки функционала

$$F_\omega(g) = \sup_{f \in H^\omega} \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt, \qquad (7.31)$$

точной на классе функций $g \in W^r H^n_{p'}$. Опираясь на результаты предыдущей главы, мы сможем решить эту задачу для выпуклых $\omega(t)$ при $p' = 1$ и $p' = \infty$, причем даже на более широких классах, чем $W^r H^n_L$ и $W^r H^n_M$. При этом мы будем оперировать понятиями и терминами, введенными в главе 6.

Начнем с теоремы самого общего характера.

Теорема 7.5.1. *Если $g \in D$ и $\int_0^{2\pi} g(t)\, dt = 0$, то, каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$,*

$$F_\omega(g) = \sup_{f \in H^\omega} \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt \leqslant \min_c \int_0^{2\pi} \Phi(G_c, t)\, \omega'(t)\, dt, \qquad (7.32)$$

где

$$G_c(x) = \int_c^x g(t)\, dt.$$

Неравенство (7.32) точно в том смысле, что для некоторых функций $g \not\equiv 0$ из D в нем имеет место знак равенства.

Доказательство. Очевидно, мы можем считать, что $g(t)$ — исправленная функция из D. При любом c $G_c \in W^1D$ и для $G_c(x)$ возможно представление через простые функции:

$$G_c(x) = \sum_k \varphi_k(x) \qquad (c \leqslant x \leqslant c+2\pi),$$

причем почти всюду

$$g(x) = G_c'(x) = \sum_k \varphi_k'(x)$$

и последний ряд можно почленно интегрировать. Поэтому для любой функции $f \in H^\omega$

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt = \int_c^{c+2\pi} f(t)g(t)\,dt = \int_c^{c+2\pi} f(t)\left(\sum_k \varphi_k'(t)\right)dt =$$
$$= \sum_k \int_c^{c+2\pi} f(t)\varphi_k'(t)\,dt = \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t)\varphi_k'(t)\,dt, \qquad (7.33)$$

где (α_k, β_k) — основной интервал простой функции $\varphi_k(x)$.

Из свойства 5) разложения на простые функции (стр. 143) следует, что если $[\alpha_k', \beta_k']$ — отрезок (или одна точка), на котором $|\varphi_k(x)|$ имеет максимальное значение, то на интервалах (α_k, α_k') и (β_k', β_k) производная $\varphi_k'(x) = g(x) \neq 0$. Поэтому, применив лемму 7.4.1, для каждого интеграла в правой части (7.33) получим оценку

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f\varphi_k'\,dt \leqslant \int_0^{\beta_k-\alpha_k} \bar{\varphi}_k(t)\,\omega'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \bar{\varphi}_k(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Сходящийся ряд неотрицательных функций можно интегрировать почленно и потому

$$\int_0^{2\pi} fg\,dt \leqslant \sum_k \int_0^{2\pi} \bar{\varphi}_k(t)\,\omega'(t)\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_k \bar{\varphi}_k(t)\right)\omega'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \Phi(G_c, t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Так как число c у нас было произвольным, то неравенство (7.32) доказано.

Покажем, что оценка (7.32) неулучшаема. Пусть функция $g_*(t)$ из D имеет период $2\pi/n$ ($n=1, 2, \ldots$) и нечетна, причем

$$g_*(u)=g_*(\pi/n-u)>0 \qquad (0<u<\pi/2n).$$

Интеграл

$$G_*(x)=\int_{-\pi/2n}^{x} g_*(t)\,dt$$

на промежутке $[-\pi/2n,\ -\pi/2n+2\pi]$ есть сумма $2n$ простых функций $\varphi_k(x)$ ($k=0, 1, \ldots, 2n-1$) с основными интервалами $((2k-1)\pi/2n,\ (2k+1)\pi/2n)$, причем $\varphi_0(x)$ совпадает на $[-\pi/2n,\ \pi/2n]$ с $G_*(x)$ и

$$\varphi_k(x)=(-1)^k\varphi_0\left(x-\frac{k\pi}{n}\right) \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n-1).$$

Привлекая к рассмотрению определенную в § 7.3 функцию $f_{n0}(t)\in H^\omega$ и учитывая $2\pi/n$-периодичность и одинаковую симметрию графиков g_* и f_{n0}, будем иметь

$$F_\omega(g_*)=\sup_{f\in H^\omega}\int_0^{2\pi} g_*(t)f(t)\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\int_0^{2\pi} g_*(t)f_{n0}(t)\,dt=2n\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} g_*(t)f_{n0}(t)\,dt. \qquad (7.34)$$

Для последнего интеграла справедлива ситуация, о которой говорилось в замечании 1 в конце § 7.4, причем функция $f_{n0}(t)$ является как раз экстремальной в классе $H^\omega[-\pi/2n,\ \pi/2n]$ функцией для g_* в смысле леммы 7.4.1, так что мы можем написать

$$\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} g_*f_{n0}\,dt=\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n}\varphi_0(t)f_{n0}(t)\,dt=\int_0^{\pi/n}\overline{\varphi}_0(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Подставив в (7.34), получим

$$F_\omega(g_*)\geqslant\int_0^{\pi/n} 2n\overline{\varphi}_0(t)\,\omega'(t)\,dt=$$
$$=\int_0^{\pi/n}\Phi(G_*,\ t)\,\omega'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\Phi(G_*,\ t)\,\omega'(t)\,dt,$$

причем, как следует из общей оценки (7.32), здесь может быть только знак равенства. Теорема 7.5.1 доказана.

Легко понять, что оценка (7.32) точна также для любой функции вида $\pm g_*(t-\gamma)$, где γ — любое число. Верхнюю грань в H^ω будет в этом случае реализовать функция $\pm f_{n0}(t-\gamma)$. В частности, оценка (7.32) точна для $g=g_{nr}$ и $g=\varphi_{nr}$ $(r=0, 1, \ldots)$, ибо функции $(-1)^{r/2}g_{nr}(t)$ при r четном и $(-1)^{(r-1)/2}g_{nr}(t+\pi/2n)$ при r нечетном удовлетворяют всем условиям, которые были наложены на $g_*(t)$. Положив $\gamma_r=0$ при r четном и $\gamma_r=\pi/2n$ при r нечетном и учитывая соотношение (6.45), будем иметь для всех $n=1, 2, \ldots$ и $r=0, 1, 2, \ldots$

$$F_\omega(g_{nr})=\left|\int_0^{2\pi} g_{nr}(t)\, f_{n0}(t-\gamma_r)\, dt\right|=$$

$$=\int_0^{\pi/n} \Phi(g_{n,r+1},\ t)\,\omega'(t)\,dt=\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt, \tag{7.35}$$

а так как $\varphi_{nr}=4ng_{nr}$, то аналогично

$$F_\omega(\varphi_{nr})=\left|\int_0^{2\pi} \varphi_{nr}(t)\, f_n(t-\gamma_r)\, dt\right|=$$

$$=\int_0^{\pi/n} \Phi(\varphi_{n,r+1},\ t)\,\omega'(t)\,dt=4n\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt. \tag{7.36}$$

Наложив на $g(t)$ определенные ограничения, из общей теоремы 7.5.1 и теорем сравнения главы 6 выведем более содержательные оценки для функционала $F_\omega(g)$.

Теорема 7.5.2. *Если* $g\in W_V^r$ $(r=0, 1, 2, \ldots)$, $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt=0$ *и при некотором* $a>0$

$$\min_c\left\|\int_c^x g(t)\,dt\right\|_L\leqslant\|\Phi_{a,\,r+1}\|_L,$$

то для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$F_\omega(g)\leqslant\int_0^a \Phi_{a,\,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt. \tag{7.37}$$

При $a=\pi/n$ *знак равенства в* (7.37) *имеет место для* $g(t)=g_{nr}(t)$.

Доказательство. Положим

$$G(x)=\int_{c_0}^{x} g(t)\,dt,$$

где c_0 выбрано из условия $\|G\|_L\leqslant\|\Phi_{a,r+1}\|_L$. Применяя сначала теорему 7.5.1, а затем теорему 6.7.6, в которой надо положить $\mu(t)=\omega'(t)$ и учесть, что из выпуклости вверх $\omega(t)$ следует монотонность $\omega'(t)$, будем иметь

$$F_\omega(g)\leqslant\int_0^{2\pi}\Phi(G,\,t)\,\omega'(t)\,dt\leqslant\int_0^{a}\Phi_{a,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Справедливость последнего утверждения теоремы 7.5.2 сразу усматривается из (7.35).

Теорема 7.5.3. *Пусть* $g\in D^r$ $(r=0,1,\ldots)$, $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt=0$, $\|g^{(r)}\|_M\leqslant 1$ *и для интеграла*

$$G(x)=\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\qquad\left(\int_0^{2\pi} G(x)\,dx=0\right)$$

выполнены соотношения

$$\|G\|_C\leqslant\|\varphi_{n,r+1}\|_C,\quad \min_c\left\|\int_c^x G(t)\,dt\right\|_C\leqslant\|\varphi_{n,r+2}\|_C.$$

Тогда при любом выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$ *справедлива оценка*

$$F_\omega(g)\leqslant 4n\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,\,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Знак равенства реализует функция $g(t)=\varphi_{nr}(t)$.

Доказательство. В силу теоремы 7.5.1

$$F_\omega(g)\leqslant\int_0^{2\pi}\Phi(G,\,t)\,\omega'(t)\,dt,$$

где g и G — функции из условия теоремы 7.5.3.

Ясно, что $G(x)$ обращается в нуль, $G\in D^{r+1}$ и $\|G^{(r+1)}\|_M\leqslant$ $\leqslant 1$, так что мы находимся в условиях применимости теоремы 6.8.5, в силу которой

$$F_\omega(g) \leqslant \int_0^{\pi/n} \Phi(\varphi_{n,r+1}, t)\,\omega'(t)\,dt = 4n\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Остается учесть равенства (7.36).

§ 7.6. Верхние грани наилучших приближений тригонометрическими полиномами на классах W^rH^ω в пространствах C и L

Теорема 7.6.1. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$, имеют место соотношения*

$$E_n(W^rH^\omega)_C = E_n(f_{nr})_C = \|f_{nr}\|_C =$$

$$= \frac{1}{n^{r+1}}\int_0^\pi \Phi_{\pi r}(t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt \quad (n=1,2,\ldots;\ r=0,1,\ldots) \quad (7.38)$$

Доказательство. Равенство (7.30) при $p=\infty$ запишется в виде

$$E_n(W^rH^\omega)_C = \sup_{g\in W^rH_L^n} F_\omega(g), \qquad (7.39)$$

где $F_\omega(g)$ — функционал, определенный равенством (7.31).

Если $g\in W^rH_L^n$ $(r=1,2,\ldots)$, а $G(x)$ — интеграл от $g(t)$ с нулевым средним значением на периоде, то $G\in W^{r+1}H_L^n$ и в силу (5.31) и (6.45)

$$\|G\|_L \leqslant \|g_{nr}\|_L = \|\Phi_{\pi/n,r}\|_L.$$

Так как $W^rH_L^n \subset W_V^{r-1}$, то для функции $g(t)$ выполнены условия теоремы 7.5.2 при $a=\pi/n$ и, следовательно,

$$F_\omega(g) \leqslant \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,r}(t)\,\omega'(t)\,dt \qquad (n,\ r=1,2,3,\ldots).$$

Чтобы получить аналогичную оценку при $r=0$, т. е. на классе H_L^n, прибегнем к функциям Стеклова, используя факты, приведенные в § 5.2.

Пусть $g\in H_L^n$ и

$$G(x) = \int_{c_0}^{x} g(t)\,dt,$$

где c_0 выбрано из условия $\int\limits_0^{2\pi} G(x)\,dx=0$. Ясно, что $G\in W^1H_L^n$, так что

$$\|G\|_L\leqslant\|g_{n0}\|_L=\|\Phi_{\pi/n,0}\|_L.$$

Если $G_h(x)$ — функция Стеклова для $G(x)$, т. е.

$$G_h(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} G(x+t)\,dt,$$

то

$$\|G_h\|_L\leqslant\|G\|_L\leqslant\|\Phi_{\pi/n,0}\|_L,$$

причем так как $G_h'(x)=g_h(x)$, то $G_h\subset C^1\subset D^1$. Кроме того,

$$\bigvee_0^{2\pi}(G_h)=\|g_h\|_L\leqslant\|g\|_L\leqslant 1$$

и, значит, для функции G_h выполнены все условия теоремы 6.7.7 при $a=\pi/n$. Применяя последовательно теоремы 7.5.1 и 6.7.7, будем иметь

$$F_\omega(g_h)\leqslant\int\limits_0^{2\pi}\Phi(G_h,t)\,\omega'(t)\,dt\leqslant\int\limits_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,0}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Таким образом, для любой функции $f\in H^\omega$

$$\int\limits_0^{2\pi} fg_h\,dt\leqslant\int\limits_0^{2\pi}\Phi_{\pi/n,0}(t)\,\omega'(t)\,dt. \tag{7.40}$$

Так как при $h\to 0$ $\|g_h-g\|_L\to 0$, то

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} fg_h\,dt-\int\limits_0^{2\pi} fg\,dt\right|\leqslant\|f\|_C\|g_h-g\|_L\to 0\qquad(h\to 0),$$

и в пределе при $h\to 0$ из (7.40) получим

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt\leqslant\int\limits_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,0}(t)\,\omega'(t)\,dt\qquad(\forall f\in H^\omega),$$

т. е.

$$F_\omega(g)\leqslant\int\limits_0^{2\pi}\Phi_{\pi/n,0}(t)\,\omega'(t)\,dt\qquad(g\in H_L^n).$$

Итак, доказаны соотношения

$$\sup_{g\in W^rH^n_L} F_\omega(g)\leqslant \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,\omega'(t)\,dt$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots;\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

которые вместе с (7.39) приводят к оценкам

$$E_n(W^rH^\omega)_C\leqslant \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,\omega'(t)\,dt \tag{7.41}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots;\ r=0,\ 1,\ \ldots).$$

Так как в силу (6.44)

$$\Phi_{\pi/n,\,r}(t)=\frac{1}{n^r}\,\Phi_{\pi r}(nt)\qquad (0\leqslant t\leqslant \pi/n)$$

и, значит,

$$\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,\omega'(t)\,dt=\frac{1}{n^{r+1}}\int_0^{\pi} \Phi_{\pi r}(t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt, \tag{7.42}$$

то, учитывая предложение 7.3.2, для полного доказательства теоремы 7.6.1 надо только установить, что

$$\|f_{nr}\|_C=\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,\omega'(t)\,dt \tag{7.43}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots;\ r=0,\ 1,\ \ldots).$$

Эти равенства нетрудно получить непосредственным вычислением, учитывая задание функций f_{nr}, а также рекуррентное соотношение

$$\Phi_{ar}(x)=\frac{1}{4}\int_a^x\left(\int_0^t \Phi_{a,\,r-2}(u)\,du\right)dt.$$

Однако проще и, может быть, несколько более поучительно вывести равенства (7.43) из (7.35) или (7.36). Действительно, так как

$$\operatorname{sign} f_{n,\,2\nu}(t)=(-1)^\nu\,\varphi_{n0}(t)\qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots),$$

то при r нечетных будем иметь в силу (7.36)

$$\|f_{nr}\|_C=\frac{1}{4n}\|f_{n,r-1}\|_L=\frac{1}{4n}\left|\int_0^{2\pi} f_{n,r-1}(t)\operatorname{sign} f_{n,r-1}(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{4n}\left|\int_0^{2\pi} f_{n,r-1}(t)\,\varphi_{n0}(t)\,dt\right|=\frac{1}{4n}\left|\int_0^{2\pi} f_{n0}(t)\,\varphi_{n,r-1}(t)\,dt\right|=$$

$$=\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,r}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Аналогично, замечая, что

$$\operatorname{sign} f_{n,2\nu-1}(t-\pi/2n)=(-1)^{\nu-1}\varphi_{n0}(t)\qquad(\nu=1,\,2,\,\ldots),$$

можем для r четных написать

$$\|f_{nr}\|_C=\|f_{nr}(t-\pi/2n)\|_C=$$

$$=\frac{1}{4n}\left|\int_0^{2\pi} f_{n,r-1}(t-\pi/2n)\,\varphi_{n0}(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{4n}\left|\int_0^{2\pi} f_{n0}(t-\pi/2n)\,\varphi_{n,r-1}(t)\,dt\right|=\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,r}(t)\,\omega'(t)\,dt,$$

так что равенства (7.43), а с ними и теорема 7.6.1 доказаны.

Заметим, что мы, по существу, доказывали равенство

$$\sup_{g\in W^rH_L^n}\ \sup_{f\in H^\omega}\int_0^{2\pi} g(t)f(t)\,dt=\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,r}(t)\,\omega'(t)\,dt,$$

из которого значение верхней грани $E_n(W^rH^\omega)_C$ получили, используя соотношение двойственности (7.39).

Интегрируя при $r\geqslant 1$ по частям в последнем выражении равенств (7.38), получим для верхней грани $E_n(W^rH^\omega)_C$ еще такое выражение:

$$E_n(W^rH^\omega)_C=\frac{1}{2n^r}\int_0^{\pi}\Phi_{\pi,r-1}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt \tag{7.44}$$

$$(n,\ r=1,\,2,\,\ldots).$$

Отметим частные случаи. При $r=0$ из (7.38), а при $r=1, 2$ из (7.38) или (7.44) найдем:

$$E_n(H^\omega)_C = \|f_{n0}\|_C = (1/2)\,\omega(\pi/n), \tag{7.45}$$

$$E_n(W^1H^\omega)_C = \|f_{n1}\|_C = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/n}\omega(t)\,dt = \frac{1}{4n}\int_0^{\pi}\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

$$E_n(W^2H^\omega)_C = \|f_{n2}\|_C = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/n}t\omega(t)\,dt = \frac{1}{8n^2}\int_0^{\pi}t\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Полагая в (7.44) и (7.45) $\omega(t)=Kt^\alpha$ $(0\leqslant t\leqslant\pi,\ 0<\alpha\leqslant 1)$, получим

$$E_n(W^rKH^\alpha)_C = \frac{K}{2n^{r+\alpha}}\int_0^{\pi}\Phi_{\pi,r-1}(\pi-t)\,t^\alpha\,dt \qquad (n,\ r=1,\ 2\ \ldots),$$

$$E_n(KH^\alpha)_C = \frac{K\pi^\alpha}{2n^\alpha} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Из последних равенств при $\alpha=1$ или непосредственно из (7.38) при $\omega(t)=Kt$ вытекают также значения верхних граней $E_n(W^{r-1}KH^1)_C = E_n(W^r_MK)$ $(r=1,\ 2\ \ldots)$, найденные нами в § 5.3.

Теорема 7.6.2. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$, справедливы соотношения*

$$E_n(W^rH^\omega)_L = E_n(f_{nr})_L = \|f_{nr}\|_L =$$
$$= \frac{4}{n^{r+1}}\int_0^{\pi}\Phi_{\pi,r+1}(t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt = \frac{2}{n^r}\int_0^{\pi}\Phi_{\pi r}(\pi-t)\,\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt \tag{7.46}$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots;\ r=0,\ 1,\ \ldots).$$

Доказательство. При $p=1$ равенство (7.30) запишется в виде

$$E_n(W^rH^\omega)_L = \sup_{g\in W^rH^n_M} F_\omega(g).$$

Пусть $g\in W^rH^n_M$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, $G(x)$ — интеграл от $g(t)$ со средним значением на периоде, равным нулю, а $G_1(x)$ — интеграл от $G(t)$ также с нулевым средним значением на $(0,\ 2\pi)$. Тогда $G\in W^{r+1}H^n_M$, а $G_1\in W^{r+2}H^n_M$, так что, в силу экстремальных свойств функции φ_{nr},

$$\|G\|_C\leqslant\|\varphi_{n,r+1}\|_C, \qquad \|G_1\|_C\leqslant\|\varphi_{n,r+2}\|_C.$$

Теперь, если $r\geqslant 1$, то для каждой функции g из $W^rH_M^n$ выполняются условия теоремы 7.5.3, и потому

$$\sup_{g\in W^rH_M^n} F_\omega(g)\leqslant 4n\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,\,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt. \tag{7.47}$$

Для доказательства справедливости этой оценки при $r=0$ опять перейдем к функциям Стеклова. Если $g\in H_M^n$, то для функций Стеклова g_h, G_h и G_{1h} выполняются неравенства

$$\|g_h\|_M\leqslant 1,\quad \|G_h\|_C\leqslant\|\varphi_{n1}\|_C,\quad \|G_{1h}\|_C\leqslant\|\varphi_{n2}\|_C,$$

так что g_h удовлетворяет всем условиям, наложенным на g в теореме 7.5.3 (при $r=0$), а потому для любой $f\in H^\omega$

$$\int_0^{2\pi} g_hf\,dt\leqslant 4n\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,\,1}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

В пределе при $h\to 0$ g_h можно здесь заменить на g, поэтому

$$\sup_{g\in H_M^n} F_\omega(g)\leqslant 4n\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,\,1}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Таким образом, оценка (7.47) справедлива при всех $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $n=1,\ 2,\ \ldots$

С другой стороны, используя (7.36) при r четном, имеем

$$\|f_{nr}\|_L=\left|\int_0^{2\pi} f_{nr}(t)\operatorname{sign}\varphi_{n0}(t)\,dt\right|=\left|\int_0^{2\pi} f_{n0}(t)\,\varphi_{nr}(t)\,dt\right|=$$
$$=4n\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,\,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt,$$

а при r нечетном —

$$\|f_{nr}\|_L=\left\|f_{nr}\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)\right\|_L=\left|\int_0^{2\pi} f_{nr}\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)\varphi_{n0}(t)\,dt\right|=$$
$$=\left|\int_0^{2\pi} f_{n0}\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)\varphi_{nr}(t)\,dt\right|=4n\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi/n,\,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Если учесть (7.17) и (7.42), то теорема 7.6.2 доказана.

Здесь также мы шли к нужному результату через доказательство соотношения

$$\sup_{g\in W^rH^n_M}\ \sup_{f\in H^\omega}\int_0^{2\pi} gf\,dt = 4n\int_0^{\pi/n}\Phi_{\pi,n,r+1}(t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Частные случаи:

$$E_n(H^\omega)_L=\int_0^\pi \omega\left(\frac{t}{n}\right)dt;$$

$$E_n(W^1H^\omega)_L=\frac{1}{2n}\int_0^\pi t\omega\left(\frac{t}{n}\right)dt;$$

$$E_n(W^rKH^\alpha)_L=\frac{2K}{n^{r+\alpha}}\int_0^\pi t^\alpha\Phi_{\pi r}(\pi-t)\,dt \qquad (r=0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

Последнее равенство содержит, в частности (при $\alpha=1$), значение верхней грани $E_n\left(W^rKH^1\right)_L=E_n\left(W_L^{r+1}K\right)$ $(r=0,$ $1,\ 2,\ \ldots)$, найденное в § 5.3.

В заключение этого параграфа укажем непосредственно вытекающие из (7.38) и (7.46) оценки (для выпуклого вверх $\omega(t)$):

$$E_n(W^rH^\omega)_C\leqslant\frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\,\omega\left(\frac{\eta_r}{n}\right)\qquad (n,\ r=1,\ 2,\ \ldots),\tag{7.48}$$

$$E_n(W^rH^\omega)_L\leqslant\frac{2\mathcal{K}_{r+1}}{n^r}\,\omega\left(\frac{\eta_{r+1}}{n}\right)\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots;\ r=0,\ 1,\ \ldots),\tag{7.49}$$

где $\eta_r=2\mathcal{K}_{r+1}/\mathcal{K}_r$ $(r=1,\ 2,\ \ldots)$, а $\mathcal{K}_r$ — константы (3.44).

Действительно, положив

$$\psi_r(x)=\begin{cases}\mathcal{K}_r/2 & (0\leqslant x\leqslant\eta_r),\\ 0 & (\eta_r<x\leqslant\pi)\end{cases}\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots),$$

замечаем, что $\psi_r(0)=\Phi_{\pi r}(0)$ и $\int_0^\pi\psi_r(t)\,dt=\int_0^\pi\Phi_{\pi r}(t)\,dt.$

Таким образом, разность $\psi_r(t)-\Phi_{\pi r}(t)$ имеет нулевое среднее значение на $(0,\ \pi)$, положительна на интервале $(0,\ \eta_r)$ и отрицательна на $(\eta_r,\ \pi)$. А так как $\omega'(t)$

не возрастает, то

$$\int_0^\pi [\psi_r(t) - \Phi_{\pi r}(t)]\, \omega'\left(\frac{t}{n}\right) dt \geqslant 0, \qquad (7.50)$$

т. е.

$$\int_0^\pi \Phi_{\pi r}(t)\, \omega'\left(\frac{t}{n}\right) dt \leqslant \int_0^{\eta_r} \psi_r(t)\, \omega'\left(\frac{t}{n}\right) dt = \frac{n\mathcal{K}_r}{2}\, \omega\left(\frac{\eta_r}{n}\right).$$

Подставив эту оценку в правую часть (7.38), получим (7.48). Совершенно аналогично получается неравенство (7.49).

Знак равенства в (7.50), а значит, и в (7.48) и (7.49) имеет место в том и только в том случае, когда $\omega'(t) = \text{const}$ $(0 < t \leqslant \pi/n)$, т. е. $\omega(t) = Kt$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/n)$.

Что касается чисел η_r, то первые из них равны

$$\eta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \eta_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \eta_3 = \frac{5\pi}{8}, \ldots,$$

причем $\eta_r \to 2$ при $r \to \infty$.

§ 7.7. О возможности реализации верхней грани $E_n(H^\omega)_C$ с помощью линейного метода

В главе 5 подчеркивалось, что на классах W_M^r и W_L^r $(r = 1, 2, \ldots)$ верхнюю грань наилучшего приближения $E_n(f)_C$, соответственно $E_n(f)_L$, функции f тригонометрическими полиномами реализует линейный оператор $U_n(\lambda)$ (λ-метод), построенный на базе сумм Фурье функции f и сопоставляющий функции f тригонометрический полином

$$U_n(f, x, \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (7.51)$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции f.

Поскольку нам уже известны точные значения величин $E_n(W^r H^\omega)_C$ и $E_n(W^r H^\omega)_L$ (при выпуклом $\omega(t)$), то естественный интерес представляет выяснение вопроса, существует ли линейный оператор A, отображающий C^r

в тригонометрическое подпространство F^T_{2n-1} (в частности, вида (7.51)) такой, что

$$\sup_{f \in W^rH^\omega} \|f - Af\|_X = E_n(W^rH^\omega)_X,$$

где X есть C или L.

Мы дадим более или менее исчерпывающий ответ на этот вопрос лишь в случае $r=0$ и $X=C$.

Совсем простые рассуждения позволяют решить вопрос о возможности реализации верхней грани $E_n(H^\omega)_C$ при выпуклом $\omega(t)$ операторами вида (7.51). Если через H^ω_n обозначить множество $2\pi/n$-периодических функций из H^ω с нулевым средним значением на периоде, то в силу предложения 3.5.1

$$U_n(f, x, \lambda) \equiv 0 \quad \forall f \in H^\omega_n$$

и, следовательно, при любом выборе коэффициентов λ_k

$$\sup_{f \in H^\omega} \|f - U_n(f, \lambda)\|_C \geqslant \sup_{f \in H^\omega_n} \|f\|_C.$$

Пусть $f_*(x)$ — функция из H^ω_n, определяемая равенствами

$$f_*(x) = \omega(x) - \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \omega(t)\,dt \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}\right),$$

$$f_*(-x) = f_*(x).$$

Так как $\|f_*\|_C = |f_*(0)|$, то

$$\sup_{f \in H^\omega} \|f - U_n(f, \lambda)\|_C \geqslant \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \omega(t)\,dt. \tag{7.52}$$

Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то правая часть неравенства (7.52) может быть равна $\frac{1}{2}\omega(\pi/n)$ в том и только в том случае, когда функция $\omega(t)$ линейна на $[0, \pi/n]$, т. е. $\omega(t) = Kt$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/n)$. Таким образом, если $\omega(t)$ — выпуклый, но нелинейный на $[0, \pi/n]$ модуль непрерывности, то

$$\inf_\lambda \sup_{f \in H^\omega} \|f - U_n(f, \lambda)\|_C > E_n(H^\omega)_C = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В частности, при $\omega(t)=Kt^\alpha$ $(0<\alpha<1)$

$$\inf_\lambda \sup_{f\in KH^\alpha} \|f-U_n(f,\lambda)\|_C \geqslant \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha > \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha = E_n(KH^\alpha)_C.$$

Более тонкими рассуждениями доказывается тот факт, что при тех же предположениях относительно $\omega(t)$ никакой линейный оператор из C в F^T_{2n-1} не дает на классе H^ω наилучшего равномерного приближения.

Теорема 7.7.1. *На классе H^ω, заданном выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(t)$, верхняя грань $E_n(H^\omega)_C$ реализуется линейным оператором из C в F^T_{2n-1} тогда и только тогда, когда $\omega(t)$ линеен на* $[0, \pi/n]$.

Доказательство. Если $\omega(t)=Kt$ $(0\leqslant t\leqslant \pi/n)$, то $H^\omega\subset KH^1=W^1_MK$, причем

$$E_n(H^\omega)_C=E_n(W^1_MK)_C,$$

а на классе W^1_MK верхнюю грань наилучших приближений реализует λ-метод.

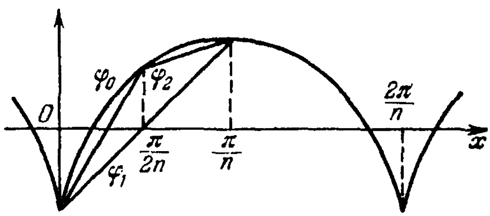

Рис. 20.

Предположим теперь, что для некоторого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$\sup_{f\in H^\omega}\|f-Af\|_C=E_n(H^\omega)_C=\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{7.53}$$

где A — некоторый линейный оператор из C в F^T_{2n-1}. Пусть $\varphi_0(x)$ — четная периода $2\pi/n$ функция из класса H^ω, равная $\omega(x)-{}^1\!/_2\omega(\pi/n)$ на $[0, \pi/n]$. Определим далее непрерывные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ периода 2π следующим образом (рис. 20):

$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\varphi_0(x)$ $(\pi/n\leqslant x\leqslant 2\pi)$, $\varphi_2(\pi/2n)=\varphi_0(\pi/2n)$,

φ_1 линейна на $[0, \pi/n]$, а φ_2 линейна на $[0, \pi/2n]$ и $[\pi/2n,$

$\pi/n]$. Функции φ_1 и φ_2 также принадлежат классу H^ω. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить неравенства

$$|\varphi_i(x')-\varphi_i(x'')|\leqslant\omega(|x'-x''|)\qquad(i=1,\ 2)$$

для $0\leqslant x'<x''\leqslant\pi/n$. Но из выпуклости вверх φ_1 и φ_2 на $(0,\pi/n)$, а также того, что $\varphi_i(0)=\varphi_0(0)$, $\varphi_i(x)\leqslant\varphi_0(x)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi/n)$, сразу следует, что в этом случае

$$|\varphi_i(x'')-\varphi_i(x')|\leqslant\varphi_i(x''-x')-\varphi_i(0)\leqslant$$
$$\leqslant\varphi_0(x''-x')-\varphi_0(0)=\omega(x''-x')\qquad(i=1,\ 2).$$

В точках $k\pi/n$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1)$ функции φ_0, φ_1 и φ_2 принимают значения $\pm\frac{1}{2}\omega(\pi/n)$ с чередованием знака, поэтому

$$E_n(\varphi_i)_C=\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)=E_n(H^\omega)_C\qquad(i=0,\ 1,\ 2),\tag{7.54}$$

причем существенно, что наилучшее приближение функциям φ_i $(i=0,\ 1,\ 2)$ доставляет тождественный нуль.

Из равенств (7.53) и (7.54), с учетом очевидных соотношений

$$E_n(\varphi_i)_C\leqslant\|A\varphi_i-\varphi_i\|_C\leqslant\sup_{f\in H^\omega}\|Af-f\|_C,$$

следует, что

$$\|A\varphi_i-\varphi_i\|_C=E_n(\varphi_i)_C=\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\qquad(i=0,\ 1,\ 2).$$

Но тогда тригонометрический полином $A(\varphi_i,x)$ из F^T_{2n-1} есть единственный полином наилучшего приближения для φ_i, и в силу предыдущего

$$A(\varphi_i,x)\equiv 0\qquad(i=0,\ 1,\ 2).\tag{7.55}$$

Положим

$$\varphi(x)=\frac{1}{\beta}\omega\left(\frac{\pi}{2n}\right)[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)],\tag{7.56}$$

где $\beta=\|\varphi_1-\varphi_2\|_C$. Таким образом, $\varphi\in C$, причем

$$\varphi(0)=\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right)=0,\qquad\varphi\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\omega\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$
$$\varphi(x)=0\qquad(\pi/n\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

$\varphi(x)$ линейна на промежутках $[0, \pi/2n]$ и $[\pi/2n, \pi/n]$. Тривиально проверяется, что $\varphi \in H^\omega$. Из (7.55), (7.56) и аддитивности оператора Λ вытекает, что $\Lambda(\varphi, x) \equiv 0$, следовательно,

$$\|A\varphi - \varphi\|_C = \|\varphi\|_C = \omega\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

и в силу (7.53) должно быть

$$\omega\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Но для выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ последнее соотношение возможно (со знаком равенства) лишь в случае, когда $\omega(t) = Kt$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/n)$. Теорема доказана.

ГЛАВА 8

НАИЛУЧШЕЕ РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССА W^rH^ω ФУНКЦИЯМИ КЛАССА $W_M^{r+1}K$

§ 8.1. Переход к двойственной задаче и некоторые свойства экстремальных функций

Заметим сначала, что при фиксированном K класс $W_M^{r+1}K = W^rKH^1$ $(r=0, 1, 2, \ldots)$, не будучи линейным многообразием, является (как частный случай класса W^rH^ω) выпуклым замкнутым множеством (предложение 7.2.3). Поэтому, рассматривая $W_M^{r+1}K$ как аппроксимирующее множество в пространстве C, мы будем отправляться от результатов §§ 2.3 и 2.5.

В силу предложения 2.5.1 для любой функции $f \in C \setminus W_M^{r+1}K$ существует определенная на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $g_0(t)$ с вариацией

$$\bigvee_0^{2\pi}(g_0) = 1$$

такая, что

$$E(f, W_M^{r+1}K)_C \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\varphi \in W_M^{r+1}K} \|f-\varphi\|_C =$$
$$= \int_0^{2\pi} f(t)\,dg_0(t) - \sup_{\varphi \in W_M^{r+1}K} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dg_0(t). \qquad (8.1)$$

Естественно, что функция g_0 зависит от f, а также от r и K, которые мы будем считать фиксированными.

Так как класс $W_M^{r+1}K$ $(r=0, 1, 2, \ldots)$ содержит любую константу, то для функции $g_0(t)$, удовлетворяющей соотношению (8.1), должно выполняться равенство $g_0(0) = g_0(2\pi)$, ибо в противном случае $\int_0^{2\pi} dg_0 \neq 0$ и

$$\sup_{\varphi \in W_M^{r+1}K} \int_0^{2\pi} \varphi\,dg \geqslant \sup_{\varphi \equiv \mathrm{const}} \int_0^{2\pi} \varphi\,dg_0 = +\infty,$$

что несовместимо с (8.1).

Продолжив $g_0(t)$ на всю ось с периодом 2π, получим 2π-периодическую функцию (за ней мы сохраним то же обозначение $g_0(t)$) с единичной вариацией на $[0, 2\pi]$, удовлетворяющую соотношению (8.1). В дальнейшем, обращаясь к этому соотношению, мы будем иметь в виду, что $g_0(t)$ — функция периода 2π.

Пусть $\varphi_0(t)$ — функция наилучшего приближения для f в классе $W_M^{r+1}K$. Такая функция всегда существует в силу локальной компактности и замкнутости класса $W_M^{r+1}K$ в C. Из предложения 3.4.1 и равенства (8.1) следует, что функции f, φ_0 и g_0 связаны следующими соотношениями:

$$\|f-\varphi_0\|_C=\int_0^{2\pi}(f-\varphi_0)\,dg_0, \tag{8.2}$$

$$\sup_{\varphi\in W_M^{r+1}K}\int_0^{2\pi}\varphi\,dg_0=\int_0^{2\pi}\varphi_0\,dg_0. \tag{8.3}$$

Представим функцию g_0 на отрезке $[0, 2\pi]$ в виде $g_0 = \psi_1+\psi_2$, где ψ_1 — неубывающая, а ψ_2 — невозрастающая на $[0, 2\pi]$ функции (И. П. Натансон [2], стр. 205). Из условия $g_0(0)=g_0(2\pi)$ следует, что

$$\psi_1(2\pi)-\psi_1(0)=\psi_2(0)-\psi_2(2\pi)=\frac{1}{2}\bigvee_0^{2\pi}(g_0)=\frac{1}{2}, \tag{8.4}$$

поэтому, обозначив для краткости $\eta(t)=f(t)-\varphi_0(t)$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi}\eta\,d\psi_1\le\frac{1}{2}\|\eta\|_C,\qquad \int_0^{2\pi}\eta\,d\psi_2\le\frac{1}{2}\|\eta\|_C.$$

Из сопоставления этих неравенств с соотношением (8.2), которое можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi}\eta\,d\psi_1+\int_0^{2\pi}\eta\,d\psi_2=\|\eta\|_C,$$

вытекает, что

$$\int_0^{2\pi}\eta\,d\psi_1=\frac{1}{2}\|\eta\|_C,\qquad \int_0^{2\pi}\eta\,d\psi_2=\frac{1}{2}\|\eta\|_C. \tag{8.5}$$

Равенства (8.5), если учесть (8.4), возможны лишь в том случае, когда ψ_1 постоянна на любом интервале, где $\eta(t) < \|\eta\|_C$, а ψ_2 постоянна на любом интервале, где $\eta(t) > -\|\eta\|_C$. (В справедливости этого утверждения легко убедиться, рассуждая от противного.) Для функции $g_0 = \psi_1 + \psi_2$ это означает следующее:

1) $g_0(t)$ постоянна на любом интервале (α, β), на котором $\eta(t) < \|\eta\|_C$;

2) $g_0(t)$ не возрастает на каждом интервале (α, β), где $\eta(t) < \|\eta\|_C$ и не убывает на любом интервале (α, β), где $\eta(t) > -\|\eta\|_C$.

Назовем *γ-интервалом* интервал (α, β), обладающий следующими свойствами:

$$|\eta(t)| < \|\eta\|_C \quad (\alpha < t < \beta), \qquad \eta(\alpha) = -\eta(\beta) = \pm\|\eta\|_C.$$

Разность $\eta(t) = f(t) - \varphi_0(t)$ обязательно принимает значения, равные как $\|\eta\|_C$, так и $-\|\eta\|_C$ (иначе φ_0 не была бы функцией наилучшего приближения), поэтому γ-интервалы существуют. Так как колебание функции $\eta(t)$ на γ-интервале равно $2\|\eta\|_C$, f фиксирована, $\varphi_0 \in W_M^{r+1}K$, то длины γ-интервалов ограничены снизу некоторым положительным числом и количество их на любом периоде $(a, a+2\pi)$ конечно.

Из отмеченных выше свойств 1) и 2) функции g_0 следует, что $g_0(t)$ постоянна на каждом γ-интервале и может менять знак только на отрезках (или в точках) между соседними γ-интервалами. Так как $g_0(t)$ не есть тождественная константа, то существуют по меньшей мере два γ-интервала, на которых g_0 принимает разные значения, а число перемен знака g_0 на периоде конечно.

Теперь заметим, что прибавление к функции g_0 любой тождественной константы не меняет ни ее вариации, ни значений интегралов Стилтьеса в (8.1)—(8.3). Поэтому мы вправе считать, что $g_0(t)$ определена с точностью до аддитивной постоянной. Этой постоянной мы распорядимся различным образом при $r=0$ и при $r \geq 1$.

В случае $r=0$, когда речь идет о приближении функции $f \in C$ классом $W_M^1K = KH^1$, выберем эту постоянную из условия минимальности нормы $\|g_0\|_L$, т. е. из условия

$$\int_0^{2\pi} |g_0(t)|\,dt = \min_\lambda \int_0^{2\pi} |g_0(t) + \lambda|\,dt. \tag{8.6}$$

Зафиксировав этим самым функцию $g_0(t)$, выясним некоторые свойства функции $\varphi_0(t)$.

Из (8.3) при $r=0$, интегрируя по частям и учитывая (2.28) и (8.6), будем иметь

$$\sup_{\varphi\in W^1_MK}\int_0^{2\pi}\varphi\,dg_0=\sup_{\varphi\in W^1_MK}\int_0^{2\pi}\varphi'(t)\,g_0(t)\,dt=$$

$$=\sup_{\substack{\|\psi\|_M\leqslant K,\\ \int_0^{2\pi}\psi\,dt=0}}\int_0^{2\pi}\psi(t)\,g_0(t)\,dt=K\int_0^{2\pi}|g_0(t)|\,dt=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\varphi_0'(t)\,g_0(t)\,dt,$$

откуда сразу следует, что почти всюду, где $g_0(t)\neq 0$

$$\varphi_0'(t)=-K\operatorname{sign}g_0(t). \tag{8.7}$$

Описанные выше свойства функции g_0 позволяют заключить, что независимо от выбора аддитивной постоянной найдется γ-интервал (α,β), на котором $g_0(t)\neq 0$ и

$$\operatorname{sign}g_0(t)=\operatorname{sign}\eta(\alpha)\qquad(\alpha<t<\beta).$$

Сопоставление этого факта с (8.7) приводит к следующему утверждению.

Предложение. 8.1.1. *Если* $f\in C\setminus W^1_MK$ *и*

$$\|f-\varphi_0\|_C=\inf_{\varphi\in W^1_MK}\|f-\varphi\|_C,$$

то существует промежуток (α,β) *такой, что*

$$f(\alpha)-\varphi_0(\alpha)=\varphi_0(\beta)-f(\beta)=\pm\|f-\varphi_0\|_C,$$
$$\varphi_0'(t)=K\operatorname{sign}[\varphi_0(\alpha)-f(\alpha)]\qquad(\alpha<t<\beta).$$

Предложением 8.1.1 мы воспользуемся в § 8.3 при оценке приближения на классе H^ω.

Теперь обратимся к случаю $r\geqslant 1$. Считая $r=1,2,3,\ldots$ фиксированным, выберем постоянную, с точностью до которой определена функция g_0 в (8.1)—(8.3), из условия

$$\int_0^{2\pi}g_0(t)\,dt=0$$

и через $g_r(t)$ обозначим r-й периодический интеграл от g_0 с минимальной нормой в L. Таким образом, $g_r \in W_V^r$, причем функция $g_0(t) = g_r^{(r)}(t)$ удовлетворяет соотношениям (8.1)—(8.3) и

$$\int_0^{2\pi} |g_r(t)|\,dt = \min_\lambda \int_0^{2\pi} |g_r(t)+\lambda|\,dt. \tag{8.8}$$

Из (8.3), (8.8) и (2.28), интегрируя последовательно $r+1$ раз по частям, найдем

$$\sup_{\varphi \in W_M^{r+1}K} \int_0^{2\pi} \varphi\,dg_0 = \sup_{\varphi \in W_M^{r+1}K} (-1)^{r+1} \int_0^{2\pi} \varphi^{(r+1)} g_r\,dt =$$

$$= \sup_{\substack{\|\psi\|_M \leqslant K \\ \int_0^{2\pi} \psi\,dt = 0}} (-1)^{r+1} \int_0^{2\pi} \psi g_r\,dt = K \int_0^{2\pi} |g_r|\,dt =$$

$$= (-1)^{r+1} \int_0^{2\pi} \varphi_0^{(r+1)} g_r\,dt \tag{8.9}$$

и, следовательно, почти всюду, где $g_r(t) \neq 0$,

$$\varphi_0^{(r+1)}(t) = (-1)^{r+1} K \operatorname{sign} g_r(t).$$

В частности, если почти всюду $|g_r(t)| > 0$, то $\varphi_0^{(r+1)}(t)$ есть (с точностью до множества меры нуль) кусочно-постоянная функция, принимающая только значения $\pm K$ и меняющая знак на периоде конечное число раз. В этом случае φ_0 есть кусочно-полиномиальная функция (сплайн), «склеенная» из многочленов степени $r+1$ так, что $\varphi_0 \in C^r$.

§ 8.2. Оценка приближения на классе $W^rH^\omega (r \geqslant 1)$

Если $f \in W^rH^\omega$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$, то, проинтегрировав r раз по частям, получим

$$\int_0^{2\pi} f\,dg_0 = (-1)^r \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\,g_r'(t)\,dt, \tag{8.10}$$

где g_0 и g_r — функции, введенные в конце предыдущего параграфа для случая $r \geqslant 1$. Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то применение теоремы 7.5.1

к правой части (8.10) дает

$$\int_0^{2\pi} f\, dg_0 \leqslant \int_0^{2\pi} \omega'(t)\, \Phi(g_r,\ t)\, dt. \tag{8.11}$$

Пусть число Δ, $0 < \Delta \leqslant 2\pi$, определяется тем, что $\Phi(g_r,\ t) > 0$ для $0 \leqslant t < \Delta$ и $\Phi(g_r,\ t) = 0$ для $\Delta \leqslant t \leqslant 2\pi$. В нашем случае функция g_r удовлетворяет условию (8.8) и потому не может сохранять знак на промежутке длины, большей чем π, поэтому заведомо $\Delta \leqslant \pi$. Так как (см. (8.9))

$$\sup_{\varphi \in W_M^{r+1}K} \int_0^{2\pi} \varphi\, dg_0 = K \int_0^{2\pi} |g_r|\, dt = K \int_0^{\Delta} \Phi(g_r,\ t)\, dt, \tag{8.12}$$

то из (8.1), (8.11) и (8.12) вытекает следующая оценка наилучшего равномерного приближения функции $f \in W^r H^\omega$ функциями класса $W_M^{r+1}K$:

$$E\left(f,\ W_M^{r+1}K\right)_C \leqslant \int_0^{\Delta} [\omega'(t) - K]\, \Phi(g_r,\ t)\, dt.$$

Ясно, что здесь функция g_r и число Δ зависят от f.

Выбрав $b > 0$ из условия

$$\|\Phi_{br}\|_L = \|\Phi(g_r)\|_L = \|g_r\|_L \tag{8.13}$$

и помня, что $g_r \in W_V^r$, с помощью теоремы 6.7.3 заключаем, что

$$|\Phi'_{br}(t)| \leqslant |\Phi'(g_r,\ t)| \quad (0 < t < b), \tag{8.14}$$

причем из (8.13) и (8.14) следует, что $b \leqslant \Delta$ и, значит, $b \leqslant \pi$.

Если положить

$$\delta(t) = \Phi_{br}(t) - \Phi(g_r,\ t),$$

то ввиду (8.13)

$$\int_0^{2\pi} \delta(t)\, dt = 0$$

и, применив теорему 6.7.6, будем иметь

$$\int_0^{\pi} [\omega'(t) - K]\, \delta(t)\, dt = \int_0^{\pi} \omega'(t)\, \delta(t)\, dt \geqslant 0.$$

Этим установлено, что

$$E(f,\ W_M^{r+1}K)_C \leqslant \int_0^b [\omega'(t)-K]\,\Phi_{br}(t)\,dt, \tag{8.15}$$

где число b выбрано из равенства (8.13) по функции g_r, так что в конечном счете b зависит от f. Но мы можем получить общую на классе W^rH^ω оценку, перейдя в правой части (8.15) к максимуму по параметру b, $0 \leqslant b \leqslant \pi$.

Таким образом, для любой $f \in W^rH^\omega$ $(r = 1, 2, \ldots)$, в предположении выпуклости $\omega(t)$ справедлива оценка

$$E(f,\ W_M^{r+1}K)_C \leqslant \max_{0\leqslant a\leqslant\pi} \int_0^a [\omega'(t)-K]\,\Phi_{ar}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \max_{0\leqslant a\leqslant\pi} \int_0^a \Phi_{a,r-1}(a-t)\,[\omega(t)-Kt]\,dt. \tag{8.16}$$

По поводу неулучшаемости оценки (8.16) на классе W^rH^ω отметим следующее. Если максимум по a в (8.16) достигается при $a = \pi/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то знак равенства имеет место для функции f_{nr} (§ 7.3), принадлежащей, как нам уже известно, классу W^rH^ω (при выпуклом $\omega(t)$). Действительно, в этом случае

$$\max_{0\leqslant a\leqslant\pi} \int_0^a \Phi_{ar}(t)\,[\omega'(t)-K]\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,\omega'(t)\,dt - K\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,dt =$$

$$= \|f_{nr}\|_C - K_r\|\varphi_{n,\,r+1}\|_C. \tag{8.17}$$

Но в силу общего неравенства

$$E_n(f)_C \leqslant E_n(f-\varphi)_C + E_n(\varphi)_C \leqslant \|f-\varphi\|_C + E_n(\varphi)_C$$

для любой $\varphi \in W_M^{r+1}K$ будем иметь

$$\|f_{nr}-\varphi\|_C \geqslant E_n(f_{nr})_C - E_n(\varphi)_C = \|f_{nr}\|_C - E_n(\varphi)_C$$

и так как (см. (5.27)) $E_n(\varphi)_C \leqslant K\|\varphi_{n,\,r+1}\|_C$, то

$$\inf_{\varphi\in W_M^{r+1}K} \|f_{nr}-\varphi\|_C \geqslant \|f_{nr}\|_C - K\|\varphi_{n,\,r+1}\|_C. \tag{8.18}$$

Из сравнения (8.16), (8.17) и (8.18) вытекает, что в рассматриваемом случае

$$\inf_{\varphi \in W_M^{r+1}K} \|f_{nr} - \varphi\|_C = \|f_{nr}\|_C - K\|\varphi_{n,r+1}\|_C =$$

$$= \left\| f_{nr}(\cdot) - K\varphi_{n,r+1}\left(\cdot + \frac{\pi}{2n}\right)\right\|_C = \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,r}(t)\,[\omega'(t) - K]\,dt.$$

При фиксированном модуле непрерывности $\omega(t)$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ можно выбрать число $K = K_{nr}$ таким образом, что максимум по a в (8.16) будет достигаться при $a = \pi/n$. Для этого надо положить

$$K = \int_0^{\pi/n} \Psi_r\left(\frac{\pi}{n}, t\right)\omega'(t)\,dt \Bigg/ \int_0^{\pi/n} \Psi_r\left(\frac{\pi}{n}, t\right)dt,$$

где

$$\Psi_r(a, t) = \frac{\partial\Phi_{ar}(t)}{\partial a}.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 8.2.1. *Для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ при всех $r = 1, 2, \ldots$ справедливы соотношения*

$$E(W^rH^\omega, W_M^{r+1}K)_C \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in W^rH^\omega} \inf_{\varphi \in W_M^{r+1}K} \|f - \varphi\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant a \leqslant \pi} \int_0^a \Phi_{ar}(t)\,[\omega'(t) - K]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\max_{0 \leqslant a \leqslant \pi} \int_0^a \Phi_{a,r-1}(a - t)\,[\omega(t) - Kt]\,dt. \qquad (8.19)$$

Если $K = K_{nr}$ выбрано так, что максимум по a достигается в точке $a = \pi/n$, то в (8.19) имеет место знак равенства.

Отметим частные случаи:

$$E(W^1H^\omega,\ W^2K)_C \leqslant \frac{1}{4} \max_{0\leqslant a\leqslant\pi} \int_0^a [\omega(t)-Kt]\,dt;$$

$$E(W^2H^\omega,\ W^3K)_C \leqslant \frac{1}{8} \max_{0\leqslant a\leqslant\pi} \int_0^a t\,[\omega(t)-Kt]\,dt;$$

$$E(W^3H^\omega,\ W^4K)_C \leqslant \frac{1}{32} \max_{0\leqslant a\leqslant\pi} \int_0^a (2at-t^2)\,[\omega(t)-Kt]\,dt.$$

Замечание. Легко проследить, что все рассуждения этого и предыдущего параграфов проходят для классов $W_{2l}^rH^\omega$ и $W_{2l,\,M}^{r+1}K$ функций периода $2l$ $(l>0)$, если, разумеется, норму в L, вариацию, интегралы Стилтьеса и Σ-перестановку $\Phi(g_r,\ t)$ определять на $[0,\ 2l]$. Таким образом,

$$E(W_{2l}^rH^\omega,\ W_{2l,\,M}^{r+1}K)_C \leqslant \max_{0\leqslant a\leqslant l} \int_0^a \Phi_{ar}(t)\,[\omega'(t)-K]\,dt,$$
$$(r=1,2,\ldots)$$

причем знак равенства достигается здесь, если $l=na_0$, где a_0 — значение параметра a, реализующее максимум.

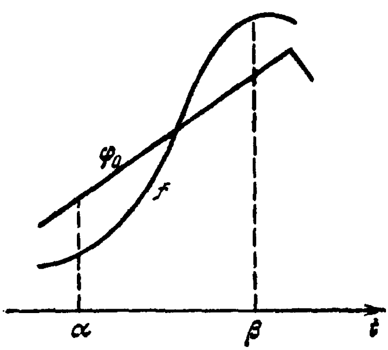

Рис. 21.

§ 8.3. Наилучшее приближение класса H^ω классом $W_M^1K=KH^1$

При $r=0$ точную оценку величины (8.1) на классе H^ω можно получить, идя тем же путем, что и в случае $r\geqslant1$. Правда, чтобы сделать возможным применение теоремы 7.5.1, пришлось бы привлечь аппарат функций Стеклова и наложить на $\omega(t)$ условие выпуклости.

Однако гораздо проще получить нужную оценку, причем для произвольного модуля непрерывности, с помощью предложения 8.1.1. Действительно, используя это предложение и считая для определенности, что (рис. 21)

$$\varphi_0(\alpha)-f(\alpha)=f(\beta)-\varphi_0(\beta)=\|f-\varphi_0\|_C$$

и, значит, $\varphi_0'(t)=K$ на (α, β), будем иметь

$$[f(\beta)-f(\alpha)]-[\varphi_0(\beta)-\varphi_0(\alpha)]=$$
$$=f(\beta)-f(\alpha)-K(\beta-\alpha)=2\|f-\varphi_0\|_C.$$

Следовательно, для любой $f\in C\setminus W^1_M K$

$$E(f, W^1_M K)_C=\|f-\varphi_0\|_C\leqslant\frac{1}{2}[\omega(f, \beta-\alpha)-K(\beta-\alpha)]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\max_{t\geqslant 0}[\omega(f, t)-Kt].$$

Если учесть, что $\omega(f, t)=\text{const}$ для $t\geqslant\pi$, то получаем оценку

$$E(f, W^1_M K)_C\leqslant\frac{1}{2}\max_{0\leqslant t\leqslant\pi}[\omega(f, t)-Kt]. \qquad (8.20)$$

Покажем, что на самом деле для любой функции $f\in C$ в (8.20) имеет место знак равенства. Пусть $f\in C$, $f\notin W^1_M K=KH^1$ и

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\pi}[\omega(f, t)-Kt]=\omega(f, t_0)-Kt_0,$$

а x', x'' — точки такие, что

$$|x'-x''|=t_0, \qquad |f(x')-f(x'')|=\omega(f, t_0).$$

Тогда для любой функции $\varphi\in KH^1$

$$2\|f-\varphi\|_C\geqslant|f(x')-\varphi(x')|+|\varphi(x'')-f(x'')|\geqslant$$
$$\geqslant|f(x')-f(x'')+\varphi(x'')-\varphi(x')|\geqslant$$
$$\geqslant|f(x')-f(x'')|-|\varphi(x'')-\varphi(x')|\geqslant\omega(f, t_0)-Kt_0,$$

и, значит,

$$\inf_{\varphi\in KH^1}\|f-\varphi\|_C\geqslant\frac{1}{2}[\omega(f, t_0)-Kt_0],$$

так что для $f\notin W^1_M K$ в (8.20) возможен только знак равенства. Если же $f\in W^1_M K$, то $\omega(f, t)\leqslant Kt$ и (8.20) дает $0=0$.

Сформулируем доказанный факт в виде следующего утверждения.

Предложение 8.3.1. *Для любой функции $f \in C$ имеет место равенство*

$$E(f, KH^1)_C \overset{\text{def}}{=} \inf_{\varphi \in KH^1} \|f-\varphi\|_C = \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} [\omega(f, t) - Kt].$$

Из предложения 8.3.1 немедленно вытекает

Теорема 8.3.2. *Каков бы ни был модуль непрерывности $\omega(t)$, справедливо равенство*

$$E(H^\omega, KH^1)_C \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in H^\omega} \inf_{\varphi \in KH^1} \|f-\varphi\|_C =$$
$$= \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} [\omega(t) - Kt]. \qquad (8.21)$$

Существуют функции $f \in H^\omega$, для которых $E(f, KH^1)_C$ совпадает с правой частью (8.21).

Действительно, если $f \in H^\omega$, то $\omega(f, t) \leqslant \omega(t)$, и предложение 8.3.1 сразу дает оценку

$$E(f, KH^1)_C \leqslant \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} [\omega(t) - Kt]. \qquad (8.22)$$

Пусть $f_0(x)$ — четная 2π-периодическая функция, равная $\omega(x)$ на $[0, \pi]$. Тогда $\omega(f_0, t) = \omega(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ и, опять же в силу предложения 8.3.1

$$E(f_0, KH^1)_C = \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} [\omega(f_0, t) - Kt] =$$
$$= \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} [\omega(t) - Kt].$$

Приведем еще одно довольно простое и элементарное доказательство неравенства (8.20), не опирающееся на предложение 8.1.1. (Впрочем, само предложение 8.1.1, из которого оценка (8.20) вытекает немедленно, можно доказать с помощью элементарных рассуждений, не опираясь на глубокие факты главы 3.) Фиксируем $f \in C \setminus KH^1$, обозначим для краткости

$$\mu = \frac{1}{2} \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} [\omega(f, t) - Kt]$$

и положим

$$\psi(t, x) = f(t) + \mu + K|x - t|,$$
$$\varphi_0(x) = \inf_t \psi(t, x).$$

Для любых x' и x'', считая для определенности, что $\varphi_0(x') \leqslant \varphi_0(x'')$ и $\varphi_0(x') = \psi(t_1, x')$, будем иметь

$$|\varphi_0(x'') - \varphi_0(x')| = \inf_t \psi(t, x'') - \psi(t_1, x') \leqslant$$
$$\leqslant \psi(t_1, x'') - \psi(t_1, x') =$$
$$= f(t_1) + \mu + K|x'' - t_1| - f(t_1) - \mu - K|x' - t_1| =$$
$$= K(|x'' - t_1| - |x' - t_1|) \leqslant K|x'' - t_1 - x' + t_1| = K|x' - x''|.$$

Этим доказано, что $\varphi_0 \in KH^1 = W_M^1K$. Далее, по определению для всех x

$$\varphi_0(x) \leqslant \psi(x, x) = f(x) + \mu,$$

т. е.

$$\varphi_0(x) - f(x) \leqslant \mu. \qquad (8.23)$$

С другой стороны, фиксируем x, и пусть

$$\varphi_0(x) = \psi(t_0, x) = f(t_0) + \mu + K|x - t_0|.$$

Тогда

$$f(x) - \varphi_0(x) = f(x) - f(t_0) - \mu - K|x - t_0| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(f, |x - t_0|) - K|x - t_0| - \mu \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} [\omega(f, t) - Kt] - \mu,$$

и, следовательно,

$$f(x) - \varphi_0(x) \leqslant \mu. \qquad (8.24)$$

Из (8.23) и (8.24) видно, что

$$\|f - \varphi_0\|_C \leqslant \mu$$

и тем более

$$E(f, KH^1)_C \leqslant \mu.$$

§ 8.4. Другой вывод точной оценки для $E_n(W^rH^\omega)_C$

Точную оценку наилучшего приближения тригонометрическими полиномами на классах W^rH^ω $(r = 0, 1, \ldots)$ (при выпуклом $\omega(t)$) можно немедленно вывести из теорем 8.2.1, 8.3.2 и результатов § 5.4 о точном значении верхних граней наилучших приближений на классах W_M^rK $(r = 1, 2, \ldots)$.

Рассматривая сначала случай $r \geqslant 1$, выберем число $K = K_{nr}$ из условия

$$\max_{0 \leqslant a \leqslant \pi} \int_0^a \Phi_{ar}(t)\,[\omega'(t) - K]\,dt = \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,[\omega'(t) - K]\,dt.$$

Пусть $f \in W^rH^\omega$ и φ_0 — функция из $W_M^{r+1}K$ такая, что

$$\|f - \varphi_0\|_C = E(f,\ W_M^{r+1}K)_C.$$

Учитывая, что (см. (5.27), § 5.9 и (7.46))

$$E_n(\varphi_0)_C \leqslant E_n(W_M^{r+1}K)_C = K\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} = K\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,dt, \tag{8.25}$$

будем иметь по теореме 8.2.1

$$\begin{aligned} E_n(f)_C &\leqslant E_n(f - \varphi_0)_C + E_n(\varphi_0)_C \leqslant \|f - \varphi_0\|_C + E_n(\varphi_0)_C \leqslant \\ &\leqslant \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,[\omega'(t) - K]\,dt + K\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,dt = \\ &= \int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,\omega'(t)\,dt = \|f_{nr}\|_C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E_n(f)_C \leqslant \|f_{nr}\|_C \quad \forall f \in W^rH^\omega \qquad (n,\ r = 1,\ 2,\ \ldots).$$

В случае $r = 0$, т. е. когда $f \in H^\omega$, также вводим функцию $\varphi_0 \in W_M^1K$, для которой

$$\|f - \varphi_0\|_C = E(f,\ W_M^1K)_C,$$

и, опираясь на теорему 8.3.2 и равенства (5.27), пишем оценку

$$E_n(f)_C \leqslant \|f - \varphi_0\|_C + E_n(\varphi_0)_C \leqslant \frac{1}{2}\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi}[\omega(t) - Kt] + K\frac{\mathcal{K}_1}{n},$$

где $K > 0$ произвольно. В частности, эта оценка будет верна, если $K = K_n$ выбрано из условия

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi}[\omega(t) - Kt] = \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) - K\frac{\pi}{n},$$

причем этот выбор всегда можно осуществить, если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности.

Выбрав указанным образом K и заметив, что $\mathcal{K}_1=\pi/2$, будем иметь

$$E_n(f)_C\leqslant\frac{1}{2}\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)-K\frac{\pi}{n}\right]+K\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

т. е.

$$E_n(f)_C\leqslant\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\quad\forall f\in H^\omega\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Можно заметить, что при $r=0$ указанный здесь путь получения точной оценки для $E_n(H^\omega)_C$, не связанный с теорией Σ-перестановок, проще, чем тот, которым мы шли в главе 7. В случае же $r\geqslant1$ оба пути получения точной оценки сверху для $E_n(W^rH^\omega)_C$ идут через основные теоремы для Σ-перестановок и вполне сравнимы по сложности.

ГЛАВА 9

ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА И ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ

§ 9.1. Неравенства Джексона в C и L_p

В 1911 г. Джексон [1] доказал, что если $f \in C$, то

$$\dot{E}_n(f)_C \leqslant \varkappa\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9.1}$$

а если $f \in C^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$, то

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{\varkappa_r}{n^r}\,\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n, r = 1, 2, \ldots), \tag{9.2}$$

где константы $\varkappa$ и $\varkappa_r$ не зависят ни от f, ни от n. Эти, а также аналогичные им соотношения в других функциональных пространствах известны в теории приближения как теоремы (или неравенства) Джексона. Смысл их в том, что они дают оценку скорости сходимости к нулю наилучшего приближения тригонометрическими полиномами в зависимости от дифференциально-разностных свойств приближаемой функции.

Неравенства (9.1) и (9.2) Джексон получил, аппроксимируя функцию f с помощью введенного им линейного метода, который давал в (9.2) константу $\varkappa_r$, хотя и не зависящую от f и n, но неограниченно возрастающую при увеличении r. В дальнейшем было обнаружено, что в (9.2) можно поставить константу, не зависящую и от r, и появился интерес к задаче по отысканию точных констант в неравенствах Джексона. Именно этой задаче посвящена настоящая глава. Но предварительно мы покажем, как можно вывести неравенства Джексона в C и в L_p из результатов, полученных в предыдущих главах.

Если $f \in C$, $f \not\equiv \text{const}$ и $\omega(f, t)$ — модуль непрерывности функции f в C, то в силу леммы 7.1.5 существует выпуклый модуль непрерывности $\omega_*(t)$ такой, что

$$\omega(f, t) \leqslant \omega_*(t) < 2\omega(f, t) \qquad (t > 0). \tag{9.3}$$

Первое неравенство в (9.3) означает, что $f \in H^{\omega_*}$, а потому в силу (7.45)

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{1}{2}\omega_*\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Учитывая же второе неравенство в (9.3), можем написать

$$E_n(f)_C < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \quad (n=1, 2, \ldots) \quad \forall f \in C. \qquad (9.4)$$

Мы получили неравенство вида (9.1) с заменой $\omega(f, 1/n)$ на $\omega(f, \pi/n)$. Если речь не идет о точной константе, то эта замена не имеет значения, так как в силу свойств модуля непрерывности (§ 7.1)

$$\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant (\pi+1)\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Оказалось, однако, что при отыскании точной константы в неравенствах Джексона для 2π-периодических функций удобнее значение модуля непрерывности функции f или $f^{(r)}$ брать в точке π/n.

Пусть теперь $f \in C^r$ $(r=1, 2, \ldots)$ и $\omega(f^{(r)}, t)$ — модуль непрерывности r-й производной $f^{(r)}$ в C. Если выбрать выпуклый модуль непрерывности $\omega_*(t)$ из условия

$$\omega(f^{(r)}, t) \leqslant \omega_*(t) < 2\omega(f^{(r)}, t),$$

то $f \in W^rH^{\omega_*}$ и в силу соотношений (7.44) и (6.46) будем иметь

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{1}{2n^r}\int_0^{\pi} \Phi_{\pi, r-1}(\pi - t)\,\omega_*\left(\frac{t}{n}\right)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega_*(\pi/n)}{2n^r}\int_0^{\pi} \Phi_{\pi, r-1}(\pi - t)\,dt = \frac{\mathscr{K}_r}{2n^r}\,\omega_*\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\mathscr{K}_r$ — константы (3.44). Заменив $\omega_*(\pi/n)$ на $2\omega(f^{(r)}, \pi/n)$ и учитывая, что $\mathscr{K}_r \leqslant \pi/2$ $(r=1, 2, \ldots)$, получим

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{\pi}{2n^r}\,\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right) \quad (n, r=1, 2, \ldots) \quad \forall f \in C^r. \qquad (9.5)$$

Перейдем к неравенствам Джексона в пространстве L_p.

Пусть $f \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и f_h — функция Стеклова для f. В силу полуаддитивности функционала наилучшего приближения (§ 1.2)

$$E_n(f)_p = E_n(f - f_h + f_h)_p \leqslant E_n(f - f_h)_p + E_n(f_h)_p \leqslant$$
$$\leqslant \|f - f_h\|_p + E_n(f_h)_p. \qquad (9.6)$$

Для функций Стеклова в § 5.2 были указаны неравенства

$$\|f - f_h\|_p \leqslant \omega(f, h)_p, \qquad (9.7)$$

$$\|f_h'\|_p \leqslant \frac{1}{2h}\omega(f, 2h)_p \leqslant \frac{1}{h}\omega(f, h)_p, \qquad (9.8)$$

последнее из которых означает, что f_h принадлежит классу $W^1_{L_p}K$ с константой $K = \frac{1}{h}\omega(f, h)_p$. А так как в силу (5.72)

$$E_n(W^1_{L_p}K)_p \leqslant K\frac{\mathcal{K}_1}{n} = K\frac{\pi}{2n},$$

то

$$E_n(f_h)_p \leqslant \frac{1}{h}\omega(f, h)_p\frac{\pi}{2n}. \qquad (9.9)$$

Положив $h = \pi/n$, из (9.6), (9.7) и (9.9) выводим, что

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_p \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty) \quad \forall f \in L_p. \qquad (9.10)$$

Если $f \in L_p^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$, то снова вводим функцию Стеклова f_h, причем, как отмечалось в § 5.2, под $f_h^{(r)}$ мы можем понимать как $(f_h)^{(r)}$, так и $(f^{(r)})_h$. Применяя тот же прием, напишем

$$E_n(f)_p \leqslant E_n(f - f_h)_p + E_n(f_h)_p. \qquad (9.11)$$

Так как (см. (9.7))

$$\|f^{(r)} - f_h^{(r)}\|_p \leqslant \omega(f^{(r)}, h)_p,$$

то разность $f - f_h$ принадлежит классу $W^r_{L_p}K$ с константой $K = \omega(f^{(r)}, h)_p$ и в силу (5.72)

$$E_n(f - f_h)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\omega(f^{(r)}, h)_p. \qquad (9.12)$$

Из неравенства же (см. (9.8))

$$\|f_h^{(r+1)}\|_p \leqslant \frac{1}{h}\omega(f^{(r)}, h)_p,$$

руководствуясь теми же соображениями, найдем, что

$$E_n(f_h)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} \frac{1}{h} \omega(f^{(r)}, h)_p. \tag{9.13}$$

Подставляя оценки (9.12) и (9.13) в (9.11) и полагая $h = \pi/n$, будем иметь

$$E_n(f)_p \leqslant \left(\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{\pi} + \mathcal{K}_r\right) \frac{1}{n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p.$$

Если опять учесть, что $\mathcal{K}_r \leqslant \pi/2$ $(r = 1, 2, \ldots)$, то можем написать

$$E_n(f)_p \leqslant \frac{\pi+1}{2n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p \tag{9.14}$$

$$(n, r = 1, 2, \ldots) \quad \forall f \in L_p^r \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Отметим, что, в отличие от неравенств (9.4) и (9.5) для пространства C, соотношения (9.10) и (9.14) мы получили, используя оценки приближения из главы 5, доставляемые линейными методами. Из (9.10) и (9.14) при $p = \infty$ мы получаем неравенства Джексона для приближения линейными методами функций из C и C^r. Более тонкие рассуждения (см. § 9.4) покажут, что при нечетных r константы в (9.5) и (9.14) можно уменьшить по меньшей мере в два раза.

Теперь сформулируем задачу, которой мы будем заниматься в следующих параграфах этой главы.

Пусть X есть пространство C или L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, а X^r есть C^r или L_p^r $(X^0 = X)$. Требуется в неравенстве

$$E_n(f)_X \leqslant \frac{\varkappa_r}{n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_X \tag{9.15}$$

указать наименьшую из возможных констант $\varkappa_r$. Хотя мы уже знаем, что в (9.15) можно в качестве $\varkappa_r$ поставить константу, общую для всех n и r, наилучшая константа, вообще говоря, может зависеть как от X, так и от n и r. Поэтому мы ее будем обозначать через $\varkappa_{nr}(X)$.

Таким образом, задача состоит в отыскании постоянных

$$\varkappa_{nr}(X) = \sup_{\substack{f \in X^r \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^r E_n(f)_X}{\omega(f^{(r)}, \pi/n)_X} \qquad (r = 0, 1, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots), \tag{9.16}$$

где X есть C или L_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

Аналогичную задачу можно поставить в случае приближения функций $f \in X^r$ с помощью линейных операторов A, отображающих X^r в подпространство F_{2n-1}^T тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Ясно, что особый интерес представляет здесь вычисление точной константы, соответствующей наилучшему для X^r линейному методу. Таким образом, мы приходим к задаче отыскания величины

$$\varkappa'_{nr}(X) = \inf_{AX^r \subset F_{2n-1}^T} \sup_{\substack{f \in X^r \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{n^r \| Af - f \|_X}{\omega(f^{(r)}, \pi/n)_X}. \tag{9.17}$$

Так как для любого линейного оператора A из X^r в F_{2n-1}^T и любой $f \in X^r$

$$\| Af - f \|_X \geqslant E_n(f)_X,$$

то всегда $\varkappa'_{nr}(X) \geqslant \varkappa_{nr}(X)$. Естественно, что наряду с вычислением констант $\varkappa_{nr}(X)$ и $\varkappa'_{nr}(X)$ интерес представляет также выяснение случаев совпадения этих констант, а также эффективное построение наилучших линейных методов, которые реализуют это совпадение.

Ответ на эти вопросы получен лишь в немногих отдельных случаях и, как мы увидим, совершенно различными путями.

§ 9.2. Точная константа в неравенстве Джексона для функций пространства C

Мы покажем, что в неравенстве (9.4) независимая от f и от n константа 1 в правой части является точной, т. е. уменьшена быть не может. Основную роль при этом будет играть следующая

Лемма 9.2.1. *При каждом фиксированном* $n = 1, 2, \ldots$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $f(t) = f(\varepsilon, t) \not\equiv \text{const}$, *такая, что*

$$E_n(f)_C > \left(1 - \frac{1}{2n} - \varepsilon\right) \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \tag{9.18}$$

Доказательство. Фиксируем n и зададим $\varepsilon > 0$, причем можно считать, что $0 < \varepsilon < 1/2$. Положим

$$x_0 = 0, \quad x_k = kh - (n-k)\beta \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.19}$$

где
$$h=\frac{\pi}{n},\quad 0<\beta<\frac{2\varepsilon}{n^2}.$$

При таком выборе числа β, как легко подсчитать, будет
$$x_0<x_1<\ldots<x_n=\pi.$$

Построим непрерывную периода 2π четную функцию $f(t)$, определив ее на полупериоде $[0,\ \pi]$ следующим образом:

$$f(x_k)=(-1)^{k+1}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$f(t)=0\quad (0\leqslant t\leqslant x_1-\beta,\quad x_k+\beta\leqslant t\leqslant x_{k+1}-\beta,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

$f(t)$ линейна (с сохранением непрерывности) на промежутках
$$(x_k-\beta\leqslant t\leqslant x_k)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\quad (x_k\leqslant t\leqslant x_k+\beta)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Докажем, что для построенной функции
$$\omega\left(f,\ \frac{\pi}{n}\right)=1. \tag{9.20}$$

Заметим сначала, что $x_2-x_1=h+\beta$, т. е. $(x_2-\beta)-x_1=\pi/n$, а так как по определению $f(x_1)=1$, $f(x_2-\beta)=0$, то
$$|f(x_2-\beta)-f(x_1)|=1,$$
и теперь для доказательства (9.20) достаточно установить, что для любых t_1 и t_2 таких, что $|t_1-t_2|\leqslant h$ будет $|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant 1$.

В силу того, что $\max\limits_t|f(t)|=1$, мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда $f(t_1)$ и $f(t_2)$ имеют разные знаки, а ввиду четности f можем считать, что $t_1,\ t_2\in[0,\ \pi]$. Тогда точки t_1 и t_2 могут быть расположены только следующим образом:
$$x_k<t_1<x_k+\beta,\qquad x_{k+1}-\beta<t_2<x_{k+1}\qquad (1\leqslant k\leqslant n-1).$$

Из определения функции f следует, что если, например, $f(x_k)=1$, то
$$f(t_1)=\frac{1}{\beta}(x_k+\beta-t_1)>0,\quad f(t_2)=-\frac{1}{\beta}(t_2-x_{k+1}+\beta)<0,$$

а так как $t_2-t_1\leqslant h$, $x_{k+1}-x_k=h+\beta$, то

$$|f(t_1)-f(t_2)|=f(t_1)-f(t_2)=$$
$$=\frac{1}{\beta}[(t_2-t_1)-(x_{k+1}-x_k)+2\beta]\leqslant\frac{1}{\beta}(h-h-\beta+2\beta)=1.$$

Случай $f(x_k)=-1$ рассматривается совершенно аналогично. Соотношение (9.20) доказано.

Теперь введем в рассмотрение тригонометрический полином

$$\tau_n(t)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos(n-1)t\right), \qquad (9.21)$$

который можно записать (умножив и разделив на $2\sin(t/2)$) в виде

$$\tau_n(t)=\frac{1}{2n}\frac{\sin(n-1/2)t}{\sin(t/2)}. \qquad (9.22)$$

Из (9.21) видно, что

$$\tau_n(0)=1-\frac{1}{2n}, \qquad (9.23)$$

а используя представление (9.22), нетрудно подсчитать, что

$$\tau_n(kh)=\frac{(-1)^{k+1}}{2n} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (9.24)$$

Далее,

$$|\tau_n(x_k)-\tau_n(kh)|\leqslant\max_t|\tau_n'(t)||x_k-kh|,$$

и так как $|x_k-kh|=(n-k)\beta$, а

$$|\tau_n'(t)|=$$
$$=\frac{1}{n}|\sin t+2\sin 2t+\ldots+(n-1)\sin(n-1)t|<\frac{n-1}{2},$$

то

$$|\tau_n(x_k)-\tau_n(kh)|<\frac{n-1}{2}(n-k)\beta<\varepsilon \quad (k=1,2,\ldots,n-1). \qquad (9.25)$$

Из (9.23), (9.24) и (9.25) с учетом значений функции f в точках (9.19), получаем

$$f(x_k)-\tau_n(x_k)=[f(x_k)-\tau_n(kh)]+[\tau_n(kh)-\tau_n(x_k)]=$$
$$=(-1)^{k+1}\left(1-\frac{1}{2n}\right)+\mu_k \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

где

$$0 \leqslant |\mu_k| < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Учитывая четность функции f и полинома τ_n, заключаем, что разность $f(t) - \tau_n(t)$ в $2n$ точках на периоде $(-\pi, \pi]$ принимает значения с чередующимися знаками, причем эти значения по абсолютной величине больше чем $1 - 1/2n - \varepsilon$. В силу теоремы 3.2.5 Валле-Пуссена справедливо неравенство

$$E_n(f)_C > 1 - \frac{1}{2n} - \varepsilon,$$

которое вместе с (9.20) дает (9.18). Лемма 9.2.1 доказана.

Так как в лемме 9.2.1 $\varepsilon > 0$ произвольно, то вместе с (9.4) она приводит к соотношениям

$$1 - \frac{1}{2n} \leqslant \varkappa_{n0}(C) < 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Формулируя этот результат в виде теоремы Джексона, получим следующее утверждение.

Теорема 9.2.2. *Для любой функции $f \in C$, $f \not\equiv$ $\not\equiv \mathrm{const}$, справедливы неравенства*

$$E_n(f)_C < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

причем не зависящая от f и от n константа 1 *перед $\omega(f, \pi/n)$ уменьшена быть не может.*

§ 9.3. Точная константа в неравенстве Джексона для функций пространства L_2

Еще один точный результат в рассматриваемой задаче можно получить, используя специфику пространства L_2.

Теорема 9.3.1. *Для любой функции f из L_2, не являющейся константой (с точностью до множества меры нуль), имеют место неравенства*

$$E_n(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_2 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (9.26)$$

причем при каждом n константа $1/\sqrt{2}$ в правой части уменьшена быть не может.

Доказательство. Оценку (9.26) мы выведем из более тонкого, но тоже неулучшаемого неравенства

$$E_n(f)_2 \leq \frac{1}{2}\left\{n\int_0^{\pi/n} \omega^2(f,\ t)_2 \sin nt\, dt\right\}^{1/2}, \tag{9.27}$$

справедливого для любой функции $f \in L_2$. Чтобы получить (9.27), запишем ряд Фурье функции f из L_2:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

и учтем, что в подпространстве тригонометрических полиномов порядка $n-1$ наилучшее приближение функции f в метрике L_2 доставляют частичные суммы этого ряда, т. е. суммы

$$S_n(f,\ x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

и, следовательно,

$$E_n^2(f)_2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 = \left\|\sum_{k=n}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right\|_2^2.$$

Положив для краткости $a_k^2 + b_k^2 = \rho_k^2$, в силу равенства Парсеваля будем иметь

$$E_n^2(f)_2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2. \tag{9.28}$$

Оценивая модуль непрерывности $\omega(f,\ t)_2$ функции f, заметим, что

$$f(x+u) - f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\{[a_k(\cos ku - 1) + b_k \sin ku]\cos kx + \\ + [b_k(\cos ku - 1) - a_k \sin ku]\sin kx\},$$

так что, опять по равенству Парсеваля,

$$\|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_2^2 = \\ = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\{[a_k(\cos ku - 1) + b_k \sin ku]^2 + [b_k(\cos ku - 1) - \\ - a_k \sin ku]^2\} = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(1 - \cos ku). \tag{9.29}$$

Поэтому для любого $t \geqslant 0$ с учетом (9.28) можем написать

$$\omega^2(f, t)_2 = \sup_{|u| \leqslant t} \| f(\cdot+u) - f(\cdot) \|_2^2 \geqslant \| f(\cdot+t) - f(\cdot) \|_2^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2\pi \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 (1 - \cos kt) = 2E_n^2(f)_2 - 2\pi \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cos kt$$

или

$$E_n^2(f)_2 \leqslant \frac{1}{2} \omega^2(f, t)_2 + \pi \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \cos kt. \tag{9.30}$$

При $t \in [0, \pi/n]$ умножим обе части неравенства (9.30) (они неотрицательны) на $\sin nt$ и проинтегрируем по t от 0 до π/n; это возможно, так как ряд в правой части мажорируется на всей оси сходящимся числовым рядом $\sum \rho_k^2$. Получим

$$\frac{2}{n} E_n^2(f)_2 \leqslant \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f, t)_2 \sin nt \, dt + \pi \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 c_k,$$

где

$$c_k = \int_0^{\pi/n} \sin nt \cos kt \, dt. \tag{9.31}$$

Легко проверяется, что $c_n = 0$, $c_k \leqslant 0$ $(k > n)$, поэтому

$$E_n^2(f)_2 \leqslant \frac{n}{4} \int_0^{\pi/n} \omega^2(f, t)_2 \sin nt \, dt,$$

и неравенство (9.27) доказано.

Из проведенных рассуждений ясно, что знак равенства в (9.27) будет заведомо иметь место, если выполнены следующие три условия:

1) $\omega(f, t)_2 = \| f(\cdot+t) - f(\cdot) \|_2$ для всех $0 \leqslant t \leqslant \pi/n$, т. е. функция

$$\| f(\cdot+u) - f(\cdot) \|_2^2 = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 (1 - \cos ku)$$

не убывает на $[0, \pi/n]$;

2) $\rho_k^2 = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$;

3) $\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 c_k = 0$, где c_k определены равенством (9.31).

Все эти условия выполняются, например, для тригонометрических полиномов вида

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1\cos nx+\beta_1\sin nx,$$

которые, следовательно, реализуют в (9.27) знак равенства.

Чтобы из (9.27) получить (9.26), надо лишь заметить, что если $f(x)$ отлична от константы, то $\omega(f,\ \pi/n)_2>0$ и

$$\int_0^{\pi/n}\omega^2(f,\ t)_2\sin nt\,dt<\omega^2\left(f,\ \frac{\pi}{n}\right)_2\int_0^{\pi/n}\sin nt\,dt=\frac{2}{n}\,\omega^2\left(f,\ \frac{\pi}{n}\right)_2.$$

Докажем неулучшаемость оценки (9.26). Фиксируем n и задав $\delta\,(0<\delta<\pi/n)$, построим четную периода $2\pi/n$ непрерывную на всей оси функцию $g_n(\delta,\ t)$, полагая

$$g_n(\delta,\ t)=\begin{cases}1-t/2\delta & (0\leqslant t\leqslant 2\delta),\\ 0 & (2\delta\leqslant t\leqslant \pi/n).\end{cases}$$

Функция $g_n(\delta,\ t)$ разлагается в ряд Фурье:

$$g_n(\delta,\ t)=\frac{\delta}{\pi}+\frac{2}{\pi\delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\nu\delta}{n\nu}\right)^2\cos n\nu t,$$

причем $g_n(\delta,\ 0)=1$, $g_n(\delta,\ t)\geqslant 0$ для $0\leqslant t\leqslant\pi/n$.

Положим

$$f_n(t)=f_n(\delta,\ t)=\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin n\nu\delta}{n\nu}\cos n\nu t.$$

Соотношение (9.29) позволяет для нашего случая написать

$$\|f_n(\cdot+u)-f_n(\cdot)\|_2^2=2\pi\,\frac{2}{\pi\delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\nu\delta}{n\nu}\right)^2(1-\cos n\nu u)=$$
$$=2\pi\,[g_n(\delta,\ 0)-g_n(\delta,\ u)].$$

Так как $g_n(\delta,\ t)$ (как функция от t) не возрастает на $[0,\ \pi/n]$, то учитывая (9.28), будем иметь

$$\omega^2(f_n,\ \pi/n)_2=2\pi\,[g_n(\delta,\ 0)-g_n(\delta,\ \pi/n)]=2\pi,$$

$$E_n^2(f_n)_2=\pi\,\frac{2}{\pi\delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\nu\delta}{n\nu}\right)^2=\pi\left[g_n(\delta,\ 0)-\frac{\delta}{\pi}\right]=\pi-\delta,$$

так что

$$\omega^2 (f_n, \pi/n)_2 = 2E_n^2 (f_n)_2 \frac{\pi}{\pi-\delta},$$

и остается заметить, что δ может быть сколь угодно близким к нулю.

Результат теоремы 9.3.1 с учетом обозначений (9.16) и (9.17), а также того факта, что наилучшее приближение в L_2 реализуется линейным методом, может быть записан в виде

$$\varkappa_{n0}(L_2) = \varkappa'_{n0}(L_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9.32}$$

Вернемся к неравенству (9.27). Если функция $\omega^2(f, t)_2$ выпукла вверх на $[0, \pi/n]$, то существует линейная функция $l(t)$ такая, что

$$l\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \omega^2\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_2, \quad \omega^2(f, t)_2 \leqslant l(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi/n).$$

Имеем

$$\int_0^{\pi/n} \omega^2(f, t)_2 \sin nt\, dt =$$
$$= \int_0^{\pi/n} [\omega^2(f, t)_2 - l(t)] \sin nt + \int_0^{\pi/n} \left[l(t) - \omega^2\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)\right] \sin nt\, dt +$$
$$+ \omega^2\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_2 \int_0^{\pi/n} \sin nt\, dt.$$

Первый интеграл в правой части неположителен (и обращается в нуль, если функция $\omega^2(f, t)_2$ линейна на $[0, \pi/n]$), второй интеграл равен нулю. Таким образом, приходим к оценке

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(f, \frac{\pi}{2n}\right)_2, \tag{9.33}$$

справедливой для всякой функции $f \in L_2$, у которой $\omega^2(f, t)_2$ выпукла вверх на $[0, \pi/n]$.

Если обозначить через $KH_2^{1/2}$ класс функций f из L_2, для которых $\omega(f, t)_2 \leqslant K\sqrt{t}$, то в силу (9.33)

$$E_n(f)_2 \leqslant \frac{K}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \forall f \in KH_2^{1/2}. \tag{9.34}$$

Нетрудно доказать, что оценка (9.34) неулучшаема на классе $KH_2^{1/2}$, причем достаточно в этом убедиться, считая $K=1$. При фиксированном $n=1, 2, \ldots$ рассмотрим функцию

$$\psi_n(t)=\frac{1}{\pi}\sqrt{2/n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)nt}{2\nu+1}\qquad(t\neq 2k\pi,\ k=0,\ \pm 1, \ldots).$$

Так как (см. (9.29) и § 5.4)

$$\|\psi_n(\cdot+u)-\psi_n(\cdot)\|_{L_2}^2=\frac{4}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1-\cos(2\nu+1)nu}{(2\nu+1)^2}=\frac{\pi}{2n}+\varphi_{n1}(u),$$

то

$$\omega^2(\psi_n,\ t)_2=\begin{cases} t & (0\leqslant t\leqslant \pi/n),\\ \pi/n & (t\geqslant \pi/n)\end{cases}$$

и, значит, $\psi_n\in H_2^{1/2}$. Легко видеть также, что для функции $\psi_n(t)$ выполнены условия 1) — 3) (стр. 239), гарантирующие знак равенства в (9.27), а в силу линейности $\omega^2(\psi_n,\ t)_2$ на $[0,\ \pi/n]$ знак равенства будет при $f=\psi_n$ и в соотношении (9.33).

Таким образом, доказано, что

$$E_n(KH_2^{1/2})_2=\frac{K}{2}\sqrt{\pi/n}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).\tag{9.35}$$

Если $f\in L_2^r$ $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ и по-прежнему $\rho_k^2=\rho_k^2(f)=a_k^2+b_k^2$, где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции f, то в силу (9.28)

$$E_n^2(f)_2\leqslant\pi\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{2r}\rho_k^2(f),\tag{9.36}$$

а так как $\rho_k^2(f^{(r)})=k^{2r}\rho_k^2(f)$, то

$$E_n^2(f)_2\leqslant\frac{1}{n^{2r}}E_n^2(f^{(r)})_2.\tag{9.37}$$

Знак равенства в (9.36), а значит и в (9.37), имеет место, лишь если $\rho_k=0$ $(k=n+1,\ n+2,\ \ldots)$, т. е. если f есть тригонометрический полином порядка n.

Сопоставив (9.37) с (9.27), приходим к оценке

$$E_n(f)_2\leqslant\frac{1}{2n^r}\left\{n\int_0^{\pi/n}\omega^2(f^{(r)},\ t)_2\sin nt\,dt\right\}^{1/2}\qquad(\forall f\in L_2^r),\tag{9.38}$$

точной на множестве L_2^r, ибо равенство в (9.38) имеет место для многочленов вида $\alpha_0+\alpha_1\cos nt+\beta_1\sin nt$.

Из (9.38), как и в случае $r=0$, выводится, что для любой функции f из L_2^r, не равной константе, справедлива оценка

$$E_n(f)_2<\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^r}\,\omega\left(f^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_2 \qquad (n,\ r=1,\ 2,\ \ldots), \qquad (9.39)$$

Вопрос о точной константе в неравенстве (9.39) остается открытым.

§ 9.4. Точная константа в теоремах Джексона для C^r и L^r при нечетных r

В этом параграфе будет построен линейный оператор со значениями в тригонометрическом подпространстве F_{2n-1}^T, который реализует в неравенствах Джексона для C^r и L^r точную константу при $r=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$

При $h>0$ зададим на $[-h,\ h]$ последовательность функций $g_r(t)$ следующим образом:

$$g_0(t)=-\frac{1}{2h} \quad (-h\leqslant t\leqslant h);$$

$$g_1(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{h}\right) \quad (0\leqslant t\leqslant h), \quad g_1(-t)=-g_1(t);$$

$$g_r(t)=\int_{\gamma_r}^{t} g_{r-1}(u)\,du \quad (r=2,\ 3,\ \ldots),$$

где γ_r $(-h<\gamma_r<0)$ выбрано так, чтобы обеспечить выполнение условия

$$\int_{-h}^{h} g_r(t)\,dt=0.$$

Положим далее

$$G_{2\nu}(t)=g_{2\nu}(t)-g_{2\nu}(h) \quad (-h\leqslant t\leqslant h) \quad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$G_{2\nu+1}(t)=g_{2\nu+1}(t) \quad (-h\leqslant t\leqslant h) \quad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и заметим, что

$$G_r(-h)=G_r(h)=0 \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$G_r'(t)=g_{r-1}(t) \qquad (r=2,\ 3,\ \ldots)$$

(при $r=2$ последнее равенство выполняется везде, за исключением точки $t=0$).

Функции $f \in X^r$, где X^r будет сбозначать C^r или L_p^r $(1 \leqslant p < \infty)$, сопоставим функцию Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\, dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x-t)\, dt$$

и положим

$$A_{hr}(f, x) = f(x) + 2h \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} g_{2\nu}(h) f_h^{(2\nu)}(x) \qquad (9.40)$$

$$(r = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 9.4.1. *Функцию* $A_{hr}(f, x)$, *определенную равенством* (9.40), *можно представить в виде*

$$A_{hr}(f, x) = \int_{-h}^{h} G_r(t) f^{(r)}(x-t)\, dt \qquad (r = 1, 2, \ldots). \qquad (9.41)$$

Доказательство. Пусть $r=1$. Тогда из (9.40) видно, что

$$A_{h1}(f, x) = f(x) - f_h(x). \qquad (9.42)$$

С другой стороны, преобразуя правую часть (9.41) при $r=1$, будем иметь

$$\int_0^h G_1(t) f'(x-t)\, dt = -\frac{1}{2} \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) df(x-t) =$$

$$= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2h} \int_0^h f(x-t)\, dt,$$

$$\int_{-h}^0 G_1(t) f'(x-t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{-h}^0 \left(1 + \frac{t}{h}\right) df(x-t) =$$

$$= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 f(x-t)\, dt,$$

так что

$$\int_{-h}^h G_1(t) f'(x-t)\, dt = f(x) - \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x-t)\, dt = f(x) - f_h(x).$$

При $r=1$ лемма доказана. Далее действует индукция. Пусть утверждение леммы справедливо для $r=1, 2, \ldots$ $\ldots, k-1$. Рассмотрим два случая:

1) k четно, $k=2j$. В силу (9.40) $A_{h,2j}(f, x)=A_{h,2j-1}(f, x)$, поэтому, учитывая предположение индукции, а затем интегрируя по частям, будем иметь

$$A_{h,2j}(f, x)=\int_{-h}^{h} G_{2j-1}(t) f^{(2j-1)}(x-t)\,dt=$$
$$=\int_{-h}^{h} f^{(2j-1)}(x-t)\,dG_{2j}(t)=\int_{-h}^{h} f^{(2j)}(x-t)\,G_{2j}(t)\,dt,$$

ибо $G_{2j}(-h)=G_{2j}(h)=0$.

2) k нечетно, $k=2j+1$. Исходя из (9.40) с учетом предположения индукции найдем

$$A_{h,2j+1}(f, x)=A_{h,2j}(f, x)+2hg_{2j}(h)f_h^{(2j)}(x)=$$
$$=\int_{-h}^{h} f^{(2j)}(x-t)\,G_{2j}(t)\,dt+g_{2j}(h)\int_{-h}^{h} f^{(2j)}(x-t)\,dt=$$
$$=\int_{-h}^{h} f^{(2j)}(x-t)\,[G_{2j}(t)+g_{2j}(h)]\,dt=$$
$$=\int_{-h}^{h} f^{(2j)}(x-t)\,g_{2j}(t)\,dt=\int_{-h}^{h} f^{(2j+1)}(x-t)\,G_{2j+1}(t)\,dt.$$

Лемма 9.4.1 доказана.

Лемма 9.4.2. *Имеют место равенства*

$$\int_{-\pi/2n}^{\pi/2n} |G_r(t)|\,dt+2\sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} \left|g_{2\nu}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \frac{\mathcal{K}_{r-2\nu-1}}{n^{r-2\nu-1}}=\frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \tag{9.43}$$
$$(n,\ r=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\mathcal{K}_r$ — *константы* (3.44).

Доказательство. Условимся для сокращения записи в промежуточных выражениях полагать $\pi/2n=h$.

Пусть $r=2j-1$ $(j=1, 2, \ldots)$. Положив в (9.41) $f(x)=$ $=\varphi_{n,2j-1}(x)$ ($\varphi_{nr}(x)$ — та же функция, что и в § 5.4), а также $x=0$, и учитывая вид (9.40) функции $A_{hr}(f, x)$, будем иметь

$$\varphi_{n,2j-1}(0)+\sum_{\nu=0}^{j-1} g_{2\nu}(h)\int_{-h}^{h}\varphi_{n,2j-2\nu-1}(t)\,dt=$$
$$=\int_{-h}^{h}G_{2j-1}(t)\,\varphi_{n0}(-t)\,dt=-\int_{-h}^{h}G_{2j-1}(t)\,\varphi_{n0}(t)\,dt=$$
$$=(-1)^j\int_{-h}^{h}|G_{2j-1}(t)|\,dt, \qquad (9.44)$$

ибо для $|t|<h$ $\operatorname{sign} G_{2j-1}(t)=(-1)^{j-1}\operatorname{sign}\varphi_{n0}(t)$.

Так как, далее,

$$g_{2\nu}(h)=(-1)^{\nu-1}|g_{2\nu}(h)|, \qquad (9.45)$$
$$\varphi_{n,2j-1}(0)=(-1)^j\frac{\mathcal{K}_{2j-1}}{n^{2j-1}},$$
$$\int_{-h}^{h}\varphi_{n,2j-2\nu-1}(t)\,dt=2\varphi_{n,2j-2\nu}(h)=2(-1)^{j-\nu}\frac{\mathcal{K}_{2j-2\nu}}{n^{2j-2\nu}},$$

то (9.44) запишется в виде

$$(-1)^j\frac{\mathcal{K}_{2j-1}}{n^{2j-1}}-(-1)^j\,2\sum_{\nu=0}^{j-1}|g_{2\nu}(h)|\frac{\mathcal{K}_{2j-2\nu}}{n^{2j-2\nu}}=$$
$$=(-1)^j\int_{-h}^{h}|G_{2j-1}(t)|\,dt,$$

что равносильно (9.43) при $r=2j-1$.

Теперь пусть $r=2j$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$. Полагая в (9.41) $f(x)=\varphi_{n,2j}(x+h)$ и $x=0$, будем иметь, учитывая (9.40),

$$\varphi_{n,2j}(h)+\sum_{\nu=0}^{j} g_{2\nu}(h)\int_{-h}^{h}\varphi_{n,2j-2\nu}(t+h)\,dt=$$
$$=\int_{-h}^{h}G_{2j}(t)\,\varphi_{n0}(h-t)\,dt=(-1)^j\int_{-h}^{h}|G_{2j}(t)|\,dt, \qquad (9.46)$$

ибо $\operatorname{sign} G_{2j}(t)=(-1)^j\varphi_{n0}(h-t)$ $(|t|<h)$.

Если снова учесть (9.45) и то, что

$$\varphi_{n,2j}(h)=(-1)^j\frac{\mathcal{K}_{2j}}{n^{2j}},$$

$$\int_{-h}^{h}\varphi_{n,2j-2\nu}(t+h)\,dt=\varphi_{n,2j-2\nu+1}(2h)-\varphi_{n,2j-2\nu+1}(0)=$$
$$=(-1)^{j-\nu+1}2\frac{\mathcal{K}_{2j-2\nu+1}}{n^{2j-2\nu+1}},$$

то (9.46) запишется так:

$$(-1)^j\frac{\mathcal{K}_{2j}}{n^{2j}}+(-1)^j 2\sum_{\nu=0}^{j} g_{2\nu}(h)\frac{\mathcal{K}_{2j-2\nu+1}}{n^{2j-2\nu+1}}=$$
$$=(-1)^j\int_{-h}^{h}|G_{2j}(t)|\,dt,$$

что совпадает с (9.43) при $r=2j$. Лемма 9.4.2 доказана.

В § 5.5 были рассмотрены линейные операторы $U_n(\tilde{\lambda})=U_{nr}(\tilde{\lambda})$, реализующие на классах W^r_MK и W^r_LK верхние грани наилучших приближений соответственно в C и L. Было доказано также (см. (5.42)), что если $f\in X^r$, то

$$\|f-U_{nr}(f,\ \tilde{\lambda})\|_X\leqslant\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_X. \tag{9.47}$$

Введем в рассмотрение операторы B_{nr}, определенные на X^r равенством

$$B_{nr}(f,\ x)=-\frac{\pi}{n}\sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} g_{2\nu}(h)\,U_{n,r-2\nu+1}(f_h^{(2\nu)},\ x,\ \tilde{\lambda}),$$

где f_h, как и выше, — функция Стеклова для f и $h=\pi/2n$. Так как $U_{n,r-2\nu+1}(f,\ x,\ \tilde{\lambda})$ — тригонометрические полиномы порядка $n-1$, линейно зависящие от f, то B_{nr} также есть линейный оператор, отображающий X^r в подпространство F^T_{2n-1} тригонометрических полиномов порядка $n-1$.

Теорема 9.4.3. *Для любой функции $f\in X^r$ при всех нечетных $r=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ справедлива оценка*

$$\|f-B_{nr}(f)\|_X\leqslant\frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\,\omega\left(f^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_X\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{9.48}$$

Доказательство. Имеем для $f \in X^r$

$$\|f - B_{nr}(f)\|_X =$$
$$= \left\| A_{hr}(f) - \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} g_{2\nu}(h) \left[f_h^{(2\nu)} - U_{n,r-2\nu+1}\left(f_h^{(2\nu)}, \tilde{\lambda}\right)\right] \right\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \|A_{hr}(f)\|_X + \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=0}^{[(r-1)/2]} |g_{2\nu}(h)| \left\| f_h^{(2\nu)} - U_{n,r-2\nu+1}\left(f_h^{(2\nu)}, \tilde{\lambda}\right)\right\|_X. \tag{9.49}$$

Так как $f_h \in X^{r+1}$ и, значит, $f_h^{(2\nu)} \in X^{r+1-2\nu}$, то в силу (9.47)

$$\left\| f_h^{(2\nu)} - U_{n,r-2\nu+1}\left(f_h^{(2\nu)}, \tilde{\lambda}\right)\right\|_X \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r-2\nu-1}}{n^{r-2\nu+1}} \left\| f_h^{(r+1)} \right\|_X.$$

Из общего неравенства для функций Стеклова

$$\|f_h'\|_X \leqslant \frac{1}{2h}\,\omega(f, 2h)_X$$

следует, что в нашем случае

$$\left\| f_h^{(r+1)} \right\|_X \leqslant \frac{n}{\pi}\,\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_X,$$

и поэтому

$$\left\| f_h^{(2\nu)} - U_{n,r-2\nu+1}\left(f_h^{(2\nu)}, \tilde{\lambda}\right)\right\|_X \leqslant \frac{n}{\pi}\,\frac{\mathcal{K}_{r-2\nu+1}}{n^{r-2\nu+1}}\,\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_X. \tag{9.50}$$

В силу леммы 9.4.1, учитывая свойства функции $G_r(t)$ при нечетных r, будем иметь

$$\|A_{hr}(f)\|_X = \left\| \int_{-h}^{h} G_r(t) f^{(r)}(x-t)\,dt \right\|_X =$$
$$= \left\| \int_0^h G_r(t) \left[f^{(r)}(x-t) - f^{(r)}(x+t)\right] dt \right\|_X. \tag{9.51}$$

Если $X=L_p$ $(1\leqslant p<\infty)$, то продолжим оценку с помощью обобщенного неравенства Минковского:

$$\|A_{hr}(f)\|_p\leqslant\int_0^h\left\{\int_0^{2\pi}|G_r(t)|^p|f^{(r)}(x-t)-f^{(r)}(x+t)|^p\,dx\right\}^{1/p}dt=$$
$$=\int_0^h|G_r(t)|\left\{\int_0^{2\pi}|f^{(r)}(x-t)-f^{(r)}(x+t)|^p\,dx\right\}^{1/p}dt\leqslant$$
$$\leqslant\omega\left(f^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_p\int_0^h|G_r(t)|\,dt=\frac{1}{2}\,\omega\left(f^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_p\int_{-h}^h|G_r(t)|\,dt.$$

В случае $X=C$ соответствующая оценка получается из (9.51) очевидным образом. Итак,

$$\|A_{hr}(f)\|_X\leqslant\frac{1}{2}\,\omega\left(f^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_X\int_{-h}^h|G_r(t)|\,dt. \tag{9.52}$$

Подставив (9.50) и (9.52) в (9.49) и используя лемму 9.4.2, получим при нечетных r

$$\|f-B_{nr}(f)\|_X\leqslant$$
$$\leqslant\omega\left(f^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_X\left[\frac{1}{2}\int_{-h}^h|G_r(t)|\,dt+\frac{\pi}{n}\sum_{\nu=0}^{(r-1)/2}|g_{2\nu}(h)|\frac{n}{\pi}\frac{\mathcal{K}_{r-2\nu+1}}{n^{r-2\nu-1}}\right]=$$
$$=\frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\,\omega\left(f^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_X,$$

и теорема 9.4.3 доказана. Из нее следует, что для любой $f\in X^r$ $(r=2j-1,\ j=1,2,\ldots)$

$$E_n(f)_X\leqslant\frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\,\omega\left(f^{(r)},\ \frac{\pi}{n}\right)_X\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{9.53}$$

Покажем, что в случае $X=C$ и $X=L$ неравенство (9.53) не может быть улучшено.

Так как в силу определения модуля непрерывности (§ 7.1)

$$\omega(f,\ t)_X\leqslant2\|f\|_X,$$

то, считая везде ниже, что $f\not\equiv\mathrm{const}$, будем иметь

$$\sup_{f\in X^r}\frac{E_n(f)_X}{\omega(f^{(r)},\pi/n)_X}\geqslant\frac{1}{2}\sup_{f\in X^r}\frac{E_n(f)_X}{\|f^{(r)}\|_X}. \tag{9.54}$$

Функция Стеклова $\varphi_{nr,h}(x)$ для стандартной функции $\varphi_{nr}(x)$, очевидно, принадлежит C^r и при достаточно малых h

$$\|\varphi_{nr,h}^{(r)}\|_C=\|\varphi_{n0,h}\|_C=1.$$

Если учесть, что в силу (1.13)

$$|E_n(f)_X-E_n(g)_X|\leqslant\|f-g\|_X,$$

то из (9.54) при $X=C$ получаем

$$\sup_{f\in C^r}\frac{E_n(f)_C}{\omega(f^{(r)},\pi/n)_C}\geqslant\frac{1}{2}E_n(\varphi_{nr,h})_C=$$
$$=\frac{1}{2}E_n(\varphi_{nr})_C+\varepsilon(h)=\frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}+\varepsilon(h)\qquad(n,\ r=1,\ 2,\ \ldots),$$

где величина $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to 0$ и потому может быть опущена. Таким образом,

$$\sup_{f\in C^r}\frac{E_n(f)_C}{\omega(f^{(r)},\pi/n)_C}\geqslant\frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\qquad(n,\ r=1,\ 2,\ \ldots), \tag{9.55}$$

что означает неулучшаемость оценки (9.53) на всем множестве C^r.

Совершенно аналогично, вводя функцию Стеклова $g_{n,r-1,h}$ для функции $g_{n,r-1}$ и замечая, что $g_{n,r-1,h}\in L^r$ и при малых h

$$\|g_{n,r-1,h}^{(r)}\|_L=\|g'_{n0,h}\|_L=1,$$

из (9.54) при $X=L$ получим

$$\sup_{f\in L^r}\frac{E_n(f)_L}{\omega(f^{(r)},\pi/n)_L}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}E_n(g_{n,r-1,h})_L=\frac{1}{2}E_n(g_{n,r-1})_L+\varepsilon_1(h)=$$
$$=\mathcal{K}_r/2n^r+\varepsilon_1(h)\qquad(n,\ r=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\varepsilon_1(h)\to 0$ при $h\to 0$, так что

$$\sup_{f\in L^r}\frac{E_n(f)_L}{\omega(f^{(r)},\ \pi/n)_L}\geqslant\frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\qquad(n,\ r=1,\ 2,\ \ldots).\tag{9.56}$$

Ясно, что в связи с (9.53) в (9.55) и (9.56) при нечетных r на самом деле должен быть знак равенства. Эти результаты, с учетом того факта, что, как это видно из теоремы 9.4.3, оценка (9.53) получена с помощью линейного метода, можно сформулировать следующим образом, привлекая обозначения (9.16) и (9.17).

Теорема 9.4.4. *Справедливы равенства*

$$\varkappa_{n,2j-1}(C)=\varkappa'_{n,\,2j-1}(C)=\varkappa_{n,\,2j-1}(L)=\varkappa'_{n,\,2j-1}(L)=\frac{\mathcal{K}_r}{2}$$
$$(n,\ j=1,\ 2,\ \ldots).$$

ГЛАВА 10

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 10.1. Вводные замечания

В этой главе будут изложены некоторые результаты по задаче III, сформулированной в § 1.1. Речь будет идти о вычислении поперечников классов функций, причем мы ограничимся рассмотрением только тех классов периодических функций, на которых в предыдущих главах найдено точное значение верхней грани наилучших приближений тригонометрическими полиномами.

Напомним, что *n-мерным поперечником (по Колмогорову)* центрально-симметричного множества $\mathfrak{M}$ в линейном нормированном пространстве X размерности $\geqslant n$ называется величина

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_n} E(\mathfrak{M}, F_n)_X = \inf_{F_n} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_n} \|x-u\|_X,$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам F_n фиксированной размерности n.

Линейный поперечник множества $\mathfrak{M}$ в X есть по определению величина

$$d'_n(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_n} \mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_n)_X = \inf_{F_n} \inf_{AX \subset F_n} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|x - Ax\|_X,$$

где A — линейный оператор, отображающий X в F_n.

Из определений вытекает, что с возрастанием n величины d_n и d'_n не возрастают. Действительно, пусть F_n — произвольное подпространство в X размерности n и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — элементы, образующие базис F_n. Добавив к ним элемент $x_{n+1} \in X \backslash F_n$, не являющийся их линейной комбинацией, получим подпространство F_{n+1} размерности $n+1$, причем так как, очевидно, $F_n \subset F_{n+1}$, то для любого $x \in X$

$$\inf_{u \in F_{n+1}} \|x-u\|_X \leqslant \inf_{u \in F_n} \|x-u\|_X,$$

т. е. всегда есть подпространство размерности $n+1$, приближающее любой элемент $x \in \mathfrak{M}$ не хуже чем F_n. Таким образом, если под $d_0(\mathfrak{M}, X)$ условимся понимать просто величину $\sup\limits_{x \in \mathfrak{M}} \|x\|_X$, т. е. приближение множества $\mathfrak{M}$ нулевым элементом, то можем написать

$$d_0(\mathfrak{M}, X) \geqslant d_1(\mathfrak{M}, X) \geqslant \ldots \geqslant d_n(\mathfrak{M}, X) \geqslant \ldots \quad (10.1)$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$d_0'(\mathfrak{M}, X) \geqslant d_1'(\mathfrak{M}, X) \geqslant \ldots \geqslant d_n'(\mathfrak{M}, X) \geqslant \ldots, \quad (10.2)$$

где под $d_0'(\mathfrak{M}, X)$ подразумевается также $\sup\limits_{x \in \mathfrak{M}} \|x\|_X$.

Отметим также, что из неравенства

$$E(\mathfrak{M}, F_n)_X \leqslant \mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_n)_X,$$

справедливого для любого подпространства F_n, следует, что

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \leqslant d_n'(\mathfrak{M}, X), \quad (10.3)$$

а из положительной однородности функционала $E(f, F_n)_X$ следует, что

$$d_n(\lambda\mathfrak{M}, X) = |\lambda|\, d_n(\mathfrak{M}, X) \qquad (\lambda \in R_1).$$

Так как

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \leqslant E(\mathfrak{M}, F_n)_X, \quad (10.4)$$

где F_n — любое n-мерное подпространство, то результаты, полученные в главах 5—7, где найдены точные значения наилучших приближений тригонометрическими полиномами классов W^r_M, W^rH^ω в C, W^r_L, W^r_V и W^rH^ω в L, дают оценки сверху для поперечников этих классов соответствующей размерности в соответствующих пространствах.

Точно так же в силу неравенства

$$d_n'(\mathfrak{M}, X) \leqslant \mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_n)_X, \quad (10.5)$$

справедливого для любого подпространства F_n из X размерности n, результаты главы 5, связанные с приближением классов W^r_M, W^r_L и W^r_V линейными методами, могут быть использованы для оценки сверху линейных поперечников этих классов.

Что касается получения для поперечников точной оценки снизу, то в ряде случаев эффективным здесь оказывается применение утверждения, известного как теорема о поперечнике шара.

§ 10.2. Теорема о поперечнике шара

Сначала мы приведем более слабый вариант теоремы о поперечнике шара.

Предложение 10.2.1. *Если U — замкнутый единичный шар линейного нормированного пространства X, т. е.*

$$U = \{x:\ x \in X,\ \|x\| \leqslant 1\}$$

и размерность X больше чем n, то

$$d_n(U,\ X) = 1.$$

Предложение 10.2.1 немедленно вытекает из следующего почти тривиально доказываемого утверждения, которым мы воспользуемся также при оценке поперечников некоторых классов функций.

Предложение 10.2.2. *Пусть X — линейное нормированное пространство размерности, большей чем n, F_n — его n-мерное подпространство и $\gamma > 0$. Существует элемент $y_0 \in X$ такой, что $\|y_0\| = \gamma$ и*

$$E(y_0,\ F_n)_X = \gamma.$$

Действительно, фиксируем $x_0 \in X \setminus F_n$, и пусть u_0 — элемент из F_n, ближайший к x_0 (он существует в силу 1.3.1), т. е.

$$\|x_0 - u_0\| = \inf_{u \in F_n} \|x_0 - u\| \overset{(c)}{=} d > 0.$$

Положим $y_0 = \frac{\gamma}{d}(x_0 - u_0)$. Ясно, что $\|y_0\| = \gamma$, и так как для любого $u \in F_n$

$$\|y_0 - u\| = \frac{\gamma}{d}\left\|x_0 - u_0 - \frac{d}{\gamma}u\right\| \geqslant \frac{\gamma}{d} \inf_{u \in F_n} \|x_0 - u\| = \gamma,$$

то $E(y_0,\ F_n)_X \geqslant \gamma$.

С другой стороны,

$$E(y_0,\ F_n)_X \leqslant \|y_0\| = \gamma$$

и, значит, $E(y_0,\ F_n)_X = \gamma$.

Возвращаясь к предложению 10.2.1, заметим, что неравенство

$$E(U,\ F_n)_X \leqslant 1$$

очевидно, а из предложения 10.2.2 следует, что $E(U, F_n)_X \geqslant \geqslant 1$, так что

$$E(U,\ F_n)_X = 1.$$

Остается заметить, что это равенство справедливо для любого n-мерного подпространства F_n.

Более глубоким, чем предложение 10.2.1, является тот факт, что n-мерный поперечник пересечения шара U с $(n+1)$-мерным подпространством из X тоже равен единице.

Теорема 10.2.3 (о поперечнике шара). *Пусть M_{n+1} — $(n+1)$-мерное подпространство линейного нормированного пространства X, а U_{n+1} — замкнутый единичный шар в M_{n+1}, т. е.*

$$U_{n+1} = \{x:\ x \in M_{n+1},\ \|x\| \leqslant 1\}.$$

Тогда

$$d_n(U_{n+1},\ X) = 1.$$

Доказательство теоремы 10.2.3 базируется на следующем факте топологического характера, известном как

Теорема Борсука [1]. *Пусть X_{n+1} — линейное нормированное пространство размерности $n+1$, а S_n — единичная сфера в X_{n+1}, т. е.*

$$S_n = \{x:\ x \in X_{n+1},\ \|x\| = 1\}.$$

Если оператор $P(x)$, отображающий S_n в n-мерное линейное нормированное пространство Y_n, является непрерывным и нечетным ($P(-x) = -P(x)$), то существует точка $x_0 \in S_n$, в которой $P(x_0) = 0$.

Доказательство теоремы Борсука для случая, когда X_{n+1} есть R_{n+1}, т. е. $(n+1)$-мерное евклидово пространство, можно найти в специальных книгах по топологии (см., например, Спеньер [1], стр. 344). На общий (сформулированный выше) случай она переносится тривиальным образом в силу изоморфизма конечномерных пространств одинаковой размерности (Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], стр. 72).

Доказываем теорему 10.2.3. Так как $d_n(U_{n+1}, X) \leqslant d_0(U_{n+1}, X) = 1$, то надо показать, что для любого n-мерного подпространства F_n из X $E(U_{n+1}, F_n)_X \geqslant 1$.

Фиксируем подпространство F_n и рассмотрим сначала случай, когда норма в X строго выпукла (§ 1.3). В силу предложений 1.3.1 и 1.3.3 для любого $x \in X$ в подпространстве F_n существует и притом единственный элемент наилучшего приближения $u = P(x)$. Оператор $P(x)$, отображающий X в F_n, является непрерывным и нечетным (предложение 1.2.2).

Рассматривая оператор $P(x)$ на сфере

$$S_n = \{x \in M_{n+1}, \ \|x\| = 1\},$$

в силу теоремы Борсука заключаем, что существует элемент $z \in S_n$ такой, что $P(z) = 0$. Но тогда, так как $S_n \subset U_{n+1}$, то

$$E(U_{n+1}, F_n)_X \geqslant E(z, F_n)_X = \|z - P(z)\| = \|z\| = 1,$$

и теорема 10.2.3 для случая строго выпуклой нормы доказана.

Пусть теперь норма в X не является строго выпуклой. Вместо пространства X будем рассматривать его конечномерное подпространство X_N, базисом которого является система всех линейно независимых элементов из объединения базисов M_{n+1} и F_n, так что M_{n+1} и F_n содержатся в X_N. Этот переход, учитывая наши цели, мы вправе сделать, ибо для $x \in M_{n+1}$ $E(x, F_n)_X = E(x, F_n)_{X_N}$.

Затем аппроксимируем норму $\|x\| = \|x\|_{X_N}$ пространства X_N строго выпуклой нормой следующим образом. Пусть $\|x\|'$ — строго выпуклая (например, евклидова) норма в X_N. В силу теоремы об изоморфизме конечномерных пространств существует число $\beta > 0$ такое, что

$$\|x\|' \leqslant \beta \|x\| \quad \forall x \in X_N. \qquad (10.6)$$

При любом $\varepsilon > 0$ числовая функция

$$\|x\|_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\beta} \|x\|'$$

также является нормой в X_N, строго выпуклой, как и $\|x\|'$, причем ввиду (10.6)

$$\|x\|_\varepsilon \leqslant \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X_N. \qquad (10.7)$$

Положим
$$\|x\|^0 = \|x\| + \|x\|_\varepsilon. \tag{10.8}$$
Если x и y отличны от нуля и $y \neq \lambda x$, то (§ 1.3)
$$\|x+y\|_\varepsilon < \|x\|_\varepsilon + \|y\|_\varepsilon,$$
и тогда
$$\|x+y\|^0 = \|x+y\| + \|x+y\|_\varepsilon < \|x\| + \|y\| + \|x\|_\varepsilon + \|y\|_\varepsilon = \\ = \|x\|^0 + \|y\|^0,$$

т. е. норма $\|x\|^0$ удовлетворяет условию строгой нормированности, а потому тоже строго выпукла. Кроме того, из (10.7) и (10.8) видно, что
$$(1+\varepsilon)^{-1}\|x\|^0 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|^0 \quad \forall x \in X_N. \tag{10.9}$$

Пусть X_N^0 есть пространство, полученное из X_N заменой нормы $\|x\|$ на $\|x\|^0$. К пространству X_N^0 применимы приведенные выше рассуждения для случая строго выпуклой нормы, в силу которых существует элемент $z = z_\varepsilon \in \in M_{n+1}$ такой, что
$$\inf_{u \in F_n} \|z-u\|^0 = \|z\|^0 = 1. \tag{10.10}$$

Чтобы оценить наилучшее приближение элемента z подпространством F_n в метрике X_N, заметим, что в силу (10.9) для любого $u \in F_n$
$$\|z-u\| \geqslant (1+\varepsilon)^{-1}\|z-u\|^0.$$

Переходя здесь к точным нижним граням по $u \in F_n$ и учитывая (10.10), будем иметь
$$E(z, F_n)_{X_N} = \inf_{u \in F_n} \|z-u\| \geqslant (1+\varepsilon)^{-1} > 1-\varepsilon.$$

Но из (10.9) и (10.10) следует, что $\|z\| \leqslant 1$, т. е. $z \in U_{n+1}$, а потому
$$E(U_{n+1}, F_n)_{X_N} \geqslant E(z, F_n)_{X_N} > 1-\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно, то
$$E(U_{n+1}, F_n)_{X_N} \geqslant 1$$
и, значит,
$$E(U_{n+1}, F_n)_X \geqslant 1.$$

Теорема 10.2.3 доказана.

Замечание 1. В формулировке теоремы 10.2.3 шар U_{n+1} можно заменить единичной сферой

$$S_n = \{x:\ x \in U_{n+1},\ \|x\| = 1\}.$$

Действительно, с одной стороны, $d_n(S_n, X) \leq \leq d_n(U_{n+1}, X) = 1$, а с другой, при оценке поперечника снизу мы фактически доказали, что $d_n(S_n, X) \geq 1$.

Замечание 2. Если X имеет размерность $n+1$, то теорема 10.2.3 содержится в предложении 10.2.1.

Применение теоремы 10.2.3 для оценки поперечников в конкретных случаях облегчает непосредственно вытекающее из нее

Предложение 10.2.4. *Если множество $\mathfrak{M}$ линейного нормированного пространства X содержит шар γU_{n+1} радиуса γ некоторого $(n+1)$-мерного подпространства, то*

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \geq \gamma.$$

Действительно, из включения $\gamma U_{n+1} \subset \mathfrak{M}$ следует, что $d_n(\mathfrak{M}, X) \geq d(\gamma U_{n+1}, X)$, и остается учесть, что

$$d_n(\gamma U_{n+1}, X) = \gamma d(U_{n+1}, X) = \gamma.$$

§ 10.3. Поперечники классов $W^r_{L_2}$ в пространстве L_2

Рассмотрение конкретных случаев вычисления поперечников начнем с самого простого, когда решение задачи облегчается особенностью метрики гильбертова пространства L_2.

Заметим сначала, что наилучшее приближение элемента $x \in L_2$ N-мерным подпространством F_N из L_2 реализуют суммы Фурье элемента x по ортонормированному базису F_N, т. е. линейный оператор из L_2 в F_N (С. М. Никольский [5], т. II, стр. 155). Поэтому для любого множества $\mathfrak{M} \subset L_2$

$$E(\mathfrak{M}, F_N)_{L_2} = \mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_N)_{L_2}$$

и

$$d_N(\mathfrak{M}, L_2) = d'_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{10.11}$$

Обозначая, как и выше, через F^T_{2n-1} подпространство (размерности $2n-1$) тригонометрических полиномов $T_n(t)$ порядка $n-1$, из соотношений (10.5) и (5.70) получаем оценку

$$d'_{2n-1}\left(W^r_{L_2},\ L_2\right)\leqslant \mathscr{E}\left(W^r_{L_2},\ F^T_{2n-1}\right)_2 = \mathscr{E}_n\left(W^r_{L_2}\right)_2 = \frac{1}{n^r} \quad (10.12)$$

$$(n,\ r=1,\ 2,\ \ldots).$$

С другой стороны, при каждом фиксированном $r=1$, $2, \ldots$ рассмотрим в $(2n+1)$-мерном подпространстве F^T_{2n+1} тригонометрических полиномов

$$T_{n+1}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

шар $n^{-r}U^T_{2n+1}$ радиуса $1/n^r$, т. е. множество полиномов $T_{n+1}(t)$ таких, что $\|T_{n+1}\|_2\leqslant n^{-r}$. В силу равенства Парсеваля это означает, что

$$\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\leqslant n^{-2r}. \quad (10.13)$$

Но если $T_{n+1}\in n^{-r}U^T_{2n+1}$, то, применяя к r-й производной $T^{(r)}_{n+1}(t)$ то же равенство Парсеваля, будем с учетом (10.13) иметь

$$\left\|T^{(r)}_{n+1}\right\|_2^2=\pi\sum_{k=1}^{n}k^{2r}(a_k^2+b_k^2)\leqslant \pi n^{2r}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant 1,$$

т. е. шар $n^{-r}U^T_{2n+1}$ содержится в классе $W^r_{L_2}$.

В силу предложения 10.2.4

$$d_{2n}\left(W^r_{L_2},\ L_2\right)\geqslant n^{-r} \quad (10.14)$$

и так как $d_{2n-1}\left(W^r_{L_2},\ L_2\right)\geqslant d_{2n}\left(W^r_{L_2},\ L_2\right)$, то из (10.11), (10.12) и (10.14) следуют соотношения

$$\begin{aligned} d_{2n-1}\left(W^r_{L_2},\ L_2\right) &= d'_{2n-1}\left(W^r_{L_2},\ L_2\right)=d_{2n}\left(W^r_{L_2},\ L_2\right)= \\ &= d'_{2n}\left(W^r_{L_2},\ L_2\right)=\mathscr{E}\left(W^r_{L_2},\ F^T_{2n-1}\right)_2= \\ &= E\left(W^r_{L_2},\ F^T_{2n-1}\right)_2=\frac{1}{n^r} \qquad (n,\ r=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}$$

§ 10.4. Поперечники классов W_M^r и W^rH^ω в пространстве C

В этом параграфе будут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 10.4.1. *При всех n, $r=1, 2, \ldots$ имеют место соотношения*

$$d_{2n}(W_M^r, C)=d_{2n-1}(W_M^r, C)=d'_{2n}(W_M^r, C)=$$
$$=d'_{2n-1}(W_M^r, C)=E_n(W_M^r)_C=\mathscr{E}_n(W_M^r)_C=\frac{\mathscr{K}_r}{n^r}, \quad (10.15)$$

где $\mathscr{K}_r$ — константы (3.44).

Теорема 10.4.2. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$, при всех $n=1, 2, \ldots$ и $r=0, 1, \ldots$ справедливы соотношения*

$$d_{2n}(W^rH^\omega, C)=d_{2n-1}(W^rH^\omega, C)=E_n(W^rH^\omega)_C=$$
$$=\|f_{nr}\|_C=\frac{1}{n^{r+1}}\int_0^\pi \Phi_{\pi r}(t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt, \quad (10.16)$$

где $f_{nr}(t)=f_{nr}(\omega, t)$ — функции, определенные в § 7.3, *а $\Phi_{\pi r}(t)$ определены в* § 6.6.

Оценки сверху для нечетных поперечников рассматриваемых классов дают результаты §§ 5.5 и 7.6, из которых в связи с общими соотношениями (10.3)—(10.5) следует, что

$$d_{2n-1}(W_M^r, C)\leqslant d'_{2n-1}(W_M^r, C)\leqslant\mathscr{E}_n(W_M^r)_C=\frac{\mathscr{K}_r}{n^r}; \quad (10.17)$$

$$d_{2n+1}(W^rH^\omega, C)\leqslant E_n(W^rH^\omega)_C=\|f_{nr}\|_C. \quad (10.18)$$

Теперь наиболее короткий путь к доказательству сразу всех утверждений теорем 10.4.1 и 10.4.2 лежит через оценку снизу четных поперечников классов W^rH^ω. Для этого нам придется доказать несколько вспомогательных утверждений.

Для любого вещественного числа α положим

$$x_k^\alpha=k\pi/n+\alpha \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n) \quad (10.19)$$

и сопоставим функции $f\in C$ вектор

$$\xi_\alpha(f)=\{f(x_1^\alpha), f(x_2^\alpha), \ldots, f(x_{2n}^\alpha)\}\in R_{2n},$$

который, очевидно, линейно зависит от f.

Если F_{2n} — произвольное подпространство из C размерности $2n$, то при фиксированном α множество векторов

$$N(\alpha) = N(\alpha, F_{2n}) = \{\xi_\alpha(f) : f \in F_{2n}\} \tag{10.20}$$

есть линейное многообразие в R_{2n} размерности не выше чем $2n$. Образно говоря, линейное многообразие $N(\alpha)$ векторов пространства R_{2n} высекается из F_{2n} системой точек x_k^α.

Лемма 10.4.3. *Каково бы ни было подпространство F_{2n} из C, найдется $\alpha = \alpha_0$ $(0 \leq \alpha_0 \leq \pi/n)$ такое, что*

$$\dim N(\alpha_0) \leq 2n - 1.$$

Доказательство. Если $\dim N(0) \leq 2n-1$, то все доказано, поэтому дальнейшие рассуждения будем строить в предположении, что $\dim N(0) = 2n$. Тогда, очевидно, $N(0)$ совпадает с R_{2n} и каждый из линейно независимых векторов

$$e_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}, e_2 = \{0, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, e_{2n} = \{0, \ldots, 0, 1\}$$

содержится в $N(0)$. В соответствии с определением $N(\alpha)$ это означает, что существуют $2n$ функций $g_i \in F_{2n}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ таких, что

$$e_i = \xi_0(g_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

т. е.

$$g_i(x_k^0) = \begin{cases} 0 & (k \neq i), \\ 1 & (k = i) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, 2n). \end{cases} \tag{10.21}$$

Из линейной независимости векторов e_i вытекает линейная независимость функций g_i, ибо, если бы, например, было

$$g_1(t) = \sum_{i=2}^{2n} \lambda_i g_i(t),$$

то тогда

$$e_1 = \xi_0(g_1) = \sum_{i=2}^{2n} \lambda_i \xi_0(g_i) = \sum_{i=2}^{2n} \lambda_i e_i,$$

что невозможно. Таким образом, функции $g_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ образуют в F_{2n} базис. Если $f \in F_{2n}$, то

$$f(t) = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i g_i(t),$$

и при любом α

$$\xi_\alpha(f)=\sum_{i=1}^{2n}\lambda_i\xi_\alpha(g_i).$$

Это значит, что $N(\alpha)$ есть линейная оболочка векторов $\xi_\alpha(g_i)$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$.

Лемма 10.4.3 будет доказана, если мы установим, что при некотором $\alpha=\alpha_0$ векторы $\xi_{\alpha_0}(g_i)$ окажутся линейно зависимыми.

Введем в рассмотрение определитель

$$D(\alpha)=\begin{vmatrix} g_1(x_1^\alpha) & g_1(x_2^\alpha) & \ldots & g_1(x_{2n}^\alpha) \\ g_2(x_1^\alpha) & g_2(x_2^\alpha) & \ldots & g_2(x_{2n}^\alpha) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{2n}(x_1^\alpha) & g_{2n}(x_2^\alpha) & \ldots & g_{2n}(x_{2n}^\alpha) \end{vmatrix}, \qquad (10.22)$$

являющийся, очевидно, непрерывной функцией от α. При $\alpha=0$ с учетом (10.21) имеем

$$D(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 01 \end{vmatrix}=1.$$

Подсчитаем значение $D(\alpha)$ при $\alpha=\pi/n$. Заметим, что $x_k^{\pi/n}=x_{k+1}^0$, и потому при всех $i=1, 2, 3, \ldots, 2n$

$$g_i(x_k^{\pi/n})=g_i(x_{k+1}^0) \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n-1),$$

а в силу 2π-периодичности функций g_i

$$g_i(x_{2n}^{\pi/n})=g_i(\pi/n+2\pi)=g_i(\pi/n)=g_i(x_1^0).$$

Поэтому

$$D\left(\frac{\pi}{n}\right)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Непрерывная функция $D(\alpha)$, принимая в точках $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/n$ значения разных знаков, должна в некоторой точке α_0 $(0<\alpha_0<\pi/n)$ обратиться в нуль. Это значит, что при $\alpha=\alpha_0$ векторы строк определителя (10.22) линейно зависимы. А так как векторы строк в (10.22) при

$\alpha=\alpha_0$ как раз и есть $\xi_\alpha(g_i)$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$, то лемма 10.4.3 доказана.

Теперь будем рассматривать специальные подпространства, связанные с выпуклым модулем непрерывности $\omega(t)$ (задающим класс W^rH^ω) и определяемые с помощью стандартной функции $f_{n0}(t)=f_{n0}(\omega, t)$. Мы расширим область применения получаемых при этом результатов, если при построении этих специальных подпространств будем исходить из функций, являющихся некоторым обобщением функций $f_{n0}(t)$.

Зафиксируем $n=1, 2, \ldots$ и в качестве обобщения функции f_{n0} возьмем произвольную ограниченную периода $2\pi/n$ функцию $\Psi_0(t)$, не убывающую на отрезке $[0, \pi/2n]$ и удовлетворяющую соотношениям

$$\Psi_0(u)=-\Psi_0(-u)=\Psi_0\left(\frac{\pi}{n}-u\right)=$$
$$=-\Psi_0\left(-\frac{\pi}{n}+u\right)>0 \qquad (0<u<\pi/2n).$$

Таким образом, $\|\Psi_0\|_M=(-1)^j\left[\Psi_0\,\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right]$ и, очевидно,

$$\int_0^{2\pi}\Psi_0(t)\,dt=0.$$

Через $\Psi_r(t)$ $(r=1, 2, \ldots)$ обозначим r-й периодический интеграл от $\Psi_0(t)$ с нулевым средним значением на периоде. Ясно, что $2\pi/n$-периодическая функция $\Psi_r(t)$ ведет себя точно так же, как и $f_{nr}(t)$, имея те же, что и у $f_{nr}(t)$, нули, точки экстремума и интервалы строгой монотонности.

Пусть теперь

$$\Delta_j=\left[\frac{(j-1)\pi}{n}, \frac{j\pi}{n}\right)=\left\{x:\frac{(j-1)\pi}{n}\leqslant x<\frac{j\pi}{n}\right\} \quad (j=1, 2, \ldots, 2n),$$

а $\psi_j(t)$ — 2π-периодическая функция, задаваемая на $[0, 2\pi)$ равенствами

$$\psi_j(t)=\begin{cases}|\Psi_0(t)| & (t\in\Delta_j),\\ 0 & (t\in[0, 2\pi)\setminus\Delta_j).\end{cases}$$

Так как, очевидно, $\psi_j(t)$ $(j=1, \ldots, 2n)$ линейно независимы, то множество функций вида

$$f(t)=\sum_{j=1}^{2n} c_j\psi_j(t), \tag{10.23}$$

где c_j — произвольные числа, образует в пространстве M подпространство размерности $2n$, которые мы обозначим M_{2n}^0. Заметим, что при $c_j=(-1)^{j-1}$ функция (10.23) совпадает с $\Psi_0(t)$.

Пусть $M_{2n,0}^0$ — множество функций g из M_{2n}^0, у которых

$$\sum_{j=1}^{2n} c_j=0. \tag{10.24}$$

Если $g\in M_{2n,0}^0$, то

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,dt=\sum_{j=1}^{2n} c_j\int_{\Delta j}\psi_j(t)\,dt=\int_0^{\pi/n}|\Psi_0(t)|\,dt\sum_{j=1}^{2n} c_j=0,$$

поэтому каждая из функций множества $M_{2n,0}^0$ может рассматриваться как r-я $(r=1, 2, \ldots)$ производная некоторой 2π-периодической функции из M^r. Через M_{2n}^r $(r=1, 2, \ldots)$ мы и обозначим множество r-х периодических интегралов от функций $g\in M_{2n,0}^0$. Таким образом, если $f\in M_{2n}^r$ $(r=$ $=1, 2, \ldots)$, то $f\in M^r\subset C^{r-1}$ и

$$f^{(r)}(t)=\sum_{j=1}^{2n} c_j\psi_j(t)\quad\left(\sum_{j=1}^{2n} c_j=0\right). \tag{10.25}$$

M_{2n}^r есть, очевидно, линейное многообразие, и нетрудно понять, что размерность M_{2n}^r равна $2n$. Действительно, если $M_{2n,0}^r$ — подмножество функций f из M_{2n}^r со средним значением на периоде, равным нулю, то из определений ясно, что между функциями g из $M_{2n,0}^0$ и функциями f из $M_{2n,0}^r$ существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции (изоморфизм). Следовательно, $M_{2n,0}^0$ и $M_{2n,0}^r$ имеют одинаковую размерность. Но размерность $M_{2n,0}^0$ равна $2n-1$, ибо если $g\in M_{2n,0}^0$, то в силу (10.24)

$$g(t)=\sum_{j=1}^{2n-1} c_j\psi_j(t)+c_{2n}\psi_{2n}(t)=\sum_{j=1}^{2n-1} c_j[\psi_j(t)-\psi_{2n}(t)].$$

Итак, размерность $M^r_{2n,0}$ равна $2n-1$, и остается заметить, что $M^r_{2n,0}$ не содержит функции, тождественно равной единице, а M^r_{2n} есть объединение $M^r_{2n,0}$ и одномерного пространства констант.

Лемма 10.4.4. *Пусть при фиксированном* $n=1, 2, \ldots$

$$t_k = t_{kr} = \begin{cases} (2k-1)\pi/2n & (r=0, 2, 4, \ldots), \\ (k-1)\pi/n & (r=1, 3, 5, \ldots), \end{cases} \quad k=1, 2, \ldots, 2n.$$

Если $f \in M^r_{2n}$ $(r=0, 1, 2, \ldots)$ *и*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2n} |f(t_k)| \leqslant \|\Psi_r\|_M, \tag{10.26}$$

то коэффициенты c_j *в* (10.23) *при* $r=0$ *и в* (10.25) *при* $r\geqslant 1$ *удовлетворяют неравенству*

$$|c_j| \leqslant 1 \quad (j=1, 2, \ldots, 2n).$$

Доказательство. В случае $r=0$ утверждение леммы очевидным образом следует из определения функций Ψ_0 и подпространства M^0_{2n}.

Рассматривая случай $r\geqslant 1$, заметим, что t_{kr} есть точки экстремума функции $\Psi_r(t)$. Предположим, что для $f\in M^r_{2n}$ справедливо (10.26), но в представлении (10.25) производной $f^{(r)}$ коэффициенты c_j удовлетворяют соотношению

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 2n} |c_j| = \lambda > 1.$$

Фиксируем коэффициент c_ν такой, что $|c_\nu|=\lambda$, причем можно считать, что $c_\nu = (-1)^{\nu-1}\lambda$, ибо в случае $c_\nu = (-1)^\nu\lambda$ вместо $f(t)$ мы будем рассматривать функцию $-f(t)$. Если положить

$$f_*(t) = \frac{1}{\lambda} f(t),$$

то

$$f_*^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} c_j^* \psi_j(t),$$

где $c_j^* = \lambda^{-1}c_j$ и, следовательно, $|c_j^*|\leqslant 1$ $(j=1, 2, \ldots, 2n)$, а $c_\nu^* = (-1)^{\nu-1}$. Последнее означает, что на промежутке Δ_ν функция $f_*^{(r)}(t)$ совпадает с $\Psi_0(t)$. Рассмотрим разность

$$\delta(t) = \Psi_r(t) - f_*(t).$$

Так как в каждой точке t, где $f(t) \neq 0$, выполняется строгое неравенство $|f_*(t)| < |f(t)|$, то с учетом (10.26) будем иметь

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant 2n} |f_*(t_k)| < \|\Psi_r\|_C = |\Psi_r(t_k)|.$$

Заметив еще, что

$$\Psi_r(t_1) = -\Psi_r(t_2) = \Psi_r(t_3) = \ldots = -\Psi_r(t_{2n}),$$

приходим к выводу, что разность $\delta(t)$, принимая в точках t_k значения того же знака, что и $\Psi_r(t)$, должна по меньшей мере $2n$ раз на периоде менять знак. По теореме Ролля число перемен знака на периоде у производных $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, $\ldots$, $\delta^{(r)}(t)$ будет не меньше, чем у $\delta(t)$, т. е. не меньше чем $2n$. Но, с другой стороны,

$$\delta^{(r)}(t) = \Psi_0(t) - f_*^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} [(-1)^{j-1} - c_j^*] \psi_j(t)$$

и, следовательно, $\delta^{(r)}(t)$ равна нулю на промежутке Δ_ν и сохраняет знак внутри каждого из промежутков Δ_j, где она не обращается тождественно в нуль. Поэтому число перемен знака у функции $\delta^{(r)}$ на периоде не может быть больше чем $2n-1$. Противоречие доказывает лемму.

Наряду с подпространствами M_{2n}^r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ будем рассматривать их сдвиги $M_{2n}^r(\beta)$ — множества функций $f(t) = \varphi(t-\beta)$, где $\varphi \in M_{2n}^r$, а β — любое число. Ясно, что $M_{2n}^r(\beta)$, так же как и M_{2n}^r, является подпространством размерности $2n$.

Пусть $t_k^\beta = t_{kr}^\beta = t_{kr} + \beta$ $(k = 1, \ldots, 2n)$ — точки экстремума функции $\Psi_r(t-\beta)$ на периоде $[\beta, \beta + 2\pi)$; $t_k^0 = t_k$ — точки экстремума $\Psi_r(t)$ на $[0, 2\pi)$. Сопоставим подпространству $M_{2n}^r(\beta)$ множество $Q_{2n}^r(\beta)$ векторов

$$\eta_\beta(f) = \{f(t_1^\beta), f(t_2^\beta), \ldots, f(t_{2n}^\beta)\} \qquad (f \in M_{2n}^r(\beta)).$$

Ясно, что $Q_{2n}^r(\beta)$ есть линейное многообразие, высекаемое точками t_k^β из подпространства $M_{2n}^r(\beta)$. Заметим, что точки t_k^β жестко связаны с подпространством $M_{2n}^r(\beta)$.

Лемма 10.4.5. *При любом β линейное многообразие $Q_{2n}^r(\beta)$ имеет размерность $2n$.*

Доказательство. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_{2n}$ — базис в $M_{2n}^r(\beta)$. Тогда $M_{2n}^r(\beta)$ есть линейная оболочка функций $f_i(t)$ $(i=1, \ldots, 2n)$ и, следовательно, $Q_{2n}^r(\beta)$ есть линейная оболочка векторов $\eta_\beta(f_i)$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$. Лемма будет доказана, если мы установим, что эти векторы линейно независимы.

Предположим противное: пусть существует набор коэффициентов $\overline{\lambda}_i$ $(i=1, \ldots, 2n)$, не все из которых равны нулю, такой, что

$$\sum_{i=1}^{2n} \overline{\lambda}_i \eta_\beta(f_i) = 0.$$

Это равенство означает, что все координаты вектора, стоящего в левой части, равны нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{2n} \overline{\lambda}_i f_i(t_k^\beta) = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n). \tag{10.27}$$

Функция

$$g(t) = \sum_{i=1}^{2n} \overline{\lambda}_i f_i(t),$$

очевидно, принадлежит $M_{2n}^r(\beta)$ и в силу (10.27)

$$g(t_k^\beta) = \sum_{i=1}^{2n} \overline{\lambda}_i f_i(t_k^\beta) = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n).$$

Если положить $g_0(t) = g(t+\beta)$, то $g_0 \in M_{2n}^r$ и

$$g_0(t_k) = 0 \quad (k=1, \ldots, 2n).$$

Любая функция вида Kg_0, где K — произвольное число, также, очевидно, принадлежит M_{2n}^r, и для нее выполняются равенства

$$Kg_0(t_k) = 0 \qquad (k=1, \ldots, 2n). \tag{10.28}$$

Если c_j — коэффициенты, определяющие функцию $Kg_0(t)$ (при $r=0$) или ее r-ю производную (при $r \geqslant 1$) в соотношениях вида соответственно (10.23) или (10.25), то из (10.28) и леммы 10.4.4 следует, что $|c_j| \leqslant 1$ и, следовательно,

$$\|Kg_0^{(r)}\|_M \leqslant \max_j |c_j| \, \|\psi_j\|_M \leqslant \|\Psi_0\|_M.$$

Ясно, что при любом K это возможно лишь в том случае, если $g_0^{(r)}(t)$, а значит, и $g_0(t)$ есть тождественный нуль. Но тогда тождественным нулем является и функция $g(t)$, а это означает, что

$$\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i f_i(t) \equiv 0,$$

что невозможно, так как функции f_i линейно независимы и не все λ_i равны нулю. Лемма 10.4.5 доказана.

Из леммы 10.4.5 следует, что любой вектор $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}\}$ с числовыми координатами $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ содержится в $Q_{2n}^r(\beta)$, т. е. существует функция $f \in M_{2n}^r(\beta)$, для которой $\eta_\beta(f) = \eta$. Иначе говоря, имеет место следующее утверждение.

Предложение 10.4.6. *Подпространство $M_{2n}^r(\beta)$ интерполирует в точках*

$$t_k^\beta = t_{kr}^\beta = \begin{cases} (2k-1)\pi/2n + \beta & (r = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots), \\ (k-1)\pi/n + \beta & (r = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots) \end{cases}$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$$

в том смысле, что, каковы бы ни были $2n$ чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}$, существует функция $f \in M_{2n}^r(\beta)$ такая, что

$$f(t_k^\beta) = \eta_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n).$$

Докажем единственность интерполирующей функции из $M_{2n}^r(\beta)$. *) Для этого достаточно установить, что равенства

$$f(t_k^\beta) = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$$

для $f \in M_{2n}^r(\beta)$ возможны только в случае $f(t) \equiv 0$.

Возьмем $2n$ линейно независимых векторов $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(2n)}$ с координатами $\eta_1^{(i)}, \ldots, \eta_{2n}^{(i)}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$, и пусть $f_i(t)$ $(i = 1,\ \ldots,\ 2n)$ — функции из $M_{2n}^r(\beta)$, для которых

$$f_i(t_k^\beta) = \eta_k^{(i)} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n),$$

---

*) Разумеется мы можем здесь воспользоваться тем общим фактом, что линейное отображение N-мерного пространства X_N на N-мерное пространство Y_N взаимно однозначно.

причем ясно, что $f_i(t)\not\equiv 0$ $(i=1, \ldots, 2n)$. Из линейной независимости векторов $\eta^{(i)}$ следует линейная независимость функций f_i, ибо из соотношения, например,

$$f_1(t)=\sum_{i=2}^{2n}\lambda_i f_i(t)$$

следовало бы, что

$$\eta_k^{(1)}=f_1(t_k^\beta)=\sum_{i=2}^{2n}\lambda_i f_i(t_k^\beta)=\sum_{i=2}^{2n}\lambda_i\eta_k^{(i)}\quad (k=1, \ldots, 2n),$$

т. е. $\eta^{(1)}=\lambda_2\eta^{(2)}+\ldots+\lambda_{2n}\eta^{(2n)}$, что невозможно.

Так как $M_{2n}^r(\beta)$ имеет размерность $2n$, то функции f_i $(i=1, \ldots, 2n)$ образуют базис в $M_{2n}^r(\beta)$. Следовательно, если $f\in M_{2n}^r(\beta)$ и $f\not\equiv 0$, то

$$f(t)=\sum_{i=1}^{2n}\mu_i f_i(t)\quad \left(\max_i|\mu_i|>0\right)$$

и в силу линейной независимости векторов $\eta^{(i)}$ числа

$$f(t_k^\beta)=\sum_{i=1}^{2n}\mu_i f_i(t_k^\beta)=\sum_{i=1}^{2n}\mu_i\eta_k^{(i)}\qquad (k=1, \ldots, 2n),$$

где $\max\limits_i|\mu_i|>0$, не могут быть все равны нулю, т. е. не равная тождественно нулю функция из $M_{2n}^r(\beta)$ не может в каждой из точек t_k^β принимать нулевые значения.

Таким образом, доказано

Предложение 10.4.7. *Для любой системы чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}$ существует единственная функция f из $M_{2n}^r(\beta)$ такая, что*

$$f(t_k^\beta)=\eta_k\qquad (k=1, 2, \ldots, 2n),$$

где точки $t_k^\beta=t_{kr}^\beta$ определены в предложении 10.4.6.

Утверждения 10.4.6 и 10.4.7 потребуются нам в § 10.7.

Переходя непосредственно к оценке снизу четных поперечников классов W^rH^ω, заданных выпуклым модулем непрерывности $\omega(t)$, будем считать, что функция $\Psi_0(t)$, на базе которой были построены подпространства M_{2n}^r и их сдвиги $M_{2n}^r(\beta)$, есть функция $f_{n0}(t)=f_{n0}(\omega, t)$. Чтобы подчеркнуть, что речь идет именно об этом частном случае, будем вместо M_{2n}^r писать $M_{2n}^r\{\omega\}$, а вместо $M_{2n}^r(\beta)$ — $M_{2n}^r\{\beta,\ \omega\}$.

Из леммы 10.4.4 нетрудно вывести следующее

Предложение 10.4.8. *Если* $f \in M_{2n}^r\{\beta,\ \omega\}$ $(r=0,\ 1,\ \ldots)$ *и*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2n} |f(t_k^\beta)| \leqslant \|f_{nr}\|_C,$$

то $f \in W^rH^\omega$.

В силу инвариантности класса W^rH^ω относительно сдвига аргумента, можно считать, что $\beta=0$. Но если $f \in M_{2n}^r\{\omega\}$ и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2n} |f(t_k)| \leqslant \|f_{nr}\|_C,$$

то по лемме 10.4.4 в представлении

$$f^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} c_j\psi_j(t),$$

где в данном случае

$$\psi_j(t) = \begin{cases} |f_{n0}(t)| & (t \in \Delta_j), \\ 0 & (t \in [0,\ 2\pi)\setminus\Delta_j), \end{cases}$$

коэффициенты c_j удовлетворяют соотношениям

$$|c_j| \leqslant 1 \qquad (j=1,\ \ldots,\ 2n), \tag{10.29}$$

которые гарантируют включение $f^{(r)} \in H^\omega$. Действительно, если точки t' и t'' лежат на одном промежутке Δ_j, то

$$|f^{(r)}(t') - f^{(r)}(t'')| = |c_j|\,|f_{n0}(t') - f_{n0}(t'')| \leqslant \omega(|t'-t''|),$$

ибо $|c_j| \leqslant 1$ и $f_{n0} \in H^\omega$. Если же t' и t'' принадлежат разным промежуткам Δ_j, то так как в силу (10.29) $|f^{(r)}(t)| \leqslant |f_{n0}(t)|$, мы можем, учитывая выпуклость $\omega(t)$, написать:

$$|f^{(r)}(t') - f^{(r)}(t'')| \leqslant |f_{n0}(t')| + |f_{n0}(t'')| \leqslant \omega(|t'-t''|).$$

Приступим к оценке снизу поперечников $d_{2n}(W^rH^\omega,\ C)$. Сопоставив, как и в общем случае, подпространству $M_{2n}^r\{\beta,\ \omega\}$ линейное многообразие $Q_{2n}^r\{\beta,\ \omega\}$ векторов

$$\eta_\beta(f) = \{f(t_1^\beta),\ f(t_2^\beta),\ \ldots,\ f(t_{2n}^\beta)\} \qquad (f \in M_{2n}^r\{\beta,\ \omega\}),$$

введем в $Q^r_{2n}\{\beta,\ \omega\}$ норму равенством

$$\|\eta_\beta(f)\|_Q = \max_{1\leqslant k\leqslant 2n} |f(t^\beta_k)|$$

и будем рассматривать $Q^r_{2n}\{\beta,\ \omega\}$ как линейное нормированное пространство, имеющее в силу леммы 10.4.5 размерность $2n$.

Пусть F_{2n} — подпространство в C размерности $2n$, а $N(\alpha,\ F_{2n})$ — линейное многообразие векторов

$$\xi_\alpha(g) = \{g(x^\alpha_1),\ g(x^\alpha_2), \ldots,\ g(x^\alpha_{2n})\} \qquad (g\in F_{2n}),$$

высекаемое из F_{2n} системой точек (10.19). Считаем, что α выбрано так, что

$$\dim N(\alpha,\ F_{2n}) = m \leqslant 2n-1$$

(на это нам дает право лемма 10.4.3). Этим зафиксирована система точек $\{x^\alpha_k\}$.

Выберем затем β так, чтобы системы точек $\{t^\beta_k\}$ и $\{x^\alpha_k\}$ совпадали. Это можно сделать, так как обе эти системы — равноотстоящие с одинаковым шагом π/n. Теперь линейные многообразия $N(\alpha,\ F_{2n})$ и $Q^r_{2n}\{\beta,\ \omega\}$ высекаются соответственно из F_{2n} и $M^r_{2n}\{\beta,\ \omega\}$ одной и той же системой точек, за которой оставим обозначение $\{t^\beta_k\}$ и ясно, что $N(\alpha,\ F_{2n})$ можно рассматривать как m-мерное подпространство пространства $Q^r_{2n}\{\beta,\ \omega\}$.

В силу предложения 10.2.2 существует вектор $\eta_\beta(f_*)\in Q^r_{2n}\{\beta,\omega\}$ (высекаемый некоторой функцией $f_*\in M^r_{2n}\{\beta,\omega\}$) с нормой

$$\|\eta_\beta(f_*)\|_Q = \|f_{nr}\|_C \tag{10.30}$$

такой, что

$$\inf_{\xi_\alpha(g)\in N(\alpha,\ F_{2n})} \|\eta_\beta(f_*) - \xi_\alpha(g)\|_Q = \|f_{nr}\|_C. \tag{10.31}$$

С учетом определения нормы в $Q^r_{2n}\{\beta,\ \omega\}$ равенство (10.30) означает, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2n} |f_*(t^\beta_k)| = \|f_{nr}\|_C,$$

и в силу предложения 10.4.8 $f_* \in W^rH^\omega$. Равенство (10.31) можно переписать в виде

$$\inf_{g \in F_{2n}} \max_{1 \leqslant k \leqslant 2n} |f_*(t_k^\beta) - g(t_k^\beta)| = \|f_{nr}\|_C,$$

откуда следует, что

$$\inf_{g \in F_{2n}} \|f_* - g\|_C \geqslant \|f_{nr}\|_C$$

и, значит,

$$E(W^rH^\omega, F_{2n})_C \geqslant E(f_*, F_{2n})_C \geqslant \|f_{nr}\|_C.$$

Так как это справедливо для произвольного подпространства F_{2n} из C размерности $2n$, то

$$d_{2n}(W^rH^\omega, C) \geqslant \|f_{nr}\|_C \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots). \tag{10.32}$$

Теперь из (10.18) и (10.32), с учетом общего соотношения монотонности (10.1) и теоремы 7.6.1, сразу вытекают все соотношения (10.16), и теорема 10.4.2 доказана.

Так как при $\omega(t) = t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ класс W^rH^ω превращается в W_M^{r+1} (§ 7.1), а функция $f_{nr}(t)$ — в $\varphi_{n,r+1}(t + \pi/2n)$, то оценка (10.32) в этом случае запишется в виде

$$d_{2n}(W_M^r, C) \geqslant \|\varphi_{nr}\|_C = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n, r = 1, 2, \ldots). \tag{10.33}$$

Сопоставив (10.17), (10.33), а также общие соотношения (10.1) и (10.2), получим все равенства в (10.15), так что теорема 10.4.1 тоже доказана.

Отметим, что мы доказали теоремы 10.4.1 и 10.4.2, не привлекая для оценки поперечников снизу соображений, связанных с теоремой Борсука и теоремой 10.2.3 о поперечнике шара. В § 10.6 мы покажем, как более коротким путем получить точные оценки нечетных поперечников классов W_M^r и W^rH^ω, опираясь на предложение 10.2.1.

§ 10.5. Поперечники классов W_V^{r-1}, W_L^r и W_M^r в пространстве L

Здесь мы докажем следующие утверждения.

Теорема 10.5.1. *При всех n, $r=1, 2, \ldots$ справедливы соотношения*

$$d_{2n}(W_L^r, L) = d'_{2n}(W_L^r, L) = d_{2n-1}(W_L^r, L) = \\ = d'_{2n-1}(W_L^r, L) = E_n(W_L^r)_L = \mathscr{E}_n(W_L^r)_L = \frac{\mathscr{K}_r}{n^r}; \quad (10.34)$$

$$d_{2n}(W_V^{r-1}, L) = d'_{2n}(W_V^{r-1}, L) = d_{2n-1}(W_V^{r-1}, L) = \\ = d'_{2n-1}(W_V^{r-1}, L) = E_n(W_V^{r-1})_L = \mathscr{E}_n(W_V^{r-1})_L = \frac{\mathscr{K}_r}{n^r}. \quad (10.35)$$

Теорема 10.5.2. *При всех n, $r=1, 2, \ldots$ имеют место равенства*

$$d_{2n}(W_M^r, L) = d_{2n-1}(W_M^r, L) = E_n(W_M^r)_L = \frac{4\mathscr{K}_{r+1}}{n^r}. \quad (10.36)$$

Как и в предыдущих случаях, для оценки сверху нечетных поперечников мы используем верхние грани наилучших приближений рассматриваемых классов тригонометрическими полиномами. Из результатов § 5.5 следует, в частности, что

$$d'_{2n-1}(W_V^{r-1}, L) \leqslant \mathscr{E}_n(W_V^{r-1})_L = \frac{\mathscr{K}_r}{n^r} \quad (n,\ r=1, 2, \ldots), \quad (10.37)$$

$$d'_{2n-1}(W_L^r, L) \leqslant \mathscr{E}_n(W_L^r)_L = \frac{\mathscr{K}_r}{n^r} \quad (n,\ r=1, 2, \ldots), \quad (10.38)$$

а полученное в § 5.7 соотношение (5.65) позволяет написать, что

$$d_{2n-1}(W_M^r, L) \leqslant E_n(W_M^r)_L = \frac{4\mathscr{K}_{r+1}}{n^r} \quad (n,\ r=1, 2, \ldots). \quad (10.39)$$

Как и при доказательстве теорем 10.4.1 и 10.4.2, чтобы получить сразу все равенства в (10.34) — (10.36), мы будем оценивать снизу четные поперечники. При этом нам придется существенным образом использовать теорему Борсука.

Пусть Γ_{n0} $(n=1, 2, \ldots)$ — множество 2π-периодических кусочно-постоянных функций $g(t)$, которые принимают значения только $+1$ и -1 и меняют знак на периоде не более чем $2n$ раз.

По поводу последнего условия в определении Γ_{n0} сделаем пояснение: мы говорим, что функция $f(t)$ периода 2π меняет на периоде знак ровно m раз, если можно указать $m+1$ точку:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = t_0 + 2\pi,$$

в которых $f(t_k) \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ и

$$\operatorname{sign} f(t_k) = -\operatorname{sign} f(t_{k+1}) \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1),$$

причем не существует системы из $m+2$ точек с аналогичными свойствами.

Через Γ_{nr} $(n, r=1, 2, \ldots)$ обозначим множество r-х 2π-периодических интегралов от функций из Γ_{n0}, имеющих среднее значение на периоде, равное нулю. Таким образом, если $g \in \Gamma_{nr}$, то $g^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, $g^{(r)} \in \Gamma_{n0}$ и $\int\limits_0^{2\pi} g^{(r)}(t)\,dt = 0$.

Основу всех рассуждений по оценке четных поперечников в L снизу составляет следующая

Лемма 10.5.3. *При всех $n=1, 2, \ldots$ и $r=0, 1, 2, \ldots$ для любого подпространства $F_{2n} \subset L$ размерности $2n$ имеет место оценка*

$$E(\Gamma_{nr}, F_{2n})_L \geqslant \inf_{g \in \Gamma_{nr}} \|g\|_L. \tag{10.40}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $r \geqslant 1$. Заметим, что если F_{2n} не содержит константу, то $E(\Gamma_{nr}, F_{2n})_L = +\infty$ $(r=1, 2, \ldots)$. Действительно, в силу определения множества Γ_{nr}, если $g \in \Gamma_{nr}$ $(r \geqslant 1)$, то функция $\lambda + g$, где λ — любая константа, также принадлежит Γ_{nr}, поэтому, фиксировав $g \in \Gamma_{nr}$, будем иметь

$$E(\lambda+g, F_{2n})_L \geqslant E(\lambda, F_{2n})_L - E(g, F_{2n})_L =$$
$$= |\lambda|\, E(1, F_{2n})_L - E(g, F_{2n})_L.$$

Если тождественная единица не принадлежит F_{2n}, то, в силу замкнутости F_{2n}, $E(1, F_{2n})_L > 0$ и за счет увеличения $|\lambda|$ мы можем величину $E(\lambda+g, F_{2n})_L$ сделать сколь-угодно большой.

Итак, доказывая соотношение (10.40) при $r \geqslant 1$, мы можем считать, что F_{2n} содержит любую константу, т. е. что в состав некоторого базиса F_{2n} входит тождественная единица. Пусть

$$e_1(t),\ e_2(t),\ \ldots,\ e_{2n}(t)$$

— базис F_{2n}, причем

$$e_1(t) \equiv 1.$$

Ниже R_{2n}^* будет обозначать $2n$-мерное пространство векторов

$$\xi = \{\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{2n+1}\},$$

координаты которых связаны условием

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \xi_k = 0. \tag{10.41}$$

Норму в R_{2n}^* введем следующим образом:

$$\|\xi\|_* = \sum_{k=1}^{2n+1} |\xi_k|. \tag{10.42}$$

Через S_{2n-1} обозначим сферу в R_{2n}^* с центром в нуле и с радиусом 2π:

$$S_{2n-1} = \left\{\xi : \xi \in R_{2n}^*,\ \|\xi\|_* = \sum_{k=1}^{2n+1} |\xi_k| = 2\pi\right\}.$$

Каждому вектору $\xi \in S_{2n-1}$ сопоставим 2π-периодическую функцию $g_0(\xi, t)$ следующим образом. Пусть

$$\eta_0 = 0,\quad \eta_k = \sum_{i=1}^{k} |\xi_i| \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1) \qquad (\eta_{2n+1} = 2\pi). \tag{10.43}$$

Так как некоторые из координат ξ_k могут равняться нулю, то η_k и η_{k-1} могут совпадать, но если $\eta_k > \eta_{k-1}$, то полагаем

$$g_0(\xi, t) = \operatorname{sign} \xi_k \qquad (\eta_{k-1} \leqslant t < \eta_k).$$

Ясно, что таким образом мы зададим функцию $g_0(\xi, t)$ во всех точках $0 \leqslant t < 2\pi$, и остается продолжить ее на всю ось 2π-периодическим образом.

Заметим, что, как следует из определения, число перемен знака на периоде у $g_0(\xi, t)$ заведомо $\leqslant 2n+1$. Но так как периодическая функция может менять знак на периоде только четное число раз, то перемен знака у $g_0(\xi, t)$ на периоде не больше чем $2n$, и, значит, $g_0(\xi, t) \in \Gamma_{n0}$.

В силу (10.41)

$$\int_0^{2\pi} g_0(\xi, t)\, dt = 0$$

и, следовательно, $g_0(\xi, t)$ является r-й производной некоторой функции $g_r(\xi, t)$ из множества Γ_{nr} $(r = 1, 2, \ldots)$; для однозначности будем считать, что

$$\int_0^{2\pi} g_r(\xi, t)\, dt = 0.$$

Положим далее

$$g_r^*(\xi, t) = g_r(\xi, t) - c(\xi),$$

где константа $c(\xi)$ однозначно, в силу непрерывности g_r, определяется равенством

$$\int_0^{2\pi} |g_r(\xi, t) - c(\xi)|\, dt = \inf_c \int_0^{2\pi} |g_r(\xi, t) - c|\, dt.$$

Так как $c(\xi)$ является константой наилучшего приближения в метрике L функции $g_r(\xi, t)$ из Γ_{nr}, которая в силу определения Γ_{nr} может обращаться в нуль на $[0, 2\pi)$ лишь в конечном числе точек, то в силу критерия 3.3.4

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sign} g_r^*(\xi, t)\, dt = 0. \tag{10.44}$$

Теперь с помощью функции $g_r^*(\xi, t)$ зададим на сфере S_{2n-1} оператор ($(2n-1)$-мерное векторное поле) $\tau(\xi)$, положив

$$\tau(\xi) = \{\tau_1(\xi), \tau_2(\xi), \ldots, \tau_{2n-1}(\xi)\},$$

где

$$\tau_i(\xi) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sign} g_r^*(\xi, t)\, e_{i+1}(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

а $e_2(t), \ldots, e_{2n}(t)$ — функции базиса F_{2n}.

Нечетность оператора $\tau(\xi)$ легко проверить, если проследить все этапы отображения через функции $g_0(\xi, t)$, $g_r(\xi, t)$ и $g_r^*(\xi, t)$.

Докажем, что оператор $\tau(\xi)$ непрерывен на сфере S_{2n-1}. Пусть последовательность

$$\xi^{(m)} = \{\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_{2n}^{(m)}\} \qquad (m=1, 2, \ldots)$$

векторов, принадлежащих сфере S_{2n-1}, сходится в метрике R_{2n}^* к вектору $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}\}$, также, очевидно, принадлежащему S_{2n-1}. Так как сходимость в конечномерном пространстве есть сходимость по координатам, то

$$\lim_{m\to\infty} \xi_k^{(m)} = \xi_k \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n).$$

Если для векторов $\xi^{(m)}$ определить числа $\eta_k^{(m)}$ аналогично (10.43), то, очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} \eta_k^{(m)} = \eta_k \qquad (k=1, 2, \ldots, m),$$

что, в свою очередь, означает, что если

$$B_m = \{t : t \in [0, 2\pi], \quad g_0(\xi^{(m)}, t) \neq g_0(\xi, t)\},$$

то $\operatorname{mes} B_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Но тогда

$$\|g_r(\xi^{(m)}) - g_r(\xi)\|_C =$$

$$= \max_x \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} D_r(x-t)\,[g_0(\xi^{(m)}, t) - g_0(\xi, t)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\|D_r\|_M \int_0^{2\pi} |g_0(\xi^{(m)}, t) - g_0(\xi, t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\|D_r\|_M \int_{B_m} |g_0(\xi^{(m)}, t) - g_0(\xi, t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\|D_r\|_M \operatorname{mes} B_m \to 0 \qquad (m\to\infty),$$

т. е. последовательность функций $g_r(\xi^{(m)}, t)$ $(m=1, 2, \ldots)$ равномерно (по норме в C) сходится к функции $g_r(\xi, t)$.

Если заметить, что в силу непрерывности оператора наилучшего приближения (предложение 1.2.2)

$$\lim_{m\to\infty} c(\xi^{(m)}) = c(\xi),$$

где $c(\xi^{(m)})$ и $c(\xi)$ — константы наилучшего приближения в L соответственно для функций $g_r(\xi^{(m)}, t)$ и $g_r(\xi, t)$, то приходим к выводу, что

$$\lim_{m\to\infty} \| g_r^*(\xi^{(m)}) - g_r^*(\xi) \|_C = 0.$$

Из равномерной сходимости при $m \to \infty$ последовательность функций $\{g_r^*(\xi^{(m)}, t)\}$ к $g_r^*(\xi, t)$ и того факта, что $g_r^*(\xi, t)$ обращается в нуль на периоде лишь в конечном числе точек, следует, что мера множества

$$B_m^* = \{t : t \in [0, 2\pi],\ \operatorname{sign} g_r^*(\xi^{(m)}, t) \neq \operatorname{sign} g_r^*(\xi, t)\}$$

стремится к нулю при $m \to \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\tau_i(\xi^{(m)}) - \tau_i(\xi)| &\leqslant \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} |\operatorname{sign} g_r^*(\xi^{(m)}, t) - \operatorname{sign} g_r^*(\xi, t)|\,|e_{i+1}(t)|\,dt = \\ &= \int_{B_m^*} |\operatorname{sign} g_r^*(\xi^{(m)}, t) - \operatorname{sign} g_r^*(\xi, t)|\,|e_{i+1}(t)|\,dt \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant 2 \int_{B_m^*} e_{i+1}(t)\,dt \to 0 \qquad (m \to \infty) \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1). \end{aligned}$$

Это значит, что последовательность векторов $\tau(\xi^{(m)})$ сходится покоординатно, а значит, и в метрике R_{2n}^*, к вектору $\tau(\xi)$.

Непрерывность оператора $\tau(\xi)$ на сфере S_{2n-1} доказана, и теперь, с учетом нечетности $\tau(\xi)$, можно применить теорему Борсука. В силу этой теоремы существует вектор $\bar\xi \in S_{2n-1}$, для которого $\tau(\bar\xi) = 0$, что означает, в силу задания оператора $\tau(\xi)$, выполнение соотношений

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sign} g_r^*(\bar\xi, t)\, e_i(t)\,dt = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, 2n).$$

Если учесть, что $e_1(t) \equiv 1$ и (10.44) выполняется также и при $\xi = \bar\xi$, то получаем систему равенств

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sign} g_r^*(\bar\xi, t)\, e_i(t)\,dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

которая означает, что функция $\operatorname{sign} g_r^*(\bar\xi, t)$ ортогональна всем функциям базиса F_{2n}, а значит, и любой функции из F_{2n}. По критерию 3.3.2 наилучшее приближение функции $g_r^*(\xi, t)$ в метрике L среди всех функций подпространства F_{2n} доставляет тождественный нуль.

Итак установлено, что

$$E(g_r^*(\xi, t), F_{2n})_L = \|g_r^*(\xi)\|_L,$$

а так как $g_r^*(\xi, t) \in \Gamma_{nr}$, то лемма 10.5.3 для $r \geqslant 1$ доказана.

Рассмотрим случай $r=0$. В пространстве R_{2n+1}^* векторов $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}\}$ с нормой (10.42) рассмотрим сферу

$$S_{2n} = \{\xi \colon \xi \in R_{2n+1}^*, \|\xi\|_* = 1\},$$

на которой зададим $2n$-мерное векторное поле $\tau(\xi)$ следующим образом. Сопоставим вектору $\xi \in S_{2n}$ функцию $g_0(\xi, t)$, как и в случае $r \geqslant 1$, и положим

$$\tau_i(\xi) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sign} g_0(\xi, t)\, e_i(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где $e_1(t), \ldots, e_{2n}(t)$ — базис аппроксимирующего подпространства F_{2n}. Этим самым вектору $\xi \in S_{2n}$ поставлен в соответствие вектор

$$\tau(\xi) = \{\tau_1(\xi), \tau_2(\xi), \ldots, \tau_{2n}(\xi)\}.$$

Оператор $\tau(\xi)$ является непрерывным (это доказывается значительно проще, чем в случае $r \geqslant 1$) и нечетным. Поэтому в силу теоремы Борсука найдется вектор $\bar{\xi} \in S_{2n}$ такой, что $\tau(\bar{\xi}) = 0$, т. е.

$$\tau_i(\bar{\xi}) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sign} g_0(\bar{\xi}, t)\, e_i(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

и, значит, в силу критерия 3.3.2

$$E(g_0(\bar{\xi}, t), F_{2n})_L = \|g_0(\bar{\xi})\|_L,$$

причем $g_0(\bar{\xi}, t) \in \Gamma_{n0}$.

Лемма 10.5.3 полностью доказана.

Лемма 10.5.4. *Имеют место соотношения*

$$\inf_{g \in \Gamma_{nr}} \|g\|_L = 4\mathcal{K}_{r+1} n^{-r} \qquad (n = 1, 2, \ldots; \ r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. При $r=0$ лемма 10.5.4 тривиальна. Если $g\in\Gamma_{nr}$ $(r\geq 1)$, то, очевидно, $g\in V^r$, причем

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g^{(r)})\leq 4n,\qquad \|g^{(r)}\|_L=2\pi. \tag{10.45}$$

В силу неравенства (6.66) для $g\in V^r$ имеем

$$\|g^{(r)}\|_L\leq c_{r+1,\,r}\|g\|_L^{1/(r+1)}\left[\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g^{(r)})\right]^{r/(r+1)}, \tag{10.46}$$

где

$$c_{r+1,\,r}=\mathscr{K}_1\mathscr{K}_{r+1}^{-1/(r+1)}=\frac{\pi}{2}\mathscr{K}_{r+1}^{-1/(r+1)}.$$

Из (10.45) и (10.46) следует, что для любой $g\in\Gamma_{nr}$

$$2\pi\leq\frac{\pi}{2}\mathscr{K}_{r+1}^{-1/(r+1)}\|g\|_L^{1/(r+1)}(4n)^{r/(r+1)}$$

или

$$\|g\|_L\geq 4\mathscr{K}_{r+1}n^{-r}. \tag{10.47}$$

Остается заметить, что для функции $\tilde g(t)$ из Γ_{nr} с нулевым средним значением на периоде, у которой $\tilde g^{(r)}(t)$ меняет знак в точках $k\pi/n$, в (10.47) будет знак равенства, ибо с точностью до знака $\tilde g(t)$ совпадает с $\varphi_{nr}(t)$.

Из лемм 10.5.3 и 10.5.4 вытекает, что

$$d_{2n}(\Gamma_{nr},\ L)\geq 4\mathscr{K}_{r+1}n^{-r}\qquad (n=1,\ 2,\ldots;\ r=0,\ 1,\ldots). \tag{10.48}$$

Соотношение (10.48) позволяет немедленно получить точные оценки снизу для четных поперечников классов W_M^r, W_V^r и W_L^r в пространстве L.

Так как, очевидно, $\Gamma_{nr}\in W_M^r$, то из (10.48) сразу следует неравенство

$$d_{2n}(W_M^r,\ L)\geq 4\mathscr{K}_{r+1}n^{-r}\qquad (n,\ r=1,\ 2,\ldots),$$

которое вместе с (10.39) доказывает теорему 10.5.2. (Из результатов § 10.7 будет следовать, что линейные поперечники $d'_{2n}(W_M^r,\ L)$ также равны $4\mathscr{K}_{r+1}n^{-r}$.)

Далее, как уже отмечалось, вариация на периоде r-й производной функции $g\in\Gamma_{nr}$ не превосходит $4n$, поэтому множество $(4n)^{-1}\Gamma_{nr}$, состоящее из функций вида $f(t)=$

$= (4n)^{-1} g(t)$, где $g \in \Gamma_{nr}$, принадлежит классу W_V^r. Следовательно,

$$d_{2n}(W_V^r, L) \geqslant d_{2n}((4n)^{-1}\Gamma_{nr}, L) =$$
$$= \frac{1}{4n} d_{2n}(\Gamma_{nr}, L) \geqslant \frac{\mathcal{K}_{r-1}}{n^{r-1}} \qquad (r = 0, 1, 2 \ldots)$$

и с учетом (10.37) получаем все равенства в (10.35). Соотношения (10.34) немедленно следуют из (10.35) и (10.38), если учесть, что, как показано в § 5.3, для любого подпространства F из L

$$E(W_L^r, F)_L = E(W_V^{r-1}, F)_L \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

и, значит,

$$d_N(W_L^r, L) = d_N(W_V^{r-1}, L) \qquad (N, r = 1, 2, \ldots).$$

§ 10.6. Оценка нечетных поперечников с помощью теоремы о поперечнике шара

Для получения точной оценки снизу нечетных поперечников классов W_M^r в C и W_L^r в L имеется простой и изящный путь, базирующийся, с одной стороны, на глубокой теореме 10.2.3 о поперечнике шара, а с другой — на экстремальных свойствах полиномиальных сплайнов. Эти свойства сплайнов представляют интерес и сами по себе.

Пусть $S_{2n}^{\cdot}$ — $2n$-мерное подпространство 2π-периодических функций вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \psi_k(x),$$

где функции $\psi_k(x)$ периода 2π задаются на $[0, 2\pi)$ равенствами

$$\psi_k(x) = \begin{cases} 1 & ((k-1)\pi/n \leqslant x < k\pi/n), \\ 0 & (0 \leqslant x < (k-1)\pi/n, \ k\pi/n \leqslant x < 2\pi). \end{cases} \tag{10.49}$$

Через S_{2n}^r $(r = 1, 2 \ldots)$ будем обозначать $2n$-мерное подпространство 2π-периодических интегралов от функций $f \in S_{2n}^{\cdot\cdot}$ при дополнительном условии, что $c_1 + c_2 + \ldots + c_{2n} = 0$. Таким образом, если $f \in S_{2n}^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$, то $f \in C^{r-1}$ и на каждом промежутке $[(k-1)\pi/n, k\pi/n]$

функция $f(x)$ есть алгебраический многочлен степени r. (Эти свойства можно было взять в качестве определения подпространства S_{2n}^r.) Функции множества S_{2n}^r $(r \geqslant 1)$ называют *полиномиальными сплайнами* степени r дефекта 1 по разбиению $\{k\pi/n\}$. В дальнейшем о них будем говорить просто как о *сплайнах*. Рассматривая подпространство S_{2n}^r при всех $r=0, 1, 2, \ldots$, мы будем иногда условно называть сплайнами также и кусочно-постоянные функции из S_{2n}^0.

Лемма 10.6.1. *Имеют место соотношения*

$$\|f^{(r)}\|_M \leqslant \mathcal{K}_r^{-1} n^r \|f\|_C \quad \forall f \in S_{2n}^r \quad (n,\ r=1, 2, \ldots); \tag{10.50}$$

$$\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r-1)}) \leqslant \mathcal{K}_r^{-1} n^r \|f\|_L \quad \forall f \in S_{2n}^{r-1} \quad (n,\ r=1, 2, \ldots). \tag{10.51}$$

Неравенства (10.50) *и* (10.51) *точные.*

Доказательство. В обоих случаях можно считать, что функция $f(x)$, а значит, и ее производные не являются тождественными константами, ибо иначе доказывать нечего.

Заметим далее, что умножение функции f на любую постоянную не отражается на неравенствах (10.50) и (10.51); поэтому (10.50) достаточно доказать для случая $\|f^{(r)}\|_M = 1$, а (10.51) — для случая $\bigvee\limits_0^{2\pi}(f^{(r-1)}) = 1$. Таким образом, надо установить, что если $f \in S_{2n}^r$ и $\|f^{(r)}\|_M = 1$, то

$$\|f\|_C \geqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \quad (n,\ r=1, 2, \ldots), \tag{10.52}$$

а если $f \in S_{2n}^{r-1}$ и $\bigvee\limits_0^{2\pi}(f^{(r-1)}) = 1$, то

$$\|f\|_L \geqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \quad (n,\ r=1, 2, \ldots). \tag{10.53}$$

Равенство $\|f^{(r)}\|_M = 1$ для $f \in S_{2n}^r$ означает, что хотя бы на одном из интервалов $((k-1)\pi/n,\ k\pi/n)$ или $f^{(r)}(t) \equiv 1$, или $f^{(r)}(t) \equiv -1$, а тогда, очевидно,

$$\|f^{(r-1)}\|_C \geqslant \frac{\pi}{2n}. \tag{10.54}$$

Если $r=1$, то (10.50) уже доказано, ибо $\mathscr{K}_1=\pi/2$. Пусть $r\geqslant 2$. Неравенство Колмогорова (5.52) при $k=r-1$ запишется в виде

$$\|f^{(r-1)}\|_C\leqslant \mathscr{K}_1\mathscr{K}_r^{-1/r}\|f\|_C^{1/r}\|f^{(r)}\|_M^{1-1/r},$$

а так как у нас $\|f^{(r)}\|_M=1$ и имеет место (10.54), то

$$\frac{1}{n}\leqslant \mathscr{K}_r^{-1/r}\|f\|_C^{1/r},$$

что равносильно (10.52).

Пусть теперь $f\in S_{2n}^{r-1}$ и

$$\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r-1)})=1. \tag{10.55}$$

Так как $f^{(r-1)}\in S_{2n}^0$, то

$$f^{(r-1)}(x)=\sum_{k=1}^{2n}c_k\psi_k(x)\qquad\left(\sum_{k=1}^{2n}c_k=0\right),$$

где $\psi_k(x)$ определены в (10.49), и ясно, что вариация функции $f^{(r-1)}(x)$ на каждом отрезке $(k-1)\pi/n\leqslant t\leqslant k\pi/n$ измеряется абсолютной величиной ее скачка в точке $k\pi/n$, т. е. равна $|c_k-c_{k+1}|$ $(c_{2n+1}=c_1)$. Поэтому

$$1=\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r-1)})=\sum_{k=1}^{2n}|c_k-c_{k+1}|\leqslant 2\sum_{k=1}^{2n}|c_k|,$$

в силу чего

$$\|f^{(r-1)}\|_L=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n}|c_k|\geqslant\frac{\pi}{2n} \tag{10.56}$$

и для $r=1$ (10.51) доказано. Если же $r\geqslant 2$, то, записав неравенство (6.66) при $k=r-1$:

$$\|f^{(r-1)}\|_L\leqslant \mathscr{K}_1\mathscr{K}_r^{-1/r}\|f\|_L^{1/r}\left[\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r-1)})\right]^{1-1/r},$$

подставим в него условие (10.55) и оценку (10.56). Получим

$$\frac{1}{n}\leqslant \mathscr{K}_r^{-1/r}\|f\|_L^{1/r},$$

и (10.51) доказано.

Знак равенства в (10.50) и (10.51), как нетрудно проверить, имеет место для функций f из S_{2n}^r с нулевым средним значением на периоде, у которых

$$f^{(r)}(x)=\sum_{k=1}^{2n}c_k\psi_k(x)\qquad (c_1=-c_2=c_3=\ldots=-c_{2n}).$$

В частности, равенство в (10.50) и (10.51) реализуют функции $\varphi_{nr}(x)$.

Лемма 10.6.1 доказана.

Считая S_{2n}^r $(r=1,\ 2,\ldots)$ подпространством в C, рассмотрим шар $\mathscr{K}_r n^{-r}U_{2n}^C$ функций из S_{2n}^r радиуса $\mathscr{K}_r n^{-r}$:

$$\mathscr{K}_r n^{-r}U_{2n}^C=\{f\colon f\in S_{2n}^r,\ \|f\|_C\leqslant\mathscr{K}_r n^{-r}\}.$$

Если $f\in\mathscr{K}_r n^{-r}U_{2n}^C$, то $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна и в силу (10.50) $\|f^{(r)}\|_M\leqslant 1$, т. е. $f\in W_M^r$. Это значит, что шар $\mathscr{K}_r n^{-r}U_{2n}^C$ содержится в классе W_M^r, и, применяя предложение 10.2.4, получаем оценку

$$d_{2n-1}(W_M^r,\ C)\geqslant\mathscr{K}_r n^{-r}\qquad (n,\ r=1,\ 2,\ldots).$$

Совершенно аналогично оценивается нечетный поперечник класса W_V^{r-1} в L. Шар

$$\mathscr{K}_r n^{-r}U_{2n}^L=\{f\colon f\in S_{2n}^{r-1},\ \|f\|_L\leqslant\mathscr{K}_r n^{-r}\}$$

в силу (10.51) содержится в классе W_V^{r-1} и предложение 10.2.4 сразу позволяет написать оценку

$$d_{2n-1}(W_V^{r-1},\ L)\geqslant\mathscr{K}_r n^{-r}\qquad (n,\ r=1,\ 2,\ldots).$$

Так как поперечники в L классов W_V^{r-1} и W_L^r совпадают, то

$$d_{2n-1}(W_L^r,\ L)\geqslant\mathscr{K}_r n^{-r}\qquad (n,\ r=1,\ 2,\ldots).$$

Отметим, что точную оценку снизу для нечетных поперечников классов W^rH^ω в C можно сразу получить из предложений 10.2.4 и 10.4.8. Действительно, ввиду 10.4.8 для любой функции $f\in M_{2n}^r\{\omega\}$ из неравенства $\|f\|_C\leqslant\|f_{nr}\|_C$ следует, что $f\in W^rH^\omega$, т. е. шар $\|f_{nr}\|U_2^C$. радиуса $\|f_{nr}\|$ подпространства $M_{2n}^r\{\omega\}$ принадлежит классу

W^rH^ω. В силу предложения 10.2.4

$$d_{2n-1}(W^rH^\omega, C) \geq \|f_{nr}\|_C \qquad (n=1, 2, \ldots; \ r=0, 1, \ldots).$$

В заключение найдем нечетные поперечники класса $H_2^{1/2}$ функций f из L_2, у которых $\omega(f, t)_2 \leq \sqrt{t}$.

Считая S_{2n}^0 подпространством в L_2, рассмотрим в нем шар

$$\rho U_{2n}^{L_2} = \{f:\ f \in S_{2n}^0,\ \|f\|_2 \leq \rho\},$$

где $\rho = {}^1/_2 (\pi/n)^{1/2}$.

Пусть $f \in \rho U_{2n}^{L_2}$ и

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \psi_k(t),$$

где $\psi_k(t)$ определены в (10.49). Тогда

$$\|f\|_2^2 = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{2n} c_k^2 \leq \rho^2 = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{n},$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{2n} c_k^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Далее при $0 < t < \pi/n$

$$\omega^2(f, t)_2 = \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_2^2 = t \sum_{k=1}^{2n} |c_{k+1} - c_k|^2 \qquad (c_{2n+1} = c_1),$$

и так как

$$\sum_{k=1}^{2n} |c_{k+1} - c_k|^2 = \sum_{k=1}^{2n} (c_{k+1}^2 - 2c_k c_{k+1} + c_k^2) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{k=1}^{2n} (c_{k+1}^2 + c_k^2) = 4 \sum_{k=1}^{2n} c_k^2,$$

то

$$\omega(f, t)_2 \leq \sqrt{t}\, 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} c_k^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{t}.$$

Если же $\pi/n \leq t \leq \pi$, то

$$\omega(f, t)_2 \leq 2\|f\|_2 \leq 2\rho = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \leq \sqrt{t}.$$

Таким образом, из включения $f \in \rho U_{2n}^{L_2}$ следует, что $f \in H_2^{1/2}$, т. е. $\rho U_{2n}^{L_2} \subset H_2^{1/2}$, и в силу предложения 10.2.4

$$d_{2n-1}\left(H_2^{1/2},\ L_2\right) \geq \rho = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2}. \qquad (10.57)$$

В сопоставлении с неравенством (9.35) это дает следующий результат:

$$d_{2n-1}\left(H_2^{1/2},\ L_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots).$$

§ 10.7. Об экстремальных подпространствах

Подпространство $\tilde{F}_N$ из X размерности N мы назвали экстремальным для класса $\mathfrak{M}$, если

$$E(\mathfrak{M},\ \tilde{F}_N)_X = \inf_{F_N} E(\mathfrak{M},\ F_N)_X = d_N(F_N,\ X).$$

Из результатов §§ 10.4 и 10.5 следует, что для классов W_M^r и $W^r H^\omega$ ($\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности) в пространстве C, а также для классов W_M^r, W_V^{r-1} и W_L^r в пространстве L экстремальными являются подпространства F_{2n-1}^T тригонометрических полиномов. Относительно этих подпространств интересно отметить два обстоятельства:

1) Подпространство F_{2n-1}^T является экстремальным для указанных выше классов при всех r и в этом смысле его можно назвать универсальным.

2) Никакое подпространство размерности $2n$ не дает для перечисленных выше классов лучшего приближения, чем подпространство F_{2n-1}^T, имеющее размерность $2n-1$. В частности, добавление к системе

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots,\ \cos(n-1)t,\ \sin(n-1)t$$

любой еще одной функции не улучшает аппроксимативных свойств порождаемого системой подпространства относительно этих классов.

Вопросы, связанные с существованием и описанием экстремальных подпространств для заданного класса $\mathfrak{M}$, еще недостаточно изучены, и мы здесь приведем лишь некоторые частные результаты.

Для классов W_M^r и $W^{r-1}H^\omega$ $(r=1, 2, \ldots)$ в пространстве M, а также для классов W_M^r, W_L^r и W_V^{r-1} $(r=1, 2, \ldots)$ в пространстве L можно указать еще один интересный класс экстремальных подпространств четной размерности, существенно зависящих, впрочем, от r. Таковыми являются определенные в начале § 10.6 подпространства S_{2n}^{r-1} полиномиальных сплайнов.

Заметим, во-первых, что S_{2n}^r можно рассматривать как частный случай подпространств M_{2n}^r, которые строились в § 10.4 по $2\pi/n$-периодической функции $\Psi_0(t)$. Действительно, если в качестве $\Psi_0(t)$ взять функцию $\psi_0(t)$ периода $2\pi/n$, равную 1 для $0 \leqslant t < \pi/n$ и равную -1 для $\pi/n \leqslant t < 2\pi/n$, то построенные в § 10.4 подпространства M_{2n}^r будут как раз подпространствами S_{2n}^r. Таким образом, на сплайны из S_{2n}^r распространяются все результаты, полученные в § 10.4 для подпространств $M_{2n}^r(\beta)$ и, в частности, предложения 10.4.6 и 10.4.7, которые мы здесь переформулируем для данного конкретного и важного случая.

Предложение 10.7.1. *Подпространство сплайнов S_{2n}^r интерполирует в точках*

$$t_{kr} = \begin{cases} (2k-1)\pi/2n & (r=0, 2, 4, \ldots), \\ (k-1)\pi/n & (r=1, 3, 5, \ldots) \quad (k=1, 2, \ldots, 2n), \end{cases}$$

причем, каковы бы ни были $2n$ чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}$, существует единственный сплайн $\sigma(t) \in S_{2n}^r$ такой, что

$$\sigma(t_{kr}) = \eta_k \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n).$$

В силу предложения 10.7.1 каждой функции $f \in C$ можно сопоставить единственный сплайн $\sigma_{nr}(f, t)$ из S_{2n}^r, интерполирующий функцию f в точках t_{kr}, т. е. такой, что

$$\sigma_{nr}(f, t_{kr}) = f(t_{kr}) \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n).$$

Если ввести в рассмотрение фундаментальные сплайны $l_i(t) = l_i(r, n; t)$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$ из S_{2n}^r, определяемые равенствами

$$l_i(t_{kr}) = \begin{cases} 1 & (k=i), \\ 0 & (k \neq i) \end{cases} \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n),$$

то сплайн $\sigma_{nr}(f, t)$ может быть записан в виде

$$\sigma_{nr}(f, t) = \sum_{i=1}^{2n} f(t_{ir})\, l_i(t).$$

Таким образом, интерполяционные сплайны $\sigma_{nr}(f, t)$ линейно зависят от f и, следовательно, определяют некоторый линейный метод приближения.

Оказывается, что относительно классов W^r_M $(r = 1, 2, \ldots)$ интерполяционные сплайны $\sigma_{n,r-1}(f, t)$ из S^{r-1}_{2n} обладают наилучшими аппроксимационными свойствами в метриках M и L. Это будет немедленно вытекать из следующего интересного факта.

Теорема 10.7.2. *Если $f \in W^r_M$ $(r = 1, 2, \ldots)$, то при всех t справедлива оценка*

$$|f(t) - \sigma_{n,r-1}(f, t)| \leqslant |\varphi_{nr}(t)| \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{10.58}$$

где $\varphi_{nr}(t)$ — функции, определенные в § 5.4.

Доказательство. Сначала рассмотрим самый простой случай $r = 1$. Пусть $f \in W^1_M = H^1$ и, значит,

$$|f(t') - f(t'')| \leqslant |t' - t''|.$$

Функция $\sigma_{n0}(f, t)$, интерполирующая $f(t)$ в точках $(2k-1)\pi/n$, постоянна на каждом промежутке $[(k-1)\pi/n, k\pi/n)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$. Фиксируем t из $[0, 2\pi)$, и пусть $(\nu - 1)\pi/n \leqslant t < \nu\pi/n$. Тогда

$$|f(t) - \sigma_{n0}(f, t)| = |f(t) - f((2\nu - 1)\pi/2n)| \leqslant$$
$$\leqslant |t - (2\nu - 1)\pi/n| = |\varphi_{n1}(t)|.$$

В общем случае при $r \geqslant 2$ докажем справедливость оценки (10.58), рассуждая от противного. Пусть для некоторой функции f из W^r_M $(r = 2, 3, \ldots)$ в точке $\bar{t} \in [0, 2\pi)$ выполняется неравенство

$$|f(\bar{t}) - \sigma_{n,r-1}(f, \bar{t})| > |\varphi_{nr}(\bar{t})|.$$

Положив для краткости $\delta(t) = f(t) - \sigma_{n,r-1}(f, t)$, заметим, что точки интерполяции $t_{k,r-1}$, в которых $\delta(t)$ обращается в нуль, являются также нулями функции $\varphi_{nr}(t)$. Ясно, что $\bar{t} \neq t_{k,r-1}$ и $\varphi_{nr}(\bar{t}) \neq 0$, так что можно выбрать число λ, $0<|\lambda|<1$, так, чтобы выполнялось соотношение

$$\lambda\delta(\bar{t})=\varphi_{nr}(\bar{t}).$$

Теперь функция

$$\Delta(t)=\lambda\delta(t)-\varphi_{nr}(t)$$

обращается в нуль на периоде $[0, 2\pi)$ в точках $t_{k, r-1}$ $(k=1, \ldots, 2n)$ и еще в точке $\bar{t}$, т. е. имеет на $[0, 2\pi)$ по меньшей мере $2n+1$ нуль. Применяя теорему Ролля (если $r>2$), приходим к выводу, что по меньшей мере $2n+1$ различных нулей должна иметь и функция $\Delta^{(r-2)}(t)$.

Покажем, что это невозможно. Действительно, $\Delta^{(r-2)}(t)$ является интегралом от функции

$$\Delta^{(r-1)}(t)=\lambda\delta^{(r-1)}(t)-\varphi_{n1}(t), \tag{10.59}$$

причем

$$\delta^{(r-1)}(t)=f^{(r-1)}(t)-\sum_{k=1}^{2n}c_k\psi_k(t),$$

а функции $\psi_k(t)$ определены в (10.49). На каждом промежутке $(k-1)\pi/n\leqslant t<k\pi/n$ $(k=1, \ldots, 2n)$

$$\lambda\delta^{(r-1)}(t)=\lambda f^{(r-1)}(t)-\lambda c_k,$$

и так как $|\lambda|<1$, а $f^{(r-1)}\in H^1$, то для любых точек t' и t'' из $[(k-1)\pi/n, k\pi/n)$ таких, что $f^{(r-1)}(t')\neq f^{(r-1)}(t'')$, будет

$$|\lambda\delta^{(r-1)}(t')-\lambda\delta^{(r-1)}(t'')|=|\lambda||f^{(r-1)}(t')-f^{(r-1)}(t'')|<$$
$$<|f^{(r-1)}(t')-f^{(r-1)}(t'')|\leqslant|t'-t''|=|\varphi_{n1}(t')-\varphi_{n1}(t'')|.$$

Следовательно, на любом отрезке $[t', t'']\subset[(k-1)\pi/n, k\pi/n)$ абсолютная величина приращения функции $\lambda\delta^{(r-1)}(t)$ строго меньше абсолютной величины приращения линейной на $[(k-1)\pi/n, k\pi/n]$ функции $\varphi_{n1}(t)$. Поэтому разность (10.59) может обратиться в нуль на промежутке $[(k-1)\pi/n, k\pi/n)$ не более одного раза, а если она меняет знак в точке $\nu\pi/n$ $(0\leqslant\nu\leqslant 2n-1)$ (что возможно, если $\Delta^{(r-1)}(t)$ разрывна в этой точке), то по крайней мере на одном из прилежащих интервалов $((\nu-1)\pi/n, \nu\pi/n)$ или $(\nu\pi/n, (\nu+1)\pi/n)$ функция $\Delta^{(r-1)}(t)$ сохраняет знак.

Теперь ясно, что функция $\Delta^{(r-1)}(t)$ на периоде $[0, 2\pi)$ не может обращаться в нуль более чем в $2n$ точках, а также не может более чем $2n$ раз менять на $[0, 2\pi)$ знак. Но тогда интеграл от $\Delta^{(r-1)}(t)$, т. е. функция $\Delta^{(r-2)}(t)+c$, может иметь своими нулями только изолированные точки и число их на $[0, 2\pi)$ не больше чем $2n$.

Теорема 10.7.2 доказана. Из нее немедленно следует

Теорема 10.7.3. *Для любой функции $f \in W^r_M$ $(r=1, 2, \ldots)$ справедливы соотношения*

$$\|f-\sigma_{n, r-1}(f)\|_M \leqslant \|\varphi_{nr}\|_C = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n=1, 2, \ldots), \quad (10.60)$$

а также

$$\|f-\sigma_{n, r-1}(f)\|_p \leqslant \|\varphi_{nr}\|_p \quad (1 \leqslant p < \infty,\ n=1, 2, \ldots), \quad (10.61)$$

в частности,

$$\|f-\sigma_{n, r-1}(f)\|_L \leqslant \|\varphi_{nr}\|_L = \frac{4\mathcal{K}_{r+1}}{n^r} \quad (n=1, 2, \ldots). \quad (10.62)$$

Оценки (10.60) и (10.62) вместе с теоремами 10.4.1 и 10.5.2 показывают, что интерполяционные сплайны $\sigma_{n, r-1}(f, t)$ из S^{r-1}_{2n} не только доставляют на всем классе W^r_M наилучшее приближение (среди всех функций подпространства S^{r-1}_{2n}) в метриках M и L, но и реализуют поперечники этого класса в соответствующих пространствах, так что

$$\sup_{f \in W^r_M} \|f-\sigma_{n, r-1}(f)\|_M = E\left(W^r_M, S^{r-1}_{2n}\right)_M = \\ = d_{2n}\left(W^r_M, M\right) = d'_{2n}\left(W^r_M, M\right) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n, r=1, 2, \ldots) \quad (10.63)$$

(разумеется, при $r \geqslant 2$ метрику M надо заменить на C) и

$$\sup_{f \in W^r_M} \|f-\sigma_{n, r-1}(f)\|_L = E\left(W^r_M, S^{r-1}_{2n}\right)_L = \\ = d_{2n}\left(W^r_M, L\right) = d'_{2n}\left(W^r_M, L\right) = \frac{4\mathcal{K}_{r+1}}{n^r} \qquad (n, r=1, 2, \ldots). \quad (10.64)$$

Подчеркнем еще раз, что интерполяционные сплайны $\sigma_{n, r-1}(f, t)$ дают эффективно определяемый по значениям функции f в точках $t_{k,r-1}$ линейный метод приближения, гарантирующий на классе W_M^r в метриках M и L самую минимальную погрешность приближения, какую только могут дать подпространства размерности $2n$.

Покажем теперь, что подпространство S_{2n}^{r-1} является экстремальным в пространстве L для классов W_L^r и W_V^{r-1}. В силу равенств (10.35) нам достаточно для этого установить, что

$$E\left(W_L^r,\ S_{2n}^{r-1}\right)_L = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \qquad (n,\ r = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{10.65}$$

Будем исходить из соотношения двойственности (2.26), которое в нашем случае запишется в виде

$$E\left(f,\ S_{2n}^{r-1}\right)_L = \sup_{\substack{\|h\|_M \leqslant 1 \\ h \perp S_{2n}^{r-1}}} \int_0^{2\pi} f(t)\,h(t)\,dt, \tag{10.66}$$

где $f \in L$, а $h \perp S_{2n}^{r-1}$ означает, что

$$\int_0^{2\pi} h(t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \quad \forall \varphi \in S_{2n}^{r-1}$$

и, в частности,

$$\int_0^{2\pi} h(t)\,dt = 0,$$

ибо подпространство S_{2n}^{r-1} содержит константу.

Рассматривая наилучшее приближение в пространстве L сплайнами из S_{2n}^{r-1} функций $f \in W_p^r$ $(r = 1,\ 2,\ \ldots;$ $1 \leqslant p \leqslant \infty)$, обозначим через $W_M^r\left(S_{2n}^{r-1}\right)_{p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$ множество функций g из W_M^r, удовлетворяющих условиям

$$\|g\|_{p'} = \min_{\lambda} \|g - \lambda\|_{p'}, \tag{10.67}$$

$$\int_0^{2\pi} g^{(r)}(t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \quad \forall \varphi \in S_{2n}^{r-1}. \tag{10.68}$$

Пусть в (10.66) $f \in W_p^r$. Проинтегрировав r раз по частям и распорядившись при этом соответствующим образом произвольными постоянными, придем к равенству

$$E(f,\ S_{2n}^{r-1})_L = \sup_{g \in W_M^r (S_{2n}^{r-1})_{p'}} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\, g(t)\, dt,$$

так что

$$E(W_p^r,\ S_{2n}^{r-1})_L = \sup_{g \in W_M^r (S_{2n}^{r-1})_{p'}} \sup_{\substack{\|\psi\|_p \leqslant 1 \\ \int_0^{2\pi} \psi(t)\, dt = 0}} \int_0^{2\pi} \psi(t)\, g(t)\, dt.$$

Если воспользоваться соотношением (2.28) и учесть, что $g(t)$ удовлетворяет условию (10.67), то получим:

$$E(W_p^r,\ S_{2n}^{r-1})_L = \sup_{g \in W_M^r (S_{2n}^{r-1})_{p'}} \|g\|_{p'}. \qquad (10.69)$$

Вычислим верхнюю грань в правой части (10.69). Из условия (10.68), которому удовлетворяют функции множества $W_M^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}$ следует, что для $g \in W_M^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}$

$$\int_0^{2\pi} g'(t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \quad \forall \varphi \in S_{2n}^0.$$

Но если $f \in L$ и $f \perp S_{2n}^0$, то

$$\int_{\Delta_k} f(t)\, dt = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n), \qquad (10.70)$$

где, как и выше, Δ_k есть полуинтервал $[(k-1)\pi/n,\ k\pi/n)$. Действительно, положив

$$\int_{\Delta_k} f(t)\, dt = \alpha_k$$

и записав условие $f \perp S_{2n}^0$ в виде

$$\sum_{k=1}^{2n} c_k \alpha_k = 0 \quad \forall c_k\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n),$$

при $\bar{c}_k = \operatorname{sign} \alpha_k$ получим

$$\sum_{k=1}^{2n} |\alpha_k| = 0,$$

что равносильно (10.70).

Таким образом, для любой функции $g(t)$ из $W_M^r(S_{2n}^{r-1})_{p'}$ выполняются равенства

$$\int\limits_{\Delta_k} g'(t)\,dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

так что, если положить

$$g_*(t) = \int\limits_0^x g'(t)\,dt,$$

то

$$g_*(k\pi/n) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

причем, в силу (10.67),

$$\|g_*\|_{p'} \geqslant \|g\|_{p'}. \tag{10.71}$$

Докажем, что для всех t

$$|g_*(t)| \leqslant |\psi_{nr}(t)|, \tag{10.72}$$

где

$$\psi_{nr}(t) = \begin{cases} \varphi_{nr}(t) & (r = 0, 2, 4, \ldots), \\ \varphi_{nr}(t + \pi/2n) & (r = 1, 3, 5, \ldots), \end{cases}$$

и, следовательно, функция $\psi_{nr}(t)$ имеет простые нули в точках $k\pi/n$ и только в них.

Рассуждая от противного, предположим, что $|g_*(\bar t)| > \psi_{nr}(\bar t)|$ $(0 < \bar t < 2\pi,\ \bar t \neq k\pi/n)$. Можно выбрать число λ, $0 < |\lambda| < 1$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda g_*(\bar t) = \psi_{nr}(\bar t),$$

и тогда разность

$$\delta(t) = \psi_{nr}(t) - \lambda g_*(t)$$

будет иметь на периоде $[0, 2\pi)$, по меньшей мере, $2n+1$ нуль (в точках $k\pi/n$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ и $\bar t$). Но это невозможно, ибо функция $\delta^{(r)}(t) = \psi_{n0}(t) - \lambda g^{(r)}(t)$ меняет знак на $[0, 2\pi)$ ровно $2n$ раз: $\psi_{n0}(t)$ принимает значения ± 1 везде, кроме $2n$ равноотстоящих точек на периоде, в которых она меняет знак, а $|\lambda g^{(r)}(t)| < 1$ всюду.

Из (10.71) и (10.72) вытекает, что

$$\|g\|_{p'} \leqslant \|\psi_{nr}\|_{p'} = \|\varphi_{nr}\|_{p'}. \tag{10.73}$$

Соотношения (10.73) справедливы для любой функции g из множества $W'^r_M(S'^{r-1}_{2n})_{p'}$; легко проверяется, что $\psi_{nr} \in W'^r_M(S'^{r-1}_{2n})_{p'}$. Поэтому, с учетом (10.69), приходим к равенствам

$$E(W^r_p,\ S'^{r-1}_{2n})_L = \sup_{g \in W'^r_M(S'^{r-1}_{2n})_{p'}} \|g\|_{p'} = \|\varphi_{nr}\|_{p'} \tag{10.74}$$

$$(n,\ r = 1,\ 2,\ \ldots;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1/p + 1/p' = 1).$$

Из (10.74) при $p = 1$ получаем (10.65).

Что касается экстремальных подпространств в C для классов W^rH^ω, то здесь интерес может представить следующее утверждение общего характера.

Теорема 10.7.4. *Если при некотором $r = 0, 1, 2, \ldots$ подпространство F_N $(N = 1, 2, \ldots)$ является экстремальным для класса W^{r+1}_M в C, то оно является экстремальным и для класса W^rH^ω в C, при любом выпуклом вверх модуле непрерывности $\omega(t)$.*

Доказательство. Рассматривая наряду с W^r_M также классы W^r_MK функций $f \in C^{r-1}$, у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_M \leqslant K$, заметим, что в силу равенства (§ 5.9)

$$E(W^r_MK,\ F_N)_C = KE(W^r_M,\ F_N)_C \qquad (K > 0)$$

подпространство, экстремальное для класса W^r_M, будет экстремальным также и для W^r_MK при любом $K > 0$.

В § 8.2 было доказано, что если $f \in W^rH^\omega$, то

$$\inf_{\varphi \in W^{r+1}_M K} \|f - \varphi\|_C \leqslant \max_{0 < a \leqslant \pi} \int_0^a [\omega'(t) - K]\,\Phi_{ar}(t)\,dt, \tag{10.75}$$

где $\Phi_{ar}(t)$ — хорошо известные нам функции, введенные в § 6.6. Фиксируем $N = 1, 2, \ldots$, и пусть $n = [(N+1)/2]$ — целая часть числа $(N+1)/2$. Выберем $K = K_n$ таким образом, чтобы максимум в правой части (10.75) достигался при $a = \pi/n$, и пусть $\varphi_0(t)$ — функция наилучшего приближения для f в классе $W^{r+1}_M K_n$. Тогда

$$\|f - \varphi_0\|_C = E(f,\ W^{r+1}_M K_n)_C \leqslant \int_0^{\pi/n} [\omega'(t) - K_n]\,\Phi_{\pi/n,\,r}(t)\,dt. \tag{10.76}$$

Если $\tilde{F}_N$ — экстремальное подпространство размерности N для класса W_M^{r+1} (а значит, и для $W_M^{r+1}K_n$), то, используя теорему 10.4.1, будем иметь

$$E(\varphi_0, \tilde{F}_N)_C \leqslant E(W_M^{r+1}K_n, \tilde{F}_N)_C = d_N(W_M^{r+1}K_n, C) = \\ = K_n d_N(W_M^{r+1}, C) = \frac{K_n \mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}. \quad (10.77)$$

Так как (см. (6.47))

$$\int_0^{\pi/n} \Phi_{\pi/n, r}(t)\, dt = \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots; r = 0, 1, \ldots),$$

то оценки (10.76) и (10.77) позволяют написать

$$E(f, \tilde{F}_N)_C \leqslant E(f - \varphi_0, \tilde{F}_N)_C + E(\varphi_0, \tilde{F}_N)_C \leqslant \\ \leqslant \|f - \varphi_0\|_C + E(\varphi_0, \tilde{F}_N)_C \leqslant \\ \leqslant \int_0^{\pi/n} [\omega'(t) - K_n]\, \Phi_{\pi/n, r}(t)\, dt + \frac{K_n \mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} = \\ = \int_0^{\pi/n} \omega'(t)\, \Phi_{\pi/n, r}(t)\, dt.$$

Это справедливо для любой $f \in W^r H^\omega$, а потому

$$E(W^r H^\omega, \tilde{F}_N)_C \leqslant \int_0^{\pi/n} \omega'(t)\, \Phi_{\pi/n, r}(t)\, dt = \\ = \frac{1}{n^{r+1}} \int_0^{\pi} \Phi_{\pi r}(t)\, \omega'\left(\frac{t}{n}\right) dt,$$

и остается заметить, что выражение в правой части есть, в силу теоремы 10.4.2, N-мерный поперечник класса $W^r H^\omega$ в пространстве C.

Из теоремы 10.7.4 и равенств (10.63) следует, что подпространство сплайнов S_{2n}^r размерности $2n$, являясь экстремальным для W_M^{r+1}, будет экстремальным подпространством также и для класса $W^r H^\omega$ при любом выпуклом вверх $\omega(t)$, т. е. $E(W^r H^\omega, S_{2n}^r)_C = d_{2n}(W^r H^\omega, C) = \|f_{nr}\|_C$ ($n = 1, 2, \ldots; r = 0, 1, \ldots$). (При $r = 0$ C надо заменить на M.)

ДОПОЛНЕНИЕ

§ Д.1. Неравенства Гельдера и Минковского для интегралов

1. *Неравенство Гельдера* для интегралов имеет вид

$$\int_a^b |f(t)\varphi(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |\varphi(t)|^{p'}\,dt\right)^{1/p'} \quad (1/p+1/p'=1), \qquad (Д.1)$$

где $f \in L_p(a, b)$ $(1<p<\infty)$, $\varphi \in L_{p'}(a, b)$. Записав (Д.1) в виде

$$\int_a^b |f(t)\varphi(t)|\,dt \leqslant \|f\|_p \|\varphi\|_{p'} \qquad (\|g\|_p = \|g\|_{L_p(a,\,b)}),$$

замечаем, что оно верно также при $p=1$ и $p=\infty$ (если под $\|\varphi\|_\infty$ понимать $\|\varphi\|_M$) и получается в этих случаях тривиальным образом.

При $1<p<\infty$ неравенство (Д.1) легко выводится из следующей леммы.

Лемма. *Если* $1<p<\infty$ *и* $1/p+1/p'=1$, *то для любых* $a \geqslant 0$ *и* $b \geqslant 0$ *выполняется соотношение*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \qquad (Д.2)$$

в котором знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b^{1/(p-1)}$, т. е. $a^p = b^{p'}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\eta(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} - x \qquad (x \geqslant 0).$$

Так как $\eta'(x) = x^{p-1} - 1$, $\eta''(x) = (p-1)x^{p-2}$, то $\eta(x)$ имеет абсолютный минимум в единственной точке $x=1$, причем

$$\min_{x \geqslant 0} \eta(x) = \eta(1) = 0.$$

Таким образом, для всех $x \geqslant 0$

$$\frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} \geqslant x, \tag{Д.3}$$

и знак равенства в (Д.3) имеет место только при $x = 1$.

Считая, что $a > 0$ и $b > 0$ (иначе доказывать нечего), и положив в (Д.3) $x = ab^{1/(1-p)} = ab^{-p'/p}$, будем иметь

$$\frac{1}{p} a^p b^{-p'} + \frac{1}{p'} \geqslant ab^{-p'/p}.$$

Если умножить обе части на $b^{p'}$, то получим (Д.2).

В силу предыдущего знак равенства в (Д.2) имеет место в единственном случае, когда $ab^{1/(1-p)} = 1$, т. е. $a = b^{1/(p-1)}$ или $a^p = b^{p'}$.

Доказывая неравенство (Д.1), заметим, что оно тривиально, если почти всюду $|f(t)\varphi(t)| = 0$. Поэтому считаем, что каждая из функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ отлична от нуля на множестве положительной меры и, следовательно,

$$A \overset{\mathrm{def}}{=} \|f\|_p > 0, \qquad B \overset{\mathrm{def}}{=} \|\varphi\|_{p'} > 0.$$

Если положить в (Д.2) $a = |f(t)|/A$, $b = |\varphi(t)|/B$, то получим неравенство

$$\frac{|f(t)\varphi(t)|}{AB} \leqslant \frac{|f(t)|^p}{pA^p} + \frac{|\varphi(t)|^{p'}}{p'B^{p'}},$$

справедливое по крайней мере почти всюду на (a, b). Интегрируя по t от a до b, найдем

$$\frac{1}{AB} \int_a^b |f(t)\varphi(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

т. е.

$$\int_a^b |f(t)\varphi(t)|\, dt \leqslant AB = \|f\|_p \|\varphi\|_{p'}.$$

Знак равенства по доказанному выше возможен здесь лишь при условии, что

$$\frac{|f(t)|^p}{A^p} = \frac{|\varphi(t)|^{p'}}{B^{p'}},$$

т. е.

$$|f(t)|^p = A^p B^{-p'} |\varphi(t)|^{p'} = C |\varphi(t)|^{p'},$$

что означает пропорциональность функций $|f(t)|^p$ и $|\varphi(t)|^{p'}$ (почти всюду на (a, b)).

2. *Неравенство Минковского* для интегралов

$$\left(\int_a^b |f(t)+\varphi(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \quad (\text{Д.4})$$

$$(1 \leqslant p < \infty)$$

представляет собой по сути дела третью аксиому нормы в пространстве $L_p(a, b)$:

$$\|f+\varphi\|_p \leqslant \|f\|_p + \|\varphi\|_p \qquad (f,\ \varphi \in L_p(a,\ b)).$$

Доказывая его, можно, конечно, считать, что обе функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ отличны от нуля на множестве положительной меры, и то же самое справедливо для $f(t)+\varphi(t)$. Имеем

$$\int_a^b |f(t)+\varphi(t)|^p\,dt = \int_a^b |f(t)+\varphi(t)|^{p-1}\,|f(t)+\varphi(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(t)+\varphi(t)|^{p-1}\,|f(t)|\,dt + \int_a^b |f(t)+\varphi(t)|^{p-1}\,|\varphi(t)|\,dt.$$

Так как $|f+\varphi|^{(p-1)/p'} = |f+\varphi|^p \in L(a, b)$, то $|f+\varphi|^{p-1} \in$ $\in L_{p'}(a, b)$, и, применив к каждому из двух последних интегралов неравенство Гельдера, получим

$$\int_a^b |f+\varphi|^{p-1}\,|f|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |f+\varphi|^p\,dt\right)^{1/p'} \|f\|_p, \quad (\text{Д.5})$$

$$\int_a^b |f+\varphi|^{p-1}\,|\varphi|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |f+\varphi|^p\,dt\right)^{1/p'} \|\varphi\|_p. \quad (\text{Д.6})$$

Таким образом,

$$\int_a^b |f+\varphi|^p\,dt \leqslant \left(\int_a^b |f+\varphi|^p\,dt\right)^{1/p'} (\|f\|_p + \|\varphi\|_p),$$

и чтобы получить (Д.4), надо лишь разделить обе части на $\left(\int_a^b |f+\varphi|^p\,dt\right)^{1/p'}$.

Исследуя возможность знака равенства в (Д.4), заметим, что для этого необходимо, во всяком случае, выполнение со знаком равенства каждого из соотношений (Д.5) и (Д.6), написанных в силу неравенства Гельдера. Следовательно, для знака равенства в (Д.4) необходимо, чтобы функции $|f(t)|^p$ и $|\varphi(t)|^p$ были (с точностью до множества меры нуль) пропорциональны $|f(t)+\varphi(t)|^{(p-1)p'} = |f(t)+\varphi(t)|^p$. Но если $|f(t)| = c_1 |f(t)+\varphi(t)|$ и $|\varphi(t)| = c_2 |f(t)+\varphi(t)|$, то

$$f(t) = c\varphi(t) \qquad (c > 0). \tag{Д.7}$$

Легко проверить, что условие (Д.7) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы в (Д.4) был знак равенства.

3. *Обобщенным неравенством Минковского* называют соотношение

$$\left\{\int_a^b \left|\int_c^d f(x, y)\,dy\right|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant \int_c^d \left\{\int_a^b |f(x, y)|^p\,dx\right\}^{1/p} dy \tag{Д.8}$$
$$(1 \leqslant p < \infty).$$

Чтобы доказать его для $1 < p < \infty$ (при $p = 1$ оно очевидно), положим

$$J(x) = \int_c^d |f(x, y)|\,dy.$$

Если $\int_a^b J^p(x)\,dx = 0$, то на (a, b) почти всюду $J(x) = 0$, а значит, почти всюду на прямоугольнике $(a < x < b,$ $c < y < d)$ $f(x, y) = 0$, и мы приходим к тривиальному случаю. Поэтому считаем в дальнейшем, что $\int_a^b J^p(x)\,dx > 0$.

Предположим сначала, что

$$\int_a^b J^p(x)\,dx < +\infty, \tag{Д.9}$$

т. е. $J \in L_p(a, b)$, а значит, $J^{p-1} \in L_{p'}(a, b)$ $(1/p + 1/p' = 1)$. В силу теоремы Фубини

$$\int_a^b J^p(x)\,dx = \int_a^b J^{p-1}(x)\left(\int_c^d |f(x, y)|\,dy\right)dx =$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b J^{p-1}(x)\,|f(x, y)|\,dx\right)dy. \tag{Д.10}$$

Применение неравенства Гельдера к внутреннему интегралу дает

$$\int_a^b J^{p-1}(x)\,|f(x,\ y)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b J^p(x)\,dx\right)^{1/p'} \left(\int_a^b |f(x,\ y)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Эта оценка справедлива для почти всех y из $(c,\ d)$, и, подставляя ее в (Д.10), получим соотношение

$$\int_a^b J^p\,dx \leqslant \left(\int_a^b J^p\,dx\right)^{1/p'} \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,\ y)|^p\,dx\right)^{1/p} dy,$$

разделив обе части которого на $\left(\int_a^b J^p\,dx\right)^{1/p'}$ придем к (Д.8).

Теперь освободимся от ограничения (Д.9). Пусть

$$|f(x,\ y)|_N = \min\{|f(x,\ y)|,\ N\} \qquad (N > 0).$$

Тогда почти для всех $x \in (a,\ b)$

$$J_N(x) \overset{\text{def}}{=} \int_c^d |f(x,\ y)|_N\,dy \leqslant N(d-c),$$

и следовательно,

$$\int_a^b J_N^p(x)\,dx < \infty \qquad (N > 0).$$

В силу уже доказанного для любого $N > 0$

$$\left(\int_a^b J_N^p(x)\,dx\right)^{1/p} \leqslant \int_c^d \left\{\int_a^b |f(x,\ y)|_N^p\,dx\right\}^{1/p} dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_c^d \left\{\int_a^b |f(x,\ y)|^p\,dx\right\}^{1/p} dy,$$

и в пределе при $N \to +\infty$ получаем (Д.8).

Заметим, что неравенство (Д.8) можно записать в виде

$$\left\|\int_c^d f(\cdot,\ y)\,dy\right\|_p \leqslant \int_c^d \|f(\cdot,\ y)\|_p\,dy$$

(норма интеграла не превосходит интеграла от нормы), причем в такой записи оно будет верным, если $L_p(a,\ b)$ заменить на $M(a,\ b)$ или $C[a,\ b]$ при условии, разумеется, что соответствующие нормы $\|f(\cdot,\ y)\|$ имеют смысл. Таким образом,

$$\left\|\int_c^d f(\cdot,\ y)\,dy\right\|_X \leqslant \int_c^d \|f(\cdot,\ y)\|_X\,dy, \tag{Д.11}$$

где под X можно понимать $L_p(a,\ b)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ или $C[a,\ b]$.

§ Д.2. Некоторые экстремальные соотношения

1. Если $f(t)$ — фиксированная функция из $L_p(a,\ b)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, то имеет место равенство

$$\sup_{\|\varphi\|_{p'}\leqslant 1}\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt=\|f\|_p \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right), \tag{Д.12}$$

где, как и в § Д.1, ради сокращения записи положено

$$\|g\|_p=\|g\|_{L_p(a,\ b)}\overset{\text{def}}{=}\left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \qquad (1<p<\infty),$$

а под $\|g\|_\infty$ и $\|g\|_1$ понимается соответственно

$$\|g\|_M=\|g\|_{M(a,\ b)}\overset{\text{def}}{=}\sup_{a<t<b}\operatorname{vrai}|g(t)|$$

и $\|g\|_L=\|g\|_{L(a,\ b)}$.

Пусть сначала $1<p<\infty$. В силу неравенства Гельдера

$$\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt\leqslant\|f\|_p\,\|\varphi\|_{p'},$$

так что для любой $\varphi\in L_{p'}(a,\ b)$ с нормой $\|\varphi\|_{p'}\leqslant 1$

$$\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt\leqslant\|f\|_p. \tag{Д.13}$$

Положим

$$\varphi_0(t)=\frac{|f(t)|^{p-1}\operatorname{sign}f(t)}{\|f\|_p^{p-1}} \qquad (a<t<b).$$

Так как

$$|\varphi_0(t)|^{p'}=\frac{|f(t)|^{(p-1)p'}}{\|f\|_p^{(p-1)p'}}=\frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p},$$

то $\varphi_0 \in L_{p'}(a, b)$, причем

$$\|\varphi_0\|_{p'} = \left(\int_a^b \frac{|f(t)|^p\,dt}{\|f\|_p^p}\right)^{1/p'} = \frac{1}{\|f\|_p^{p/p'}}\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p'}} = 1.$$

Далее имеем

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}}\int_a^b |f(t)|^p\,dt = \|f\|_p,$$

т. е. функция φ_0 реализует в (Д.13) знак равенства, и (Д.12) для $1 < p < \infty$ доказано.

Если $p = 1$, то, какова бы ни была функция $\varphi \in M(a, b)$, $\|\varphi\|_M \leqslant 1$,

$$\int_a^b f\varphi\,dt \leqslant \int_a^b |f|\,|\varphi|\,dt \leqslant \|f\|_L\,\|\varphi\|_M \leqslant \|f\|_L,$$

причем для функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sign} f(t)$ здесь имеет место точное равенство, так что (Д.12) доказано и в этом случае.

Рассмотрим, наконец, случай $p = \infty$, когда $f \in M(a, b)$. Для любой функции $\varphi \in L(a, b)$ с нормой $\|\varphi\|_L \leqslant 1$

$$\int_a^b f\varphi\,dt \leqslant \int_a^b |f|\,|\varphi|\,dt \leqslant \|f\|_M\,\|\varphi\|_L \leqslant \|f\|_M.$$

Покажем, что всегда существует в множестве $L(a, b)$ функция с единичной нормой, для которой левая часть сколь угодно мало отличается от правой. Зададим $\varepsilon > 0$, и пусть

$$e = \{t : t \in (a, b)\ |f(t)| > \|f\|_M - \varepsilon\}.$$

Ясно, что $\operatorname{mes} e > 0$. Положим

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign} f(t)}{\operatorname{mes} e} & (x \in e), \\ 0 & (x \in (a, b) \setminus e). \end{cases}$$

Имеем

$$\|\varphi_\varepsilon\|_L = \int_e \frac{|\operatorname{sign} f(t)|}{\operatorname{mes} e}\,dt \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} e}\int_e dt = 1,$$

и в силу определения множества e

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_\varepsilon(t)\,dt = \int_e \frac{f(t)\operatorname{sign} f(t)}{\operatorname{mes} e}\,dt = \frac{1}{\operatorname{mes} e}\int_e |f(t)|\,dt >$$

$$> \frac{1}{\operatorname{mes} e}(\|f\|_M - \varepsilon)\operatorname{mes} e = \|f\|_M - \varepsilon.$$

Этим (Д.12) доказано и при $p=\infty$.

2. Для любой фиксированной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(t)$ (т. е. для $f \in C[a, b]$) справедливо равенство

$$\sup_{\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \leqslant 1} \int_a^b f(t)\,dg(t) = \|f\|_C, \tag{Д.14}$$

где

$$\|f\|_C = \|f\|_{C[a,\,b]} \overset{\text{def}}{=} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$$

и верхняя грань вычисляется по всем функциям $g(t)$, вариация которых на $[a, b]$ не превосходит единицы.

В самом деле, если $f \in C[a, b]$, а $g(t)$ имеет ограниченное изменение на $[a, b]$, то при любом разбиении

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})] \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_C \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leqslant \|f\|_C \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

В пределе при $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k - t_{k-1}| \to 0$ получим

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) \leqslant \|f\|_C \overset{b}{\underset{a}{V}}(g), \tag{Д.15}$$

и если $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g) \leqslant 1$, то

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) \leqslant \|f\|_C. \tag{Д.16}$$

Чтобы доказать (Д.14), осталось указать функцию $g(t)$ с единичной вариацией на $[a, b]$, для которой в (Д.16) будет знак равенства. Пусть $\|f\|_C = |f(t_0)|$, причем сначала будем предполагать, что $a \leqslant t_0 < b$. Положим

$$g_0(t) = \begin{cases} 0 & (a \leqslant t \leqslant t_0), \\ \operatorname{sign} f(t_0) & (t_0 < t \leqslant b). \end{cases}$$

Ясно, что вариация $g_0(t)$ на $[a, b]$ равна единице (если, конечно, $f(t) \not\equiv 0$) и

$$\int_a^b f(t)\, dg_0(t) = f(t_0)\,[g_0(t_0+0) - g_0(t_0-0)] =$$
$$= f(t_0) \operatorname{sign} f(t_0) = |f(t_0)| = \|f\|_C.$$

Если же $t_0 = b$, то равенство в (Д.16) будет для функции $g(t) = g_0(t)$, равной нулю при $a \leqslant t < b$ и равной $\operatorname{sign} f(b)$ в точке b.

3. Пусть X и Y — два множества элементов произвольной природы и каждой паре (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$, поставлено в соответствие вещественное число $F(x, y)$. Иначе говоря, на произведении множеств $X \times Y$ задана числовая функция $F(x, y)$.

Имеют место соотношения

$$\sup_{x \in X}\Big[\sup_{y \in Y} F(x, y)\Big] = \sup_{y \in Y}\Big[\sup_{x \in X} F(x, y)\Big] = \sup_{(x, y) \in X \times Y} F(x, y), \qquad \text{(Д.17)}$$

$$\inf_{x \in X}\Big[\inf_{y \in Y} F(x, y)\Big] = \inf_{y \in Y}\Big[\inf_{x \in X} F(x, y)\Big] = \inf_{(x, y) \in X \times Y} F(x, y), \qquad \text{(Д.18)}$$

$$\sup_{x \in X}\Big[\inf_{y \in Y} F(x, y)\Big] \leqslant \inf_{y \in Y}\Big[\sup_{x \in X} F(x, y)\Big]. \qquad \text{(Д.19)}$$

Из всех соотношений (Д.17) и (Д.18) мы докажем только одно:

$$B \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in X}\Big[\sup_{y \in Y} F(x, y)\Big] = \sup_{(x, y) \in X \times Y} F(x, y) \overset{\text{def}}{=} A;$$

справедливость остальных устанавливается аналогичным образом.

Предположим сначала, что $A < +\infty$. Так как для любых $x \in X$ и $y \in Y$

$$F(x, y) \leqslant A,$$

то, переходя слева к верхним граням сначала по $y \in Y$, а затем по $x \in X$, получим, что $B \leqslant A$. С другой стороны, по определению точной верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ такие, что

$$F(x_0, y_0) > A - \varepsilon.$$

Но тогда

$$B \geqslant \sup_{y \in Y} F(x_0, y) \geqslant F(x_0, y_0) > A - \varepsilon,$$

т. е. $B > A - \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно, $B \geqslant A$ и равенство $B = A$ установлено.

Если же $A = +\infty$, то для любого $N > 0$ найдутся $y_0 \in Y$ и $x_0 \in X$ такие, что

$$F(x_0, y_0) > N,$$

и так как

$$B \geqslant \sup_{y \in Y} F(x_0, y) \geqslant F(x_0, y_0) > N,$$

то B тоже равно $+\infty$.

Докажем соотношение (Д.19). Фиксируя любой элемент $x_0 \in X$, будем иметь

$$F(x_0, y) \leqslant \sup_{x \in X} F(x, y) \qquad \forall y \in Y,$$

и значит,

$$\inf_{y \in Y} F(x_0, y) \leqslant \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y).$$

В силу произвольности x_0 из X это неравенство останется справедливым, если слева перейти к верхней грани по всем $x \in X$.

4. Пусть на множестве X элементов x произвольной природы заданы вещественные функции $f_k(x)$ в конечном или счетном числе. Тогда

$$\sup_{x \in X} \left[\sum_k f_k(x) \right] \leqslant \sum_k \sup_{x \in X} f_k(x); \tag{Д.20}$$

$$\inf_{x \in X} \left[\sum_k f_k(x) \right] \geqslant \sum_k \inf_{x \in X} f_k(x). \tag{Д.21}$$

Действительно, при каждом фиксированном $x_0 \in X$

$$\sum_k f_k(x_0) \leqslant \sum_k \sup_{x \in X} f_k(x),$$

$$\sum_k f_k(x_0) \geqslant \sum_k \inf_{x \in X} f_k(x).$$

Чтобы получить (Д.20) и (Д.21), остается, учитывая произвольность x_0, перейти слева в написанных соотношениях к верхней, соответственно к нижней, грани по $x_0 \in X$.

Из (Д.20) и (Д.21) следует, что

$$\left|\sup_{x \in X} f_1(x) - \sup_{x \in X} f_2(x)\right| \leqslant \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|, \qquad (Д.22)$$

$$\left|\inf_{x \in X} f_1(x) - \inf_{x \in X} f_2(x)\right| \geqslant \inf_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|. \qquad (Д.23)$$

Действительно, положив $f_3(x) = f_1(x) - f_2(x)$, будем иметь в силу (Д.20)

$$\sup_{x \in X} f_1(x) \leqslant \sup_{x \in X} f_2(x) + \sup_{x \in X} f_3(x),$$

т. е.

$$\sup_{x \in X} f_1(x) - \sup_{x \in X} f_2(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in X} [f_1(x) - f_2(x)] \leqslant \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\sup_{x \in X} f_2(x) - \sup_{x \in X} f_1(x) \leqslant \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|,$$

и (Д.22) доказано. (Д.23) выводится из (Д.21) аналогичными рассуждениями.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К главе 1

§ 1.1. В более общем случае — для локально выпуклых линейных топологических пространств — задачи I, II и III сформулированы и исследуются в статье А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [1], где, в частности, наряду с поперечником по Колмогорову, рассматриваются другие понятия поперечника множества.

§ 1.3. Более полное изложение вопросов существования и единственности элемента наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве можно найти, например, в книгах Кизеветтера [1] и Зингера [1]. По поводу строгой нормированности пространств см. Н. И. Ахиезер [1], гл. 1.

К главе 2

§ 2.1. Дополнительная информация по вопросам отделимости выпуклых множеств содержится в монографии А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [2].

§ 2.2. Теоремы 2.2.1 и 2.2.2 получены С. М. Никольским [3].

§ 2.3. В более общем виде — для отделимых локально выпуклых топологических пространств — теорема 2.3.1 известна как теорема Фенхеля — Моро (Фенхель [1], [2]; Моро [1]) и доказана в книге А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [2], а также в обзорной статье этих же авторов [1], в которой содержится систематическое изложение общей теории двойственности выпуклых функций и ее приложений к задачам теории приближения и математического программирования. Приведенное в этой книге доказательство первой части теоремы 2.3.1 для линейных нормированных пространств (соотношение (2.7)) сообщено автору В. М. Тихомировым.

Вопросам двойственности экстремальных задач и приложениям к задачам выпуклого программирования и теории приближения посвящена также монография Е. Г. Гольштейна [1].

§ 2.4. Критерий 2.4.1 в более общем виде (для локально выпуклых пространств) содержится в статье А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [1]. О критериях ближайшего элемента в выпуклом множестве см. еще А. Л. Гаркави [1], В. Н. Никольский [1], С. Я. Хавинсон [1].

§ 2.5. Равенства (2.26) и (2.27) содержатся в статье С. М. Никольского [3].

Отметим еще следующий факт. В случае приближения конечномерным подпространством в X и в X^* мы имеем два соотношения (2.1) и (2.4), в известном смысле, симметричные друг другу. Если X рефлексивно, то есть $(X^*)^*=X$, то, очевидно, справедливо и симметричное (2.7) равенство

$$\inf_{\varphi\in A} \|f-\varphi\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leqslant 1}} [f(x) - \sup_{\varphi\in A} \varphi(x)], \qquad (*)$$

где $f\in X^*$ и A — выпуклое замкнутое множество в X^*.

В общем случае, однако, соотношение (*) не имеет места, даже если A — подпространство (разумеется, бесконечномерное) в X^*. Чтобы убедиться в этом, возьмем $X=L[-1, 1]$, тогда $X^*=M[-1, 1]$, и множество $C[-1, 1]$ непрерывных на $[-1, 1]$ функций является подпространством в $M[-1, 1]$. Пусть $f_0(t)=\operatorname{sign} t$ ($|t|\leqslant 1$), тогда

$$\inf_{\varphi\in C[-1,1]} \|f_0-\varphi\|_{M[-1,1]} = 1,$$

и в то же время

$$\sup_{\|x\|_{L[-1,1]}\leqslant 1} \left[\int_{-1}^{1} f_0(t)\,x(t)\,dt - \sup_{\varphi\in C[-1,1]} \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,x(t)\,dt\right] =$$

$$= \sup_{\substack{\|x\|_{L[-1,1]}\leqslant 1 \\ x\perp C[-1,1]}} \int_{-1}^{1} f_0(t)\,x(t)\,dt = 0,$$

ибо, если

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,x(t)\,dt = 0 \qquad \forall\varphi\in C[-1, 1],$$

то $x(t)=0$ почти всюду.

Тот же результат нетрудно получить, если в качестве аппроксимирующего множества в $M[-1, 1]$ взять единичный шар в $C[-1, 1]$.

К главе 3

§ 3.1. Вопрос об условиях единственности полинома наилучшего приближения подробно освещен в монографиях Н. И. Ахиезера [1] и А. Ф. Тимана [1].

§ 3.2. Критерии 3.2.1 и 3.2.3 полинома наилучшего равномерного приближения, полученные П. Л. Чебышевым [1], обобщались в различных направлениях. Одно из наиболее важных обобщений указано А. Н. Колмогоровым [3].

§ 3.3. Достаточные условия критерия 3.3.4 получены А. А. Марковым [1] (см. также Н. И. Ахиезер [1], гл. 2).

Если F — конечномерно (например, N-мерно, с базисом $\psi_1, \ldots, \psi_N$), то критерии 3.3.1 и 3.3.2 можно получить, исследуя обычным путем на минимум функцию

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \psi_k(t) \right|^p dt.$$

Правда, в этом случае следует предварительно обосновать законность дифференцирования интеграла Лебега по параметрам λ_k

§ 3.5. О многочленах Бернулли см., например, В. И. Крылов [1], гл 1.

Равенство (3.36) получено Фаваром [1], [2], [3]. (См. также Н И. Ахиезер и М. Г Крейн [1]).

К главе 4

Основные результаты главы 4, в частности, равенства (4.15) (при $p=1, \infty$) и (4.23), теоремы 4.3.3, 4.4.2 и 4.4.3, получены С. М Никольским [3]. Линейные методы (4.35) ввел в рассмотрение Надь [1].

К главе 5

§ 5 2. Аппарат функций Стеклова при исследовании задач теории приближения используется в книге Н. И. Ахиезера [1].

§ 5.3. Равенства (5.14) получены Фаваром [1], [2], [3]; значение $E_n\left(W^r_M\right)_M$ независимо найдено также Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [1]. Соотношения (5.15) и (5 21) доказаны С. М Никольским [3]. В цитированных работах получены значения верхних граней наилучшего приближения тригонометрическими полиномами также на классах функций, сопряженных с функциями классов W^r_M и W^r_L.

Ряд интересных работ был посвящен получению аналогичных результатов на классах сверток с ядром $K(t)$ более общего, чем $D_r(t)$ $(r=1, 2, \ldots)$, вида Основные трудности здесь возникают при проверке выполнения условия A_n^* или более жесткого (но лучше обозримого) условия N_n^*: существует полином $T_n^* \subset F^T_{2n-1}$ и по меньшей мере одна точка $\xi_0 \in [0, \pi/n]$ такие, что разность $K(t) - T_n^*(t)$ меняет знак на $[0, 2\pi]$ в точках $\xi_0, \xi_0+\pi/n, \xi_0+2\pi/n, \ldots$ $\ldots, \xi_0+(2n-1)\pi/2n$ и только в них В 1938 г. Надь [1] указал широкий класс ядер (являющихся, однако, как и $D_r(t)$, либо четными, либо нечетными функциями), удовлетворяющих условию N_n^*.

Много усилий было затрачено на распространение результатов, полученных для классов W^r_M и W^r_L $(r=1, 2, \ldots)$, на случай дробных $r>0$, когда ядро $D_r(t)$ (при нецелых r) содержит как синусы, так и косинусы.

Первый важный шаг был сделан В. К. Дзядыком [1], который в 1953 г. доказал выполнимость условия N_n^* для $D_r(t)$ при $0<r<$ <1 В 1956 г. С Б. Стечкин [2] установил аналогичный факт для ядер более общего вида:

$$D_r^\alpha(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt-\pi\alpha/2)}{k^r}$$

при $0<r<1$ и $r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$. Интерес к ядрам D_r^α объяснялся, в частности, тем, что ядром D_r^{r+1} задаются классы, сопряженные с W_M^r и W_L^r.

Полностью задача для дробных классов W_M^r и W_L^r была решена в 1958—1959 гг. В. К. Дзядыком [2], а также Сунь Юн-шеном [1]. Было доказано, что при всех $r>0$

$$E_n(W_M^r)_M=E_n(W_L^r)_L=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|D_r(t)-T_n^*(t)|\,dt=\frac{1}{\pi}E_n(D_r)_L=\frac{M_r}{n^r},$$

где

$$M_r=\frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right|;$$

T_n^* — тригонометрический полином порядка $n-1$, интерполирующий $D_r(t)$ в точках $1/n(\beta+k\pi)$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$, а β — число, равное нулю, если $0<r\leqslant 1$, и являющееся корнем уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta-\frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}=0,$$

если $r>1$.

Впоследствии В. К. Дзядык [3], [4] доказал выполнимость условия N_n^* для широкого класса ядер $K(t)$, представимых в виде периодических интегралов от абсолютно монотонных функций и включающих как частный случай ядра $D_r(t)$ и $D_r^\alpha(t)$ при всех $r>0$ и любых действительных α.

§ 5.5. Равенства (5.45) доказаны Фаваром [1], [3], а также Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [1]; соотношения (5.46) получены С. М. Никольским [3].

В цитированных выше работах В. К. Дзядыка, С. Б. Стечкина и Сунь Юн-шена показано, что в случае дробных $r>0$ наилучшее приближение $E_n(W_M^r)_M$ и $E(W_L^r)_L$ реализует линейный метод $U(f; x; \mu^*, \nu^*)$, определяемый числами μ_k^* и ν_k^*, являющимися коэффициентами полинома $T_n^*(t)$, наилучшим образом аппроксимирующего ядро $D_r(t)$ в метрике L.

§ 5.6. Получению соотношений, аналогичных неравенству Колмогорова в пространствах L_p, а также на полуоси, посвящено большое число исследований. Для $p=1$ точный аналог получил Стейн [1], другие случаи рассматривались, в частности, в работах С. Б. Стечкина [3], В. Н. Габушина [1], [2], Н. П. Купцова [1], В. В. Арестова [1]; в последней из цитированных работ приведена довольно обширная библиография по этому вопросу, а также указывается на связь с другими задачами.

§ 5.7. Доказательство теоремы 5.7.1 следует схеме рассуждений работы Л. В. Тайкова [1], в которой равенство (5.64) получено в метрике пространств Орлича; соотношение (5.65) независимо и другим путем доказано в работе С. П. Туровец [1].

Отметим еще, что оценку снизу для $E_n(\mathfrak{M})_X$ для широкой совокупности функциональных пространств X (включающих C и L_p) и классов $\mathfrak{M}$ указал А. В. Ефимов [2].

К главе 6

Основные результаты главы 6 (§§ 6.2—6.8) получены Н. П. Корнейчуком [10], [11], [12], [15]; им же введено понятие Σ-перестановки.

Неравенство (6.67) ранее другим способом и без учета периодичности доказал Стейн [1].

Систематическое изложение вопросов, связанных с перестановками функций (§ 6.1), содержится в монографии Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуда и Г. Полиа [1], а также в книге Зигмунда [1], где используется термин «равноизмеримые функции».

К главе 7

Основные результаты главы 7 (§§ 7.4—7.6) получены Н. П. Корнейчуком [10], [11], [15].

Утверждение леммы 7.4.1, за исключением пункта б), получено независимо Н. П. Корнейчуком [1], [2], [6] и С. Б. Стечкиным еще в 1959 г. (см. примечание в работе Н. П. Корнейчука [1]). Утверждение пункта б) леммы 7.4.1 получено Н. П. Корнейчуком [11]. Лемма 7.1.5 принадлежит С. Б. Стечкину (см. А. В. Ефимов [1]).

Частные случаи равенства (7.38) (при $0 \leq r \leq 3$) были получены Н. П. Корнейчуком [3], [4], [8], [9] в 1961—1963 гг. другим методом (см. главу 8).

Неравенства (7.48) и (7.49) указаны Н. П. Корнейчуком в заметке [13].

По поводу результатов § 7.7 заметим, что соотношение (7.52) содержится в работах Н. П. Корнейчука [3], [8]; теорема 7.7.1 получена также Н. П. Корнейчуком [5], [15] (см. также книгу Лоренца [1], гл. 8).

Классы H^ω и W^rH^ω и функции $f_{nr}(\omega, x)$, по-видимому, впервые введены С. М. Никольским [1], [2].

К главе 8

Основные теоремы 8.2.1 и 8.3.2 доказаны Н. П. Корнейчуком [3], [8], [12].

Утверждение 8.1.1 получено (иным методом) Н. П. Корнейчуком [3] в 1961 г. при решении задачи об отыскании верхней грани $E_n(H^\omega)_C$. Приведенное в конце § 8.3 доказательство неравенства (8.20) принадлежит А. В. Покровскому [1], который, так же как и А. Ф. Тиман [2], позже рассматривал приближение класса H^{ω_1} классом H^{ω_2}.

В связи с содержанием § 8.4 отметим, что первые результаты по вычислению точных значений величин $E_n(W^rH^\omega)_C$ (при $0 \leqslant r \leqslant 3$) были получены Н П. Корнейчуком [3], [4], [8], [9] именно с помощью метода промежуточного приближения. При этом точные оценки для $E(W^rH^\omega, W^rKH^1)_C$ находились при разных r, вообще говоря, разными методами, использующими те или иные факты частного характера. Единый подход был найден, когда с помощью аппарата Σ-перестановок были выяснены новые экстремальные свойства дифференцируемых периодических функций, что позволило применить общий критерий 3.4.1.

Результаты по наилучшему приближению одного класса функций другим содержатся также в работах Л. В. Тайкова [2], Ю. Н. Субботина [2], [5], В. В. Арестова и В. Н Габушина [1] и др.

К главе 9

§ 9.1. Различные доказательства неравенств (9.1) и (9.2), использующие, в частности, полиномы Джексона, можно найти в монографиях И. П. Натансона [1], В П Гончарова [1], Н. И Ахиезера [1], П. П. Коровкина [1], А. Ф. Тимана [1]. В двух последних содержатся неравенства Джексона для C^r и L_p^r с абсолютными (хотя, вообще говоря, неточными) константами.

§ 9.2. Лемма 9.2.1 и теорема 9.2.2 доказаны Н. П. Корнейчуком [7].

§ 9.3. Все результаты § 9.3 принадлежат Н. И Черных [1], [2].

§ 9.4 Теоремы 9.4.3 и 9.4.4 при $r=1$ получил В. В. Жук [1]; при $r=3, 5, 7, \ldots$ эти теоремы доказаны А. А. Лигуном [1].

Некоторые оценки величин $\varkappa_{nr}$ и $\varkappa'_{nr}$ содержатся в работах С. Б Стечкина [4], [5], В. И. Бердышева [1], [2].

К главе 10

§ 10.2. Теорема 10.2.3 доказана в работе В. М. Тихомирова [1]; приведенное в тексте книги доказательство заимствовано из монографии Лоренца [1]

§ 10.3. Результаты, приведенные в § 10.3, содержатся в работе А Н. Колмогорова [1], в которой впервые поставлена задача о вычислении поперечников.

§ 10.4. Все результаты теоремы 10.4.1 принадлежат В. М. Тихомирову [1], [2], [3], который в 1960 г. указал эффективный метод получения оценок поперечников снизу, основанный на теореме 10.2.3, и впервые нашел точные значения поперечников в пространстве C. Порядковые оценки поперечников классов функций в C были указаны С. Б. Стечкиным [1] в 1954 г.

Что касается теоремы 10.4.2, то нечетные поперечники классов W^rH^ω в C (при условии выпуклости $\omega(t)$) получены Н. П. Корнейчуком [9], [12], а четные — В. И. Рубаном [1]. Оценки снизу для $d_{2n-1}(W^rH^\omega, C)$, базирующиеся на теореме 10.2.3, приведены в книге Лоренца [1], гл. 9.

Лемма 10.4.3 принадлежит В. М. Тихомирову [3], лемма 10.4.5 — В. И. Рубану, который, сообщив автору эту лемму, указал путь получения точных оценок поперечников $d_{2n}(W^rH^\omega, C)$, не опирающийся на теорему Борсука.

§ 10.5. Нечетные поперечники $d_{2n-1}(W_L^r, L)$ и $d_{2n-1}(W_V^{r-1}, L)$ вычислены независимо Ю. И. Маковозом [1] и Ю. Н. Субботиным [3], [4] (см. § 10.6), поперечники $d_{2n-1}(W_M^r, L)$ получены Ю. И. Маковозом [2]. (Речь идет, конечно, о получении точных оценок снизу, так как оценки сверху уже имелись.)

Четные поперечники классов W_L^r, W_V^{r-1} и W_M^r в пространстве L найдены В. И. Рубаном. В. И. Рубан сообщил автору приведенное в тексте доказательство теорем 10.5.1 и 10.5.2, позволившее, используя общие идеи работы Ю. И. Маковоза [2], получить точные оценки снизу для четных поперечников в L всех рассматриваемых классов.

В работе В. П. Моторного и В. И. Рубана [1] с помощью аппарата Σ-перестановок получена точная оценка снизу нечетного поперечника класса W^rH^ω в пространстве L (для выпуклого $\omega(t)$), и этим, в связи с результатами § 7.6, доказано, что

$$d_{2n-1}(W^rH^\omega, L) = \|f_{nr}\|_L.$$

§ 10.6. Соотношение (10.50) доказано В. М. Тихомировым [3], соотношение (10.51) — Ю. Н. Субботиным [3]. Доказательства в книге значительно упрощены. Неравенство (10.57) получил Ю. И. Григорян [1].

§ 10.7. Утверждение 10.7.1 в случае нечетных r доказано Албергом, Нильсоном и Уолшем [2], в случае четных r — Ю. Н. Субботиным [1].

Неравенство (10.58) получено А. А. Женсыкбаевым [1], который пришел к нему, исследуя ядро интегрального представления разности $f(t) - \sigma_{n,r-1}(f, t)$. Приведенное в книге доказательство, в сущности, повторяет рассуждения, с помощью которых В. М. Тихомиров [3] установил оценку (10.60). Соотношение (10.61) принадлежит А. А. Женсыкбаеву [1]. Равенство (10.65) получил А. А. Лигун [2] несколько иным, чем в тексте, способом, использующим результат В. М. Тихомирова (10.60).

Теорема 10.7.4 доказана Н. П. Корнейчуком [14]. Вопрос о возможности реализации поперечников $d_{2n}(W^rH^\omega, C)$ с помощью интерполяционных сплайнов рассматривался в работах Н. П. Корнейчука [14] и [16], где, в частности, установлено, что если выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega(t)$ не линеен на $[0, \pi/n]$, то

$$\sup_{f \in W^{2\nu}H^{\omega}} \|f - \sigma_{n,2\nu}(f)\|_C > E\left(W^{2\nu}H^{\omega}, \overset{0}{S}{}^{2\nu}_{2n}\right)_C$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Приведем еще несколько результатов, связанных с вычислением поперечников классов периодических функций (непериодический случай мы, как и в предыдущих главах, не затрагиваем).

1. Имеют место соотношения (В. И. Рубан [2])

$$d_{2n}\left(W^1_M, L_p\right) = d_{2n-1}\left(W^1_M, L_p\right) = d'_{2n}\left(W^1_M, L_p\right) =$$
$$= d'_{2n-1}\left(W^1_M, L_p\right) = \pi^{(p+1)p}/2^{(p-1)p}(p+1)^{1/p}n$$
$$(1 < p < \infty).$$

2. Можно показать, что каков бы ни был модуль непрерывности $\omega(t)$, справедливо равенство

$$d_{2n}(H^{\omega}, C) = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Оценку сверху для $d_{2n}(H^{\omega}, C)$ легко получить, аппроксимируя функцию $f \in H^{\omega}$ подпространством $\overset{0}{S}_{2n,h}$ функций Стеклова g_h, построенных для $g \in \overset{0}{S}_{2n}$ (см. Ю. Н. Григорян [1], где рассматривается непериодический случай). Для получения оценки снизу надо воспользоваться леммой 10.4.3 и теоремой А. Н. Колмогорова об оценке поперечников (см. В. М. Тихомиров [1], теорема 2).

3. Пусть $n = 2, 3, 4, \ldots$ фиксировано. Если модуль непрерывности $\omega(t)$ таков, что для некоторого δ $(0 < \delta < \pi/n)$

$$\omega(t) = \omega(\pi/n) \qquad (\pi/n - \delta \le t \le \pi/n),$$
$$\omega(t) > \omega(\pi/n) \qquad (t > \pi/n),$$

то

$$d_{2n}(H^{\omega}, C) < d_{2n-1}(H^{\omega}, C)$$

(В. И. Рубан [3]).

ЛИТЕРАТУРА

Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. (Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.)

1 Теория сплайнов и ее приложения, М., «Мир», 1972.

2 Best approximation and convergence properties of higher order spline approximations, *J.* Math. Mech. 14 (1965), 231—244.

Арестов В. В.

1 О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной, Труды МИАН СССР **138** (1975), 3—28.

Арестов В. В., Габушин В. Н.

1. О приближении классов дифференцируемых функций, Матем заметки **9**, № 2 (1971), 105—112.

Ахиезер Н. И.

1 Лекции по теории аппроксимации, М., «Наука», 1965.

Ахиезер Н И и Крейн М. Г.

1 О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, ДАН СССР **15** (1937), 107—112.

Бердышев В И.

1. О теореме Джексона в L_p, Труды МИАН СССР **88** (1967), 3—16.

2 Связь между неравенством Джексона и одной геометрической задачей, Матем. заметки **3**, № 3 (1968), 327—338.

Борсук (Borsuk K.)

1 Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, Fund Math. 20 (1933), 177—191.

Валле-Пуссен (Ch.-J de la Vallee Poussin)

1. Sur les polynomes d'approximation et la representation approchee d'un angle, Bull. Ac. Sc Belgique (1910), 808—844.

Габушин В Н.

1. Неравенства для норм функций и ее производных в метриках L_p, Матем. заметки **1**, № 3 (1967), 291—298.

2. Точные константы в неравенствах между нормами производных функций, Матем заметки **4**, № 2 (1968), 221—232.

Гаркави А Л.

1 О критерии элемента наилучшего приближения, Сиб. матем журн. 5 (1964), 472—476.

Гольштейн Е. Г.

1. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения, М., «Наука», 1971.

Гончаров В Л.

1 Теория интерполирования и приближения функций, М., Гостехиздат, 1954.

Григорян Ю.
1. Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах, Матем. заметки 13, № 5 (1973), 637—644.
Данфорд Н., Шварц Дж. Т
1. Линейные операторы. Общая теория, М., ИЛ, 1964.
Джексон (Jackson D.)
1. Über die Genauigkeit des Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegeben Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung, Diss., Göttingen, 1911.
Дзядык В. К.
1. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную ($0 < s < 1$), Изв АН СССР, сер. матем. 17 (1953), 135—162.
2. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций, Изв АН СССР, сер матем 23 (1959), 933—950
3. К вопросу о наилучшем приближении абсолютно монотонных и некоторых других функций в метрике L при помощи тригонометрических полиномов, Изв. АН СССР, сер матем. 25 (1961), 173—238.
4. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер, Матем. заметки 16, № 5 (1974), 691—701.
Ефимов А. В.
1. Линейные методы приближения непрерывных периодических функций, Матем. сб. 54, № 1 (1961), 51—90.
2. О наилучших приближениях классов периодических функций тригонометрическими полиномами, Изв. АН СССР, сер матем. 30 (1966), 1163—1178.
Женсыкбаев А. А.
1. Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению, Матем. заметки 13, № 6 (1973), 807—816.
Жук В. В.
1. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций, ДАН СССР 201 (1967), 263—266.
Зигмунд (Zygmund A.)
1. Тригонометрические ряды, т. I, М., «Мир», 1965.
Зингер (Singer I.)
1 Cea mai buna approximare in spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucuresti, 1967.
Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.
1. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, УМН 27, 6 (1968), 51—116.
2 Теория экстремальных задач, М., «Наука», 1974.
Кизеветтер (Kiesewetter H.)
1. Vorlesungen über lineare Approximation, Berlin, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1973.

Колмогоров А. Н.

1. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen, Ann. of Math. **37** (1936), 107—110.
2. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале, Учен. зап. МГУ, вып 30, «Математика» 3 (1939), 3—13.
3. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции, УМН **3**, 1 (1948), 216—221.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В.

1. Элементы теории функций и функционального анализа, М., «Наука», 1972.

Корнейчук Н. П.

1. О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна—Рогозинского, ДАН СССР **125** (1959), 258—261.
2. Об оценке приближений функций класса $H^{(\alpha)}$ тригонометрическими многочленами, Сб. «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций», М., 1961, 148—154.
3. О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций, ДАН СССР **140** (1961), 748—751.
4. О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций, ДАН СССР **141** (1961), 304—307.
5. О существовании линейного полиномиального оператора, дающего на классе функций наилучшее приближение, ДАН СССР **143** (1962), 25—27.
6. Об экстремальных свойствах периодических функций, ДАН УССР, № 8 (1962), 993—998.
7. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций, ДАН СССР **145** (1962), 514—515.
8. О наилучшем приближении непрерывных функций, Изв. АН СССР, сер. матем. **27** (1963), 29—44.
9. Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций, ДАН СССР **150** (1963), 1218—1220.
10. Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых периодических функций в метриках C и L, ДАН СССР **190** (1970), 269—271.
11. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций, Изв. АН СССР, сер. матем. **35** (1971), 93—124.
12. Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим, Изв. АН СССР, сер. матем. **36** (1972), 423—434.
13. Замечание о теореме Джексона для дифференцируемых функций, Матем. заметки **12**, № 5 (1972), 517—522.
14. О равномерном приближении периодических функций подпространствами конечной размерности, ДАН СССР **213** (1973), 525—528.
15. О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения, УМН **29**, 3 (1974), 9—42.

16. On extremal subspaces and approximation of periodic functions by splines of minimal defect, Analysis Mathematica 1, № 2 (1975), 91—101.

Коровкин П. П.

1. Линейные операторы и теория приближений, М., Физматгиз, 1959.

Крылов В. И.

1. Приближенное вычисление интегралов, М., «Наука», 1967.

Купцов Н. П.

1. Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0, \infty)$, Труды МИАН 138 (1975), 94—117.

Лигун А. А.

1. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций, Матем. заметки 14, № 1 (1973), 21—30.
2. Точные константы в неравенствах типа Джексона и Колмогорова, Автореферат кандидатской диссертации, Днепропетровский госуниверситет, 1974.

Лоренц (Lorentz G. G.)

1. Approximation of Functions, New York, Holt, Rinehalt and Winston, 1966.

Люстерник Л. А., Соболев В. И.

1. Элементы функционального анализа, М., «Наука», 1965.

Маковоз Ю. И.

1. Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем., № 4 (1969), 19—28.
2. Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах, Матем. сб. 87, 1 (1972), 136—142.

Марков А. А.

1. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием (1898), Избр. труды, Гостехиздат, 1948.

Моро (Moreau J. J.)

1. Fonctions convexes en dualité, Fac. des Sciences de Montpellier Seminar de Mathematiques (1962).

Моторный В. П., Рубан В. И.

1. Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L, Матем. заметки 17, № 4 (1975), 531—543.

Надь Б. (Nagy B.)

1. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, Berichte Acad. d. Wiss., Leipzig 90 (1938), 103—134.

Натансон И. П.

1. Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
2. Теория функций вещественной переменной, М., «Наука», 1974.

Никольский В. Н.

1. Наилучшее приближение элементами выпуклых множеств в линейных нормированных пространствах, Уч. зап. Калин. гос. пед. ин-та 29 (1963), 85—119.

Никольский С. М.

1. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды МИАН 15 (1945), 1—76.

2. Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности, ДАН СССР 52 (1946), 191—194.
3. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР, сер. матем. **10** (1946), 207—256.
4. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1969.
5. Курс математического анализа, т. II, М., «Наука», 1973.
6. Квадратурные формулы, М., «Наука», 1974.

Покровский А. В.
1. Об одной теореме А. Ф. Тимана, Функц. анализ **1**, 3 (1967), 93—94.

Рубан В. И.
1. Четные поперечники классов $W^r H_\omega$ в пространстве $C_{2\pi}$, Матем. заметки **15**, № 3 (1974), 387—392.
2. Поперечники одного класса 2π-периодических функций в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$, Сборник «Теория приближения функций и ее приложения», Киев, Институт математики АН УССР, 1974, 119—128.
3. О поперечниках одного класса непрерывных периодических функций, Тезисы Международной конференции по теории аппроксимации, Калуга, 1975, 89—90

Спеньер (Spanier E. H.)
1 Алгебраическая топология, М., «Мир», 1971.

Стейн (Stein E. M.)
1. Functions of exponential type, Ann. Math. **65**, № 3 (1957), 582—592.

Стечкин С. Б.
1. О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами, УМН **9**, 1 (1954), 133—134.
2. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами, Изв. АН СССР, сер матем. **20** (1956), 643—648.
3 Неравенства между нормами производных произвольной функции, Acta Sci. Math. **26** (1965), 225—230.
4. Замечание к теореме Джексона, Труды МИАН 88 (1967), 17—19.
5. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара, Труды МИАН **109** (1971), 26—34.

Субботин Ю. Н.
1. О кусочно-полиномиальной интерполяции, Матем. заметки **1**, № 1 (1967), 63—70.
2. Наилучшее приближение класса функций другим классом, Матем. заметки **2**, № 5 (1967), 495—504.
3. Поперечник класса $W^r L$ в $L(0, 2\pi)$ и приближение сплайн-функциями, Матем. заметки **7**, № 1 (1970), 43—52.
4. Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников, Труды МИАН **109** (1971), 35—60.
5. Связь сплайн-приближений с задачей приближения класса классом, Матем. заметки **9**, № 5 (1971), 501—510.

Сунь Юн-шен
1. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, Изв. АН СССР, сер. матем. **23** (1959), 67—92.

Тайков Л. В.

1. О приближении в среднем некоторых классов периодических функций, Труды МИАН 88 (1967), 61—70.
2. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций, Матем. заметки 1, № 2 (1967), 155—162.

Тиман А. Ф.

1. Теория приближения функций действительного переменного, М., Физматгиз, 1960.
2. Деформация метрических пространств и некоторые связанные с ней вопросы теории функций, УМН 20, 2 (1965), 53—87

Тихомиров В. М.

1. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений, УМН 15, 3 (1960), 81—120.
2. Некоторые вопросы теории приближений, ДАН СССР 160 (1965), 774—777.
3. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$, Матем. сб. 80, № 2 (1969), 290—304.

Туровец С. Н.

1. О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций, ДАН УССР, № 5 (1968), 417—421.

Фавар (Favard J.)

1. Sur l'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques, C. R Acad. Sci. (Paris) 203 (1936), 1122—1124.
2. Application de la formule sommatoire d'Euler a la demonstration de quelques proprietes extremales des integrals des fonctions periodiques, Math. Tidskrift 4 (1936), 81—94.
3. Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaines clasess de fonctions par des polynomes trigonometriques, Bull Sci. Math 61 (1937), 209—224, 243—256

Фенхель (Fenchel W.)

1. On conjugate convexe functions, Canad Journ Math. 1 (1949), 73—77.
2. Convex Cones, Sets and Functions. Princeton Univ., 1951

Фихтенгольц Г. М.

1. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, М., «Наука», 1966.

Хавинсон С. Я.

1. Об аппроксимации элементами выпуклых множеств, ДАН СССР 172 (1967), 294—297.

Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.

1. Неравенства, ИЛ, 1948.

Чебышев П. Л.

1. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1859). Сочинения, М.—Л., 1947, Изд-во АН СССР, т. II, стр. 151—235.

Черных Н. И.

1. О неравенстве Джексона в L_2, Труды МИАН 88 (1967), 71—74.
2. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2, Матем заметки 2, № 5 (1967), 513—522.