

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
ВОССТАНОВЛЕНИЯ  
КРИВЫХ

Анатолий А.Лигун  
Александр А.Шумейко

*Институт математики НАН Украины*  
*Киев*  
*1997*

УДК 517.5:519.688-621.9

**Асимптотические методы восстановления кривых** / Лигун А.А., Шумейко А.А. — Киев, 1997. — 358 с. — 82 рис., 2 табл.

Рецензенты:

профессор Днепропетровского государственного университета *Моторный В.П.*,  
профессор Днепропетровского государственного университета *Бабенко В.Ф.*

В книге рассмотрены задачи, связанные с описанием кривых различными видами сплайнов. В первых двух главах исследованы вопросы аппроксимации функций и кривых некоторыми традиционными полиномиальными сплайнами – интерполяционными, сплайнами близкими к интерполяционным в среднем, параметрическими сплайнами и пр. В третьей, основной главе, эти сплайны используются в качестве промежуточного приближения.

Третья глава посвящена задачам восстановления векторно-значных функций различного вида технологическими кривыми (кусочно-линейными, кусочно-окружностными линиями, сплайнами Безье и пр.) в метриках хаусдорфового типа (в визуальных метриках). Основное внимание здесь уделено задачам нахождения асимптотически оптимальных сеток (последовательностей разбиений).

Все основные результаты изложены в виде удобном для практического использования их в инженерных расчетах и создания программного обеспечения.

Предназначена студентам, аспирантам, научным работникам работающим в теоретических и прикладных областях теории аппроксимации, а также для специалистов занимающихся программным обеспечением задач машиностроения.

ISBN 966-02-0422-1

© Лигун А.А., Шумейко А.А., 1997

# Оглавление

<b>Введение.</b>	<b>3</b>
<b>1 Вспомогательные сведения</b>	<b>12</b>
1.1 Кривые и их характеристики . . . . .	12
1.2 Разности и их свойства . . . . .	31
1.3 Сглаживание данных. . . . .	33
1.4 Условие окончания сглаживания данных . . . . .	43
1.5 Алгоритмы сглаживания повышенной точности . . . . .	50
1.6 Базисные сплайны и их свойства . . . . .	55
1.7 Сплайны минимального дефекта . . . . .	66
1.8 Кубические почти интерполяционные сплайны . . . . .	71
1.9 Параболические почти интерполяционные сплайны . . . . .	81
1.10 Кубические почти интерполяционные в среднем сплайны . . . . .	84
1.11 Параболические почти интерполяционные в среднем сплайны . . . . .	93
1.12 Непериодические почти интерполяционные в среднем сплайны . . . . .	97
<b>2 Описание кривых сплайнами</b>	<b>103</b>
2.1 Описание кривых сплайнами по опорным точкам . . . . .	104
2.2 Способы задания информативных параметров кривой . . . . .	118
2.3 Полярные сплайны . . . . .	123
2.4 Сплайны с почти естественной параметризацией . . . . .	135
2.5 Восстановление не замкнутых кривых сплайнами с почти естественной параметризацией . . . . .	144
2.6 Функции и сплайны Безье . . . . .	155
2.7 Связь параметрических сплайнов со сплайнами Безье . . . . .	158
2.8 Идентификация замкнутых кривых . . . . .	160
2.9 Контроль качества сложных изображений . . . . .	167

<b>3</b>	<b>Оптимальное восстановление кривых технологическими линиями</b>	<b>175</b>
3.1	Вспомогательные утверждения . . . . .	175
3.2	Предпосылки для хаусдорфовой метрики . . . . .	184
3.3	Предпосылки для интегральных метрик . . . . .	199
3.4	Асимптотически оптимальная интерполяция ломаными в хаусдорфовой метрике . . . . .	207
3.5	Регулятор сгущения узлов . . . . .	220
3.6	Еще раз об идейной стороне вопроса . . . . .	224
3.7	Алгоритм линейного интерполятора . . . . .	228
3.8	Асимптотически наилучшая аппроксимация плоских кривых ломаными . . . . .	241
3.9	Оптимальное восстановление плоских кривых ломаными в интегральной метрике . . . . .	264
3.10	Оптимальная кусочно – линейная интерполяция пространственных кривых . . . . .	274
3.11	Построение оптимальных эквидистант для ломаных . . . . .	278
3.12	Оптимальная кусочно – окружностная интерполяция . . . . .	283
3.13	Алгоритм оптимального кусочно – окружностного интерполятора . . . . .	291
3.14	Гладкая аппроксимация кусочно – окружностными линиями . . . . .	294
3.15	Оптимальное восстановление плоских кривых сплайнами Безье . . . . .	302
	<b>Список литературы</b>	<b>352</b>

## Введение.

С 1974 года в США и Великобритании издается многотомная серия "Encyclopedia of Mathematics and its Applications". Цель и задачи серии редакционный совет изложил в эмоционально написанной декларации (statement). В ней, в частности, говорится: "Не так давно широко было распространено мнение, что в сегодняшней математике можно найти основополагающие концепции завтрашней науки. Однако в настоящее время результаты математики, гордо охраняемые за баррикадой терминологической сложности, развивающимся знаменем бескомпромиссной строгости, часто остаются далекими от их потенциальных потребителей... Обилие результатов вместе с изысканностью современного математического изложения привели к тому, что математик неохотно идет смотреть на свои достижения со стороны, глазами заинтересованного прикладника. Прикладник же, испытывая благоговение перед этим ослепительным фейерверком, в большей степени не может, чем не хочет, воспользоваться откровениями математики. Это обстоятельство, вместе с нашим убеждением, что всякая наука рано или поздно должна проверить себя, став математической, является движущей силой этой энциклопедии."

Идеи высказанные в приведенной цитате, имеют прямое отношение и к теории приближения функций, как части математики, что и явилось побудительным мотивом написания данной книги. Как и другие теоретические направления математики, теория приближения функций, возникла из практических задач, в частности из теории механизмов, приведшей к известной задаче приближения функций в равномерной метрике, к полиномам Чебышева и пр. Затем решались чисто практические задачи о качестве приближения функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами – теоремы Вейерштрасса, Стоуна, Джексона, Бернштейна и др. Достигнув некоторого уровня, как и всякая наука, теория приближения функций занималась совершенствованием себя самой, в соответствии с внутренней логикой.

В настоящее время в значительно большей степени, чем скажем 30 или 50 лет назад наблюдается проникновение идей и методов теории аппроксимации в самые различные области естественных наук. Успешно применяются достижения теории аппроксимации в прикладных задачах. Большую роль в этом сыграли достижения в области вычислительной техники, дающие возможность разрабатывать и внедрять в производство мощное программное обеспечение. Этому способствует и развитие наукоемких, высокоточных технологий и достигнутые в последние годы успехи в решении экстремальных задач теории приближения.

Являясь специалистами по теории приближения функций, авторы несколько лет назад столкнулись с задачами, связанными с программным обеспечением станков с ЧПУ. С некоторым удивлением было замечено, что многие задачи оптимизации программноносителей формализуются как классические задачи теории аппроксимации. Кроме того, развитие высокоточных производств приводит к необходимости разработки и внедрения асимптотических методов теории аппроксимации. Эти методы хорошо зарекомендовали себя при построении конкретных алгоритмов.

Процесс проникновения идей теории приближения в задачи машиностроения не является односторонним. Многие технические задачи современного машиностроения порождают новые постановки задач и в самой теории приближения. В данной книге предпринята попытка раскрыть взаимопроникновение идей и методов программного обеспечения современного машиностроения и теории приближения, в частности, теории сплайн – функций.

На протяжении последних лет авторы уделяли много внимания различным задачам инженерной геометрии в машиностроении. При этом авторы старались придерживаться одной и той же идеологии – найти асимптотическое решение каждой из поставленных задач. Во многих случаях найти асимптотически оптимальное решение гораздо проще чем оптимальное. В реальных же условиях (особенно при разработке программного обеспечения точного машиностроения) асимптотические методы приводят практически к тем же результатам, что и оптимальные. Авторы убеждены, что при дальнейшем совершенствовании технологии в сторону высокоточного производства, именно асимптотическим методам будет отдаваться приоритет. Это объясняется и тем, что асимптотические методы гораздо более конструктивны и проще в вычислительной реализации, чем точные методы решения (если такие вообще имеются).

Вкратце остановимся на структуре книги.

Первая глава вводная. В параграфе 1.1 приведены основные определения характеристик кривых – кривизна кривой, степень негладкости и другие понятия, необходимые нам в дальнейшем.

Параграфы 1.2 – 1.5 посвящены методам первичной обработки данных, прежде всего, сглаживанию. В той или иной мере все алгоритмы, которые мы будем использовать в дальнейшем рассчитаны на то, то поступающая информация должна быть предварительно сглажена.

Параграфы 1.6 - 1.12 посвящены сплайнам. То, что им уделено более половины объема вводной главы, не случайно. Как правило, под

термином "сплайн" мы понимаем полиномиальный сплайн. Напомним определение сплайна.

Сплайном порядка  $r$  дефекта  $k$  по произвольному разбиению  $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  называется  $(r - k)$ -раз непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[a, b]$  функция  $s_{r,k}(\Delta_n, t)$ , которая на каждом промежутке  $(t_{i-1}, t_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) является алгебраическим многочленом степени не выше  $r$ .

Наиболее популярными как в математике, так и в ее приложениях, являются сплайны минимального дефекта, т.е. сплайны  $s_{r,k}(\Delta_n, t)$  при  $k=1$ . При этом практические потребности более чем на 90% удовлетворяются сплайнами второго и третьего порядков.

Сплайны – сравнительно молодой аппарат теории приближений. Их широкое использование стало возможным при появлении и развитии вычислительной техники. В этих условиях в полной мере проявились их достоинства. Вскоре сфера их использования охватила, практически, все области, где применялись вычислительные методы – теория аппроксимации, численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, теория управления, математическая статистика и многие другие. Практически все изложенные в третьей главе алгоритмы будут основываться на том, что по сглаженным данным строится сплайн, а уже этот сплайн заменяется той или иной технологической кривой.

Глава 2 носит промежуточный характер. В первой главе много внимания уделено традиционным сплайнам одной переменной, т.е. сплайнам приближающим явно заданные функции. Эти сплайны во второй главе будут использоваться для построения различного вида параметрических сплайнов, описывающих данный контур.

В параграфе 2.1 даются методы построения параметрических сплайнов по опорным точкам. Эти сплайны используются, как правило, если известных значений о контуре мало, но они даны достаточно точно. На практике, как правило, это происходит когда параметры детали измеряются с помощью измерительной головки или заданы чертежом.

В параграфах 2.2 – 2.5 рассматриваются различные виды параметрических сплайнов почти интерполяционных средним. Это сплайны, использующие как значения в точках, так и значения интегралов (средние значения). Такие сплайны, как правило, используются в таких алгоритмах, когда данных описывающих деталь или фрагмент детали очень много, к примеру, если они снимаются сканером, копиром и пр.

Параграфы 2.6 - 2.7 посвящены одному из видов полиномиальных сплайнов наиболее часто используемых в инженерной геометрии – сплай-

нам Безье.

Да последних параграфа второй главы посвящены вопросу не аппроксимации, а идентификации. Если ранее у нас была информация об объекте, и мы пытались более или менее полно восстановить образ этого объекта, то здесь несколько иная ситуация. Есть два объекта – один эталон, а другой получен в результате технологического процесса. Нужно сравнить эти два объекта по геометрическим характеристикам. Проще говоря, наложить их друг на друга и посмотреть насколько велико между ними расхождение. Несмотря на кажущуюся простоту такой задачи, здесь существует много различных тонкостей, о которых и будет идти речь в этих параграфах. В некоторой мере это вопросы введения нового типа расстояния, что позволяет посмотреть на Хаусдорфово расстояние с иной точки зрения.

Третья глава основная. Именно здесь собраны те результаты, из-за которых авторы решили написать эту книгу.

Первые три параграфа 3.1 – 3.3 закладывают фундамент для доказательств основных результатов. Здесь приведены решения некоторых экстремальных задач, которые будут использоваться при конструировании алгоритмов оптимального восстановления кривых сплайновыми методами.

В параграфах 3.5 - 3.6 описывается идейная или интуитивная сторона полученных результатов. Надеемся, что содержание этих параграфов будет не только полезно, но и интересно. Это может быть полезным при отладке приведенных в этой книге алгоритмов и создании различного вида модификаций их для решения подобных задач.

Дальнейшее содержание главы отражено в названиях параграфов. Заметим, что после обоснования того или иного алгоритма всегда приведен его дискретный аналог. Иногда он вынесен в отдельный параграф, иногда он содержится в том параграфе, где приведен результат, порождающий данный алгоритм. Не составляло бы особого труда изложить в систематизированном виде алгоритмы, снабдив их некоторыми пояснениями и ссылками на доказательства, приведенные в оригинальных статьях. Это не лишено смысла. Мы планируем подготовить книгу, содержащую только алгоритмы, программы и инструкции к их применению и адаптации к тем или иным задачам машиностроения. Это будет справочник инженера - разработчика. В данный момент авторы не в этом видят свою задачу. Проникновение в сущность метода решения той или иной задачи дает гораздо больший эффект, чем знание конечного результата. Это касается не только теоретика, но и прикладника, использующего конкретное программное обеспечение алгоритмов, кото-

рое не укладывается в жесткие рамки известных схем. К тому же (снова цитата из "Statement"): "Самое существенное из теории не всегда содержится в формулировках теорем, оно может содержаться в аргументах внутри доказательства, в алгоритмах, примерах и даже в рисунках." Это замечание не в последнюю очередь относится и к материалу, изложенному в данной книге. В основе многих алгоритмов лежит, как правило, новый шаг, имеющий простое геометрическое толкование (для минимизации погрешности необходимо уравнивать погрешности на участках, для минимизации погрешности необходимо сгустить звенья на участках большой кривизны или на участках с быстро изменяющейся кривизной). Как правило, вскоре обнаруживается, что этот факт прокладывает пути к решению других, иногда на первый взгляд далеких по постановке задач.

При разработке программного обеспечения тех или иных технологических задач в целом или в какой-то его части авторы программного продукта стремятся выдержать следующие требования:

1. Программный продукт должен быть как можно более универсальным, то есть охватывать как можно более широкий круг задач данного направления;
2. Допускать дополнения, уточнения, модификации и развитие, максимально используя при этом уже разработанные программы и блоки;
3. Конечный программный продукт должен иметь простую логическую структуру с максимальным использованием явных формул.

При разработке алгоритмов следует, по возможности, избегать неявных и рекуррентных соотношений, итерационных процессов и т.п. Это вовсе не значит, что математические методы решения задачи должны быть простыми. Простым и легко реализуемым на ЭВМ должен быть получаемый в результате этого решения алгоритм. В некоторых случаях практика предъявляет жесткие требования к программному обеспечению. В первую очередь это происходит тогда, когда необходимо сконструировать прибор, механизм или ЧИП, реализующий данный алгоритм. В этой ситуации стараются избегать даже таких операций, как извлечение корня, вычисления значений тригонометрических функций и т.п. Для таких случаев особо актуальным является конструирование алгоритмов, использующий только явные формулы.

Всюду в этой книге речь идет об оптимальных или асимптотически оптимальных алгоритмах. Само же понятие оптимальности далеко

не однозначно. Оптимальность алгоритма можно понимать во многих смыслах. В технических науках чаще всего оптимальным считают алгоритм (технологический процесс, агрегат и пр.) наилучший из имеющегося известного набора или процесс (агрегат) с оптимальным набором параметров или узлов. С математической точки зрения оптимальным будет тот алгоритм, который минимизирует некоторую функцию цели (налоги, цену, расход материалов, время обработки, количество кадров программносителя (длину программносителя) и т.п.) при наличии некоторых ограничений. Как правило, эти ограничения обусловлены требованиями производства. Широкий круг оптимизационных задач вписывается в следующую общую схему: требуется найти минимум (или максимум функции)

$$\phi(x, u), \quad (1)$$

где  $x$  и  $u$  элементы некоторого множества (это могут быть элементы  $n$ -мерного пространства функций и т.д.), удовлетворяющие условиям

$$\phi(x) = 0, \quad (2)$$

$$x \in \Omega_1, \quad (3)$$

$$u \in \Omega_2. \quad (4)$$

Функционал  $\phi$  называют функцией цели,  $u$  – управлением, уравнение (2) – уравнением связи, а условия (3) и (4) – ограничениями на область изменения переменной и условием, накладываемым на управление.

В третьей главе предложенной книги в качестве функции цели будет, как правило, выступать то или иное расстояние от восстанавливаемого контура (контура детали) до заданной технологической кривой (кусочно – линейной или кусочно – окружностной, и т.д.). Оптимальность будем понимать в смысле минимизации длины программносителя при заданной погрешности.

Одной из основных целей построения алгоритмов является уменьшение длины программносителя. Как уже отмечалось, алгоритм оптимальный в каком – то одном смысле оказывается оптимальным и во многих других. Так, решая задачу уменьшения длины программносителя при заданной погрешности, мы одновременно решаем задачу минимизации погрешности при заданной длине программносителя – эти задачи эквивалентны. Кроме того, при этом погрешность на каждом шаге оказывается примерно одинаковой, примерно одинаковой становится и степень негладкости приближающей кривой и другое.

Материалы книги мы старались изложить так, чтобы она была полезна разным слоям научно – технических и инженерных работников. Книга рассчитана на чтение тремя циклами – первый этап, это чисто прикладной подход. Он состоит в том, чтобы взять предложенные в книге алгоритмы и использовать их для своих нужд. При втором чтении полезно ознакомиться с формулировками основных результатов и согласовать эти формулировки с изложенными алгоритмами. Во многих случаях формулировки приведенных утверждений позволяют модифицировать предложенные авторами алгоритмы. Понятно, что объем книги не позволяет привести все наработанные модификации приведенных алгоритмов, поэтому авторы пытались так сформулировать утверждения, теоремы и пр., чтобы пользователь сам мог настроить предложенные нами алгоритмы для решения своих задач. И, наконец, третий цикл – конструирование совершенно нового алгоритма. Для этого нужно разобраться в доказательствах и построить тот алгоритм, который нужен для реализации целей пользователя. В связи с этим, наличие доказательств тех или иных утверждений не должно пугать читателя не связанного с математическими исследованиями – их совсем не обязательно читать при первом ознакомлении с материалами книги.

Одним из побудительных мотивов написания этой книги явилось отсутствие монографий с систематическим описанием алгоритмов оптимального восстановления кривых. Материалы посвященные оптимальному описанию кривых технологическими линиями рассеяны по многочисленным оригинальным статьям.

Если такого рода результаты и содержатся в книгах, то изложение чаще всего носит чисто познавательный характер – это в учебниках, или справочниках готовых программ ([3], [4], [15], [18], [24]). В них они уже отлажены и готовы к использованию в определенном круге задач. Что – то исправить или дополнить в них невозможно. Их можно или использовать, или не использовать.

Вкратце остановимся на тех материалах, на которых построена данная книга. Во – первых, здесь существенно используются материалы некоторых монографий посвященных классической теории сплайнов. Это монографии [56], [5], [6], [7], [10], [20], [21], [26], [27].

Во – вторых, это цикл монографий, посвященных вопросам практического использования сплайнов и вопросам инженерной геометрии – [3], [2], [8], [9], [11], [13], [14], [15], [17], [23], [25].

Естественно, так как основная часть монографии посвящена сплайнам, то используются многие фрагменты как доказательств, так и формулировок из оригинальных статей. Это большей частью статьи о нели-

нейной аппроксимации сплайнами – об асимптотически оптимальном выборе узлов при приближении различного рода сплайнами. Прежде всего это те результаты, из которых выросла данная тематика – о приближении функций сплайнами (эрмитовыми, интерполяционными и пр.) [28], [31], [35] – [42], [53]. И, наконец, цикл статей, содержащих основную часть материалов содержащихся в третьей главе [43] – [52].

Таким образом, материалы первой и второй глав написаны на основании материалов монографий [56], [7], [9], [10], [19], [20], [21], [25] и результатов авторов [34], [38], [43], [50], [51], [52].

Материалы третьей главы подготовлены на основании оригинальных статей авторов [35] – [53].

Надеемся, что представленная монография будет полезна для аспирантов и научных работников как по теории станков и инструментов, так и для специалистов по теории приближения функций.

# Глава 1

## Вспомогательные сведения

### 1.1 Кривые и их характеристики

Отыщи всему начало,  
и ты многое поймешь.  
*Косьма Прутков.*

В условиях высокоточного производства, как правило, все контуры деталей (чертежи) определяются в виде кривых, составленных из отрезков гладких лекальных линий. Почти все существующие на данный момент САПРы и построенные на их основе методы описания и обработки этих контуров в той или иной мере опираются на тот факт, что кривая состоит из набора стандартных кривых (в качестве которых могут быть отрезки прямых, дуги окружностей, спиралей и пр.). Это делает алгоритмы, построенные на такого рода САПРах, жестко привязанными к методу описания контура. В то же время, делаются попытки построения алгоритмов более универсальной конструкции, о чем будем говорить позже.

Понятие кривой в инженерных и конструкторских расчетах является одним из основных. С кривой сталкиваются при изучении тех или иных технологических процессов, при получении чертежа какого-либо изделия, и во многих других задачах. Различные технологические условия могут требовать от кривой выполнения тех или иных геометрических свойств. Так, условия на плавные обводы в точках стыков могут иметь различные требования в отношении их гладкости, что может обеспечиваться общей касательной в этой точке, если же такой гладкости не достаточно, то может быть достаточно общей касательной и

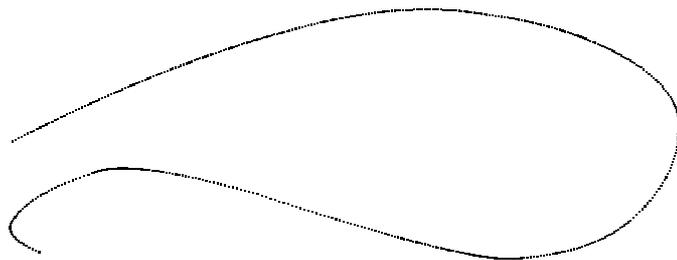


Рис. 1.1:

одинаковыми радиусами кривизны сопрягаемых кривых, и т.д. Таким образом, для успешной работы, инженер должен хорошо знать различные характеристики кривых, уметь их интерпретировать и использовать. Как правило, кривые на плоскости определяются функциональной зависимостью

$$y = f(x),$$

где  $f(x)$  – гладкая или кусочно – гладкая функция.

Любая функция всегда предполагается однозначной, и, поэтому, такой зависимостью нельзя описать, к примеру, кривую изображенную на рис.1.1.

Тем более, с помощью явно заданной функции невозможно описать никакую замкнутую кривую. Как правило, в таком случае поступают следующим образом: кривую разбивают на "правильные" участки, т.е. на куски каждый из которых описывается либо функцией от  $x$ , либо функцией от  $y$  (см. рис.1.2). Так, линия на участке  $AB$  описывается функцией от  $y$ , т.е.  $x = \phi(y)$ , а на участках  $BC$  и  $CD$  – функциями от  $x$ , т.е.  $y = \alpha(x)$  и  $y = \beta(x)$  соответственно.

В случае конкретной реализации алгоритмов, это ведет к потере универсальности программного обеспечения базирующего на явном задании функций.

Эти проблемы ощущаются еще острее при разработке программных продуктов, использующих описание пространственных кривых.

От всех этих недостатков в значительной степени избавлена параметрическая форма записи кривой:

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad (1.1)$$

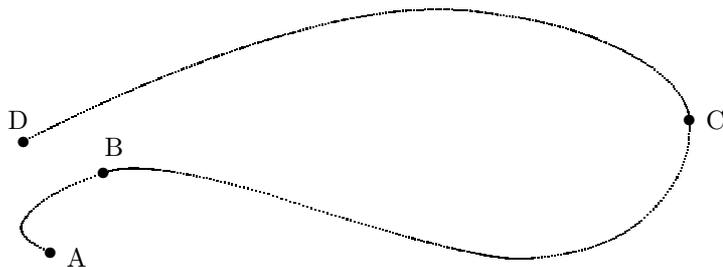


Рис. 1.2:

если кривая плоская, и

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (1.2)$$

если кривая пространственна.

Ясно, что если функции  $x(t)$  и  $y(t)$  непрерывны и периодичны с одним и тем же периодом  $T$ , т.е. если для всех  $t$

$$x(t+T) = x(t), \quad y(t+T) = y(t),$$

то кривая (1.1) замкнута. Если же функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  непрерывны и имеют один и тот же период, то пространственная кривая (1.2) также замкнута.

В круге рассматриваемых нами задач важнейшими характеристиками кривой являются: гладкость (или кусочная гладкость), кривизна, кручение, изменение кривизны, особые точки кривой, точки негладкости, точки возврата, ориентация кривой и др.

Остановимся подробнее на этих характеристиках. Вначале рассмотрим случай плоской кривой.

Если в каждой точке  $t_0$  функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют конечные производные  $x'(t_0)$ , и  $y'(t_0)$  (см. рис.1.3), то существует касательный вектор к кривой  $\Gamma(t)$  в точке  $\Gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$  с направлением

$$\Gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

*Кривая  $\Gamma(t)$  называется гладкой, если в каждой ее точке существует единственный касательный вектор.*

*Кривая  $\Gamma(t)$  называется кусочно – гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых.*

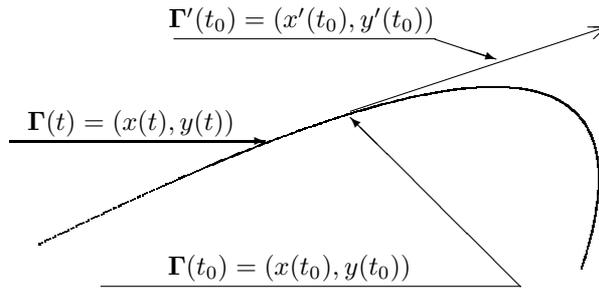


Рис. 1.3:

Точки, в которых кривая не будет гладкой, будем называть точками излома кривой  $\Gamma(t)$ .

Во всех рассматриваемых нами задачах кривая – это контур детали. Таким образом, мы будем иметь дело с непрерывными кусочно – гладкими кривыми.

В дальнейшем будем рассматривать лишь те кривые  $\Gamma(t)$ , для которых производные  $x'(t)$  и  $y'(t)$  существуют всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, и в этих точках  $t_0$  существуют левая и правая касательные, т.е. предельные положения касательных при  $t < t_0$  и при  $t > t_0$ .

Угол между левой и правой касательными (см. рис.1.4) характеризует степень негладкости кривой в точке  $t_0$ . Если этот угол пренебрежительно мал, то кривую можно считать практически гладкой. В дальнейшем это понятие будет играть важную роль и поэтому остановимся на нем более подробно.

Направляющий вектор

$$\Gamma'_-(t_0) = (x'_-(t_0), y'_-(t_0))$$

левой касательной в точке  $t_0$  определим равенствами

$$x'_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} x'(t)$$

и

$$y'_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} y'(t),$$

а правой касательной

$$\Gamma'_+(t_0) = (x'_+(t_0), y'_+(t_0))$$

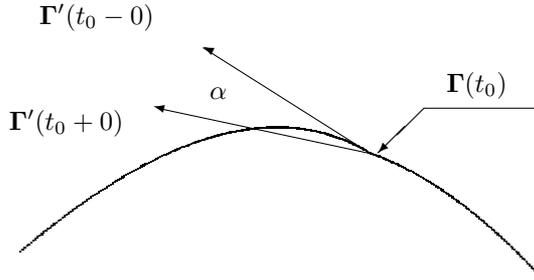


Рис. 1.4:

– равенствами

$$x'_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} x'(t)$$

и

$$y'_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} y'(t).$$

Степенью негладкости кривой  $\Gamma(t)$  в некоторой фиксированной точке  $t$  будем называть модуль значения угла  $\alpha(t) = \alpha(\Gamma, t)$  (в радианах) между векторами  $\Gamma'_-(t)$  и  $\Gamma'_+(t)$ , т.е.

$$\alpha(\Gamma, t) = \arcsin \frac{|x'_+(t)y'_-(t) - y'_+(t)x'_-(t)|}{\sqrt{(x'_+(t))^2 + (y'_+(t))^2} \sqrt{(x'_-(t))^2 + (y'_-(t))^2}}.$$

Очевидно, что если  $\alpha(t_0) = 0$ , то кривая в точке  $t_0$  гладкая.

На маленьком участке гладкую кривую можно уподобить дуге окружности, радиус  $R(t)$  которой – это радиус кривизны кривой в какой – нибудь средней точке. Обратная величина к радиусу кривизны в точке  $t$  называется кривизной кривой в точке  $t$ . В случае если  $x(t)$  и  $y(t)$  – дважды непрерывно дифференцируемые в точке  $t$  функции, кривизна кривой в этой точке вычисляется по формуле:

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y''(t)x'(t)|}{\left(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\right)^3}. \quad (1.3)$$

Так что

$$R(t) = 1/|k(t)|. \quad (1.4)$$

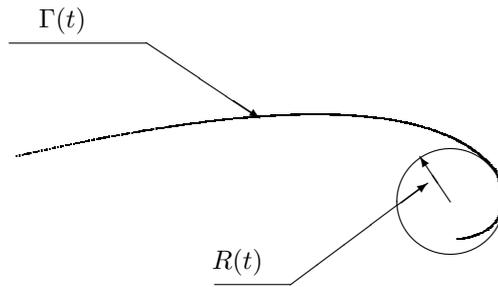


Рис. 1.5:

Во многих траекторных задачах оказываются вредными резкие изменения кривизны или скачки кривизны контура. К таким задачам можно отнести проектирование трубопроводов, корпусов транспортных средств и пр. Одно из основных требований при этом – минимизация турбулентных завихрений, которые существенно зависят от формы профиля контура и, в частности, от скачков (или резких перепадов) кривизны контура. Аналогичная ситуация возникает при разработке профилей кулачковых механизмов (резкие изменения кривизны вызывают удары и толчки), стыковке рельсов и подобных задачах механики и гидро – аэродинамики. Для решения такого рода задач требуются не просто гладкие линии, а линии с плавным изменением кривизны или какими – либо подобными свойствами. Использование линий с непрерывной кривизной не всегда представляется возможным (в силу технологических особенностей). Гораздо чаще используются кривые, допускающие разбиение на конечное число кривых с непрерывной кривизной. Такие кривые будем называть кривыми с кусочно-непрерывной кривизной.

Точки  $t_0$ , в которых кривизна не является непрерывной, будем называть точками разрыва (скачка) кривизны, а саму величину разрыва (скачка) будем определять по формуле

$$\beta(t_0) = k(t_0 + 0) - k(t_0 - 0), \quad (1.5)$$

где

$$k_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} k(t)$$

и

$$k_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} k(t).$$

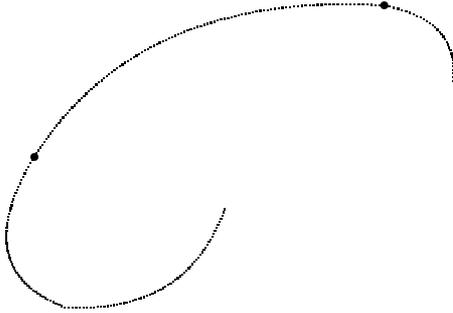


Рис. 1.6:

В траекторных задачах машиностроения важную роль играет эквидистанта кривой, т.е. кривая, лежащая с одной стороны от заданной кривой  $\Gamma(t)$ , причем так, что каждая ее точка удалена от  $\Gamma(t)$  на одно и то же расстояние  $r$  (см. рис.1.7):

Ясно, что любая плоская кривая имеет две эквидистанты, лежащие по разные стороны от нее.

$\varepsilon$ -коридором  $\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$  кривой  $\Gamma(t)$  назовем объединение всех кругов радиуса  $\varepsilon$  с центрами, лежащими на кривой  $\Gamma(t)$  (см. рис.1.8), т.е.

$$\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma) = \bigcup_{M \in \Gamma} K_M(\varepsilon), \quad (1.6)$$

где  $K_M(\varepsilon)$  есть круг радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M$ , то есть

$$K_M(\varepsilon) = \{N : |MN| \leq \varepsilon\}$$

или, что то же

$$K_M(\varepsilon) = \{(x, y) : \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \leq \varepsilon\}.$$

Если кривая  $\Gamma(t)$  не имеет самопересечений, то границы  $\varepsilon$ -коридора удалены от кривой на расстояние  $\varepsilon$  и их естественно называть эквидистантами.

Такое понятие эквидистанты абсолютно верно, но работа с эквидистантой, введенной таким образом, очень сложна. В связи с этим, введем более удобное понятие "почти"эквидистанты для гладких кривых.

Для этого понадобятся понятия нормальных векторов

$$\mathbf{n}_+(t) = (-y'(t), x(t)), \quad \mathbf{n}_-(t) = (y'(t), -x(t))$$

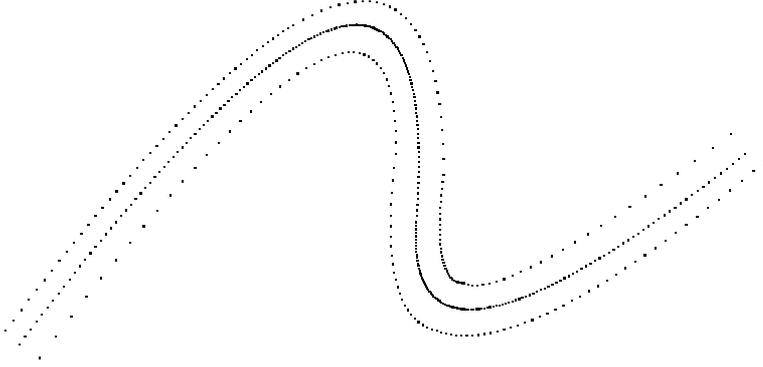


Рис. 1.7:

и нормализованных нормальных векторов

$$\mathbf{n}_+^0(t) = \left( \frac{-y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right),$$

$$\mathbf{n}_-^0(t) = \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{-x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right),$$

т.е. таких векторов, что

$$\mathbf{n}_\pm(t) \perp \mathbf{\Gamma}'(t), \quad \mathbf{n}_\pm^0(t) \perp \mathbf{\Gamma}'(t), \quad |\mathbf{n}_\pm^0(t)| = 1.$$

Геометрическое место точек  $\mathbf{\Gamma}_r^+(t)$ , лежащих вдоль вектора  $\mathbf{n}_+(t)$  на расстоянии  $r$  от точек кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$  назовем внутренней эквидистантой к кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$ , т.е. при заданном  $r$  внутренняя эквидистанта к кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$  – это кривая, заданная векторным уравнением

$$\mathbf{\Gamma}_r^+(t) = \mathbf{\Gamma}(t) + r \cdot \mathbf{n}_+^0(t). \quad (1.7)$$

Аналогично, геометрическое место точек  $\mathbf{\Gamma}_r^-(t)$ , лежащих вдоль вектора  $\mathbf{n}_-(t)$  на расстоянии  $r$  от точек кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$  назовем внешней эквидистантой к кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$ . Уравнение ее будет иметь вид:

$$\mathbf{\Gamma}_r^-(t) = \mathbf{\Gamma}(t) + r \cdot \mathbf{n}_-^0(t) \quad (1.8)$$

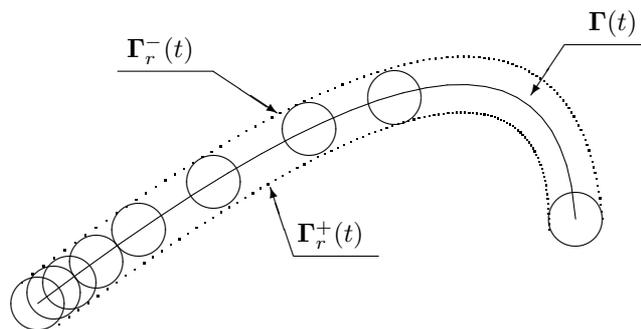


Рис. 1.8:

(см. рис.1.9). В развернутом виде (в координатной форме) это будет выглядеть так:

$$\Gamma_r^+(t) = \left( x(t) - r \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, y(t) + r \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) \quad (1.9)$$

и

$$\Gamma_r^-(t) = \left( x(t) + r \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, y(t) - r \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right). \quad (1.10)$$

Эти уравнения для гладких кривых "почти"эквивалентны тем эквидистантам, которые мы рассматривали ранее. При малых  $r$  эти два понятия практически совпадают.

Большинство линий, используемых в машиностроении, не являются гладкими. Это связано со спецификой имеющегося в настоящее время парка станков. Так, например, рабочий инструмент металлообрабатывающего станка движется, как правило, либо по кусочно – линейной, либо кусочно – окружностной траектории. В этом случае уравнения (1.9) – (1.10) не дают эквидистанты к кривой. Для такой ситуации (для упрощения определений будем считать линию  $\Gamma$  замкнутой) внутреннюю эквидистанту к кривой  $\Gamma(t)$  определим как множество  $\Gamma_r^+(t)$  точек

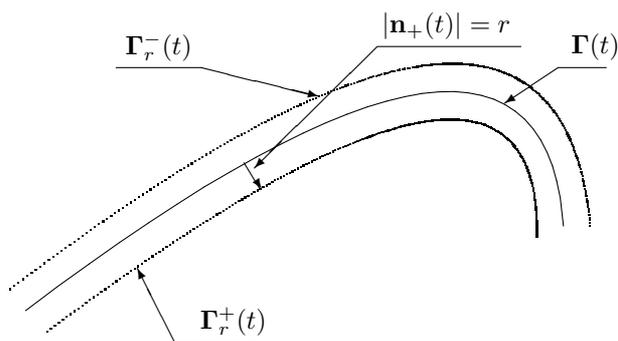


Рис. 1.9:

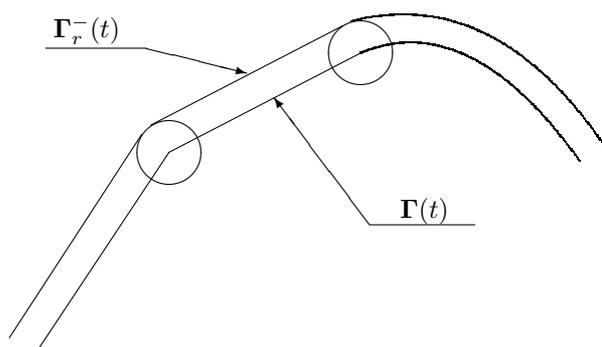


Рис. 1.10:

$M$  на плоскости, лежащих внутри контура  $\Gamma(t)$ , таких, что для всех точек кривой  $\Gamma(t)$  минимум евклидова расстояния между этими точками в точности равен  $r$ , т.е.

$$\forall_N \min_{M \in \Gamma} |MN| = r, \quad (1.11)$$

а множество  $\Gamma_r^-(t)$  точек  $M$ , лежащих вне контура  $\Gamma(t)$  и удовлетворяющих такому же условию, назовем внешней эквидистантой (см. рис.1.10 – 1.11).

В случае, если  $r = r(t)$ , т.е., когда расстояние от эквидистанты до кривой есть функция времени, то (в случае гладкой кривой  $\Gamma$ ) кривые,

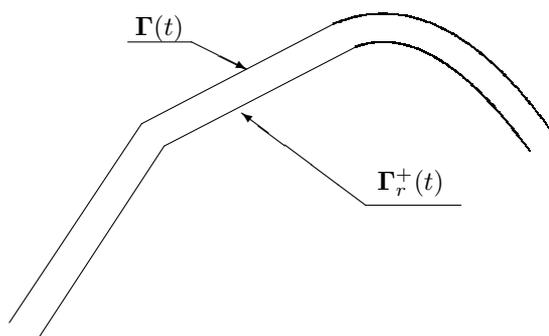


Рис. 1.11:

заданные уравнениями

$$\Gamma_{r(t)}^+(t) = \Gamma(t) + r(t) \mathbf{n}_+^0(t)$$

и

$$\Gamma_{r(t)}^-(t) = \Gamma(t) + r(t) \mathbf{n}_-^0(t),$$

будем называть, соответственно, внутренней и внешней эквидистантами с изменяющимся расстоянием. Задачи связанные с изменением расстояния эквидистанты возникают, к примеру, в теории резания при случае, когда учитывается износ фрезы или производится замена инструмента (см. рис.1.12).

Сложность решения большинства траекторных задач зависит от того насколько удачно выбрана параметризация кривой. Часто возникает необходимость сравнить точки нескольких (как правило – двух) кривых, соответствующие одному и тому же или близким значениям параметра. В частности, такая задача возникает при необходимости идентификации двух близких по конфигурации кривых  $\Gamma_1(t)$  и  $\Gamma_2(t)$ . Ясно, что для этого нужно, чтобы значение параметра  $t$  при движении вдоль контуров  $\Gamma_1(t)$  и  $\Gamma_2(t)$  изменялось равномерно. В частности, если речь идет об обработке контура детали, то в качестве параметра удобно брать время обработки, что обеспечивает стыковку с последующими технологическими процессами. В первом приближении время обработки пропорционально длине обработанного контура.

В подавляющем большинстве задач наиболее удобно брать в качестве параметра  $t$  длину дуги кривой от фиксированной точки отсчета.

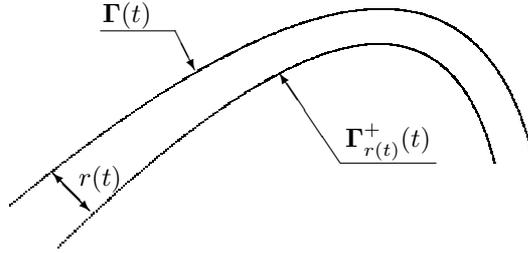


Рис. 1.12:

Такую параметризацию называют естественной. Таким образом, если гладкая кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) задана в естественной параметризации, то для всех  $t$

$$\int_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau = t \quad (1.12)$$

и, следовательно,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1, \quad (1.13)$$

или, что то же,

$$|\Gamma'(t)| = 1. \quad (1.14)$$

Отсюда следует, что если  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  есть гладкая кривая, заданная в естественной параметризации (кривая с непрерывной кривизной), то, дифференцируя соотношение (1.13), получаем равенство

$$x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0, \quad (1.15)$$

а если же кривая  $\Gamma(t)$ , заданная в естественной параметризации, такова, что функции  $x(t)$  и  $y(t)$  – трижды непрерывно дифференцируемы, то

$$x'(t)x'''(t) + y'(t)y'''(t) = -((x''(t))^2 + (y''(t))^2). \quad (1.16)$$

При наличии естественной параметризации кривой формулы вычисления характеристик кривых (кривизна и пр.) существенно упрощаются. Так, если кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  дана в естественной параметризации, то ее кривизна будет вычисляться по формуле

$$k(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t). \quad (1.17)$$

Уравнения эквидистант к кривой  $\Gamma(t)$  заданной в естественной параметризации примут вид:

$$\Gamma_r^+(t) = (x(t) - r y'(t), y(t) + r x'(t)), \quad (1.18)$$

$$\Gamma_r^-(t) = (x(t) + r y'(t), y(t) - r x'(t)). \quad (1.19)$$

Кроме того, если кривая  $\Gamma(t)$  задана в естественной параметризации, то

$$\begin{aligned} \Psi(t) = k'(t) &= (x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))' = x'(t)y'''(t) + y''(t)x''(t) - \\ &- y'(t)x'''(t) - x''(t)y''(t) = x'(t)y'''(t) - y'(t)x'''(t). \end{aligned}$$

То есть, в этом случае

$$\Psi(t) = x'(t)y'''(t) - y'(t)x'''(t). \quad (1.20)$$

Величину  $\Psi(t) = k'(t)$  назовем изменением кривизны  $k(t)$  кривой  $\Gamma(t)$ .

В дальнейшем, в задачах кусочно – окружностной аппроксимации величина  $\Psi(t)$  будет играть ту же роль, что и величина  $k(t)$  в задачах кусочно – линейной аппроксимации.

Те задачи, которыми мы будем заниматься позже – это траекторные задачи – задачи инженерной геометрии, т.е. задачи, связанные с заменой одних кривых (контур детали) другими кривыми (технологические кривые).

В геометрических задачах важно определиться, что мы понимаем под расстоянием между двумя кривыми. Для того, чтобы ввести используемые нами понятия расстояния, приведем несколько вспомогательных определений.

Будем говорить, что кривая  $\Gamma(t)$  удалена от кривой  $\Gamma_1(t)$  на расстояние не более  $\varepsilon$ , если она целиком лежит в  $\varepsilon$ -коридоре кривой  $\Gamma_1(t)$ , т.е.

$$\Gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_1).$$

Наименьшее из  $\varepsilon$ , при котором кривая  $\Gamma(t)$  лежит в  $\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_1)$  называется хаусдорфовым расстоянием или просто расстоянием от кривой  $\Gamma(t)$  до кривой  $\Gamma_1(t)$  и обозначается  $\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_1)$ . Т.е.

$$\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_1) = \min\{\varepsilon : \Gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_1)\}. \quad (1.21)$$

Введенное таким образом понятие расстояния соответствует естественному понятию расстояния. Когда мы говорим, что кривые  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  близки, то при этом будем понимать, что расстояние  $\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_1)$  между ними мало.

Хотя расстояние, введенное соотношением (1.21) естественно и понятно, вычислить его достаточно сложно. Даже если кривые  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  известны, то вычислить расстояние между ними непосредственно по формуле (1.21) сложно. Трудности многократно возрастают когда мы решаем какую-нибудь экстремальную задачу в метрике Хаусдорфа, т.е. задачу определения кривой, лежащей от исходной на заданном расстоянии  $\varepsilon$ , и, удовлетворяющей некоторым экстремальным условиям. Чтобы избежать этой сложности мы используем асимптотический подход, позволяющий свободно оперировать с понятием хаусдорфова расстояния.

С другой стороны, введенное понятие расстояния не является единственно возможным. В задачах, связанных с ориентацией и идентификацией контуров, мы будем использовать другое понятие расстояния – средне квадратическое хаусдорфово расстояние, которое определяется следующим образом.

Сначала рассмотрим случай, когда кривые  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  ( $t \in [0, T]$ ), заданные в естественной параметризации являются замкнутыми (именно для таких кривых введенное здесь понятие расстояния и будет использоваться в дальнейшем). Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\Gamma, \Gamma_1) &= \\ &= \min_{t_0} \sqrt{\int_0^T ((x(t+t_0) - x_1(t))^2 + (y(t+t_0) - y_1(t))^2) dt} \end{aligned} \quad (1.22)$$

и

$$\Gamma(x_0, y_0, \phi, t) = (x_0 + x(t) \cos \phi + y(t) \sin \phi, y_0 + y(t) \cos \phi - x(t) \sin \phi) \quad (1.23)$$

есть кривая, полученная из кривой  $\Gamma(t)$ , сдвигом еч на  $x_0$  и  $y_0$  вдоль осей  $OX$  и  $OY$  соответственно, и поворотом на угол  $\phi$  вокруг начала координат.

Тогда средне – квадратичное хаусдорфово расстояние между кривыми  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  определим по формуле:

$$\delta(\Gamma, \Gamma_1) = \min_{x_0, y_0, \phi} \mathbf{d}(\Gamma(x_0, y_0, \phi), \Gamma_1). \quad (1.24)$$

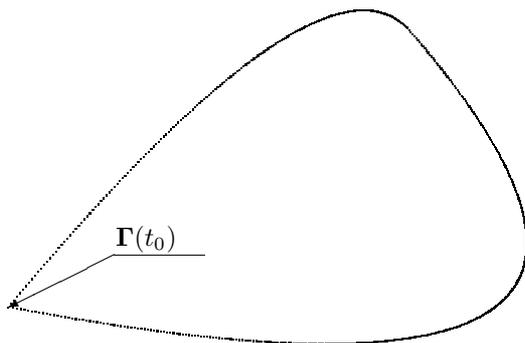


Рис. 1.13:

Если же кривые  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  имеют особые точки (точки излома, точки возврата и пр. (см. рис.1.13)), то необходимость отыскания сдвига аргумента  $t_0$  для согласованного начала отсчета параметра (по формуле (1.22)) отпадает. В этом случае удобно взять за начало отсчета именно особую точку, что существенно упрощает вычисление величины  $\delta(\Gamma, \Gamma_1)$ . Так, если  $t_0$  особая точка на кривой  $\Gamma(t)$ , а  $t_1$  – соответствующая ей особая точка на кривой  $\Gamma_1(t)$ , то

$$d(\Gamma, \Gamma_1) = \sqrt{\int_0^T ((x(t-t_0) - x_1(t-t_1))^2 + (y(t-t_0) - y_1(t-t_1))^2) dt}.$$

Очевидно, что если кривые  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  совместить, то характеристика  $\delta(\Gamma, \Gamma_1)$  указывает не на сколько удалены друг от друга эти кривые, а на сколько они отличаются друг от друга.

Заметим, что если замкнутые кривые  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  имеют разные промежутки изменения параметра, то их легко перепараметризовать, сведя к одному. К примеру, если

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad (t \in [0, T])$$

и

$$\Gamma_1(\tau) = (x_1(\tau), y_1(\tau)), \quad (\tau \in [0, T_1]),$$

то  $\Gamma_1(\tau)$  можно записать в виде

$$\Gamma_1(\eta) = (x_1(\eta), y_1(\eta)), \quad (\eta = \tau T/T_1, \eta \in [0, T])$$

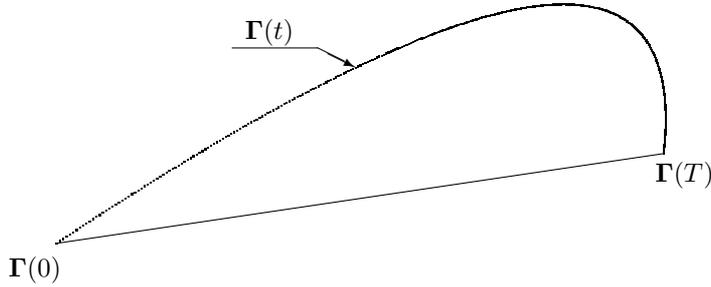


Рис. 1.14:

и свести все к рассмотренному ранее случаю.

Если кривые  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  не являются замкнутыми, то легко построить замыкание соединив точки  $\Gamma(0)$  и  $\Gamma(T)$  и, соответственно, точки  $\Gamma_1(0)$  и  $\Gamma_1(T)$  отрезками прямых, и за расстояние между  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  принять расстояние между соответствующими им замкнутыми кривыми (см. рис.1.14). Впрочем, легко понять как определить расстояние между двумя незамкнутыми кривыми и непосредственно.

В заключение этого параграфа немного поговорим о пространственных кривых.

Ввиду важности способа параметризации кривых, сразу оговоримся, что все рассматриваемые нами в дальнейшем кривые

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (t \in [0, T]),$$

даны в естественной параметризации (т.е. величина  $t$  равна длине дуги кривой  $\Gamma(t)$  от начала отсчета до текущей точки). Таким образом, для всех  $t \in [0, T]$  имеет место равенство

$$\int_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 + (z'(\tau))^2} d\tau = t \quad (1.25)$$

и, следовательно,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = 1$$

или, что то же,

$$|\Gamma'(t)| = 1.$$

Из этих равенств следует, что

$$x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) + z'(t)z''(t) = 0, \quad (1.26)$$

и

$$x'(t)x'''(t) + y'(t)y'''(t) + z'(t)z'''(t) = ((x''(t))^2 + (y''(t))^2 + (z''(t))^2). \quad (1.27)$$

$\varepsilon$ -трубкой  $\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$  кривой  $\Gamma(t)$  назовем объединение всех шаров радиуса  $\varepsilon$  с центрами, лежащими на кривой  $\Gamma(t)$ , т.е.

$$\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma) = \bigcup_{M \in \Gamma} K_M(\varepsilon),$$

где  $K_M(\varepsilon)$  - шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M$ :

$$K_M(\varepsilon) = \{N : |MN| \leq \varepsilon\},$$

или, что то же,

$$K_M(\varepsilon) = \{(x, y, z) : \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2} \leq \varepsilon\}.$$

Будем говорить, что кривая  $\Gamma(t)$  удалена от кривой  $\Gamma_1(t)$  на расстояние не более  $\varepsilon$ , если она целиком лежит в  $\varepsilon$ -трубке кривой  $\Gamma_1(t)$ , то есть если

$$\Gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_1).$$

Наименьшее из  $\varepsilon$ , при котором кривая  $\Gamma(t)$  лежит в  $\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_1)$  называется хаусдорфовым расстоянием или просто расстоянием от кривой  $\Gamma(t)$  до кривой  $\Gamma_1(t)$  и обозначается  $\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_1)$ . То есть

$$\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_1) = \min\{\varepsilon : \Gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_1)\}.$$

Если нам нужно определить не "меру" отдаленности двух кривых друг от друга, а "меру" схожести, то понадобится другое понятие расстояния. Для случая плоских кривых – это расстояние есть средне – квадратичное хаусдорфово расстояние определяемое равенством (1.24). Естественно, что аналогичный подход можно применить и для пространственных кривых, но при этом соответствующие формулы существенно усложняются. Поэтому изложим иной подход, позволяющий (как мы увидим позже) свести пространственную задачу к плоской.

Основной особенностью этого подхода является то, что в начале для каждой из кривых определяем некоторое направление, характерное

именно для этой кривой. Это направление определяется "псевдонормальным" вектором  $\mathbf{N}$ , являющимся нормалью к плоскости, наиболее прилегающей к кривой, т.е.  $\mathbf{N}$  есть решение экстремальной задачи:

$$\int_0^T (\mathbf{\Gamma}(t) \cdot \mathbf{N})^2 dt \rightarrow \min$$

при условии  $|\mathbf{N}| = 1$ .

Если  $\mathbf{\Gamma}_i^*(t) = (x_i^*(t), y_i^*(t), z_i^*(t))$ ,  $(i = 1, 2)$  – параметрические уравнения линий  $\mathbf{\Gamma}_i(t)$  в системе координат, где ось  $OZ$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{N}_i$ ,  $i = 1, 2$ , то расстояние между кривыми  $\mathbf{\Gamma}_1(t)$  и  $\mathbf{\Gamma}_2(t)$  определим по формуле

$$\delta(\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2) = \min_{x_0, y_0, z_0, \phi} \mathbf{d}(\mathbf{\Gamma}_1^*(x_0, y_0, z_0, \phi), \mathbf{\Gamma}_2^*),$$

где

$$\mathbf{d}(\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2) = \min_{t_0} \left( \int_0^T \left( (x_1(t+t_0) - x_2(t))^2 + (y_1(t+t_0) - y_2(t))^2 + (z_1(t+t_0) - z_2(t))^2 \right) dt \right)^{1/2}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(x_0, y_0, z_0, \phi, t) = \\ = (x_0 + x(t) \cos \phi + y(t) \sin \phi, y_0 + y(t) \cos \phi - x(t) \sin \phi, z(t) + z_0). \end{aligned}$$

Приведем еще несколько характеристик пространственных кривых, которые потребуются нам в дальнейшем.

Из общего курса дифференциальной геометрии известно, что кривизна пространственной кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$  в точке  $t$  вычисляется по формуле:

$$k(t) = |\mathbf{\Gamma}'(t) \times \mathbf{\Gamma}''(t)|,$$

где  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  – длина векторного произведения векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а  $\mathbf{\Gamma}^\nu(t) = (x^\nu(t), y^\nu(t), z^\nu(t))$ .

В координатной форме векторное произведение примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}'(t) \times \mathbf{\Gamma}''(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – орты, т.е. векторы единичной длины, направленные вдоль координатных осей.

Таким образом, в декартовых координатах кривизна пространственной кривой выражается равенством

$$k(t) = \left( (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))^2 + (z'(t)y''(t) - z''(t)y'(t))^2 + (z'(t)x''(t) - z''(t)x'(t))^2 \right)^{1/2}.$$

Для пространственных кривых имеет место еще одна важная характеристика – кручение, которая вычисляется по формуле

$$\tau(t) = \frac{1}{\varrho(t)} = \frac{(\mathbf{\Gamma}'(t) \cdot \mathbf{\Gamma}''(t) \cdot \mathbf{\Gamma}'''(t))}{|\mathbf{\Gamma}'(t) \times \mathbf{\Gamma}''(t)|^2},$$

где  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  – смешанное произведение векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

Величина  $\varrho(t)$  называется радиусом кручения кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$  в точке  $t$ , что связано с тем, что на маленьком участке пространственная кривая похожа на винтовую линию радиуса  $\varrho$  с правой нарезкой, если  $\tau(t) > 0$ , и с левой, если  $\tau(t) < 0$ .

Для того, чтобы получить формулу кручения кривой в декартовых координатах, нужно учесть, что смешанное произведение трех векторов вычисляется как определитель, составленный из координат векторов:

$$(\mathbf{\Gamma}'(t) \cdot \mathbf{\Gamma}''(t) \cdot \mathbf{\Gamma}'''(t)) = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель, и, учитывая выведенный ранее вид формулы кривизны, получаем формулу для вычисления кручения пространственной кривой

$$\tau = \frac{x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x'''}{(x'y'' - x''y')^2 + (x'z'' - z'x'')^2 + (z'y'' - y'z'')^2}.$$

Отметим еще, что величина

$$\Omega(t) = \sqrt{\tau^2(t) + k^2(t)}$$

называется полной кривизной кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$  в точке  $t$ .

## 1.2 Разности и их свойства

Devide et impera.  
Ю. Цезарь

В дальнейшем мы будем часто использовать центральные разности и их свойства.

Пусть задан набор чисел  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Их первые разности определяются следующим образом

$$\Delta x_{1/2} = x_1 - x_0, \quad \Delta x_{3/2} = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_{n-1/2} = x_n - x_{n-1}.$$

Вторые центральные разности определяются как разности от разностей, т.е.

$$\Delta^2 x_1 = \Delta x_{3/2} - \Delta x_{1/2}, \quad \Delta^2 x_2 = \Delta x_{5/2} - \Delta x_{3/2}, \dots,$$

$$\Delta^2 x_{n-1} = \Delta x_{n-1/2} - \Delta x_{n-3/2}.$$

Аналогично определяются разности третьего порядка

$$\Delta^3 x_{3/2} = \Delta^2 x_2 - \Delta^2 x_1, \quad \Delta^3 x_{5/2} = \Delta^2 x_3 - \Delta^2 x_2, \dots,$$

$$\Delta^3 x_{n-3/2} = \Delta^2 x_{n-1} - \Delta^2 x_{n-2},$$

и т.д.

Ясно, что

$$\Delta^2 x_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\Delta^3 x_{i-1/2} = x_{i+1} - 3x_i + 3x_{i-1} - x_{i-2}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$\Delta^4 x_i = x_{i+2} - 4x_{i+1} + 6x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2}, \quad i = 2, 3, \dots, n-2,$$

и т.д.

Коэффициенты в этих представлениях есть биномиальные коэффициенты с чередующимися знаками.

При вычислении разностей удобно пользоваться таблицей.

Приведем пример такой таблицы.

$x_i$	$\Delta x_{i+1/2}$	$\Delta^2 x_i$	$\Delta^3 x_{i+1/2}$	$\Delta^4 x_i$	$\Delta^5 x_{i+1/2}$	$\Delta^6 x_i$
714						
	6					
720		2				
	8		-8			
728		-6		27		
	2		19		-80	
730		13		-53		235
	15		-34		155	
745		-21		102		
	-6		68			
739		47				
	41					
740						

Центральные разности от табличных данных являются (с точностью до множителя) дискретными аналогами производных функции в точке. Действительно, если  $x(t)$  есть некоторая достаточное число раз дифференцируемая на  $[a, b]$  функция, и

$$x_i = x(a + ih), \quad h = (b - a)/n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

то при  $h \rightarrow 0$

$$\Delta^1 x_{i-1/2} = h x'_{i-1/2} + O(h^3), \quad (1.28)$$

$$\Delta^2 x_i = h^2 x''_i + O(h^4), \quad (1.29)$$

$$\Delta^3 x_{i-1/2} = h^3 x'''_{i-1/2} + O(h^5), \quad (1.30)$$

и т.д. Здесь и далее

$$x_{i-1/2}^{(\nu)} = x^{(\nu)}(a + (2i - 1)h/2), \quad x_i^{(\nu)} = x^{(\nu)}(a + ih).$$

Кроме того, мы пишем  $\phi(h) = O(h^\alpha)$  (при  $h \rightarrow 0$ ), если найдется число  $c$  такое, что при достаточно малых  $h$  выполняется неравенство  $|\phi(h)| \leq ch^\alpha$ .

Набор данных  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  будем называть периодическим если  $x_n = x_0$ . При этом мы считаем, что для всех целых  $i$  выполняется равенство  $x_{n+i} = x_i$ .

В этом случае для всех  $i$

$$\Delta^1 x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i,$$

$$\Delta^2 x_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = \Delta^1 x_{i+1/2} - \Delta^1 x_{i-1/2},$$

$$\Delta^3 x_{i+1/2} = x_{i+2} - 3x_{i+1} + 3x_i - x_{i-1} = \Delta^2 x_{i+1} - \Delta^2 x_i,$$

и т. д.

Пример вычисления разностей от периодических данных приведен в следующей таблице

$i$	$x_i$	$\Delta x_{i+1/2}$	$\Delta^2 x_i$	$\Delta^3 x_{i+1/2}$	$\Delta^4 x_i$
	26				
	23	-3			
			0		8
		-3		7	
0	20		7		-14
		4		-7	
1	24		0		5
		4		-2	
2	28		-2		-2
		2		-4	
3	30		-6		11
		-4		7	
4	26		1		-8
		-3		-1	
5	23		0		8
		-3		7	
6	20		7		-14
		4		-7	
	24		0		5
		4		-2	
	28				

### 1.3 Сглаживание данных.

Перочинный ножичек в руках искусного хирурга далеко лучше иного преострого ланцета.

*Косьма Прутков.*

Решение любой технической задачи, связанной с обработкой цифровых данных (сигнала), независимо от их природы, начинается с выделе-

ния полезной информации (информативных признаков). Как правило исходная информация предоставляется нам с некоторой погрешностью. Случайные погрешности (шумы) при этом необходимо погасить тем или иным фильтром. Далее, при решении конкретных задач информация, очищенная от помех, используется в виде исходной. Если природа помех известна, то строятся цифровые фильтры, реагирующие именно на такие помехи. Если же природа помех не известна, т.е. когда на информативный сигнал наложен "белый шум" то используют различные аппараты сглаживания, убирающие резкие изменения входящей информации. В рассматриваемых нами задачах помехи, как правило, случайны, в частности, имеют характер "белого шума". Одним из наиболее распространенных видов снятия информации в машиностроении, является обмер детали копиром. При этом снимаемая информация зашумлена случайными выбросами, что связано с механикой самого копира. Конечно, искажение информации может быть связано и с регулярными изменениями данных, вызванными разбалансировкой механизмов или сбивой градуировкой измерительного инструмента. В этом случае положение может исправить лишь изменение технологической оснастки.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые простейшие алгоритмы сглаживания, которые наиболее эффективны в задачах, когда число единиц информации велико (т.е. когда данные снимаются копиром, сканером и пр.).

Пусть дан набор из  $n + 1$  точки

$$M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$$

на плоскости, полученных в результате эксперимента или измерения.

Один из самых простых алгоритмов сглаживания данных основан на замене трех последовательных точек центром тяжести треугольника с вершинами в этих точках.

Этот алгоритм изображен на рисунке 1.15, где исходные данные – это точки  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , а сглаженные точки –  $M_1^*, \dots, M_{n-1}^*$ .

То есть точки  $M_1^*, \dots, M_{n-1}^*$  это точки пересечения медиан треугольников с вершинами в точках  $M_0, M_1$  и  $M_2$ ;  $M_1, M_2$  и  $M_3, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}$  и  $M_n$ . Ясно, что

$$M_i^* = \frac{1}{3}(M_{i-1} + M_i + M_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

т.е.

$$x_i^* = \frac{1}{3}(x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.31)$$

$$y_i^* = \frac{1}{3}(y_{i-1} + y_i + y_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.32)$$

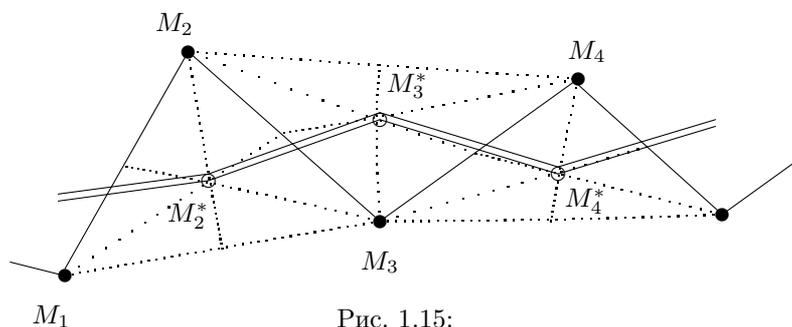


Рис. 1.15:

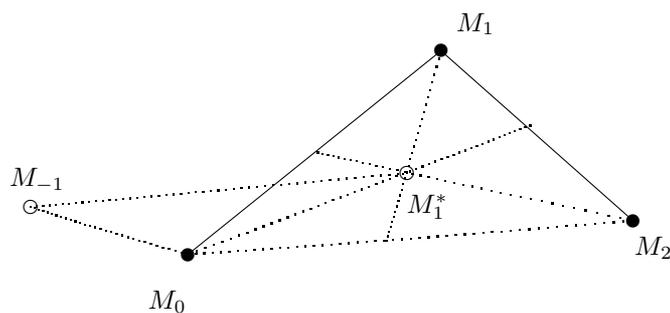


Рис. 1.16:

Равенства (1.31) и (1.32) можно переписать в эквивалентном виде

$$x_i^* = x_i + \frac{1}{3} \Delta^2 x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.33)$$

$$y_i^* = y_i + \frac{1}{3} \Delta^2 y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.34)$$

В процессе сглаживания количество данных (точек) уменьшилось на две. Как правило, процесс сглаживания повторяют несколько раз. В результате мы теряем часть информации, что приводит к потере точности при описании контура у концов. Чтобы этого не произошло, необходимо пополнить разумным способом исходные данные и пополненные данные сгладить.

Если данные  $M_0, M_1, \dots, M_n$  описывают замкнутую кривую (в этом случае  $M_0 = M_n$ ), то достаточно положить  $M_{-1} = M_{n-1}$  и  $M_{n+1} = M_1$

(периодизировать данные). В этом случае будет

$$\Delta^2 x_0 = x_1 - 2x_0 + x_{-1} = x_1 - 2x_0 + x_{n-1},$$

$$\Delta^2 x_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = x_1 - 2x_n + x_{n-1}$$

и

$$\Delta^2 y_0 = y_1 - 2y_0 + y_{-1} = y_1 - 2y_0 + y_{n-1},$$

$$\Delta^2 y_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = y_1 - 2y_n + y_{n-1}$$

сглаженные данные определяются с помощью равенств (1.33) и (1.34) для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Приведем два способа доопределения данных в случае, когда данные описывают незамкнутую кривую. Первый способ состоит в следующем – точки  $M_{-1}$  и  $M_{n+1}$  определяем из условия

$$M_{-1}M_0 = M_0M_1, \quad M_nM_{n-1} = M_{n+1}M_n,$$

т.е.

$$x_{-1} = 2x_0 - x_1, \quad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}, \quad (1.35)$$

$$y_{-1} = 2y_0 - y_1, \quad y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1}. \quad (1.36)$$

Второй способ изображен на рисунке 1.16.

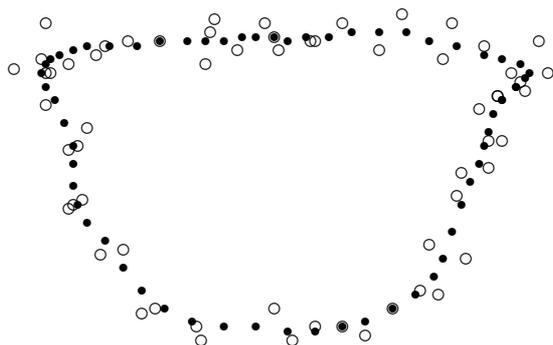


Рис. 1.17: Сглаживание периодических данных при 4 итерациях и  $\alpha = 1/3$ .

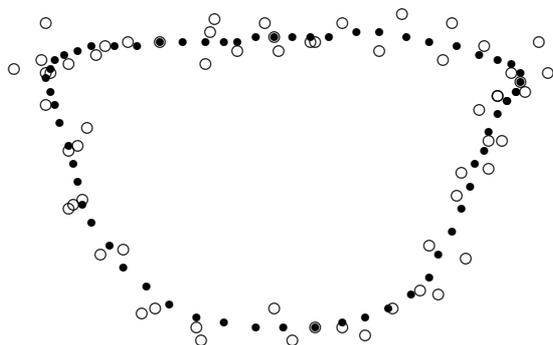


Рис. 1.18: Сглаживание периодических данных при 7 итерациях и  $\alpha = 1/3$ .

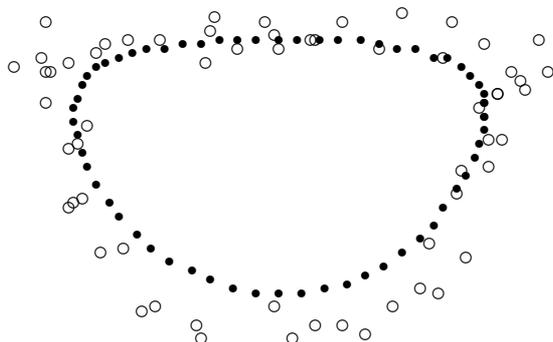


Рис. 1.19: Сглаживание периодических данных при 40 итерациях и  $\alpha = 1/3$ .

В этом случае точки  $M_{-1}$  и  $M_{n+1}$  мы выбираем из условий

$$M_2 M_{-1} = M_2 M_1^* + M_2 M_0, \quad M_{n-2} M_{n+1} = M_{n-2} M_{n-1}^* + M_{n-2} M_n,$$

или, что то же,

$$x_2 - x_{-1} = x_2 - \frac{1}{3}(x_0 + x_1 + x_2) + x_2 - x_0,$$

$$x_{n+1} - x_{n-2} = x_{n-2} - \frac{1}{3}(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) + x_n - x_{n-2}$$

и

$$y_2 - y_{-1} = y_2 - \frac{1}{3}(y_0 + y_1 + y_2) + y_2 - y_0,$$

$$y_{n+1} - y_{n-2} = y_{n-2} - \frac{1}{3}(y_{n-2} + y_{n-1} + y_n) + y_n - y_{n-2}.$$

Находя из этих равенств  $x_{-1}, x_{n+1}, y_{-1}$  и  $y_{n+1}$ , получаем формулы пополнения

$$x_{-1} = \frac{1}{3}(4x_0 + x_1 - 2x_2), \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(4x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}), \quad (1.37)$$

$$y_{-1} = \frac{1}{3}(4y_0 + y_1 - 2y_2), \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}(4y_n + y_{n-1} - 2y_{n-2}). \quad (1.38)$$

Таким образом, мы пришли к следующему алгоритму сглаживания данных, описывающему незамкнутую кривую.

Вычисляем значения  $x_{-1}, y_{-1}, x_{n+1}, y_{n+1}$  в соответствии с равенствами (1.37), (1.38) или (1.35), (1.36) и вычисляем сглаженные данные  $x_i^*, y_i^*$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$  по формулам

$$x_i^* = x_i + \frac{1}{3}\Delta^2 x_i, \quad (1.39)$$

$$y_i^* = y_i + \frac{1}{3}\Delta^2 y_i. \quad (1.40)$$

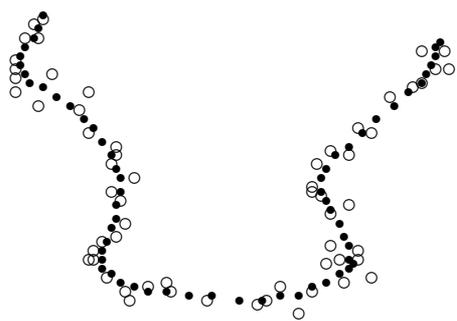


Рис. 1.20: Сглаживание незамкнутой кривой при 5 итерациях и  $\alpha = 1/3$ .

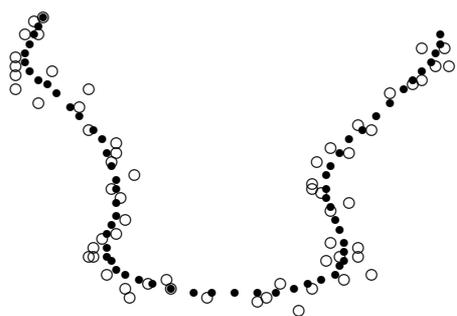


Рис. 1.21: Сглаживание незамкнутой кривой при 10 итерациях и  $\alpha = 1/3$ .

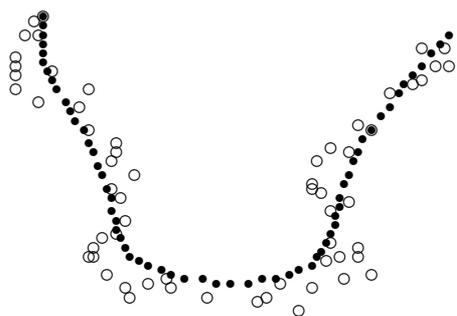


Рис. 1.22: Сглаживание незамкнутой кривой при 40 итерациях и  $\alpha = 1/3$ .

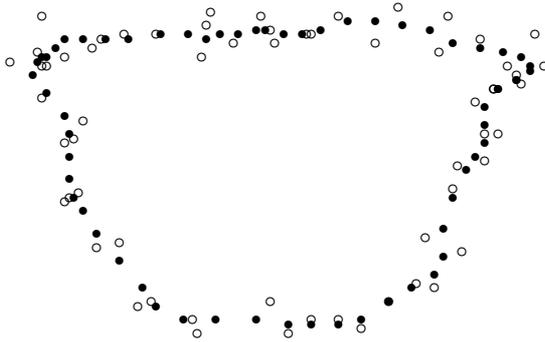


Рис. 1.23: Сглаживание периодических данных при 4 итерациях и  $\alpha = 1/6$

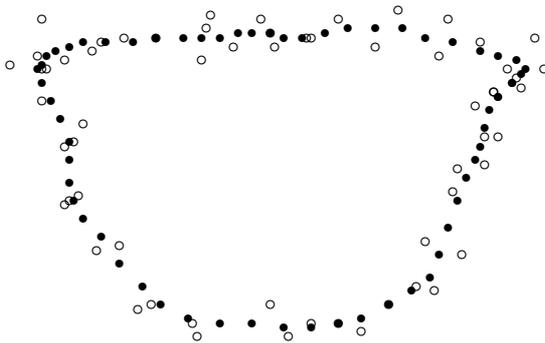


Рис. 1.24: Сглаживание периодических данных при 10 итерациях и  $\alpha = 1/6$

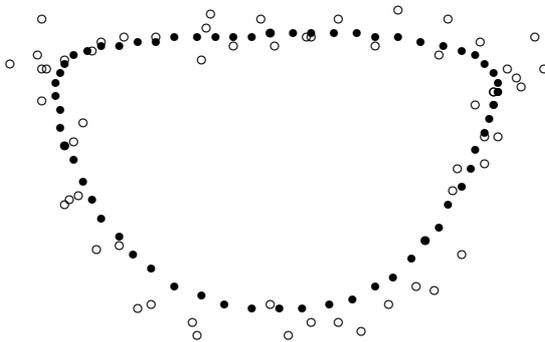


Рис. 1.25: Сглаживание периодических данных при 40 итерациях и  $\alpha = 1/6$

Формулы (1.39), (1.40) дают хорошие результаты сглаживания в тех ситуациях, когда ошибки измерения велики. В тех случаях когда ошибки очень большие, то используют эти алгоритмы несколько раз. При малых ошибках алгоритм, приведенный выше, может (даже при однократном применении) "переглядеть" данные, исказив достоверную информацию. В таких случаях обычно применяют (лучше несколько раз) более "мягкие" алгоритмы сглаживания, которые отличаются от (1.39), (1.40) меньшим коэффициентом при вторых разностях.

Точная формулировка такого алгоритма выглядит так:

$$x_{-1} = \frac{1}{3}(4x_0 + x_1 - 2x_2), \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(4x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}), \quad (1.41)$$

$$y_{-1} = \frac{1}{3}(4y_0 + y_1 - 2y_2), \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}(4y_n + y_{n-1} - 2y_{n-2}), \quad (1.42)$$

$$x_i^* = x_i + \alpha \Delta^2 x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (1.43)$$

$$y_i^* = y_i + \alpha \Delta^2 y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.44)$$

Ясно, что если  $\alpha = 0$ , то  $x_i^* = x_i$  и  $y_i^* = y_i$ , а если  $\alpha = 1/3$ , то получим приведенный ранее алгоритм сглаживания (по центрам тяжести). Если же  $0 < \alpha < 1/3$ , мы получаем "мостик" между наиболее "мягким" алгоритмом ( $\alpha = 0$ ) и наиболее "жестким" ( $\alpha = 1/3$ ).

Можно показать, что при  $\alpha = 1/8$  алгоритм (1.41) – (1.44) тесно связан со сглаживанием данных с помощью параболических сплайнов, а при  $\alpha = 1/6$  с помощью кубических сплайнов. Эти связи мы не будем изучать подробно (их можно найти почти во всех монографиях по сплайнам) и укажем лишь на то, что их можно вывести из результатов последующих параграфов.

На практике обычно поступают так: выбирают параметр сглаживания  $\alpha$  (для задач, связанных со сглаживанием данных снятых с показаний копира, достаточно, как правило, полагать  $\alpha = 1/10$ ), сглаживают данные с помощью алгоритма (1.41) – (1.44) и полученные данные принимают за исходные. Затем сглаживают их тем-же алгоритмом повторно, и т.д.

На рисунках 1.17 – 1.19 приведены примеры сглаживания периодических данных (данных описывающих замкнутую кривую) при  $\alpha = 1/3$ .

Мы сознательно выбрали довольно большой уровень ошибок (в реальных задачах он, как правило, гораздо ниже), чтобы результаты сглаживания были визуальны различимы.

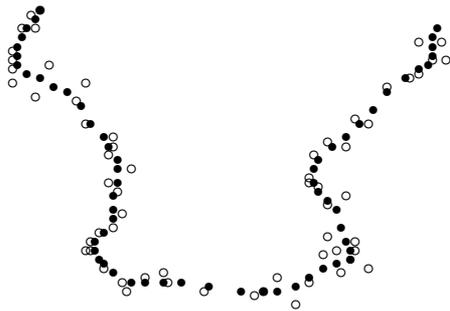


Рис. 1.26: Сглаживание кривой при 5 итерациях и  $\alpha = 1/6$ .

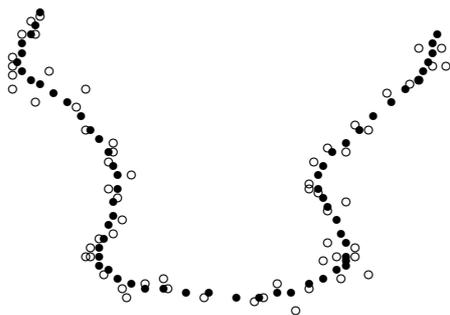


Рис. 1.27: Сглаживание кривой при 10 итерациях и  $\alpha = 1/6$ .

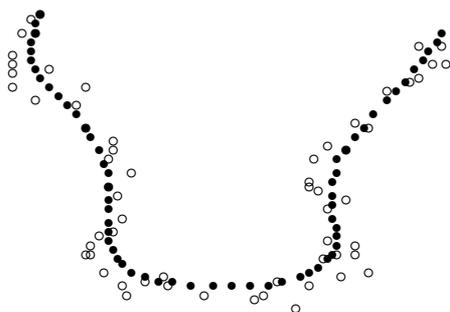


Рис. 1.28: Сглаживание кривой при 40 итерациях и  $\alpha = 1/6$ .

В приведенных примерах хорошо видно, что лучшие результаты получаются в случаях, когда алгоритм сглаживания применяется 4 – 8 раз. Это типичная ситуация в тех случаях, когда уровень ошибок велик.

Аналогичная картина будет и в случае сглаживания непериодических данных, то есть данных, описывающих незамкнутую кривую. Вначале небольшое отличие от предыдущего имеется лишь у концов кривой. При многократном применении алгоритма сглаживания, в первом случае кривая вырождается в точку, а во втором – в прямую. Примеры таких расчетов приведены на рисунках 1.20 – 1.22.

## 1.4 Условие окончания сглаживания данных

Продолжать смеяться легче, чем окончить смех.

*Косьма Прутков.*

Естественно возникает вопрос: "Какое количество итераций будет достаточно для завершения процесса сглаживания?" То есть, до каких пор проводить процесс сглаживания?

Приведенные результаты наглядно демонстрируют, что многократное применение алгоритма сглаживания может существенно исказить исходную информацию вплоть до потери формы исходного контура.

Ясно, что это зависит от точности задания исходных данных или, что то же, от уровня ошибок (шумов). Чем больше уровень ошибок, тем больше необходимо операций сглаживания. С другой стороны, если число итераций слишком велико данные "разглядятся" в отрезок прямой (если данные описывают незамкнутую кривую) или стянутся в точку (в случае замкнутой кривой).

Алгоритм остановки сглаживания основан на следующем факте: если данные сглажены не достаточно, то длины ломаных, последовательно соединяющих точки до и после сглаживания, существенно различны (после сглаживания длина ломаной уменьшается), а если данные сглажены достаточно – длины этих ломаных почти совпадают.

Формулировка этого факта такова:

Пусть  $M_0, M_1, \dots, M_n$  – исходные данные, а  $M_0^*, M_1^*, \dots, M_n^*$  – сглаженные и

$$\Theta_n = \sum_{i=1}^n |M_i M_{i-1}|,$$

$$\Theta_n^* = \sum_{i=1}^n |M_i^* M_{i-1}^*|.$$

Тогда математическое ожидание величины  $|\Theta_n - \Theta_n^*|$  пропорционально величине  $\alpha \cdot n \cdot \varepsilon \cdot \Theta_n$ , где  $\varepsilon$  – уровень ошибки.

Если же

$$x_i = x(a + ih), \quad y_i = y(a + ih) \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad h = (b - a)/n),$$

и, функции  $x(t)$  и  $y(t)$  четырежды непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$  (т.е. если данные снимаются равномерно с гладкой кривой), то

$$\Delta l_n = |\Theta_n - \Theta_n^*| \leq A\alpha h^2 + O(h^3), \quad (1.45)$$

где

$$A = \int_a^b |\theta(t)| dt$$

и

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{x'(t)x'''(t) + y'(t)y'''(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \quad (1.46)$$

т.е. величина  $|\Theta_n - \Theta_n^*|$  стремится к нулю пропорционально  $1/n^2$ .

На рисунках 1.29–1.30 приведен пример поведения длин ломаных в процессе сглаживания. Сглаживание данных в этом случае достаточно провести 6–7 раз.

Можно указать и критерий останковки процесса сглаживания. Для этого достаточно записать дискретный аналог неравенства (1.45) (с константой  $2A$  вместо  $A$ , чтобы пренебречь погрешностью дискретизации, и величиной  $O(h^3)$ ). Пусть

$$M_{i,k}(x_{i,k}, y_{i,k}) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

– набор точек, полученных в результате  $k$ -го сглаживания,

$$\Theta_{n,k} = \sum_{i=1}^n |M_{i,k} M_{i-1,k}|$$

– длина ломаной, соединяющей точки, полученные в результате  $k$ -го сглаживания, т.е.

$$\Theta_{n,k} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_{i-1/2,k})^2 + (\Delta y_{i-1/2,k})^2}.$$

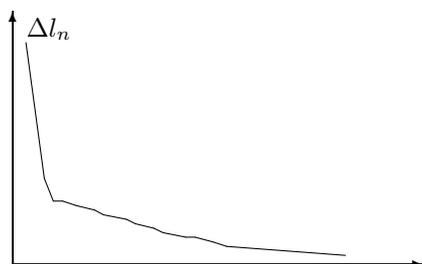


Рис. 1.29:  $\alpha = 1/3$

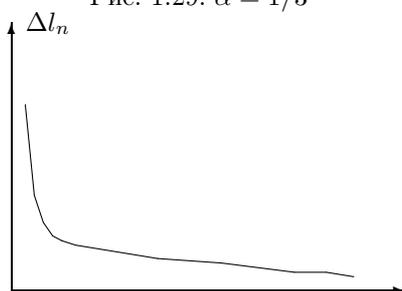


Рис. 1.30:  $\alpha = 1/6$

Если неравенство

$$\Delta l_n = |\Theta_{n,k} - \Theta_{n,k-1}| \leq 2\alpha\Theta_{n,k}^2 \quad (1.47)$$

не выполняется, то сглаживание продолжаем, если выполняется – прекращаем.

Приведем доказательство основного в этом параграфе неравенства (1.45). Для упрощения выкладок ограничимся случаем, когда данные описывают замкнутую кривую. Для незамкнутой кривой добавляются лишь технические трудности, связанные с доопределением точек у концов.

Итак, пусть  $x(t)$  и  $y(t)$  четырежды дифференцируемые на периоде  $[0, T]$  функции,  $h = T/n$  и

$$x_i = x(ih), \quad y_i = y(ih) \quad (i \in Z),$$

$$x_i^* = x_i + \alpha\Delta^2 x_i, \quad y_i^* = y_i + \alpha\Delta^2 y_i.$$

Кроме того, пусть

$$\theta_{n,i-1/2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

$$\theta_{n,i-1/2}^* = \sqrt{(x_i^* - x_{i-1}^*)^2 + (y_i^* - y_{i-1}^*)^2}$$

и

$$\Theta_n = \sum_{i=1}^n \theta_{n,i-1/2}, \quad \Theta_n^* = \sum_{i=1}^n \theta_{n,i-1/2}^*.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\theta_{n,i-1/2}^*)^2 &= (x_i - x_{i-1} + \alpha(\Delta^2 x_i - \Delta^2 x_{i-1}))^2 + (y_i - y_{i-1} + \\ &+ \alpha(\Delta^2 y_i - \Delta^2 y_{i-1}))^2 = (\Delta^1 x_{i-1/2} + \alpha\Delta^3 x_{i-1/2})^2 + (\Delta^1 y_{i-1/2} + \\ &+ \alpha\Delta^3 y_{i-1/2})^2 = (\Delta^1 x_{i-1/2})^2 + (\Delta^1 y_{i-1/2})^2 + \alpha^2((\Delta^3 x_{i-1/2})^2 + \\ &+ (\Delta^3 y_{i-1/2})^2) + \alpha(\Delta^1 x_{i-1/2}\Delta^3 x_{i-1/2} + \Delta^1 y_{i-1/2}\Delta^3 y_{i-1/2}). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (1.28) – (1.30) следует, что при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $i$  выполняется соотношение

$$\begin{aligned} (\theta_{n,i-1/2}^*)^2 &= (\Delta^1 x_{i-1/2})^2 + (\Delta^1 y_{i-1/2})^2 + \\ &+ \alpha \left( x'_{i-1/2} x'''_{i-1/2} + y'_{i-1/2} y'''_{i-1/2} \right) h^4 + O(h^6), \end{aligned}$$

т.е.

$$(\theta_{n,i-1/2}^*)^2 = (\theta_{n,i-1/2})^2 + \alpha \phi_{i-1/2} h^4 + O(h^6), \quad (1.48)$$

где

$$\phi(t) = x'(t)x'''(t) + y'(t)y'''(t)$$

и

$$\phi_{i-1/2} = \phi((2i-1)h/2).$$

Кроме того, из (1.28) получаем

$$(\theta_{n,i-1/2})^2 = ((x'_{i-1/2})^2 + (y'_{i-1/2})^2)h^2 + O(h^4).$$

Отсюда и из (1.48) имеем

$$\begin{aligned} (\theta_{n,i-1/2}^*)^2 &= (\theta_{n,i-1/2})^2 \left( 1 + \alpha \phi_{i-1/2} h^2 / (\theta_{n,i-1/2})^2 + O(h^4) \right) = \\ &= (\theta_{n,i-1/2})^2 \left( 1 + \alpha \psi_{i-1/2} h^2 + O(h^4) \right), \end{aligned}$$

где функция  $\psi(t)$  определена равенством

$$\psi(t) = \frac{\phi(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Таким образом

$$\theta_{n,i-1/2}^* = \theta_{n,i-1/2} \sqrt{1 + \alpha \psi_{i-1/2} h^2 + O(h^4)}.$$

Кроме того, при  $\beta \rightarrow 0$

$$\sqrt{1 + \beta} = 1 + \frac{\beta}{2} + O(\beta^2).$$

Поэтому

$$\sqrt{1 + \alpha \psi_{i-1/2} h^2 + O(h^4)} = 1 + \frac{1}{2} \alpha \psi_{i-1/2} h^2 + O(h^4).$$

Из этого и полученных ранее соотношений следует, что при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $i$  выполняется асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}\theta_{n,i-1/2}^* &= \theta_{n,i-1/2} \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha \psi_{i-1/2} h^2 + O(h^4) \right) = \\ &= \theta_{n,i-1/2} + \alpha \theta_{n,i-1/2} \psi_{n,i-1/2} h^2 + O(h^4).\end{aligned}$$

Используя теперь равенство (1.46), получим

$$\theta_{n,i-1/2}^* - \theta_{n,i-1/2} = \alpha \theta_{n,i-1/2} h^2 + O(h^4)$$

и, следовательно,

$$\Theta_n^* - \Theta_n = \alpha h^2 \left( h \sum_{i=1}^n \theta_{n,i-1/2} \right) + O(h^3).$$

Остается учесть, что

$$h \sum_{i=1}^n \theta_{n,i-1/2} = \int_a^b \theta(t) dt + O(h^2).$$

В заключение параграфа приведем формальный алгоритм сглаживания.

Даны массивы:

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \quad y_0, y_1, \dots, y_n.$$

Выбираем  $\alpha \in [0, 1/3]$ , и вычисляем величины

$$x_{-1} = \frac{1}{3}(4x_0 + x_1 - 2x_2), \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(4x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2}),$$

$$y_{-1} = \frac{1}{3}(4y_0 + y_1 - 2y_2), \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}(4y_n + y_{n-1} - 2y_{n-2}),$$

$$\Delta^2 x_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Найдем сглаженные данные

$$x_i^* = x_i + \alpha \Delta^2 x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$y_i^* = y_i + \alpha \Delta^2 y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

и вычислим величины

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$l_i^* = \sqrt{(x_i^* - x_{i-1}^*)^2 + (y_i^* - y_{i-1}^*)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$L = \sum_{i=1}^n l_i, \quad L^* = \sum_{i=1}^n l_i^*.$$

Для того, чтобы определить достаточно ли сглажены данные, вычислим

$$qx_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$px_i = qx_{i+1} - 2qx_i + qx_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и аналогичные величины для  $qy_i$  и  $py_i$ . Тогда дискретным аналогом функции  $\theta(t)$  является набор чисел

$$T_i = (qx_i \cdot px_i + qy_i \cdot py_i) / (2l_i^*),$$

а дискретным аналогом  $A$  – число

$$A = \sum_{i=1}^n l_i^* T_i.$$

Если будет выполняться условие

$$|L - L^*| \leq A\alpha \left( \frac{L^*}{n} \right)^2,$$

то процесс сглаживания можно считать законченным. В противном случае все нужно повторить, взяв в качестве исходной информации массивы

$$x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*, \quad y_0^*, y_1^*, \dots, y_n^*.$$

## 1.5 Алгоритмы сглаживания повышенной точности

Ваш старый прибор – это очень хороший прибор, но вы наверное заметили, что вместе с пылью он всасывает и часть вашего ковра.

*И.Ильф "Записные книжки."*

Приведенный в предыдущем параграфе алгоритм сглаживания является весьма эффективным в случаях, когда данных много, например, когда они снимаются с показаний копира или сканера. Однако, при неумелом использовании его, в случае, когда число данных невелико, мы можем переглядеть данные в отрезок прямой, когда кривая незамкнутая и стянуть в точку, если кривая замкнута. В этом параграфе мы приведем более точный (но и более сложный) алгоритм сглаживания. В основе его лежит формула

$$M_i^* = M_i - \beta \Delta^4 M_i. \quad (1.49)$$

Для того, чтобы алгоритм работал, необходимо выполнение следующий требований:

1. обосновать равенство (1.49) и выбор  $\beta$ ;
2. доопределить точки  $M_{-2}$ ,  $M_{-1}$ ,  $M_{n+1}$  и  $M_{n+2}$  (чтобы было возможно найти величины  $\Delta^4 M_0$ ,  $\Delta^4 M_1$ ,  $\Delta^4 M_{n-1}$ ,  $\Delta^4 M_n$ ) и повторять сглаживание;
3. найти критерий остановки алгоритма сглаживания.

Для того, чтобы ответить на первый вопрос, приведем сначала другой подход к обоснованию алгоритма, описанного в предыдущем параграфе.

Пусть дан набор из  $n + 1$  точки  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) на плоскости. Этому набору поставим в соответствие два набора точек

$$(0, x_0), (1, x_1), \dots, (n, x_n)$$

и

$$(0, y_0), (1, y_1), \dots, (n, y_n).$$

Для каждой тройки чисел  $(i - 1, x_{i-1})$ ,  $(i, x_i)$  и  $(i + 1, x_{i+1})$  определим коэффициенты  $a$  и  $b$  прямой  $at + b$  так, чтобы сумма квадратов ошибок

$$\Phi(a, b) = (x_{i-1} - (a(i-1) + b))^2 + (x_i - (ai + b))^2 + (x_{i+1} - (a(i+1) + b))^2$$

была минимальной.

Пусть  $a^*$  и  $b^*$  решение этой задачи на минимум. Тогда мы полагаем

$$x_i^* = a^*i + b^*.$$

Необходимое и достаточное условие минимума в нашей задаче тако-  
во

$$\begin{cases} \partial\Phi/\partial a = 0, \\ \partial\Phi/\partial b = 0, \end{cases}$$

или, что то же,

$$\begin{cases} a((i-1)^2 + i^2 + (i+1)^2) + b(i-1 + i + i+1) = \\ = x_{i-1}(i-1) + x_i i + x_{i+1}(i+1), \\ a(i-1 + i + i+1) + 3b = x_{i-1} + x_i + x_{i+1}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$a^* = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, \quad b^* = \frac{x_{i+1} + x_i + x_{i-1}}{3} - \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}i$$

и, следовательно,

$$x_i^* = \frac{x_{i+1} + x_i + x_{i-1}}{3}.$$

Применив ту же процедуру к данным  $(i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), мы придем к алгоритму сглаживания по "центрам тяжести треугольников".

Перейдем к построению алгоритма повышенной точности. Для каждой пятерки чисел

$$(i-2, x_{i-2}), (i-1, x_{i-1}), (i, x_i), (i+1, x_{i+1}), (i+2, x_{i+2})$$

определим коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  параболы  $at^2 + bt + c$  из условия минимума суммы квадратов ошибок

$$\sum_{k=i-2}^{i+2} (x_k - (ak^2 + bk + c))^2 \quad (i = 2, 3, \dots, n-2).$$

Если  $a^*$ ,  $b^*$  и  $c^*$  – решение этой задачи на минимум, то полагаем

$$x_i^* = a^*i^2 + b^*i + c^*. \quad (1.50)$$

Проведя необходимые в этом случае вычисления (находим и приравниваем к нулю частные производные по  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и решая полученную

при этом систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными), находим значения  $a^*$ ,  $b^*$  и  $c^*$ . Затем, подставляя эти значения в (1.50), получаем

$$x_i^* = x_i - \frac{3}{35}\Delta^4 x_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-2). \quad (1.51)$$

Аналогично получаем

$$y_i^* = y_i - \frac{3}{35}\Delta^4 y_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-2). \quad (1.52)$$

Итак, алгоритм сглаживания повышенной точности состоит в том, что новые значения  $x_i^*$  и  $y_i^*$  для всех  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_i^* = x_i - \beta\Delta^4 x_i, \\ y_i^* = y_i - \beta\Delta^4 y_i, \end{cases},$$

где  $0 < \beta < 3/35$ .

Для того, чтобы алгоритм работал, необходимо доопределить точки

$$M_{-2}(x_{-2}, y_{-2}), \quad M_{-1}(x_{-1}, y_{-1}), \quad M_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad M_{n+2}(x_{n+2}, y_{n+2}).$$

К задаче доопределения недостающих точек мы подойдем с тех же позиций.

Определим коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  из условия минимума суммы квадратов ошибок

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i=0}^4 (x_i - p(i))^2,$$

где

$$p(t) = at^2 + bt + c \quad (1.53)$$

и положим

$$x_{-1} = p(-1), \quad x_{-2} = p(-2). \quad (1.54)$$

Необходимые и достаточные условия экстремума имеют вид

$$\begin{cases} \partial\Phi/\partial a = 0; \\ \partial\Phi/\partial b = 0; \\ \partial\Phi/\partial c = 0 \end{cases}$$

или

$$\sum_{i=0}^4 p(i)i^2 = \sum_{i=0}^4 x_i i^2,$$

$$\sum_{i=0}^4 p(i)i = \sum_{i=0}^4 x_i i,$$

$$\sum_{i=0}^4 p(i) = \sum_{i=0}^4 x_i.$$

Решая эту систему, и, подставляя найденные значения  $a, b, c$  в (1.54), получим

$$x_{-1} = \frac{1}{70}(126x_0 - 56x_2 - 42x_3 + 42x_4), \quad (1.55)$$

$$x_{-2} = \frac{1}{35}(105x_0 - 14x_1 - 63x_2 - 42x_3 + 49x_4). \quad (1.56)$$

Аналогично находим

$$x_{n+1} = \frac{1}{70}(126x_n - 56x_{n-2} - 42x_{n-3} + 42x_{n-4}), \quad (1.57)$$

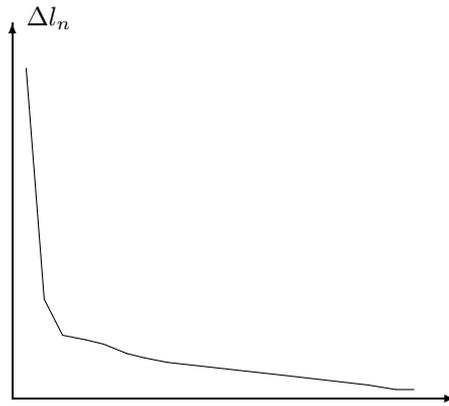
$$x_{n+2} = \frac{1}{35}(105x_n - 14x_{n-1} - 63x_{n-2} - 42x_{n-3} + 49x_{n-4}). \quad (1.58)$$

Точно также доопределяем и значения  $y_{-1}, y_{-2}, y_{n+1}, y_{n+2}$ .

Таким образом мы пришли к следующему алгоритму сглаживания повышенной точности:

1. доопределяем точки  $(x_i, y_i)$  для  $i = -2, -1, n+1, n+2$ , исходя из равенств (1.55) – (1.58) и аналогичных равенств для  $y_i$ ;
2. выбираем  $0 < \beta < 3/35$ .
3. После этого вычисляем новые точки  $(x_i^*, y_i^*)$  в соответствии с равенствами (1.51) – (1.52).

Остался невыясненным вопрос сколько раз можно повторить процесс сглаживания без ущерба для качества информации. Ответить на этот

Рис. 1.31:  $\alpha = -3/35$ 

вопрос нам поможет следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству приведенному в предыдущем параграфе. Иллюстрацией этого утверждения является рисунок 1.31.

Пусть  $l_n$  – длина ломаной соединяющей точки  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), а  $l_n^*$  – длина ломаной соединяющей точки  $(x_i^*, y_i^*)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Тогда математическое ожидание разности  $|l_n - l_n^*|$  пропорционально величине  $n \beta \sigma l_n$ . Если же  $x_i = x(\alpha + ih)$ ,  $y_i = y(\alpha + ih)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), где функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют пять непрерывных производных на отрезке  $[a, b]$ , то

$$\Delta l_n = |l_n - l_n^*| \leq B\beta h^4 + O(h^6),$$

где

$$B = \int_a^b |\Psi(t)| dt$$

и

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \frac{x'(t)x^{(5)}(t) + y'(t)y^{(5)}(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}.$$

Если исходные данные совсем редки (к примеру, если они снимаются с опорных точек с помощью измерительной головки), то применять рассмотренные выше алгоритмы не целесообразно.

В этих случаях применяют другие методы сглаживания исходных данных, например, методы сплайн – сглаживания или способы сглаживания данных базирующиеся на различных модификациях метода наименьших квадратов. Эти методы подробно исследовались, например, в монографиях [4] и [5].

Возможна и другая крайность, когда при снятии информации погрешность превышает длину звена ломаной между двумя соседними точками на снимаемой кривой. В этом случае может получиться так, что большое значение параметра сглаживания  $\alpha$  или  $\beta$  нельзя брать из-за вносимых при этом искажений, а малое значение параметра не подходит ввиду необходимости в этом случае многократного использования алгоритма сглаживания. В таком случае используются либо алгоритмы, основанные на методах спектрального анализа (методы анализа Фурье), либо алгоритмы, построенные на основе интерполяционных или почти интерполяционных в среднем сплайнов (последнему вопросу мы уделим внимание ниже).

В тех случаях, когда на исходную информацию налагаются регулярные знакопеременные частоты (наведенные колебания), как правило применяют методы анализа Фурье и различные демпферные устройства. Подробно эти методы исследованы в монографиях [4] и [24]. В частности, в [4] описаны методы сглаживания информации, которые избирательно гасят определенные (заранее заданные) частоты сигнала.

Мы не касались в этой монографии и такого известного метода обработки информации как статистический анализ. Это целое направление математики. Для его изложения необходимы совершенно другие подходы, базирующиеся на методах теории вероятностей. Некоторое представление о них можно получить из материала монографии [22].

## 1.6 Базисные сплайны и их свойства

Материю песни, ее вещество  
Не высосет автор из пальца.  
Сам Бог не сумел бы создать ничего,  
Не будь у него материальца.  
*Г.Гейне*

Широкое использование в последние два десятилетия сплайновых методов в инженерных расчетах само по себе говорит о преимуществах сплайнов перед классическими методами. В настоящее время практически в каждой монографии, посвященной инженерной геометрии, машинной графике, САПР и другими смежным направлениям, уделяется внимание методам сплайн-функций. При этом отсутствует литература с систематическим анализом того, почему тот или иной вид сплайна используется при решении конкретной инженерной задачи. Далее в этой главе мы попытаемся в какой-то мере заполнить этот пробел.

В этом параграфе мы рассмотрим тот вид сплайнов, на основе которых, как из кубиков, будут строиться разные виды сплайнов необходимые для решения различных задач.

Введению этих сплайнов предположим понятие оператора Стеклова от данной функции  $f(t)$ .

Пусть дано число  $h > 0$  и разбиение  $\delta_n$  действительной оси  $R = (-\infty, \infty)$  точками  $ih$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Для любой интегрируемой на всей оси функции  $f(t)$  рассмотрим функцию

$$\Phi_h(f, x) = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(t) dt,$$

и назовем ее функцией Стеклова с шагом  $h$  для интегрируемой функции  $f(t)$ .

Функция Стеклова хорошо исследована в математической литературе. Она широко применяется как в фундаментальной, так и в прикладной математике. Ее свойства подробно исследовались в различных статьях и монографиях по теории функций действительного переменного. На рисунках (1.32) – (1.33) приведены функция  $f(t)$  и ее функция Стеклова.

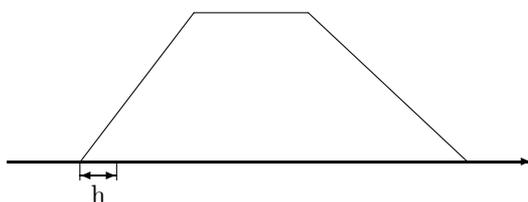


Рисунок 1.32: График функции  $f(x)$

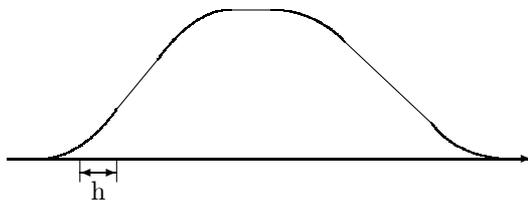


Рисунок 1.33: График функции  $\Phi_h(f, x)$

Отметим несколько важных свойств функции Стеклова с шагом  $h$ :

1. функция Стеклова не изменяет интеграл исходной функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(f, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt;$$

2. функция Стеклова не увеличивает норму исходной функции, т.е.

$$\|\Phi_h(f)\|_p \leq \|f\|_p,$$

где

$$\begin{cases} \|\Phi\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^p dt \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty, \\ \|\Phi\|_{\infty} = \text{vraisup}\{|f(t)| \mid t \in (-\infty, \infty)\} & p = \infty, \end{cases}$$

3. функция Стеклова не увеличивает вариацию исходной функции:

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(f, x) \leq \bigvee_{-\infty}^{\infty} f(t);$$

4. применение функции Стеклова не увеличивает количество перемен знака и не увеличивает длину дуги исходной функции.

Заметим, что функция Стеклова тесно связана с разделенными разностями от функции  $f(t)$ . Это следует из простого свойства

$$\Phi'_h(f, t) = \frac{1}{h} (f(t + h/2) - f(t - h/2)),$$

которое легко выводится непосредственно из определения. Из этого свойства, в частности, следует, что

$$\Phi_h^{(\nu)}(f, t) = \Phi_h(f^{(\nu)}, t).$$

На функцию Стеклова можно смотреть как на результат сглаживания функции  $f(t)$ . Действительно, если  $f(t)$  есть кусочно-постоянная функция равная  $a_i$  для  $t \in ((i - 1/2)h, (i + 1/2)h)$ , то  $\Phi_{3h}(f, t)$  есть ломаная с узлами (изломами) в точках  $ih$ , принимающая значения

$$a_i + \frac{1}{3} \Delta^2 a_i$$

(сравните с алгоритмом, приведенным в параграфе 1.3) в узлах. Это свойство функций Стеклова служит базой для построения многих алгоритмов сглаживания данных и конструирования на их основе различных демпферных устройств. Все они, как правило, основаны на использовании операторов вида

$$\sum_{i=1}^m c_i \Phi_{ih}(f, t).$$

Обозначим

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < h/2), \\ 0 & (|t| \geq h/2). \end{cases} \quad (1.59)$$

Функцию  $B_{r,h}(t)$  введем с помощью рекуррентных соотношений

$$B_{r,h}(t) = \Phi_h(B_{r-1,h}, t) = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} B_{r-1,h}(x) dx \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (1.60)$$

Эту функцию назовем нормализованным В – сплайном по равномерному разбиению или просто В – сплайном.

Отметим некоторые свойства В – сплайнов необходимые нам в дальнейшем.

Прежде всего отметим, что В – сплайн порядка  $r$  имеет в качестве носителя (замыкание множества, где он отличен от нуля) промежуток

$$d_r = \left[ -\frac{r+1}{2}h, \frac{r+1}{2}h \right],$$

т.е.  $B_{r,h}(t) \neq 0$  внутри отрезка  $d_r$ .

Из вида  $B_{0,h}$  и свойств функции Стеклова следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{r,h}(t) dt = \int_{d_r} B_{r,h}(t) dt = h. \quad (1.61)$$

В круге исследуемых нами задач будут использоваться сплайны порядка 2 и 3, т.е. кубические и параболические сплайны, поэтому уделим внимание В – сплайнам именно такого порядка.

Прежде всего отметим (это легко получить непосредственно из определения В – сплайнов), что

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0.125 (3 - 2t/h)^2 & (t \in [h/2, 3h/2]), \\ 0.75 - 0.25 (2t/h)^2 & (t \in [-h/2, h/2]), \\ 0.125 (3 + 2t/h)^2 & (t \in [-3h/2, -h/2]), \\ 0 & (|t| \geq 3h/2), \end{cases}$$

и график функции  $B_{2,h}(t)$  имеет вид

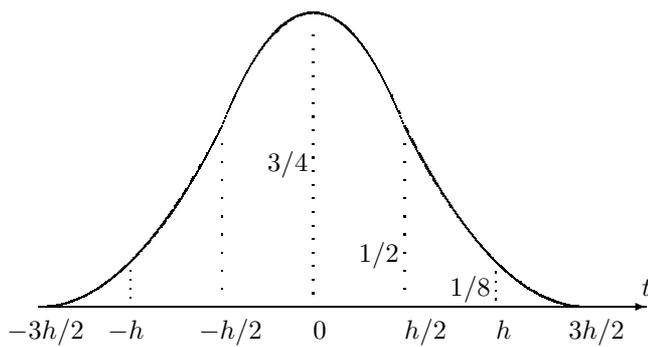


Рисунок 1.34:

Отсюда следует, что

$$B'_{2,h}(t) = \frac{1}{2h} \begin{cases} -(3 - 2t/h) & (t \in [h/2, 3h/2]), \\ -2t/h & (t \in [-h/2, h/2]), \\ (3 + 2t/h) & (t \in [-3h/2, -h/2]), \\ 0 & (|t| \geq 3h/2), \end{cases}$$

и графически это выглядит так:

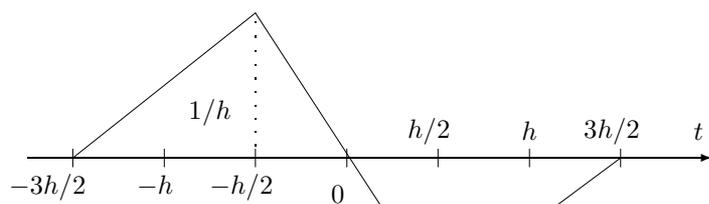


Рисунок 1.35:

Кроме того

$$B''_{2,h} = \frac{1}{h^2} \begin{cases} 1 & (t \in [h/2, 3h/2]), \\ -2 & (t \in [-h/2, h/2]), \\ 1 & (t \in [-3h/2, -h/2]), \\ 0 & (|t| \geq 3h/2), \end{cases}$$

что графически выглядит так

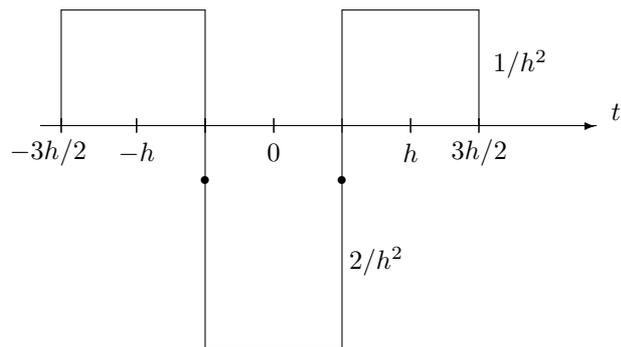


Рисунок 1.36:

Отметим теперь некоторые соотношения, следующие из определения В-сплайнов (их легко получить и из выписанных явных формул для В-сплайна второго порядка) необходимые нам в дальнейшем.

$$B_{2,h}(0) = \frac{3}{4}, \quad (1.62)$$

$$B_{2,h}\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad (1.63)$$

$$B_{2,h}(\pm h) = \frac{1}{8}, \quad (1.64)$$

$$B_{2,h}\left(\pm\frac{kh}{2}\right) = 0 \quad (|k| > 2), \quad (1.65)$$

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} B_{2,h}(t) dt = \frac{2}{3}, \quad (1.66)$$

$$\frac{1}{h} \int_{-3h/2}^{-h/2} B_{2,h}(t) dt = \frac{1}{6}, \quad (1.67)$$

$$\frac{1}{h} \int_{h/2}^{3h/2} B_{2,h}(t) dt = \frac{1}{6}, \quad (1.68)$$

$$\frac{1}{h} \int_{(k-1/2)h}^{(k+1/2)h} B_{2,h}(t) dt = 0 \quad (|k| > 1). \quad (1.69)$$

Пусть теперь  $r = 3$ . Тогда

$$B_{3,h}(t) = \frac{1}{48} \begin{cases} (4 - 2t/h)^3 & (t \in [h, 2h]), \\ 3(2t/h)^3 - 12(2t/h)^2 + 32 & (t \in [0, h]), \\ -3(2t/h)^3 - 12(2t/h)^2 + 32 & (t \in [-h, 0]), \\ (4 + 2t/h)^3 & (t \in [-2h, -h]), \\ 0 & (|t| \geq 2h), \end{cases}$$

и график  $B_{3,h}(t)$  имеет вид

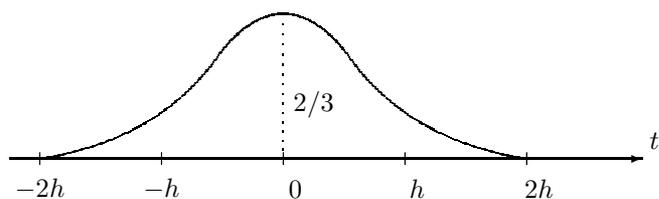


Рисунок 1.37:

Отсюда следует, что

$$B'_{3,h}(t) = \frac{1}{48h} \begin{cases} -6(4 - 2t/h)^2 & (t \in [h, 2h]), \\ 18(2t/h)^2 - 48(2t/h) & (t \in [0, h]), \\ -18(2t/h)^2 - 48(2t/h) & (t \in [-h, 0]), \\ 6(4 + 2t/h)^2 & (t \in [-2h, -h]), \\ 0 & (|t| \geq 2h), \end{cases}$$

На графике это будет выглядеть следующим образом:

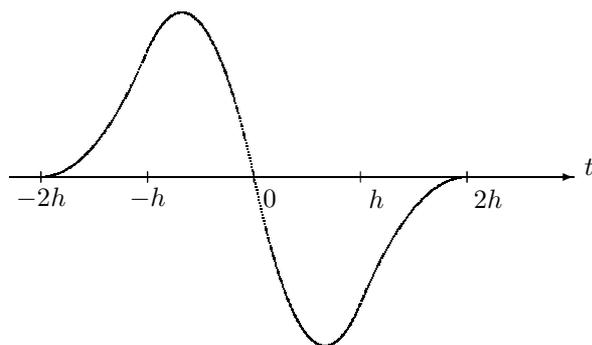


Рисунок 1.38:

Кроме того,

$$B''_{3,h}(t) = \frac{1}{48h^2} \begin{cases} 24(4 - 2t/h) & (t \in [h, 2h]), \\ 144t/h - 96 & (t \in [0, h]), \\ -144t/h - 96 & (t \in [-h, 0]), \\ 24(4 + 2t/h) & (t \in [-2h, -h]), \\ 0 & (|t| \geq 2h), \end{cases}$$

что выглядит так:

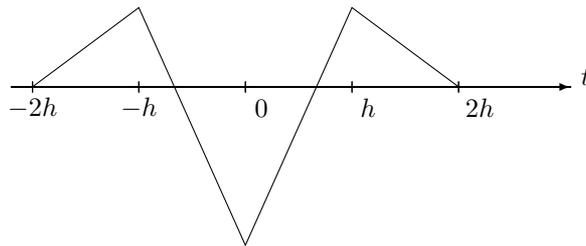


Рисунок 1.39:

Кроме того

$$B_{3,h}'''(t) = \frac{1}{48h^3} \begin{cases} -48 & (t \in [h, 2h]), \\ 144 & (t \in [0, h]), \\ -144 & (t \in [-h, 0]), \\ 48 & (t \in [-2h, -h]), \\ 0 & (|t| \geq 2h). \end{cases}$$

и графически:

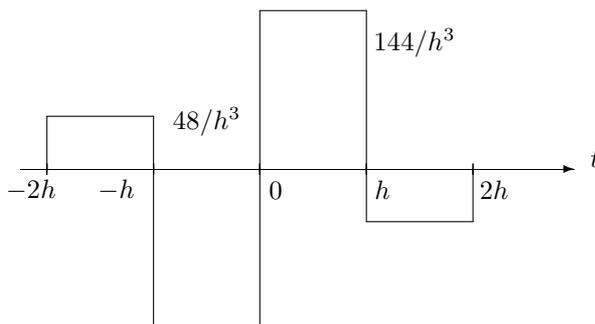


Рисунок 1.40:

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения для кубического В – сплайна

$$B_{3,h}(0) = \frac{2}{3}, \quad (1.70)$$

$$B_{3,h}\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \frac{23}{48}, \quad (1.71)$$

$$B_{3,h}(\pm h) = \frac{1}{6}, \quad (1.72)$$

$$B_{3,h}\left(\pm\frac{3h}{2}\right) = \frac{1}{48}, \quad (1.73)$$

$$B_{3,h}\left(\pm\frac{kh}{2}\right) = 0 \quad (|k| > 3), \quad (1.74)$$

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} B_{3,h}(t) dt = \frac{230}{384}, \quad (1.75)$$

$$\frac{1}{h} \int_{(\pm 1 - 1/2)h}^{(\pm 1 + 1/2)h} B_{3,h}(t) dt = \frac{76}{384}, \quad (1.76)$$

$$\frac{1}{h} \int_{(\pm 2 - 1/2)h}^{(\pm 2 + 1/2)h} B_{3,h}(t) dt = \frac{1}{384}, \quad (1.77)$$

$$\frac{1}{h} \int_{(k-1/2)h}^{(k+1/2)h} B_{3,h}(t) dt = 0 \quad (|k| > 2). \quad (1.78)$$

## 1.7 Сплаины минимального дефекта

Мы разорвали список и молча переглянулись. Джордж сказал: "Мы на совершенно ложном пути. Нам следует думать не о тех вещах, которыми мы как –нибудь обойдемся, но о тех, без которых нам никак не обойтись".

*Дж.К.Джером "Трое в лодке не считая собаки"*

Сплаинами называют кусочно – многочленные функции с однородной структурой. Термин этот произошел от английского слова *spline* – чертежный инструмент, рейка, используемая для проведения гладкой линии через фиксированные точки.

Наиболее распространенный и исторически наиболее ранний пример сплайна – ломаная.

Сплаины обладают рядом замечательных свойств, которые обеспечили им успех в различных приложениях.

Так, в сравнении с классическими аппаратами приближения функций, сплайны обладают лучшими аппроксимативными свойствами. К примеру, в отличие от интерполяционных многочленов, последовательность интерполяционных сплайнов по равномерной сетке всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции. С другой стороны, простота реализации сплайновых методов на ЭВМ, их высокая эффективность, делают использование сплайнов в инженерных расчетах во многих случаях просто незаменимыми. Кроме того, наличие у сплайнов экстремальных свойств, в частности, то, что интерполяционный сплайн принимает форму материальной кривой с минимальной потенциальной энергией, делают естественным использование сплайнов во многих задачах динамики механических систем.

Перейдем к точному определению сплайнов.

*Сплаином минимального дефекта порядка  $r$  по заданному разбиению  $\Delta_h = \{ih\}_{i=-\infty}^{\infty}$  называется  $r - 1$  раз непрерывно – дифференцируемая функция  $s_r(t)$ , которая на каждом интервале  $(ih, (i + 1)h)$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) является многочленом степени не выше  $r$ .*

Отметим, что на множестве сплайнов порядка  $r$  ( $r \geq 0$ ) существует сплайн тождественно равный нулю и сплайн тождественно равный единице.

Отсюда и из того, что произведение многочлена степени  $r$  на число  $\alpha$  есть многочлен той же степени, если  $\alpha \neq 0$  и тождественный ноль

при  $\alpha = 0$ , а также из того, что сумма многочленов степени  $n \leq r$  и  $m \leq r$  есть многочлен степени не выше  $r$ , получаем, что множество всех сплайнов степени  $r$  по разбиению  $\Delta_h$  есть линейное пространство.

Таким образом, если  $S_r(\Delta_h)$  множество всех сплайнов минимального дефекта по разбиению  $\Delta_h$ , и

$$\sigma_{r,i} \in S_r(\Delta_h) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то линейная комбинация функций  $\sigma_{r,i}$  также будет лежать в множестве  $S_r(\Delta_h)$ , т.е.

$$\sum_{i=1}^n c_i \sigma_{r,i} \in S_r(\Delta_h). \quad (1.79)$$

Приведем несколько примеров сплайнов.

Сплайн нулевого порядка есть кусочно – постоянная функция (см. рис.(1.41))

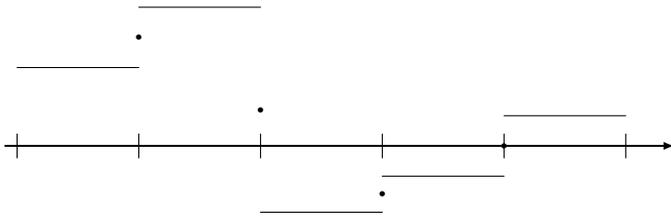


Рисунок 1.41: Сплайн нулевого порядка

$$s_0(t) = \alpha_i \quad t \in (ih, (i+1)h), \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для определенности будем считать, что в точках разрыва функция принимает среднее значение, т.е. в этих точках значения будут равны

$$B_0(t) = \frac{1}{2}(B_0(t+0) + B_0(t-0)).$$

Типичными представителями сплайнов нулевого порядка определенных на всей оси является следующий сплайн, его сдвиги и их линейные комбинации:

$$s_{0,h}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_{0,h}(t - (2i+1)h/2). \quad (1.80)$$

Очевидно также, что сплайн первого порядка есть ломаная с узлами в точках  $ih$  (см. рис.(1.42)).

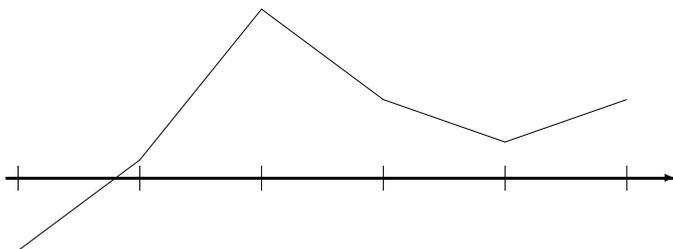


Рисунок 1.42: Сплайн первого порядка

Ясно, что множество всех сплайнов первого порядка это множество всех интегралов (первообразных) от всех сплайнов нулевого порядка.

Типичным представителем сплайнов 1-го порядка является В-сплайн 1-го порядка, его сдвиги и их линейные комбинации:

$$s_{1,h}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_{1,h}(t - ih). \quad (1.81)$$

Аналогично, множество всех сплайнов второго порядка – это множество всех интегралов от сплайнов первого порядка (см. рис. (1.43)).

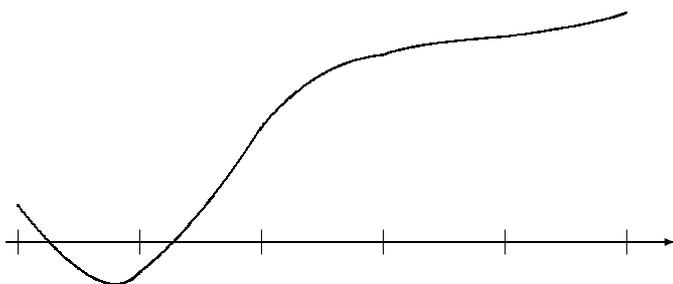


Рисунок 1.43: Сплайн второго порядка (параболический сплайн)

Типичным представителем сплайнов 2-го порядка будет параболический В-сплайн (функция "шляпка"), его сдвиги и их линейные комбинации:

$$s_{2,h}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_{2,h}(t - (2i+1)h/2). \quad (1.82)$$

И, соответственно, множество кубических сплайнов – это множество всех интегралов от параболических сплайнов, которые можно записать в виде:

$$s_{3,h}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_{3,h}(t - ih). \quad (1.83)$$

Ясно, что для любых чисел  $c_i$  сужение сплайнов (1.81) – (1.83) на отрезок  $[0, T]$  (где  $T = nh$ ) есть сплайн. Кроме того, при любом конкретном  $t \in (ih, (i+1)h)$  в представлении (1.80) используется лишь одно слагаемое, в (1.81) – лишь два слагаемых, в (1.82) – три, а в (1.83) – четыре слагаемые. Это позволяет для  $t \in [0, T]$  записать сплайны (1.81) – (1.83) в виде:

$$s_{2,h}(t) = \sum_{i=-1}^n c_i B_{2,h}(t - (2i+1)h/2), \quad (1.84)$$

$$s_{3,h}(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_{3,h}(t - ih). \quad (1.85)$$

Записи такого рода будем называть представлениями сплайнов посредством В-сплайнов.

Для  $t \in [ih, (i+1)h]$

$$s_2(t) = s_{2,h}(t) = c_{i-1} B_{2,h}(t - (2i-1)h/2) + \quad (1.86)$$

$$+ c_i B_{2,h}(t - (2i+1)h/2) + c_{i+1} B_{2,h}(t - (2i+3)h/2)$$

и

$$s_3(t) = s_{3,h}(t) = c_{i-1} B_{3,h}(t - (i-1)h) + c_i B_{3,h}(t - ih) + \quad (1.87)$$

$$+ c_{i+1} B_{3,h}(t - (i+1)h) + c_{i+2} B_{3,h}(t - (i+2)h).$$

Формы записи (1.86) – (1.87) не всегда удобны для практики. Покажем, что при  $t \in [ih, (i+1)h]$  можно использовать иную форму записи:

$$s_2(t) = \frac{1}{8}(c_{i+1} + 6c_i + c_{i-1}) + \frac{1}{2h}(c_{i+1} - c_{i-1})(t - ih) + \quad (1.88)$$

$$+ \frac{1}{2h^2}(c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1})(t - ih)^2$$

и

$$s_3(t) = \frac{1}{6}(c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1}) + \frac{1}{2h}(c_{i+1} - c_{i-1})(t - ih) +$$

$$+ \frac{1}{2h^2}(c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1})(t - ih)^2 + \frac{\Delta^2(c_{i+1} - c_i)}{6h^3}(t - ih)^3. \quad (1.89)$$

Действительно, из соотношения (1.86) и свойств параболических В-сплайнов (1.62) – (1.64) получаем

$$s_2(ih) = \frac{1}{8}(c_{i+1} + 6c_i + c_{i-1}), \quad (1.90)$$

$$s_2'(ih) = \frac{1}{2h}(c_{i-1} - c_{i+1}), \quad (1.91)$$

$$s_2''(ih) = \frac{1}{h^2}(c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}). \quad (1.92)$$

Отсюда и из формулы Тейлора получаем, что параболический многочлен, удовлетворяющий таким условиям, существует, единствен и при  $t \in [ih, (i+1)h]$  имеет вид

$$s_2(t) = s_2(ih) + s_2'(ih)(t - ih) + \frac{1}{2!}s_2''(ih)(t - ih)^2,$$

т.е.

$$s_2(t) = \frac{c_{i+1} + 6c_i + c_{i-1}}{6} + \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2h}(t - ih) + \frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{2h^2}(t - ih)^2.$$

Таким образом, мы показали, что для  $t \in [ih, (i+1)h]$  сплайн  $s_2(t)$  имеет вид (1.88).

Аналогично, из (1.87) и свойств кубических В-сплайнов (1.70) – (1.73), получаем значения сплайна и его производных в узлах:

$$s_3(ih) = \frac{c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1}}{6}, \quad (1.93)$$

$$s_3'(ih) = \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2h}, \quad (1.94)$$

$$s_3''(ih) = \frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{h^2}, \quad (1.95)$$

$$s_3^{(3)}(ih) = \frac{c_{i+2} - 3c_{i+1} + 3c_i - c_{i-1}}{h^3} = \frac{\Delta^2(c_{i+1} - c_i)}{h^3}. \quad (1.96)$$

Отсюда и из формулы Тейлора в точке  $ih$  следует, что кубический многочлен, удовлетворяющий таким условиям, существует, единствен и для  $t \in [ih, (i+1)h]$  имеет вид:

$$\begin{aligned} s_3(t) = & s_3(ih) + s_3'(ih)(t - ih) + \frac{1}{2!} s_3''(ih)(t - ih)^2 + \\ & + \frac{1}{3!} s_3'''(ih)(t - ih)^3 = \frac{c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1}}{6} + \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2h}(t - ih) + \\ & + \frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{2!h^2}(t - ih)^2 + \frac{\Delta^2(c_{i+1} - c_i)}{3!h^3}(t - ih)^3. \end{aligned} \quad (1.97)$$

В некоторых случаях более удобным является использование представления сплайна  $s_3(t)$  на промежутке  $[ih, (i+1)h]$  через значения в точках  $(i+1/2)h$ :

$$\begin{aligned} s_3(t) = & \frac{c_{i+1} + c_i}{48} + \frac{23}{24} \left( \frac{c_{i+1} + c_i}{2} \right) + \\ & + \left[ (c_{i+1} - c_i) + \frac{1}{8} \Delta^2(c_{i+1} - c_i) \right] \left( \frac{t}{h} - i - \frac{1}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{c_{i+2} - c_{i+1}}{2} - \frac{c_i - c_{i-1}}{2} \right] \left( \frac{t}{h} - i - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \Delta^2(c_{i+1} - c_i) \left( \frac{t}{h} - i - \frac{1}{2} \right)^3. \end{aligned} \quad (1.98)$$

## 1.8 Кубические почти интерполяционные сплайны

Если тебе известно нечто лучшее, предложи, если-ж нет – воспользуйся этим.  
*Гораций "Послания"*

На практике для описания кривых, как правило, используют интерполяционные сплайны и близкие к ним. То есть сплайны, совпадающие с данной функцией  $x(t)$  в заданной системе точек.

Для простоты изложения мы будем считать в этом параграфе, что функция  $x(t)$  и все сплайны, описывающие ее, имеют период  $T$ . Это избавит нас от необходимости рассматривать различные виды задания краевых условий для сплайнов, чему мы уделим внимание позже.

Как было отмечено нами в предыдущем параграфе, любой сплайн  $s_3(t)$  третьего порядка с узлами в точках  $ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  ( $h = T/n$ ) для  $t \in [0, T]$  однозначно представим в виде:

$$s_3(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_{3,h}(t - ih). \quad (1.99)$$

Если  $c_{-1} = c_{n-1}$ ,  $c_0 = c_n$  и  $c_1 = c_{n+1}$ , то функция  $s_3(t)$  есть периодический (с периодом  $T = nh$ ) сплайн. Задавая различными способами коэффициенты  $c_i = c_i(x)$ , мы получим различные виды сплайнов, описывающих функцию  $x(t)$ . Остановимся на некоторых способах задания  $c_i$ .

Пусть, как обычно,  $x_i = x(ih)$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и

$$c_i = c_i(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i. \quad (1.100)$$

Здесь и далее мы считаем, что для всех  $i$  выполняются соотношения  $x_{i+n} = x_i$  и  $c_{i+n} = c_i$ . Из равенства (1.89) следует, что

$$s_3(ih) = \frac{c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1}}{6} = c_i + \frac{1}{6} \Delta^2 c_i. \quad (1.101)$$

Отсюда и из (1.100) получаем

$$\begin{aligned} s_3(ih) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i + \frac{1}{6} \Delta^2 \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i \right) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu+1} \Delta^{2\nu+2} x_i = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i = \Delta^0 x_i = x_i. \end{aligned}$$

Таким образом, если коэффициенты сплайна  $c_i$  определены равенствами (1.100), то для всех  $i$  выполняются равенства

$$s_3(ih) = x_i,$$

т.е. при задании коэффициентов равенствами (1.100) сплайн  $s_3(t)$  интерполирует функцию  $x(t)$  в равноотстоящих точках  $ih$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Из неравенства

$$|\Delta^{2\nu} x_i| \leq 4^{\nu-3} \max_k |\Delta^6 x_k|$$

следует, что для  $\nu \geq 3$  имеет место следующая цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i \right| &\leq \sum_{\nu=3}^{\infty} \left| \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i \right| \leq \\ &\leq \max_k |\Delta^6 x_k| \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{4^{\nu-3}}{6^{\nu}} = \max_k |\Delta^6 x_k| \frac{1}{64} \frac{(2/3)^3}{1-2/3}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\left| \sum_{\nu=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i \right| \leq \frac{1}{72} \max_k |\Delta^6 x_k|. \quad (1.102)$$

Кроме того, если функция  $x(t)$  имеет шесть непрерывных производных на периоде, то (см. параграф 1.2)

$$\max_k |\Delta^6 x_k| = O(h^6).$$

Отсюда и из (1.100) следует, что для гладких функций

$$c_i = x_i - \frac{1}{6} \Delta^2 x_i + \frac{1}{36} \Delta^4 x_i + O(h^6).$$

Это говорит о том, что в большинстве случаев при задании коэффициентов  $c_i$  с помощью равенств (1.100) нет нужды выписывать ряды полностью, а достаточно брать лишь несколько слагаемых. Подробнее этот вопрос мы обсудим позже.

Коэффициенты  $c_i$  интерполяционных сплайнов можно найти и из других соображений.

Действительно, из равенства (1.93) следует, что если сплайн  $s_3(t)$  интерполирует функцию  $x(t)$  в точках  $ih$ , то

$$s_3(ih) = \frac{c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1}}{6} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

С учетом того, что  $c_{-1} = c_{n-1}$ ,  $c_0 = c_n$  и  $c_1 = c_{n+1}$  имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} 4c_0 + c_1 + c_{n-1} = 6x_0, \\ c_0 + 4c_1 + c_2 = 6x_1, \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 6x_2, \\ \dots\dots\dots \\ c_{n-3} + 4c_{n-2} + c_{n-1} = 6x_{n-2}, \\ c_0 + c_{n-2} + 4c_{n-1} = 6x_{n-1} \end{array} \right. . \quad (1.103)$$

Матрица этой системы имеет диагональное преобладание и, следовательно, система имеет одно и только одно решение (см., например, [7] с.333). Это решение легко найти с помощью одной из разновидностей алгоритма прогонки.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение системы (1.103) можно записать в виде (1.100).

Описанный подход к построению интерполяционных периодических сплайнов легко видоизменить так, чтобы он был применим и к построению неперiodических интерполяционных сплайнов. Это мы обсудим в параграфе 2.1 при построении интерполяционных сплайнов с неравноотстоящими узлами при описании кривых, заданных малым числом опорных точек.

Вернемся к методам задания интерполяционных сплайнов с помощью равенств (1.99) – (1.100).

Как уже отмечалось, на практике используют не весь ряд (1.100), а несколько его слагаемых. Остановимся на этом подробнее.

Пусть

$$c_{i,1} = x_i \quad (i = 0, \pm 1, \dots),$$

$$c_{i,2} = x_i - \frac{1}{6}\Delta^2 x_i \quad (i = 0, \pm 1, \dots),$$

$$c_{i,3} = x_i - \frac{1}{6}\Delta^2 x_i + \frac{1}{36}\Delta^4 x_i \quad (i = 0, \pm 1, \dots)$$

и

$$s_{3,k}(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_{i,k} B_{3,h}(t - ih) \quad (k = 1, 2, 3).$$

Или, что то же,

$$s_{3,1}(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} x_i B_{3,h}(t - ih), \quad (1.104)$$

$$s_{3,2}(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \left( x_i - \frac{1}{6} \Delta^2 x_i \right) B_{3,h}(t - ih), \quad (1.105)$$

$$s_{3,3}(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \left( x_i - \frac{1}{6} \Delta^2 x_i + \frac{1}{36} \Delta^4 x_i \right) B_{3,h}(t - ih). \quad (1.106)$$

Каждый из этих сплайнов задается явно и, следовательно, легко программируется на ЭВМ. Кроме того, каждый из них локальный, т.е. при изменении значения функции  $x(t)$  в одной точке  $t$ , каждый из них меняется лишь на нескольких соседних промежутках. Далее, из равенства (1.101) следует, что

$$s_{3,1}(x, ih) - x_i = \frac{1}{6} \Delta^2 x_i, \quad (1.107)$$

$$s_{3,2}(x, ih) - x_i = -\frac{1}{36} \Delta^4 x_i, \quad (1.108)$$

$$s_{3,3}(x, ih) - x_i = \frac{1}{216} \Delta^6 x_i. \quad (1.109)$$

Отсюда и из результатов параграфа 1.2 вытекает, что для гладких функций  $x(t)$  сплайны  $s_{3,2}(x, t)$  интерполируют функцию  $x(t)$  с точностью до  $O(h^4)$ , а сплайны  $s_{3,3}(x, t)$  – с точностью до  $O(h^6)$ . Это обстоятельство и обусловило их название.

Сплайны  $s_{3,2}(x, t)$  называют локальными сплайнами, совпадающими с интерполяционными по порядку, а сплайны  $s_{3,3}(x, t)$  – локальными сплайнами асимптотически совпадающими с интерполяционными или почти интерполяционными сплайнами.

Рассмотрим вопрос о качестве приближения функций с помощью интерполяционных и почти интерполяционных сплайнов. Вначале отметим одно, ставшее уже классическим, точное неравенство В.М. Тихомирова (см., например, [21]).

**Теорема 1.8.1** Пусть  $x(t)$  – периодическая четырежды непрерывно – дифференцируемая на периоде функция и  $s_3(x, t)$  – кубический сплайн интерполирующий функцию  $x(t)$  в точках  $ih$  ( $h = T/n$ ). Тогда для всех  $t$  выполняется неравенство

$$|x(t) - s_3(x, t)| \leq \frac{5h^4}{384} \max_t |x^{(4)}(t)|. \quad (1.110)$$

При этом, неравенство улучшить нельзя, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать функцию  $x_\varepsilon(t)$  для которой в некоторой точке  $t_0$  выполняется неравенство

$$|x_\varepsilon(t_0) - s_3(x_\varepsilon, t_0)| \geq \left( \frac{5h^4}{384} - \varepsilon \right) \max_t |x_\varepsilon^{(4)}(t)|.$$

Из определения сплайнов  $s_{3,2}(x, t)$  следует, что

$$\begin{aligned} |x(t) - s_{3,2}(x, t)| &\leq |x(t) - s_3(x, t)| + \\ &+ \left| \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{\nu=3}^{\infty} \left( -\frac{1}{6} \right)^\nu \Delta^{2\nu} x_i B_{3,h}(t - ih) \right| \leq \\ &\leq |x(t) - s_3(x, t)| + \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{\nu=3}^{\infty} \left( \frac{1}{6} \right)^\nu |\Delta^{2\nu} x_i| B_{3,h}(t - ih). \end{aligned}$$

Отсюда, из неравенства (1.110) и очевидного равенства

$$\sum_{i=-1}^n B_{3,h}(t - ih) \equiv 1 \quad (t \in [0, T])$$

следует, что

$$|x(t) - s_{3,2}(x, t)| \leq |x(t) - s_3(x, t)| \leq \frac{5h^4}{384} \max_t |x^{(4)}(t)| + \frac{1}{72} \max_i |\Delta^6 x_i|.$$

Кроме того,

$$\max_i |\Delta^6 x_i| \leq 4 \max_i |\Delta^4 x_i| \leq 4h^4 \max_t |x^{(4)}(t)|$$

и, следовательно,

$$|x(t) - s_{3,2}(x, t)| \leq \frac{79h^4}{1152} \max_t |x^{(4)}(t)|. \quad (1.111)$$

Таким образом, сплайны  $s_{3,2}(x, t)$  так же, как и рассмотренные ранее интерполяционные сплайны  $s_3(x, t)$ , восстанавливают гладкие функции с точностью до  $O(h^4)$ . Этот факт верен и для сплайнов  $s_{3,3}(x, t)$ .

Оценки вида (1.110) и (1.111) в вычислительной математике называются гарантированными оценками погрешностей. Они, как правило, являются завышенными, поэтому дальнейшее внимание мы уделим асимптотическим оценкам погрешностей восстановления функций с помощью сплайнов. Для удобства ссылок приведем эти оценки в виде теоремы.

**Теорема 1.8.2** Пусть периодическая функция  $x(t)$  имеет пять непрерывных производных на периоде, тогда для  $t \in [ih, (i+1)h]$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняются соотношения

$$x(t) - s_{3,1}(x, t) = -\frac{h^2}{6}x''(t) + O(h^4), \quad (1.112)$$

$$x'(t) - s'_{3,1}(x, t) = -\frac{h^2}{6}x'''(t) + O(h^3), \quad (1.113)$$

$$x''(t) - s''_{3,1}(x, t) = \frac{h^2}{12}(6\tau^2 - 1)x^{(4)}(t) + O(h^3), \quad (1.114)$$

$$x(t) - s_{3,2}(x, t) = \frac{h^4}{48}(1 + 2\tau(1 - \tau^2))x^{(4)}(t) + O(h^5), \quad (1.115)$$

$$x'(t) - s'_{3,2}(x, t) = \frac{h^3}{12}\tau(1 - \tau)(2\tau - 1)x^{(4)}(t) + O(h^4), \quad (1.116)$$

$$x''(t) - s''_{3,2}(x, t) = \frac{h^2}{12}(1 - 6\tau + 6\tau^2)x^{(4)}(t) + O(h^3), \quad (1.117)$$

$$x(t) - s_{3,3}(x, t) = \frac{h^4}{24}(\tau(1 - \tau))^2x^{(4)}(t) + O(h^5), \quad (1.118)$$

$$x'(t) - s'_{3,3}(x, t) = \frac{h^3}{12}\tau(1 - \tau)(2\tau - 1)x^{(4)}(t) + O(h^4), \quad (1.119)$$

$$x''(t) - s''_{3,3}(x, t) = \frac{h^2}{12}(1 - 6\tau + 6\tau^2)x^{(4)}(t) + O(h^3), \quad (1.120)$$

$$x(t) - s_3(x, t) = \frac{h^4}{24}((1 - \tau)\tau)^2 x^{(4)}(t) + O(h^5), \quad (1.121)$$

$$x'(t) - s'_3(x, t) = \frac{h^3}{12}\tau(1 - \tau)(2\tau - 1)x^{(4)}(t) + O(h^4), \quad (1.122)$$

$$x''(t) - s''_3(x, t) = \frac{h^2}{12}(1 - 6\tau + 6\tau^2)x^{(4)}(t) + O(h^3). \quad (1.123)$$

Всюду здесь

$$\tau = (t - ih)/h. \quad (1.124)$$

Как видно из этой теоремы, с асимптотической точки зрения качество восстановления гладкой функции с помощью кубических сплайнов  $s_{3,3}(x, t)$  то же, что и с помощью интерполяционных кубических сплайнов и почти не отличается от качества восстановления с помощью сплайнов  $s_{3,2}(x, t)$ . Качество же восстановления первых и вторых производных с помощью сплайнов  $s_{3,2}(x, t)$ ,  $s_{3,3}(x, t)$  и  $s_3(x, t)$  одинаково (с асимптотической точки зрения). Из этой же теоремы следует, что хотя сплайны  $s_{3,1}(x, t)$  с недостаточной точностью восстанавливают саму функцию  $x(t)$ , они вполне прилично восстанавливают ее первую производную и хорошо вторую.

Напомним, что для любого линейного оператора  $A$  (а сплайн – оператор является линейным оператором) величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|A(x)\|_\infty$$

называется нормой оператора  $A$ . Она характеризует рост погрешности при восстановлении функции с помощью оператора  $A$ .

Дополняет теорему 1.8.2 следующее утверждение.

**Теорема 1.8.3** Пусть

$$\|s_{3,k}\| = \sup_x \frac{\|s_{3,k}(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

– норма сплайн-оператора  $s_{3,k}(x)$ . Тогда

$$\|s_{3,1}\| = 1,$$

$$\|s_{3,2}\| = \frac{41}{32}$$

и

$$\|s_{3,3}\| = \frac{2297}{1536}.$$

Значение нормы оператора  $s_{3,k}$  – это величина, характеризующая во сколько раз может вырасти ошибка при восстановлении функции с помощью сплайна, если значения  $x_i$  заданы с погрешностью. Таким образом норма сплайн-оператора характеризует устойчивость восстановления функции  $x(t)$  с помощью этого оператора. В связи с этим, с точки зрения устойчивости вычислений, сплайны  $s_{3,1}(x, t)$  предпочтительнее сплайнов  $s_{3,2}(x, t)$  и  $s_{3,3}(x, t)$ . Кроме того, из равенств (1.107) следует, что сплайны  $s_{3,1}$  интерполируют сглаженные данные по алгоритму, описанному в параграфе 1.3 при  $\alpha = 1/6$ , а из (1.108) следует, что сплайны  $s_{3,2}(x, t)$  интерполируют сглаженные данные по алгоритму, описанному в параграфе 1.5 при  $\beta = 1/36$ .

Таким образом сплайны  $s_{3,1}(x, t)$  на практике целесообразно применять в случаях, когда уровень ошибок при вычислении (или задании) исходных данных достаточно высок, сплайны  $s_{3,2}(x, t)$  – при низком уровне ошибок, а сплайны  $s_{3,3}(x, t)$  – в тех случаях, когда значения  $x_i$  даны точно или почти точно и кривая  $x(t)$  достаточно гладкая.

В заключение параграфа приведем доказательство одного из соотношений теоремы 1.8.2. Это доказательство достаточно типично и дает представление об общих методах доказательства асимптотических равенств.

Прежде всего заметим, что

$$\|s_{3,1}\| = \sup_x \frac{\left\| \sum_{i=-1}^{n+1} B_{3,h}(\cdot - ih) \right\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \max_t \left| \sum_{i=-1}^{n+1} B_{3,h}(t - ih) \right|,$$

а, так как,

$$\sum_{i=-1}^{n+1} B_{3,h}(t - ih) = 1,$$

то

$$\|s_{3,1}\| = 1.$$

Докажем теперь соотношение (1.112). Из формулы Тейлора следует, что если функция  $x(t)$  имеет пять непрерывных производных, то для  $t \in [ih, (i+1)h]$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $i$  и по  $t$  выполняется соотношение

$$\begin{aligned} x(t) &= x_i + \sum_{\nu=1}^4 x_i^{(\nu)} (t - ih)^\nu + O(h^5) = \\ &= x_i + x_i' h\tau + \frac{1}{2} x_i'' h^2 \tau^2 + \frac{1}{6} x_i''' h^3 \tau^3 + \frac{1}{24} x_i^{(4)} h^4 \tau^4 + O(h^5), \end{aligned}$$

где  $\tau$  ( $\tau \in (0, 1)$ ) задано равенствами (1.124).

Учитывая вид сплайна (1.97) и тот факт, что в нашем случае  $c_{i,1} = x_i$ , получаем

$$\begin{aligned} s_{3,1}(x, t) &= x_i + \frac{1}{6} x_i'' h^2 + \frac{1}{72} x_i^{(4)} h^4 + \left( x_i' + \frac{1}{6} x_i''' h^3 \right) h\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \left( x_i'' + \frac{1}{12} x_i^{(4)} h^2 \right) h^2 \tau^2 + \frac{1}{6} x_i''' h^3 \tau^3 + O(h^5). \end{aligned}$$

Отсюда и из предыдущего равенства вытекает следующая цепочка асимптотических равенств

$$\begin{aligned} s_{3,1}(x, t) - x(t) &= \frac{1}{6} x_i'' h^2 + \frac{1}{6} x_i''' h^3 + \frac{1}{72} x_i^{(4)} h^4 (1 + 3\tau^2 - 3\tau^4) + O(h^5) = \\ &= \frac{1}{6} h^2 \left( x_i'' + x_i''' h\tau + \frac{1}{2} x_i^{(4)} h^2 \tau^2 \right) + \frac{1}{72} x_i^{(4)} h^4 (1 - 3\tau^2 - 3\tau^4) + O(h^5). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$x''(t) = x_i'' + x_i''' h\tau + \frac{1}{2} x_i^{(4)} h^2 \tau^2 + O(h^3),$$

что вместе с предыдущим позволяет записать

$$x(t) - s_{3,1}(x, t) = -\frac{h^2}{6} x''(t) + O(h^4).$$

Аналогичным путем устанавливаются остальные равенства.

## 1.9 Параболические почти интерполяционные сплайны

Лучшим каждому кажется то, к чему он имеет охоту.

*Косьма Прутков*

В этом параграфе мы приведем несколько результатов для параболических сплайнов аналогичных результатам параграфа 1.8.

Пусть, как и ранее, функция  $x(t)$  и все сплайны, восстанавливающие ее, имеют период  $T$ .

Обозначим

$$x_{i+0.5} = x((i + 0.5)h) \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h = T/n).$$

Тогда для всех  $i$

$$x_{i+n+0.5} = x_{i+0.5}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} b_i = b_i(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_{i+0.5} = \\ &= x_{i+0.5} - \frac{1}{8} \Delta^2 x_{i+0.5} + \dots \end{aligned} \quad (1.125)$$

Как уже отмечалось выше, любой  $T$ -периодический параболический сплайн с узлами в точках  $ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) для  $t \in [0, T]$  однозначно представим в виде

$$s_2(t) = \sum_{i=-1}^n \theta_i B_{2,h}(t - (i + 0.5)h).$$

Рассмотрим сплайн

$$s_2(x, t) = \sum_{i=-1}^n b_i B_{2,h}(t - (i + 0.5)h), \quad (1.126)$$

где коэффициенты  $b_i$  определены равенствами (1.125).

Тогда

$$s_2(x, (i + 0.5)h) = \sum_{j=-1}^n b_j B_{2,h}((i + 0.5)h - (j + 0.5)h) =$$

$$\begin{aligned}
&= (b_{i-1} + b_{i+1})B_{2,h}(h) + b_i B_{2,h}(0) = \\
&= \frac{1}{8}(b_{i-1} + 6b_i + b_{i+1}) = b_i + \frac{1}{8}\Delta^2 b_i.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$s_2(x, (i + 0.5)h) = b_i + \frac{1}{8}\Delta^2 b_i. \quad (1.127)$$

Подставляя в (1.127) значения, определенные равенствами (1.125), получаем для всех  $i$

$$s_2(x, (i + 0.5)h) = x_{i+0.5}.$$

Следовательно, сплайны  $s_2(x, t)$  интерполируют функцию  $x(t)$  в точках  $(i + 0.5)h$ .

Рассмотрим теперь сплайны близкие к интерполяционным

$$s_{2,1}(x, t) = \sum_{i=-1}^n x_{i+0.5} B_{2,h}(t - (i + 0.5)h)$$

и

$$s_{2,2}(x, t) = \sum_{i=-1}^n \left( x_{i+0.5} - \frac{1}{8}\Delta^2 x_{i+0.5} \right) B_{2,h}(t - (i + 0.5)h).$$

Из равенств (1.127) следует, что

$$s_{2,1}(x, (i + 0.5)h) = x_{i+0.5} + \frac{1}{8}\Delta^2 x_{i+0.5}$$

и

$$s_{2,2}(x, (i + 0.5)h) = x_{i+0.5} - \frac{1}{64}\Delta^4 x_{i+0.5}.$$

Следовательно, сплайны  $s_{2,1}(x, t)$  интерполируют сглаженные данные по алгоритму, описанному в параграфе 1.3 при  $\alpha = 1/8$ , а сплайны  $s_{2,2}(x, t)$  интерполируют сглаженные данные по алгоритму, описанному в параграфе 1.5 при  $\beta = 1/64$ .

Кроме того, так как

$$\max_i |\Delta^4 x_{i+0.5}| \leq h^4 \max_t |x^{(4)}(t)| = O(h^4)$$

и (см. теорему 1.9.1) сплайны  $s_2(x, t)$  приближают гладкую функцию  $x(t)$  с порядком  $O(h^3)$ , то с точностью до  $O(h^4)$  сплайны  $s_{2,2}(x, t)$  совпадают с интерполяционными сплайнами  $s_2(x, t)$ . Этим и обусловлено их

название – асимптотически интерполяционные параболические сплайны.

Следующее утверждение дает оценку качества восстановления функций с помощью параболических сплайнов.

**Теорема 1.9.1** Пусть  $x(t)$  – периодическая трижды непрерывно дифференцируемая на периоде функция. Тогда для всех  $t$  выполняются неравенства

$$|x(t) - s_2(x, t)| \leq \frac{h^3}{24} \max_t |x'''(t)| = \frac{h^3}{24} \|x'''\|_\infty, \quad (1.128)$$

$$|x'(t) - s'_2(x, t)| \leq \frac{h^2}{6} \|x'''\|_\infty \quad (1.129)$$

и

$$|x(t) - s_{2,2}(x, t)| \leq \frac{7h^3}{96} \|x'''\|_\infty. \quad (1.130)$$

Если  $x(t)$  на всем периоде имеет непрерывную четвертую производную, то при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняются соотношения

$$x(t) - s_{2,1}(x, t) = -\frac{h^2}{8} x''(t) + O(h^3), \quad (1.131)$$

$$x'(t) - s'_{2,1}(x, t) = -\frac{h^2}{8} x'''(t) + O(h^3). \quad (1.132)$$

А также

$$x(t) - s_{2,2}(x, t) = \frac{h^3}{24} \xi(1 - \xi^2) x'''(t) + O(h^4), \quad (1.133)$$

$$x'(t) - s'_{2,2}(x, t) = \frac{h^2}{24} (1 - 3\xi^2) x'''(t) + O(h^3) \quad (1.134)$$

и

$$x(t) - s_2(x, t) = \frac{h^3}{24} \xi(1 - \xi^2) x'''(t) + O(h^4), \quad (1.135)$$

$$x'(t) - s'_2(x, t) = \frac{h^2}{24} (1 - 3\xi^2) x'''(t) + O(h^3), \quad (1.136)$$

где

$$\xi = 2t/h - 2i - 1. \quad (1.137)$$

Кроме того,

$$\|s_{2,1}\| = 1$$

и

$$\|s_{2,2}\| = \frac{4}{3}.$$

Из соотношений (1.133), (1.134) и очевидных равенств

$$\max_{|\xi| \leq 1} |\xi(1 - \xi^2)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

и

$$\max_{|\xi| \leq 1} |1 - 3\xi^2| = 2$$

следует, что при  $h \rightarrow 0$

$$\|x - s_{2,2}(x)\|_{\infty} \leq \frac{h^3}{36\sqrt{3}} \|x'''\|_{\infty} + O(h^4),$$

$$\|x' - s'_{2,2}(x)\|_{\infty} \leq \frac{h^2}{12} \|x'''\|_{\infty} + O(h^3).$$

Аналогичные оценки верны и для интерполяционных сплайнов  $s_2(x, t)$ .

Доказательство теоремы 1.9.1 аналогично доказательствам результатов, приведенным в предыдущем параграфе.

## 1.10 Кубические почти интерполяционные в среднем сплайны

Свет ночей, ночные тени,  
Тени без конца,  
Ряд волшебных изменений  
Милого лица.  
*А. Фет*

Интерполяционные и близкие к ним сплайны используются, как правило, в том случае, когда опорных точек (заданных нам точек достаточно полно описывающих кривую) сравнительно мало и все они заданы с высокой точностью. Однако, в задачах, связанных с созданием программного обеспечения для станков с ЧПУ, достаточно часто данные снимаются с помощью копира, сканера или с дисплея и пр. В этих случаях, как правило, число данных очень велико, порядка 10 тысяч, и, они предоставляются со случайной (нерегулярной) погрешностью. Для того, что бы устранить эти погрешности, используются самые различные фильтры, т.е. различные методы сглаживания исходных данных, например, методы описанные в параграфах 1.3 и 1.5. Но при этом количество данных не изменяется. Это вызывает определенные трудности

при работе с ними, так как эта работа связана с обработкой больших массивов информации.

С другой стороны, наличие большого количества данных позволяет строить новые интегральные характеристики кривой. Из практики хорошо известно, что интегральные характеристики на несколько порядков уменьшают случайные помехи. Количество же интегральных единиц информации можно выбирать существенно меньшим чем количество исходных данных почти без потери информации о контуре.

Задачей этого параграфа является построение сплайнового аппарата восстановления периодической функции, базирующегося на интегральных характеристиках функции, и, описывающих его с той же точностью (асимптотически или по порядку), что и сплайны наилучшего приближения. При этом будет четко прослеживаться связь с результатами изложенными в параграфе 1.8.

Как и в предыдущих параграфах, будем рассматривать периодические (с периодом  $T$ ) функции  $x(t)$  и периодические (с тем же периодом) сплайны.

Пусть, как обычно,  $h = T/n$ .

В этом параграфе считаем, что информация о функции  $x(t)$  задана интегралами

$$x_i^* = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} x(t) dt \quad (i = 0, \pm 1, \dots). \quad (1.138)$$

Так как функция  $x(t)$  - периодическая, то для всех  $i$  выполняются равенства

$$x_{i+n}^* = x_i^*.$$

По аналогии с почти интерполяционными кубическими сплайнами (см. параграф 1.8) рассмотрим сплайны

$$s_{3,1}^*(x, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} x_i^* B_{3,h}(t - ih). \quad (1.139)$$

Впервые, по – видимому, эти сплайны появились в работе [64] и называются сплайнами Шенберга. Как и сплайны  $s_{3,1}(x, t)$ , они сглаживают (в значительной степени) данные и восстанавливают функцию  $x(t)$  с точностью  $O(h^2)$ . С этой же точностью их первая и вторая производные восстанавливают первую и вторую производные функции  $x(t)$ . Точную формулировку этих и других свойств сплайнов  $s_{3,1}^*(x, t)$  мы приведем ниже.

Ясно, что для любого  $i$  и любого сплайна  $s_3(t)$  вида

$$s_3(t) = \sum_{\nu=-1}^{n+1} c_\nu B_{3,h}(t - \nu h) \quad (1.140)$$

будет выполняться соотношение

$$s_i^* = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_3(t) dt = \frac{1}{h} \sum_{\nu=-1}^{n+1} c_\nu \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} B_{3,h}(t - \nu h) dt.$$

Кроме того,

$$\int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} B_{3,h}(t - \nu h) dt = \int_{-h/2}^{h/2} B_{3,h}(t - (\nu - i)h) dt. \quad (1.141)$$

Если  $|\nu - i| > 2$ , то интеграл, стоящий в правой части равенства (1.141), равен нулю. Кроме того,

$$\int_{-h/2}^{h/2} B_{3,h}(t \pm 2h) dt = \int_{3h/2}^{2h} B_{3,h}(t) dt$$

и

$$\int_{-h/2}^{h/2} B_{3,h}(t \pm h) dt = \int_{h/2}^{3h/2} B_{3,h}(t) dt.$$

Таким образом,

$$s_i = \frac{1}{h} \left( c_i \int_{-h/2}^{h/2} B_{3,h}(t) dt + (c_{i+1} + c_{i-1}) \int_{h/2}^{3h/2} B_{3,h}(t) dt + (c_{i+2} + c_{i-2}) \int_{3h/2}^{2h} B_{3,h}(t) dt \right).$$

Отсюда и из равенств (1.74) – (1.78) следует, что

$$s_i^* = \frac{c_{i-2} + 76c_{i-1} + 230c_i + 76c_{i+1} + c_{i+2}}{384}.$$

Кроме того,

$$c_{i-2} + 76c_{i-1} + 230c_i + 76c_{i+1} + c_{i+2} = c_i + \frac{5}{24} \Delta^2 c_i + \frac{1}{384} \Delta^4 c_i.$$

Таким образом, для всех  $i$  и любого сплайна  $s_3(t)$  вида (1.140) выполняется равенство

$$\frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_3(t) dt = c_i + \frac{5}{24} \Delta^2 c_i + \frac{1}{384} \Delta^4 c_i \quad (1.142)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_{3,1}^*(x, t) dt = x_i^* + \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* + \frac{1}{384} \Delta^4 x_i^*. \quad (1.143)$$

Равенство (1.143) вместе с результатами параграфа 1.3, указывает на то, что сплайны  $s_{3,1}^*(x, t)$  интерполируют в среднем сглаженные значения  $x_i^*$  с коэффициентом сглаживания  $\alpha$  близким (за счет слагаемого  $\Delta^4 x_i^*/384$ ) к числу  $5/24$ .

Рассмотрим теперь сплайны

$$s_{3,2}^*(x, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \left( x_i^* - \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* \right) B_{3,h}(t - ih). \quad (1.144)$$

Из равенств (1.143) следует, что для всех  $i$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_{3,2}^*(x, t) dt = \\ & = x_i^* - \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* + \frac{5}{24} \Delta^2 \left( x_i^* - \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* \right) + \frac{1}{384} \Delta^4 \left( x_i^* - \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* \right) = \\ & = x_i^* - \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* + \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* - \left( \frac{5}{24} \right)^2 \Delta^4 x_i^* + \frac{1}{384} \Delta^4 x_i^* - \frac{5}{24 \cdot 384} \Delta^6 x_i^* = \\ & = x_i^* - \frac{47}{1152} \Delta^4 x_i^* - \frac{5}{9216} \Delta^6 x_i^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для всех  $i$  верно равенство

$$\frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_{3,2}^*(x, t) dt = x_i^* - \frac{47}{1152} \Delta^4 x_i^* - \frac{5}{9216} \Delta^6 x_i^*. \quad (1.145)$$

Если функция  $x(t)$  имеет четыре непрерывные производные на периоде, то равномерно по  $i$  выполняются порядковые соотношения

$$\Delta^4 x_i^* = O(h^4) \quad \Delta^6 x_i^* = O(h^4),$$

т.е. равномерно по  $i$

$$\frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_{3,2}^*(x, t) dt = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} x(t) dt + O(h^4).$$

Таким образом, с точностью до  $O(h^4)$  сплайны  $s_{3,2}^*(x, t)$  интерполируют в среднем функцию  $x(t)$ . Этим и объясняется их название – почти интерполяционные в среднем сплайны. Эти сплайны в дальнейшем будут играть решающую роль в задачах, связанных с построением асимптотически оптимальных траекторий движения инструмента. Они будут выступать в качестве промежуточного аппарата восстановления, а при построении алгоритмов будут играть роль теоретической функции, описывающей контур. В связи с этим, полезно подробнее изучить их свойства.

Прежде всего отметим, что если  $s_3^*(x, t)$  интерполяционные в среднем (для  $x(t)$ ) кубические сплайны, т.е. такие кубические сплайны, что для всех  $i$  имеет место равенство

$$\int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_3^*(x, t) dt = \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} x(t) dt, \quad (1.146)$$

то для любой четырежды непрерывно дифференцируемой функции  $x(t)$  выполняется точное неравенство

$$\|s_3^*(x) - x\|_\infty \leq \frac{h^4}{384} \|x^{(4)}\|_\infty, \quad (1.147)$$

где, как и ранее,

$$\|y\|_\infty = \max_t |y(t)|.$$

Этот классический результат установлен Н.П.Корнейчуком (см.[10] стр. 213) и при его доказательстве требуется привлечение дополнительных и довольно трудных рассуждений. Они связаны с использованием теорем сравнения равноизмеримых перестановок Харди от функций, что выходит за рамки нашей книги.

Неравенство (1.147) утверждает, что интерполяционные в среднем сплайны восстанавливают гладкие периодические функции с точностью до  $O(h^4)$ . Для того, чтобы показать, что это утверждение верно и для сплайнов  $s_{3,2}^*(x, t)$  (а это основная цель нашего параграфа), рассмотрим сплайн

$$s_3^{**}(x, t) = s_{3,2}^*(x, t) - s_3^*(x, t).$$

Пусть

$$\delta_i = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_3^{**}(x, t) dt.$$

Из равенств (1.145), (1.146) и очевидного неравенства

$$|\Delta^6 x_i^*| \leq 4 \max_i |\Delta^4 x_i^*|$$

следует, что

$$\begin{aligned} |\delta_i| &\leq \frac{47}{1152} |\Delta^4 x_i^*| + \frac{5}{9216} |\Delta^6 x_i^*| \leq \\ &\leq \frac{99}{2304} \max_i |\Delta^4 x_i^*| < \frac{1}{23} \max_i |\Delta^4 x_i^*|. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\Delta^4 x_i^* = \frac{1}{h} \int_{-5h/2}^{5h/2} K(t) x(t - ih) dt, \quad (1.149)$$

где

$$K(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-5h/2; -3h/2) \cup (3h/2; 5h/2), \\ -4, & t \in (-3h/2; -h/2) \cup (h/2; 3h/2), \\ 6, & t \in (-h/2; h/2). \end{cases}$$

Из определения В-сплайнов следует, что

$$B_{4,h}^{(4)}(t) = h^4 K(t).$$

Поэтому равенство (1.149) можно переписать в виде

$$\Delta^4 x_i^* = h^3 \int_{-5h/2}^{5h/2} B_{4,h}^{(4)}(t) x(t - ih) dt.$$

Используя здесь интегрирование по частям, приходим к равенству

$$\Delta^4 x_i^* = h^3 \int_{-5h/2}^{5h/2} B_{4,h}(t) x^{(4)}(t - ih) dt,$$

которое позволяет получить следующую цепочку соотношений

$$|\Delta^4 x_i^*| \leq h^4 \|x^{(4)}\|_\infty \frac{1}{h} \int_{-5h/2}^{5h/2} B_{4,h}(t) dt = h^4 \|x^{(4)}\|_\infty,$$

что вместе с (1.148) позволяет записать неравенство

$$\delta_i \leq \frac{h^4}{23} \|x^{(4)}\|_\infty. \quad (1.150)$$

Из равенств (1.145) и (1.146) следует, что

$$\int_0^T s_3^{**}(x, t) dt = \int_0^T (s_{3,2}^*(x, t) - s_3^*(x, t)) dt = 0,$$

поэтому существует периодический интеграл со средним значением ноль на периоде от функции  $s_3^{**}(x, t)$ . Обозначим его через  $s_4(t)$ .

Тогда

$$s_3^{**}(x, t) = s_4'(t) \quad (1.151)$$

и неравенства (1.150) примут вид

$$\begin{aligned} & |s_4((2i+1)h/2) - s_4((2i-1)h/2)| = \quad (1.152) \\ & = \left| \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} s_3^{**}(x, t) dt \right| = h|\delta_i| \leq \frac{h^5}{23} \|x^{(4)}\|_\infty. \end{aligned}$$

В работе [10] доказано, что для любого сплайна четвертого порядка  $s_4(t)$  с узлами в точках  $(2i+1)h/2$ , выполняется неравенство

$$\|s_4'\|_\infty \leq \frac{8}{5h} \max_i |s_4((2i+1)h/2) - s_4((2i-1)h/2)|.$$

Отсюда, из (1.151) и (1.152) немедленно получаем

$$\|s_3^{**}(x)\|_\infty \leq \frac{h^5}{23} \frac{8}{5h} \|x^{(4)}\|_\infty = \frac{8h^4}{115} \|x^{(4)}\|_\infty. \quad (1.153)$$

И, наконец, из равенств (1.147) и (1.153) получаем

$$\begin{aligned} & \|x - s_{3,2}^*(x)\|_\infty = \|x - s_3^*(x) + s_3^*(x) - s_{3,2}^*(x)\|_\infty \leq \\ & \leq \|x - s_3^*(x)\|_\infty + \|s_3^*(x) - s_{3,2}^*(x)\|_\infty = \|x - s_3^*(x)\|_\infty + \|s_3^{**}(x)\|_\infty \leq \\ & \leq \left( \frac{5h^4}{384} + \frac{8h^4}{115} \right) \|x^{(4)}\|_\infty < \frac{h^4}{12} \|x^{(4)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой четырежды непрерывно дифференцируемой  $T$ -периодической функции  $x(t)$  выполняется неравенство (гарантированная оценка погрешности)

$$\|x - s_{3,2}^*(x)\|_\infty \leq \frac{h^4}{12} \|x^{(4)}\|_\infty. \quad (1.154)$$

Приведем результаты, характеризующие асимптотическое поведение качества восстановления гладких функций с помощью сплайнов  $s_{3,1}^*(x, t)$  и  $s_{3,2}^*(x, t)$ . Для удобства ссылок, сформулируем их в виде теоремы.

**Теорема 1.10.1** Пусть периодическая функция  $x(t)$  имеет пять непрерывных производных на периоде. Тогда на каждом промежутке  $[ih, (i+1)h]$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняются соотношения

$$x(t) - s_{3,1}^*(x, t) = -\frac{5}{24}x''(t)h^2 + O(h^4), \quad (1.155)$$

$$x'(t) - (s_{3,1}^*(x, t))' = -\frac{5}{24}x'''(t)h^2 + O(h^3), \quad (1.156)$$

$$x''(t) - (s_{3,1}^*(x, t))'' = -\frac{5}{24}x^{(4)}(t)h^2 + O(h^3) \quad (1.157)$$

и

$$x(t) - s_{3,2}^*(x, t) = \frac{1}{384}x^{(4)}(t)h^4 \left( (\tau^2 - 1)^2 - \frac{8}{15} \right) + O(h^5), \quad (1.158)$$

$$x'(t) - (s_{3,2}^*(x, t))' = \frac{1}{48}x^{(4)}(t)h^3\tau(\tau^2 - 1) + O(h^4), \quad (1.159)$$

$$x''(t) - (s_{3,2}^*(x, t))'' = \frac{1}{48}x^{(4)}(t)h^2(3\tau^2 - 1) + O(h^3), \quad (1.160)$$

где  $\tau = 2t/h - 2i$ .

Так как  $|\tau| \leq 1$  и

$$\max_{|\tau| \leq 1} \left| (\tau^2 - 1)^2 - \frac{8}{15} \right| = \frac{8}{15},$$

$$\max_{|\tau| \leq 1} |\tau(\tau^2 - 1)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

и

$$\max_{|\tau| \leq 1} |(3\tau^2 - 1)| = 2,$$

то из теоремы 1.10.1 немедленно вытекает следующее утверждение:

**Следствие 1.10.2** Пусть периодическая функция  $x(t)$  имеет пять непрерывных производных на периоде. Тогда при  $h \rightarrow 0$  выполняются соотношения

$$\|x - s_{3,1}^*(x)\|_\infty \leq \frac{5}{24} \|x''\|_\infty h^2 + O(h^4); \quad (1.161)$$

$$\|x' - (s_{3,1}^*(x))'\|_\infty \leq \frac{5}{24} \|x'''\|_\infty h^2 + O(h^3), \quad (1.162)$$

$$\|x'' - (s_{3,1}^*(x))''\|_\infty \leq \frac{5}{24} \|x^{(4)}\|_\infty h^2 + O(h^3) \quad (1.163)$$

и

$$\|x - s_{3,2}^*(x)\|_\infty \leq \frac{1}{720} \|x^{(4)}\|_\infty h^4 + O(h^5), \quad (1.164)$$

$$\|x' - (s_{3,2}^*(x))'\|_\infty \leq \frac{1}{144\sqrt{3}} \|x^{(4)}\|_\infty h^3 + O(h^4), \quad (1.165)$$

$$\|x'' - (s_{3,2}^*(x))''\|_\infty \leq \frac{1}{24} \|x^{(4)}\|_\infty h^2 + O(h^3). \quad (1.166)$$

Полезно сравнить оценки (1.164) и (1.154). Асимптотическая оценка намного точнее (если пренебречь слагаемым  $O(h^5)$ !).

Однако и оценка (1.154) имеет определенный интерес. Во – первых, потому, что она имеет *гарантированный* характер, а во – вторых, она верна для функций, имеющих 4 (а не 5, как в (1.164), непрерывные производные.

Соотношения (1.164) – (1.166) показывают, что сплайны  $s_{3,2}^*(x, t)$  хорошо восстанавливают гладкую функцию  $x(t)$  и ее первые две производные. Можно показать, что с помощью сплайнов  $s_{3,2}^*(x, t)$  можно вполне прилично вычислять третью и четвертую производные функции  $x(t)$  (вычисление четвертой производной производится по формальному правилу – в качестве четвертой производной на промежутке  $[(2i - 1)h/2, (2i + 1)h/2]$ , берем значение  $(s_{3,2}^*(x, ih + 0) - s_{3,2}^*(x, ih - 0))/h$ ).

Значения норм сплайн – операторов  $s_{3,1}^*$  и  $s_{3,2}^*$  дает следующее утверждение, содержащееся в работе [32].

**Теорема 1.10.3** *Имеют место равенства*

$$\|s_{3,1}^*\| = 1$$

и

$$\|s_{3,2}^*\| = \frac{41}{32}.$$

Таким образом, при восстановлении функции  $x(t)$  с помощью сплайнов  $s_{3,2}^*(x)$  ошибка (если данные  $x_i^*$  заданы с ошибкой) может увеличиться не более чем в  $41/32$  раза.

Доказательство соотношений теорем 1.10.1 и 1.10.3 проводятся по аналогии с соответствующими теоремами предыдущих параграфов.

## 1.11 Параболические почти интерполяционные в среднем сплайны

Не будь цветов, все ходили бы в одинаковых одеждах.

*Косьма Прутков*

В этом параграфе мы приведем результаты, связанные с восстановлением  $n$ -периодических функций с помощью параболических сплайнов. Эти результаты аналогичны результатам предыдущего параграфа.

Пусть, как и ранее,  $h = \frac{1}{n}$ , а информация о функции  $x(t)$  задана интегралами

$$x_{i+1/2}^* = \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} x(t) dt \quad (i = 0, \pm 1, \dots).$$

Так как функция  $x(t)$   $n$ -периодическая, то для всех  $i$  выполняется равенство

$$x_{i+n}^* = x_i^*.$$

Рассмотрим вначале параболический сплайн Шенберга

$$s_{2,1}^*(x, t) = \sum_{i=-1}^n x_{i+1/2}^* B_{2,h}(t - (i + 0.5)h). \quad (1.167)$$

Для любого  $i$  и любого сплайна  $s_2(t)$  вида

$$s_2(t) = \sum_{i=-1}^n c_i B_{2,h}(t - (i + 0.5)h)$$

аналогично тому, как это было сделано в параграфе 1.10, получаем

$$\int_{ih}^{(i+1)h} s_2(t) dt = c_i \int_{-h/2}^{h/2} B_{2,h}(t) dt + (c_i + c_{i-1}) \int_{h/2}^{3h/2} B_{2,h}(t) dt. \quad (1.168)$$

Отсюда и из равенств (1.66)-(1.69) получаем

$$\frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} s_2(t) dt = \frac{c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1}}{6} = c_i + \frac{1}{6} \Delta^2 c_i. \quad (1.169)$$

Поэтому

$$\frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} s_{2,1}^*(x, t) dt = x_{i+1/2}^* + \frac{1}{6} \Delta^2 x_{i+1/2}^*. \quad (1.170)$$

Так что сплайны  $s_{2,1}^*(x, t)$  интерполируют в среднем сглаженные значения  $x(t)$  с коэффициентом сглаживания  $\alpha = 1/6$ . И, следовательно, их целесообразно применять в тех случаях, когда интегралы  $x_{i+1/2}^*$  заданы со сравнительно большими ошибками.

Вопрос о качестве восстановления функций сплайнами  $s_{2,1}^*(x, t)$  мы рассмотрим позже.

Рассмотрим теперь сплайны

$$s_{2,2}^*(x, t) = \sum_{i=-1}^n \left( x_{i+1/2}^* - \frac{1}{6} \Delta^2 x_{i+1/2}^* \right) B_{2,h}(t - (i + 0.5)h). \quad (1.171)$$

Из равенств (1.169) следует, что для всех  $i$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} s_{2,2}^*(x, t) dt &= x_{i+1/2}^* - \frac{1}{6} \Delta^2 x_{i+1/2}^* + \\ &+ \frac{1}{6} \Delta^2 \left( x_{i+1/2}^* - \frac{1}{6} \Delta^2 x_{i+1/2}^* \right) = x_{i+1/2}^* - \frac{1}{36} \Delta^4 x_{i+1/2}^*. \end{aligned}$$

То есть для любого  $i$

$$\frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} s_{2,2}^*(x, t) dt = x_{i+1/2}^* - \frac{1}{36} \Delta^4 x_{i+1/2}^*.$$

Таким образом, с точностью до  $(h^4)$  сплайны  $s_{2,2}^*(x, t)$  интерполируют в среднем функцию  $x(t)$ . Более точно, они интерполируют в среднем сглаженную (по алгоритму, описанному в параграфе 1.5 при  $\beta = 1/36$ ) функцию.

Рассмотрим, наконец, функцию

$$s_2^*(x, t) = \sum_{i=-1}^n \left( x_{i+1/2}^* - \frac{1}{6} \Delta^2 x_{i+1/2}^* + \right.$$

$$+\frac{1}{36}\Delta^4 x_{i+1/2}^* + \dots) B_{2,h}(t - (i + 0.5)h). \quad (1.172)$$

Из равенств (1.169) следует, что для любого  $i$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} s_2^*(x, t) dt &= x_{i+1/2}^* - \frac{1}{6}\Delta^2 x_{i+1/2}^* + \frac{1}{36}\Delta^4 x_{i+1/2}^* + \dots \\ &+ \frac{1}{6}\Delta^2 x \left( x_{i+1/2}^* - \frac{1}{6}\Delta^2 x_{i+1/2}^* + \frac{1}{36}\Delta^4 x_{i+1/2}^* + \dots \right) = x_{i+1/2}^*, \end{aligned}$$

т.е. для любого  $i$

$$\frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} s_2^*(x, t) dt = x_{i+1/2}^*.$$

Таким образом,  $s_2^*(x, t)$  есть интерполяционный в среднем для функции  $x(t)$  сплайн.

Ясно, что

$$\begin{aligned} s_2^{**}(x, t) &= s_2^*(x, t) - s_{2,2}^*(x, t) = \\ &= \sum_{i=-1}^n \left( \sum_{\nu=2}^{\infty} \left( -\frac{1}{6} \right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_{i+1/2}^* \right) B_{2,h}(t - (i + 0.5)h). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|s_2^{**}(x)\|_{\infty} \leq \max_i \sum_{\nu=2}^{\infty} \left( \frac{1}{6} \right)^{\nu} |\Delta^{2\nu} x_{i+1/2}^*| \left\| \sum_{i=-1}^n B_{2,h}(t - (i + 0.5)h) \right\|_{\infty}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=4}^{\infty} \left( \frac{1}{6} \right)^{\nu} |\Delta^{2\nu} x_{i+1/2}^*| &\leq \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{2^{2\nu-4}}{6^{\nu}} \max_i |\Delta^4 x_{i+1/2}^*| = \\ &= \frac{1}{27} \max_i |\Delta^4 x_{i+1/2}^*| \leq \frac{2}{27} \max_i |\Delta^3 x_i^*|. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что

$$\max_i |\Delta^3 x_i^*| \leq h^3 \|x'''\|_{\infty}$$

и

$$\sum_{i=-1}^n B_{2,h}(t - (i + 0.5)h) \equiv 1 \quad (t \in [0, T]),$$

получаем

$$\|s_2^{**}(x)\|_\infty \leq \frac{2h^3}{27}\|x'''\|_\infty. \quad (1.173)$$

Далее, (см., например, [10] стр.220) для любой трижды непрерывно дифференцируемой на всей оси функции  $x(t)$  выполняется неравенство

$$\|x - s_2^*(x)\|_\infty \leq \frac{h^3}{24}\|x'''\|_\infty. \quad (1.174)$$

Отсюда и из оценки (1.173) получаем

$$\|x - s_{2,2}^*(x)\|_\infty \leq \|x - s_2^*(x)\|_\infty + \|s_{2,2}^*(x) - s_2^*(x)\|_\infty \leq \left(\frac{h^3}{24} + \frac{2h^3}{27}\right)\|x'''\|_\infty,$$

и приходим к следующей гарантированной оценке качества восстановления

$$\|x - s_{2,2}^*(x)\|_\infty \leq \frac{25h^3}{216}\|x'''\|_\infty. \quad (1.175)$$

Асимптотическое поведение качества восстановления гладких функций с помощью сплайнов  $s_{3,1}^*(x, t)$  и  $s_{3,2}^*(x, t)$  характеризует следующее утверждение.

**Теорема 1.11.1** Пусть функция  $x(t)$  имеет три непрерывных производных на периоде. Тогда для  $t \in [ih, (i+1)h]$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (x(t) - s_{2,1}^*(x, t))^{(\nu)} &= -\frac{h^2}{6}x^{(2+\nu)}(t) + O(h^3) \quad (\nu = 0, 1, 2), \\ x(t) - s_{2,2}^*(x, t) &= \frac{h^3}{6}x'''(t)\tau(\tau^2 - 1/4) + O(h^4), \\ x'(t) - (s_{2,2}^*(x, t))' &= \frac{h^2}{2}x'''(t)(\tau^2 - 1/12) + O(h^3), \end{aligned}$$

где  $\tau = t/h - i - 1/2$ .

Из этой теоремы, в частности, вытекает следующее утверждение

**Следствие 1.11.2** Пусть периодическая функция  $x(t)$  имеет три непрерывные производные на периоде. Тогда при  $h \rightarrow 0$  выполняются соотношения

$$\|x - s_{2,2}^*(x)\|_\infty \leq \frac{h^3}{12\sqrt{3}}\|x'''\|_\infty + O(h^4),$$

$$\|x' - (s_{2,2}^*(x))'\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \|x'''\|_\infty + O(h^3).$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\|s_{2,1}^*\| = 1$$

и

$$\|s_{2,2}^*\| = \frac{4}{3}.$$

## 1.12 Непериодические почти интерполяционные в среднем сплайны

Всякая вещь есть форма проявления беспредельного разнообразия.

*Косьма Прутков*

В параграфах 1.10 и 1.11 мы описали способы построения интерполяционных и почти интерполяционных в среднем сплайнов, восстанавливающих гладкие периодические функции. Во второй главе мы опишем способы восстановления гладких замкнутых контуров с помощью этих сплайнов. На практике, как правило, мы сталкиваемся с необходимостью описания кусочно – гладких контуров (см. рис.1.1). В этом случае естественно выделить гладкие участки контура и каждый из них восстановить с помощью сплайнов. Это приводит к необходимости исследования задачи восстановления функции, заданной на отрезке, с помощью сплайнов. Мы подробно опишем способ восстановления с помощью кубических сплайнов, так как мы убедились, что они точнее (чем параболические) восстанавливают функцию.

Пусть на отрезке  $[0, T]$  с равномерным разбиением  $\{ih\}_{i=0}^n$ , где  $h = T/n$ , задана функция  $x(t)$  и средние значения функции  $x(t)$  на интервалах  $[(i - 0.5)h, (i + 0.5)h]$

$$x_i^* = \frac{1}{h} \int_{(i-0.5)h}^{(i+0.5)h} x(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Результаты параграфа 1.10 показывают, что сплайн

$$s_{3,2}^*(x, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \left( x_i^* - \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* \right) {}_{3,h}(t - ih) \quad (1.176)$$

хорошо восстанавливает функцию  $x(t)$ .

Для  $i = -1, 0, n$  и  $n+1$  не определены значения  $x_i^*$ . Кроме того, для  $i = -1, 0, 1$  и  $n-1, n, n+1$  не определены значения  $\Delta^2 x_i^*$  (например, для определения  $\Delta^2 x_{n-1}^* = x_{n-2}^* - 2x_{n-1}^* + x_n^*$  необходимо, чтобы было определено  $x_n^*$ ). Следовательно, сплайн (1.176) определен на интервале  $[(3+0.5)h, -(3+0.5)h]$  и для того, чтобы он был определен на всем интервале  $[0, T]$ , необходимо разумным образом доопределить значения  $x_{-2}^*, x_{-1}^*$  и  $x_0^*$ , а также значения  $x_n^*, x_{n+1}^*$  и  $x_{n+2}^*$ .

Для того, чтобы это сделать, нам необходимо иметь больше информации о функции  $x(t)$  вблизи концов интервала  $[0, T]$ .

Будем считать, что нам заданы средние значения функции  $x(t)$  на промежутках  $[0, 0.5h]$ ,  $[0.5h, h]$ ,  $[h, 1.5h]$ ,  $[1.5h, 2h]$ ,  $[2h, 2.5h]$  (т.е. на промежутках  $[0.5hk, 0.5h(k+1)]$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ), и на интервалах  $[-0.5(k+1)h, -0.5kh]$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ), а также средние значения  $x(t)$  на интервалах  $[(i-0.5)h, (i+0.5)h]$  ( $i = 3, 4, \dots, n-3$ ).

Таким образом, мы считаем, что заданы значения интегралов

$$x_{i,+}^* = \frac{2}{h} \int_{ih}^{(i+0.5)h} x(t) dt \quad (i = 0, 1, 2; i = n-2, n-1), \quad (1.177)$$

$$x_{i,-}^* = \frac{2}{h} \int_{(i-0.5)h}^{ih} x(t) dt \quad (i = 1, 2; i = n-2, n-1, n), \quad (1.178)$$

$$x_i^* = \frac{1}{h} \int_{(i-0.5)h}^{(i+0.5)h} x(t) dt \quad (i = 3, 4, \dots, n-3). \quad (1.179)$$

Значения  $x_1^*, x_2^*$  и  $x_{n-2}^*, x_{n-1}^*$  однозначно определяются равенствами

$$x_1^* = \frac{1}{2}(x_{1,+}^* + x_{1,-}^*), \quad x_2^* = \frac{1}{2}(x_{2,+}^* + x_{2,-}^*) \quad (1.180)$$

и

$$x_{n-2}^* = \frac{1}{2}(x_{n-2,+}^* + x_{n-2,-}^*), \quad x_{n-1}^* = \frac{1}{2}(x_{n-1,+}^* + x_{n-1,-}^*). \quad (1.181)$$

Для того, чтобы доопределить значения  $x_i^*$  для  $i = -2, -1, 0$  и  $i = n, n+1, n+2$ , поступим следующим образом. Выберем коэффициенты кубического многочлена

$$p(t) = at^3 + bt^2 + t + d$$

так, чтобы его средние значения на промежутках  $[0, 0.5h]$ ,  $[0.5h, h]$ ,  $[h, 1.5h]$ ,  $[1.5h, 2h]$  совпадали с соответствующими средними значениями функции  $x(t)$ , т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\frac{2}{h} \int_0^{0.5h} p(t) dt = x_{0,+}^*,$$

$$\frac{2}{h} \int_{0.5h}^h p(t) dt = x_{1,-}^*,$$

$$\frac{2}{h} \int_h^{1.5h} p(t) dt = x_{1,+}^*,$$

$$\frac{2}{h} \int_{1.5h}^{2h} p(t) dt = x_{2,-}^*.$$

Вычислив интегралы, стоящие в левых частях этих равенств, мы приходим к системе четырех линейных уравнений (относительно  $a, b, c, d$ ) с четырьмя неизвестными.

Решение этой системы таково

$$a = \frac{4}{3h^3} (x_{2,-}^* - 3x_{1,+}^* + 3x_{1,-}^* - x_{0,+}^*), \quad (1.182)$$

$$b = \frac{1}{h^2} (-3x_{2,-}^* + 11x_{1,+}^* - 13x_{1,-}^* + 5x_{0,+}^*), \quad (1.183)$$

$$= \frac{1}{6h} (11x_{2,-}^* - 45x_{1,+}^* + 69x_{1,-}^* - 35x_{0,+}^*), \quad (1.184)$$

$$d = \frac{1}{12} (-3x_{2,-}^* + 13x_{1,+}^* - 23x_{1,-}^* + 25x_{0,+}^*). \quad (1.185)$$

Пусть, теперь,  $p_0(t)$  – кубический многочлен, коэффициенты которого вычисляются по формулам (1.182) – (1.185). Положим

$$x_{-1}^* = \frac{1}{h} \int_{-2.5h}^{-0.5h} p_0(t) dt, \quad (1.186)$$

$$x_{-2}^* = \frac{1}{h} \int_{-3.5h}^{-2.5h} p_0(t) dt, \quad (1.187)$$

$$x_{0,-}^* = \frac{2}{h} \int_{-0.5h}^0 p_0(t) dt \quad (1.188)$$

и

$$x_0^* = \frac{1}{2}(x_{0,+}^* + x_{0,-}^*).$$

Вычислив интегралы в правых частях равенств (1.186) – (1.188), а затем, подставив в них значения  $a, b, c$  и  $d$ , определенные равенствами (1.182) – (1.185), окончательно получим

$$x_0^* = 2.5x_{0,+}^* - 3x_{1,-}^* + 2x_{1,+}^* - 0.5x_{2,-}^*, \quad (1.189)$$

$$x_{-1}^* = 15x_{0,+}^* - 32.5x_{1,-}^* + 25.5x_{1,+}^* - 7x_{2,-}^*, \quad (1.190)$$

$$x_{-2}^* = 45.5x_{0,+}^* - 112x_{1,-}^* + 95x_{1,+}^* - 27.5x_{2,-}^*. \quad (1.191)$$

Аналогичным путем получаем равенства

$$x_n^* = 2.5x_{n,-}^* - 3x_{n-1,+}^* + 2x_{n-1,-}^* - 0.5x_{n-2,+}^*, \quad (1.192)$$

$$x_{n+1}^* = 15x_{n,-}^* - 32.5x_{n-1,+}^* + 25.5x_{n-1,-}^* - 7x_{n-2,+}^*, \quad (1.193)$$

$$x_{n+2}^* = 45.5x_{n,-}^* - 112x_{n-1,+}^* + 95x_{n-1,-}^* - 27.5x_{n-2,+}^*. \quad (1.194)$$

Теперь мы готовы дать полный алгоритм восстановления функций, заданных на отрезке с помощью сплайнов.

Нам заданы средние значения

$$x_{i,+}^* \quad (i = 0, 1, 2; \quad i = n - 2, n - 1), \quad x_{i,-}^* \quad (i = 1, 2; \quad i = n - 2, n - 1, n)$$

и  $x_i^*$  ( $i = 3, 4, \dots, n - 3$ )

Вычисляем значения  $x_1^*, x_2^*, x_{n-1}^*, x_{n-2}^*$  по формулам (1.180) и (1.181), а значения  $x_{-2}^*, x_{-1}^*, x_0^*$  и  $x_n^*, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*$  по формулам (1.189) – (1.194), и строим сплайн

$$s_{3,2}^*(x, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \left( x_i^* - \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^* \right) {}_{3,h}(t - ih). \quad (1.195)$$

Аналогичным путем можно построить и параболический почти интерполяционный сплайн для функций, заданных на отрезке.

В этом случае мы считаем, что нам заданы средние значения функции  $x(t)$  на интервалах

$$\begin{aligned} & [0, 0.5h], [0.5h, h], [h, 1.5h], [1.5h, 2h], \\ & [hk, (k+1)h], (k=2, 3, \dots, n-3), \\ & [-2h, -1.5h], [-1.5h, -h], [-h, -0.5h], [-0.5h, ]. \end{aligned}$$

То есть заданы значения

$$\begin{aligned} x_{i,+}^* &= \frac{2}{h} \int_{ih}^{(i+0.5)h} x(t) dt \quad (i=0, 1; i=n-2, n-1), \\ x_{i,-}^* &= \frac{2}{h} \int_{(i-0.5)h}^{ih} x(t) dt \quad (i=1, 2; i=n-2, n-1), \\ x_{i+0.5}^* &= \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} x(t) dt \quad (i=2, 3, \dots, n-3). \end{aligned}$$

Вычисляем

$$x_{0.5}^* = \frac{1}{2}(x_{0,+}^* + x_{1,-}^*), \quad x_{1.5}^* = \frac{1}{2}(x_{1,+}^* + x_{2,-}^*)$$

и

$$x_{n-0.5}^* = \frac{1}{2}(x_{n-1,+}^* + x_{n,-}^*), \quad x_{n-1.5}^* = \frac{1}{2}(x_{n-2,+}^* + x_{n-1,-}^*).$$

Значения  $x_{-0.5}^*$ ,  $x_{-1.5}^*$ ,  $x_{n+0.5}^*$ ,  $x_{n+1.5}^*$  находим из следующих соотношений. Пусть  $p_0(t)$  – кубический многочлен с коэффициентами (1.182) – (1.185). Полагаем

$$x_{-0.5}^* = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 p_0(t) dt$$

и

$$x_{-1.5}^* = \frac{1}{h} \int_{-2h}^{-h} p_0(t) dt.$$

Вычислив интегралы, стоящие в правых частях этих равенств, и, подставив значения  $a, b, c$  и  $d$ , определенные равенствами (1.182) – (1.185), мы приходим к равенствам

$$\begin{aligned} x_{-0.5}^* &= 7x_{0,+}^* - 13x_{1,-}^* + 9.5x_{1,+}^* - 2.5x_{2,-}^* , \\ x_{-1.5}^* &= 27.5x_{0,+}^* - 64.5x_{1,-}^* + 53x_{1,+}^* - 15x_{2,-}^* . \end{aligned}$$

Аналогичным путем получаем равенства

$$\begin{aligned} x_{n+0.5}^* &= 7x_{n,-}^* - 13x_{n-1,+}^* + 9.5x_{n-1,-}^* - 2.5x_{n-2,+}^* , \\ x_{n+1.5}^* &= 27.5x_{n,-}^* - 64.5x_{n-1,+}^* + 53x_{n-1,-}^* - 15x_{n-2,+}^* . \end{aligned}$$



## Глава 2

# Описание кривых сплайнами

Все методы и алгоритмы построения технологических траекторий в той или иной мере требуют предварительного описания (аналитического задания) контура детали, или, что то же, теоретической кривой, восстанавливающей заданный контур. Ранее, как правило, для этих целей использовались методы, основанные на построении интерполяционных (и подобных им) алгебраических многочленов. Эти методы, как правило, громоздки, неустойчивы в вычислениях (как по отношению к ошибкам данных, так и по отношению к ошибкам округления) и плохо приспособлены для описания замкнутых контуров и контуров с особыми точками (точками излома и возврата, точками перепада кривизны и пр.) и петлями.

В последнее время, для описания сложных контуров все чаще стали использовать различные виды сплайн – функций. В первой главе мы подробно обсудили вопросы восстановления явно заданных функций с помощью сплайнов. В данной главе мы рассмотрим приложения этих результатов для описания плоских и пространственных кривых различными видами параметрических сплайнов.

В первом параграфе рассматривается задача восстановления контура (кривой) с помощью параметрических сплайнов в случае, когда информация о контуре задана с помощью опорных точек. Во третьем параграфе исследуется задача восстановления контура с помощью полярных сплайнов. В последующих параграфах этой главы рассматривается задача описания контура с помощью различных видов почти интерпо-

ляционных и почти интерполяционных в среднем сплайнов, сплайнов, базирующихся на функциях Безье и т.п.

Конец главы посвящен вопросам идентификации контуров (сравнение детали и эталона).

Все результаты этой главы в той или иной мере базируются на свойствах классических сплайнов, приведенных в первой главе.

## 2.1 Описание кривых сплайнами по опорным точкам

Дайте мне точку опоры и я переверну  
Землю.  
*Архимед*

Через

$$\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \}$$

обозначим разбиение отрезка  $[0, T]$ .

Напомним, что функция  $s_r(\Delta_n, t)$  называется сплайн – функцией порядка  $r$  минимального дефекта, если она имеет  $(r-1)$ -ю непрерывную производную на отрезке  $[0, T]$ , и на каждом из интервалов  $(t_{i-1}, t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) она является алгебраическим многочленом степени не выше чем  $r$ .

Множество всех сплайнов порядка  $r$  по разбиению  $\Delta_n$  обозначим через  $S_r(\Delta_n)$ .

Сплайн  $s \in S_r(\Delta_n)$  будем называть периодическим, если выполнены следующие краевые условия

$$s(0) = s(T), \quad s'(0) = s'(T), \dots, s^{(r-1)}(0) = s^{(r-1)}(T).$$

Сначала опишем способ задания параметрических сплайнов, восстанавливающих замкнутый контур.

Пусть информация о контуре задана координатами опорных точек  $i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ) замкнутой кривой  $\Gamma$ , достаточно точно описывающих контур.

Для сокращения записей в дальнейшем в этом параграфе мы будем писать  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  вместо  $\{x_i\}_{i=1}^n$  и  $\{y_i\}_{i=1}^n$  соответственно.

Так как опорные точки описывают замкнутую кривую, то  $M_{n+1} = M_1$ .

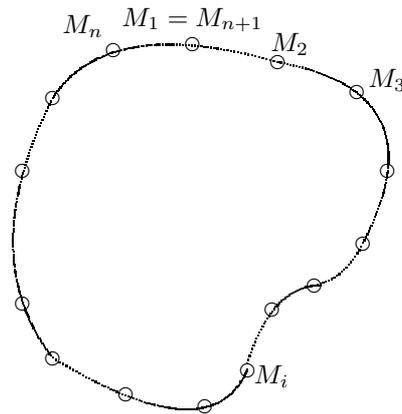


Рис. 2.1:

Через

$$\sigma_{i+1/2} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.1)$$

обозначим длину отрезка прямой, соединяющей точки  $M_i$  и  $M_{i+1}$ .

Положим

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \sigma_{1/2}, \quad t_2 = \sigma_{1/2} + \sigma_{3/2}, \quad t_3 = \sigma_{1/2} + \sigma_{3/2} + \sigma_{5/2}, \dots, \quad (2.2)$$

$$t_n = \sigma_{1/2} + \dots + \sigma_{n-1/2}.$$

Интерполяционным параметрическим замкнутым кубическим сплайном по разбиению  $\Delta_n$  будем называть функцию

$$s_3(\Gamma, \Delta_n, t) = (s_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t), s_3(\mathbf{y}, \Delta_n, t)), \quad (2.3)$$

где  $s_3(\mathbf{x}, \Delta_n)$  и  $s_3(\mathbf{y}, \Delta_n)$  – периодические сплайны, удовлетворяющие интерполяционным условиям (см. рис.2.1):

$$s_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t_i) = x_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (2.4)$$

$$s_3(\mathbf{y}, \Delta_n, t_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.5)$$

Известно, что кубический многочлен  $p(\theta)$ , интерполирующий функцию  $f(\theta)$  и ее производную  $f'(\theta)$  в точках 0 и  $h$  (многочлен Эрмита)

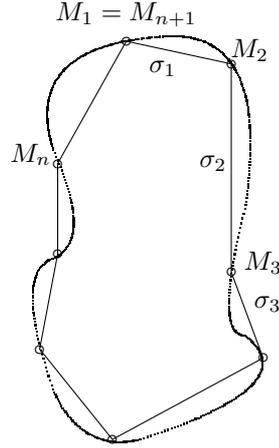


Рис. 2.2:

существует единствен и имеет вид (это легко проверить непосредственной проверкой)

$$p(\theta) = \frac{1}{h^3} f(0)(h - \theta)^2(h + 2\theta) + \frac{1}{h^3} f(h)\theta^2(3h - 2\theta) + \frac{1}{h^2} f'(0)\theta(h - \theta)^2 - \frac{1}{h^2} f'(h)\theta^2(h - \theta). \quad (2.6)$$

Отсюда получаем, что интерполяционный параметрический сплайн существует единствен и для  $t \in (t_i, t_{i+1}]$  записывается в виде

$$\begin{cases} s_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t) = x_i(1 - \tau)^2(1 + 2\tau) + x_{i+1}\tau^2(3 - 2\tau) + \\ \quad + \sigma_{i+1/2}\tau(1 - \tau)(m_i(1 - \tau) - m_{i+1}\tau), \\ s_3(\mathbf{y}, \Delta_n, t) = x_i(1 - \tau)^2(1 + 2\tau) + y_{i+1}\tau^2(3 - 2\tau) + \\ \quad + \sigma_{i+1/2}\tau(1 - \tau)(m_i(1 - \tau) - m_{i+1}\tau), \end{cases} \quad (2.7)$$

где

$$\tau = (t - t_i)/\sigma_{i+1/2},$$

а числа

$$m_i = s'_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t_i), \quad k_i = s'_3(\mathbf{y}, \Delta_n, t_i)$$

однозначно определяются условиями непрерывности вторых производных сплайнов  $s''_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t)$ ,  $s''_3(\mathbf{y}, \Delta_n, t)$  в узлах  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), т.е. условиями

$$s''_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t_i - 0) = s''_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t_i + 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$s_r''(\mathbf{y}, \Delta_n, t_i - 0) = s_r''(\mathbf{y}, \Delta_n, t_i + 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда, из представлений (2.7) и из условия замкнутости кривой получаем следующую систему линейных уравнений для определения коэффициентов  $m_i$  и  $k_i$

$$\begin{cases} m_0 = m_n, \\ \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ m_{n+1} = m_1, \end{cases} \quad (2.8)$$

где

$$\mu_i = \frac{\sigma_{i-1/2}}{\sigma_{i-1/2} + \sigma_{i+1/2}}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$g_i = \frac{6}{\sigma_{i-1/2} + \sigma_{i+1/2}} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\sigma_{i+1/2}} - \frac{x_i - x_{i-1}}{\sigma_{i-1/2}} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$\begin{cases} k_0 = k_n, \\ \mu_i k_{i-1} + 2k_i + \lambda_i k_{i+1} = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ k_{n+1} = k_1, \end{cases} \quad (2.9)$$

где

$$d_i = \frac{6}{\sigma_{i-1/2} + \sigma_{i+1/2}} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{\sigma_{i+1/2}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\sigma_{i-1/2}} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.10)$$

Матрица систем (2.8) и (2.9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведем некоторые преобразования, позволяющие упростить решение систем (2.8) и (2.9). Для этого первое уравнение умножим на  $\mu_1$  и вычтем из второго, а последнее уравнение умножим на  $\lambda_n$  и вычтем из предпоследнего. В результате мы получим следующие системы для определения  $k_i$  и  $m_i$

$$\begin{cases} 2m_1 + \lambda_1 m_2 + \mu_1 m_n = g_1, \\ \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = g_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \\ \lambda_n m_1 + \mu_n m_{n-1} + 2m_n = g_n, \end{cases} \quad (2.11)$$

и

$$\begin{cases} 2k_1 + \lambda_1 k_2 + \mu_1 k_n = d_1, \\ \mu_i k_{i-1} + 2k_i + \lambda_i k_{i+1} = d_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \\ \lambda_n k_1 + \mu_n k_{n-1} + 2k_n = d_n. \end{cases} \quad (2.12)$$

Матрица систем (2.11) и (2.12) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Матрица имеет ленточную трех диагональную структуру, причем по главной диагонали идут элементы равные 2, а сумма остальных элементов каждой строки равна

$$\lambda_i + \mu_i = 1.$$

Таким образом, в каждой строке матрицы элемент, стоящий на главной диагонали, превосходит сумму остальных элементов. В таком случае говорят, что матрица имеет диагональное преобладание.

Хорошо известно (см., например, [7], стр.333), что всякая система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, матрица которой имеет диагональное преобладание, имеет одно и только одно решение.

Отсюда следует, что задача построения параметрического интерполяционного сплайна разрешима для любого набора данных, описывающих замкнутый контур.

Решив системы (2.11) и (2.12), мы найдем числа  $m_i$  и  $k_i$ , а подставив их в (2.7), получим явный вид сплайна (2.3)

$$s_3(\Gamma, \Delta_n, t) = (s_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t), s_3(\mathbf{y}, \Delta_n, t)).$$

Для решения систем (2.11) и (2.12), как правило, используют алгоритмы прогонки.

Таким образом, алгоритм построения параметрического кубического замкнутого сплайна выглядит следующим образом.

Известны точки

$$M_i(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1; \quad M_{n+1} = M_1).$$

Вычисляем

$$\sigma_{i+1/2} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$t_0 = 0, \quad t_i = \sigma_{i+1/2} + t_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Далее, находим

$$\mu_i = \frac{\sigma_{i-1/2}}{\sigma_{i-1/2} + \sigma_{i+1/2}}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$g_i = \frac{6}{\sigma_{i-1/2} + \sigma_{i+1/2}} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\sigma_{i+1/2}} - \frac{x_i - x_{i-1}}{\sigma_{i-1/2}} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$d_i = \frac{6}{\sigma_{i-1/2} + \sigma_{i+1/2}} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{\sigma_{i+1/2}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\sigma_{i-1/2}} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Решение системы (2.11) будем искать в виде

$$m_i = \alpha_i m_{i+1} + \beta_i m_n + \omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.14)$$

где коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и  $\omega_i$  определяются следующим образом:

$$\alpha_0 = \omega_0 = 0, \quad \beta_0 = 1, \quad (2.15)$$

$$\alpha_i = -\frac{b_i}{a_i + C_i \alpha_{i-1}}, \quad \omega_i = \frac{g_i + C_i \omega_{i-1}}{a_i + C_i \alpha_{i-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.16)$$

и

$$\beta_i = -\frac{C_i \beta_i}{a_i + C_i \alpha_{i-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.17)$$

а

$$m_n = \frac{g_n - b_n \vartheta_1 - c_n \vartheta_{n-1}}{a_n + b_n s_1 + c_n s_{n-1}}, \quad (2.18)$$

где  $s_i$ ,  $\vartheta_i$  определяются из рекуррентных соотношений

$$s_n = 1, \quad \vartheta_n = 0, \quad (2.19)$$

$$s_i = \alpha_i s_{i+1} + \beta_i, \quad \vartheta_i = \alpha_i \vartheta_{i+1} + \omega_i \quad (i = n-1, \dots, 1) \quad (2.20)$$

и, кроме того,

$$a_i = 2, \quad b_i = \lambda_i, \quad C_i = \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.21)$$

Аналогично вычисляются значения  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).Тогда для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  сплайн

$$s_3(\Gamma, \Delta_n, t) = (s_3(\mathbf{x}, \Delta_n, t), s_3(\mathbf{y}, \Delta_n, t))$$

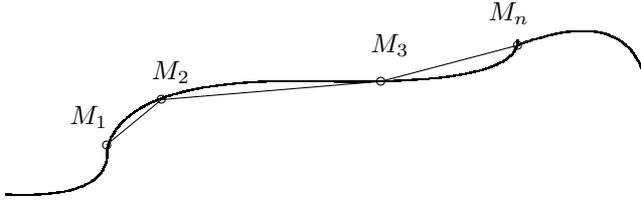


Рис. 2.3:

имеет вид (2.7).

Если же опорные точки описывают незамкнутый контур, то задача определения коэффициентов  $m_i, k_i$  несколько сложнее. Эта задача часто возникает тогда, когда контур кусочно – гладкий, т.е. имеются особые точки (изломы) и требуется точное описание этого контура на гладких кусках (см. рис. 2.3).

Итак, пусть задан набор опорных точек

$$M_i(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

достаточно точно описывающих гладкую часть контура.

Как и ранее, вычислим

$$\sigma_{i+1/2} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Обозначим

$$\vartheta_1 = \sigma_{1/2} + \sigma_{3/2},$$

$$\vartheta_i = \sigma_{i+1/2} \quad (i = 2, 3, \dots, n-4),$$

$$\vartheta_{n-3} = \sigma_{n-3/2} + \sigma_{n-1/2}.$$

и

$$t_0 = 0, \quad t_i = t_{i-1} + \vartheta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-3), \quad t_{n-3} = T.$$

Пусть, кроме того,

$$t^* = \sigma_{1/2} \quad t^{**} = T - \sigma_{n-1/2}.$$

Таким образом определено разбиение

$$\Delta_{n-3} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-3} = T\}.$$

Для произвольного плоского контура  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  интерполяционным параметрическим сплайном порядка 3 (кубическим сплайном) будем называть функцию

$$s_3(\Gamma, \Delta_{n-3}, t) = (s_3(x, \Delta_{n-3}, t), s_3(y, \Delta_{n-3}, t)),$$

где  $s_3(x, \Delta_{n-3})$  и  $s_3(y, \Delta_{n-3}) \in S_3(\Delta_{n-3})$ , удовлетворяющие следующим интерполяционным условиям

$$\begin{aligned} s_3(\Gamma, \Delta_{n-3}, t_i) &= M_{i+1} \quad (i = 2, 3, \dots, n-3), \\ s_3(\Gamma, \Delta_{n-3}, 0) &= M_1, \quad s_3(\Gamma, \Delta_{n-3}, T) = M_n, \\ s_3(\Gamma, \Delta_{n-3}, t^*) &= M_2, \quad s_3(\Gamma, \Delta_{n-3}, t^{**}) = M_{n-1}. \end{aligned}$$

Из двух последних условий следует, что

$$x_1(1-\tau^*)(1+2\tau^*) + x_3(\tau^*)(3-2\tau^*) + \sigma_1\tau^*(1-\tau^*)(m_1(1-\tau^*) - m_2\tau^*) = x_2,$$

$$y_1(1-\tau^*)(1+2\tau^*) + y_3(\tau^*)(3-2\tau^*) + \sigma_1\tau^*(1-\tau^*)(k_1(1-\tau^*) - k_2\tau^*) = y_2$$

и

$$\begin{aligned} &x_{n-2}(1-\tau^{**})(1+2\tau^{**}) + x_n(\tau^{**})(3-2\tau^{**}) + \\ &+ \sigma_{n-3}\tau^{**}(1-\tau^{**})(m_{n-4}(1-\tau^{**}) - m_{n-3}\tau^{**}) = x_{n-1} \\ &y_{n-2}(1-\tau^{**})(1+2\tau^{**}) + y_n(\tau^{**})(3-2\tau^{**}) + \\ &+ \sigma_{n-3}\tau^{**}(1-\tau^{**})(k_{n-4}(1-\tau^{**}) - k_{n-3}\tau^{**}) = y_{n-1}, \end{aligned}$$

где

$$\tau^* = (t^* - t_0)/\sigma_0 \quad \tau^{**} = (t^{**} - t_{n-2})/\sigma_{n-3}.$$

Тогда коэффициенты сплайна определяются из системы

$$\begin{cases} (1-\tau^*)m_1 - \tau^*m_2 = g^*, \\ \mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = g_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-4), \\ (1-\tau^{**})m_{n-4} - \tau^{**}m_{n-3} = g^{**} \end{cases} \quad (2.22)$$

и

$$\begin{cases} (1-\tau^*)k_1 - \tau^*k_2 = d^*, \\ \mu_i k_{i-1} + 2k_i + \lambda_i k_{i+1} = d_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-4), \\ (1-\tau^{**})k_{n-4} - \tau^{**}k_{n-3} = d^{**}, \end{cases} \quad (2.23)$$

где

$$g^* = \frac{1}{\sigma_1\tau^*(1-\tau^*)} (x_2 - x_1(1-\tau^*)^2(1+2\tau^*) - x_3(\tau^*)^2(3-2\tau^*))$$

и

$$g^{**} = \frac{1}{\sigma_{n-3}\tau^{**}(1-\tau^{**})} (x_{n-1} - x_{n-2}(1-\tau^{**})^2(1+2\tau^{**}) - x_n(\tau^{**})^2(3-2\tau^{**})).$$

Кроме того

$$d^* = \frac{1}{\sigma_1\tau^*(1-\tau^*)} (y_2 - y_1(1-\tau^*)^2(1+2\tau^*) - y_3(\tau^*)^2(3-2\tau^*))$$

и

$$d^{**} = \frac{1}{\sigma_{n-3}\tau^{**}(1-\tau^{**})} (y_{n-1} - y_{n-2}(1-\tau^{**})^2(1+2\tau^{**}) - y_n(\tau^{**})^2(3-2\tau^{**})).$$

Коэффициенты сплайна, однозначно определенные с помощью систем (2.22) и (2.23), определяются с помощью метода прогонки (2.14) – (2.21)), где

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \tau^*, \quad a_i = 2 \quad (i = 2, 3, \dots, n-4), \quad a_{n-3} = -\tau^*, \\ b_1 &= -\tau^*, \quad b_i = \lambda_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-4), \quad b_{n-3} = 0, \\ C_1 &= 0, \quad C_i = \mu_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-4), \quad C_{n-3} = 1 - \tau^* \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$d_1 = d^*, \quad d_{n-3} = d^{**}, \quad g_1 = g^*, \quad g_{n-3} = g^{**}.$$

Определяя таким образом коэффициенты  $m_i$  и  $k_i$ , и, подставляя их, получаем, что для  $t \in [0, t_1]$ , сплайн  $s_3(\Gamma, \Delta_{n-3}, t)$  имеет вид

$$\begin{cases} s_3(x, \Delta_{n-3}, t) = x_1(1-\tau)(1+2\tau) + x_3(\tau)(3-2\tau) + \\ + \sigma_1\tau(1-\tau)(m_1(1-\tau) - m_2\tau), \\ s_3(y, \Delta_{n-3}, t) = y_1(1-\tau)(1+2\tau) + y_3(\tau)(3-2\tau) + \\ + \sigma_1\tau(1-\tau)(k_1(1-\tau) - k_2\tau), \end{cases}$$

для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 1, 2, \dots, n-5$ ) – вид

$$\begin{cases} s_3(x, \Delta_{n-3}, t) = x_{i+2}(1-\tau)(1+2\tau) + x_{i+3}(\tau)(3-2\tau) + \\ + \sigma_{i+1}\tau(1-\tau)(m_i(1-\tau) - m_{i+1}\tau), \\ s_3(y, \Delta_{n-3}, t) = y_{i+2}(1-\tau)(1+2\tau) + y_{i+3}(\tau)(3-2\tau) + \\ + \sigma_{i+1}\tau(1-\tau)(k_i(1-\tau) - k_{i+1}\tau), \end{cases}$$

и, наконец, для  $t \in [t_{n-4}, t_{n-3}]$  – вид

$$\begin{cases} s_3(x, \Delta_{n-3}, t) = x_{n-2}(1-\tau)(1+2\tau) + x_n(\tau)(3-2\tau) + \\ \quad + \sigma_{n-3}\tau(1-\tau)(m_{n-4}(1-\tau) - m_{n-3}\tau), \\ s_3(y, \Delta_{n-3}, t) = y_{n-2}(1-\tau)(1+2\tau) + y_n(\tau)(3-2\tau) + \\ \quad + \sigma_{n-3}\tau(1-\tau)(k_{n-4}(1-\tau) - k_{n-3}\tau), \end{cases}$$

где  $\tau = (t - t_i)/\sigma_i$ .

Заметим, что этот алгоритм достаточно универсальный. Его можно использовать не только для определения сплайнов заданных на отрезке, но и для периодических сплайнов (т.е. описывающих замкнутый контур). Так, если точки  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) лежат на замкнутом контуре, то

$$M_{n+i} = M_i \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Введем новую индексацию этих точек

$$M_i^* = M_{i-4} \quad (i = 1, 2, \dots, n+8).$$

Используя для этих точек алгоритм, изложенный выше, получаем периодический параметрический сплайн (замкнутую сплайн – кривую).

Теперь, когда мы рассмотрели методы построения интерполяционных параметрических сплайнов, изучим насколько хорошо описывают эти сплайны интерполируемый контур, т.е. исследуем вопрос о качестве аппроксимации гладких кривых такими сплайнами.

**Теорема 2.1.1** Пусть параметрическая замкнутая кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) такова, что функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют на промежутке изменения параметра  $[0, T]$  четыре непрерывные производные.

Тогда, если

$$\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \}$$

произвольное разбиение отрезка  $[0, T]$  и  $h_{i+1/2} = t_{i+1} - t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – шаг разбиения  $\Delta_n$  с максимальным значением  $h_n = \max\{h_{i+1/2} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ , то

$$\mathcal{R}(\Gamma, s_3(\Gamma, \Delta_n)) \leq \frac{5}{384} h^4 \|F\|_C (1 + o(1)), \quad (2.24)$$

где

$$F(t) = \frac{|x'(t)y^{(4)}(t) - y'(t)x^{(4)}(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \quad (2.25)$$

а  $\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_1)$  – хаусдорфово расстояние между кривыми  $\Gamma(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  (см. параграф 1.1), т.е. наименьшее из  $\varepsilon$ , при котором кривая  $\Gamma(t)$  лежит в  $\varepsilon$ -коридоре кривой  $\Gamma_1(t)$ .

**Доказательство.** Для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  имеем

$$\begin{aligned} x(t) - s_3(x, \Delta_n, t) &= x(t) - x_i(1 - \tau)^2(1 + 2\tau) - \\ &- x_{i+1}\tau^2(3 - 2\tau) - h_{i+1/2}\tau(1 - \tau)(m_i(1 - \tau) - m_{i+1}\tau) = \\ &= x(t) - x_i(1 - \tau)^2(1 + 2\tau) - x_{i+1}\tau^2(3 - 2\tau) - x'_i h_{i+1/2}\tau(1 - \tau)^2 + \\ &+ x'_{i+1} h_{i+1/2}\tau^2(1 - \tau) + (x'_i - m_i)h_{i+1/2}\tau(1 - \tau)^2 - (x'_{i+1} - m_{i+1})h_{i+1/2}(1 - \tau)\tau^2. \end{aligned}$$

Используя формулу Тейлора и тот факт, что (см.[7] стр.110)

$$|x'_i - m_i| \leq \frac{1}{24}h_n^3 x_i^{(4)} + (h_n^4),$$

получаем

$$\begin{aligned} |x(t) - s_3(x, \Delta_n, t)| &\leq \frac{1}{24}h_{i+1/2}^4 |x_i^{(4)}| (1 - \tau)^2 \tau^2 + \\ &+ \frac{1}{24}h_{i+1/2} h_n^3 |x_i^{(4)}| (1 - \tau)^2 \tau + \frac{1}{24}h_n^3 h_{i+1/2} |x_i^{(4)}| (1 - \tau)\tau^2 + (h_n^5) \leq \\ &\leq \frac{1}{24}h_n^4 |x_i^{(4)}| (1 - \tau)\tau(\tau(1 - \tau) + 1) + (h_n^5). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\Gamma(t) - s_3(\Gamma, \Delta_n, t)| \leq \frac{1}{24}h_n^4 |x_i^{(4)}| (1 - \tau)\tau(\tau(1 - \tau) + 1) + (h_n^5).$$

Тогда, если  $\xi = (\zeta - t_i)/h_{i+1/2}$ , то из

$$\Gamma(\zeta) - s_3(\Gamma, \Delta_n, t) = \Gamma(t) - s_3(\Gamma, \Delta_n, t) + \Gamma(\zeta) - \Gamma(t)$$

и того, что

$$\Gamma(\zeta) - \Gamma(t) = \Gamma'_i h_{i+1/2}(\tau - \xi) + (h_{i+1/2}^2(\tau - \xi)) \quad (2.26)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(\zeta) - s_3(\Gamma, \Delta_n, t) &\leq \frac{1}{24}h_n^4 |x_i^{(4)}| (1 - \tau)\tau(\tau(1 - \tau) + 1) + \\ &+ \Gamma'_i h_{i+1/2}(\tau - \xi) + (h_{i+1/2}^2(\tau - \xi)) + (h_n^5). \end{aligned} \quad (2.27)$$

С другой стороны, из неравенства (1.106)

$$|x - s_3(x, \Delta_n)| \leq \frac{5}{384}h_n^4 \|x^{(4)}\|_C$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}, s_3(\mathbf{\Gamma}, \Delta_n)) &\leq \\ &\leq \sqrt{\|x - s_3(x, \Delta_n)\|_C^2 + \|y - s_3(y, \Delta_n)\|_C^2} \leq \frac{5}{384} h_n^4 \sqrt{\|x^{(4)}\|_C^2 + \|y^{(4)}\|_C^2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.27) получаем

$$(\tau - \xi) = (h_n^3)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{\Gamma}(\zeta) - s_3(\mathbf{\Gamma}, \Delta_n, t) \leq \frac{1}{24} h_n^4 \mathbf{\Gamma}_i^{(4)} \tau (1 - \tau) (\tau (1 - \tau) + 1) + \mathbf{\Gamma}'_i h_n (\tau - \xi) + (h_n^5).$$

Таким образом, если при  $n \rightarrow \infty$  будет  $h_n \rightarrow 0$ , то при достаточно больших  $n$  для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  будет выполняться соотношение

$$\min_{\zeta} |\mathbf{\Gamma}(\zeta) - s_3(\mathbf{\Gamma}, \Delta_n, t)|^2 \leq \quad (2.28)$$

$$\leq \min_{\xi} \left| \frac{1}{24} h_n^4 \mathbf{\Gamma}_i^{(4)} \tau (1 - \tau) (\tau (1 - \tau) + 1) + \mathbf{\Gamma}'_i h_n (\tau - \xi) \right|^2 (1 + (h_n)).$$

Чтобы решить задачу нахождения минимума вначале приведем вспомогательное утверждение.

**Лемма 2.1.2** Если  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  – скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  – векторное произведение их, то

$$\min_{\tau \in [0,1]} (\mathbf{a} - \tau \mathbf{b})^2 = \frac{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|^2}.$$

**Доказательство.** Функция  $\psi(\tau) = (\mathbf{a} - \tau \mathbf{b})^2$  – гладкая и выпукла вниз. У нее единственный экстремум – минимум. Причем необходимое условие экстремума совпадает с достаточным и имеет вид

$$\psi'(\tau) = ((\mathbf{a} - \tau \mathbf{b})^2)' = (|\mathbf{a}|^2 - 2\tau(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \tau^2 |\mathbf{b}|^2)' = 2\tau |\mathbf{b}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0.$$

Таким образом, экстремальное значение аргумента  $\tau$  будет вычисляться по формуле

$$\tau_0 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) / |\mathbf{b}|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\min_{\tau \in [0,1]} (\mathbf{a} - \tau \mathbf{b})^2 = \psi(\tau_0) = \left| \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} \right|^2 =$$

$$= |\mathbf{a}|^2 - 2 \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^4} |\mathbf{b}|^2 = \frac{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}.$$

Теперь, из определений векторного и скалярного произведений имеем

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2} &= \frac{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \varphi}{|\mathbf{b}|^2} = \\ &= \frac{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \varphi}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|^2}, \end{aligned}$$

где  $\varphi = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ .

Из этой леммы вытекает, что выражение, стоящее в правой части равенства (2.28) достигает своего минимума по  $\xi$  при

$$\tau - \xi = \frac{1}{24} h_n^4 \tau (1 - \tau) (\tau (1 - \tau) + 1) \frac{(\mathbf{\Gamma}'_i \cdot \mathbf{\Gamma}_i^{(4)})}{|\mathbf{\Gamma}'_i|^2}$$

т.е. при

$$\xi = \tau - \frac{1}{24} h_n^4 \tau (1 - \tau) (\tau (1 - \tau) + 1) \frac{(\mathbf{\Gamma}'_i \cdot \mathbf{\Gamma}_i^{(4)})}{|\mathbf{\Gamma}'_i|^2}.$$

Подставляя полученное значение в (2.28) и используя лемму 2.1.2, а также то, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{\Gamma}^{(4)}(t)|^2 |\mathbf{\Gamma}'(t)|^2 - (\mathbf{\Gamma}^{(4)}(t) \cdot \mathbf{\Gamma}'(t))^2 &= ((x^{(4)}(t))^2 + (y^{(4)}(t))^2) ((x'(t) + \\ y'(t)) - (x'(t)x^{(4)}(t) + y'(t)y^{(4)}(t)))^2 &= (x'(t))^2 (x^{(4)}(t))^2 + (y'(t))^2 (x^{(4)}(t))^2 + \\ &+ (x'(t))^2 (y^{(4)}(t))^2 + (y'(t))^2 (y^{(4)}(t))^2 - (x'(t))^2 (x^{(4)}(t))^2 - \\ &- 2x'(t)y'(t)x^{(4)}(t)y^{(4)}(t) - (y'(t))^2 (y^{(4)}(t))^2 = \\ &= (y'(t))^2 (x^{(4)}(t))^2 - 2x'(t)y'(t)x^{(4)}(t)y^{(4)}(t) + (x'(t))^2 (y^{(4)}(t))^2 = \\ &= (x'(t)y^{(4)}(t) - y'(t)x^{(4)}(t))^2, \end{aligned}$$

получаем

$$\min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\mathbf{\Gamma}(\zeta) - s_3(\mathbf{\Gamma}, \Delta_n, t)| \leq \frac{1}{24} h_n^4 \tau (1 - \tau) (\tau (1 - \tau) + 1) F_i (1 + (h_n)).$$

Легко видеть, что

$$\max_{\zeta \in [t_i, t_{i+1}]} \min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\mathbf{\Gamma}(\zeta) - s_3(\mathbf{\Gamma}, \Delta_n, t)| \leq$$

$$\leq \frac{h_n^4}{24} \cdot \frac{5}{16} |F_i| (1 + (h_n)) = \frac{5 h_n^4}{384} |F_i| + O(h_n^5).$$

Аналогично устанавливается, что на промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$

$$\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \min_{\zeta \in [t_i, t_{i+1}]} |\Gamma(\zeta) - s_3(\Gamma, \Delta_n, t)| \leq \frac{5 h_n^4}{384} |F_i| + O(h_n^5).$$

Отсюда и из определения хаусдорфова расстояния имеем

$$R(\Gamma, s_3(\Gamma, \Delta_n)) \leq \frac{5}{384} h_n^4 \|F\|_C (1 + o(1)),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Аналогичный результат имеет место и для сплайнов по опорным точкам не замкнутого контура.

## 2.2 Способы задания информативных параметров кривой

Ложка – есть, чашка – есть  
 чистая рубашка есть.  
 Вот пистолет уложенный,  
 а вот бочонок рома.  
 Он такой рассеянный,  
 он все оставит дома.  
*Из песни*

Способ описания кривой существенно зависит от того, в каком виде поступает информация об исходном контуре. Если информация о контуре (о кривой) снимается с помощью измерительной головки или с помощью других аналогичных устройств, то она предоставляется в виде набора (как правило небольшого) опорных точек с указанием особых точек (точек излома и пр.). Благодаря этой информации мы можем выделять гладкие участки траектории. В этом случае на каждом из гладких участков кривую естественно аппроксимировать параметрическим сплайном с узлами в опорных точках, т.е. на этих участках наиболее приемлемы сплайн – методы, описанные в предыдущем параграфе.

Если информация поступает в виде отклонений от геометрического центра до искомого контура по разным направлениям (см. рис. 2.8), то контур естественно восстанавливать с помощью полярных сплайнов, приведенных в параграфе 2.3.

В подавляющем большинстве случаев информация о контуре снимается с использованием копира, сканера, с видеотерминала и пр. В этом случае нам предоставляется большой набор (как правило, не менее 1000 – 20000) точек  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), если контур плоский, и точек  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), если контур пространственный. Как правило, эти точки предоставляются нам с некоторыми случайными погрешностями. Для восстановления контуров в этом случае мы будем использовать параметрические почти интерполяционные в среднем сплайны. Они, также, как и сплайны, исследованные нами в первой главе, используют информацию о средних значениях функции на интервалах. Метод построения этих значений мы и опишем в этом параграфе.

Пусть, вначале, контур плоский и информация о нем нам представлена в виде набора точек  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), и  $M_0 = M_N$ , если контур замкнут. Используя один из алгоритмов, описанных в параграфах 1.3 или 1.5, сглаживаем данные. Для сокращения записи, сглажен-



Рис. 2.4:

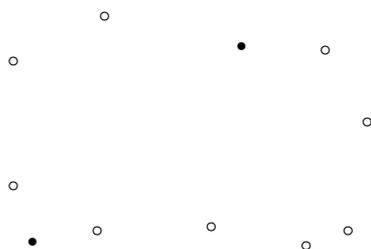


Рис. 2.5:

ные данные снова будем обозначать через  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) (после того, как данные сглажены, мы можем считать их исходными и гладкими).

Теперь нам необходимо выделить гладкие участки контура.

Даже интуитивно понятно, что точки изломов – это те точки, в которых кривизна кривой очень большая. Опишем один из алгоритмов поиска точек изломов, базирующихся на этой идее.

Пусть даны точки  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), описывающие кусочно - гладкий контур. Будем считать этот контур замкнутым, иначе проведем пополнение имеющихся точек, как это было указано в параграфе 1.5. Через

$$\sigma_{i+1/2} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1)$$

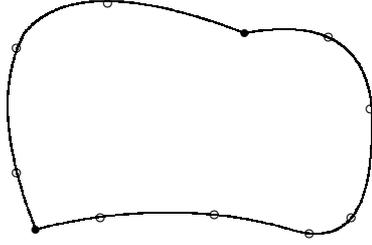


Рис. 2.6:

обозначим длину отрезка прямой, соединяющей точки  $M_i$  и  $M_{i+1}$ . Введем разбиение

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \sigma_{1/2}, \quad t_2 = \sigma_{1/2} + \sigma_{3/2}, \quad t_3 = \sigma_{1/2} + \sigma_{3/2} + \sigma_{5/2}, \dots,$$

$$t_n = \sigma_{1/2} + \dots + \sigma_{n-1/2}.$$

Найдем теперь дискретный аналог кривизны в каждой точке

$$k_i = \frac{\delta^2 y_i \cdot \delta x_{i+1/2} - \delta^2 x_i \cdot \delta y_{i+1/2}}{\sigma_{i+1/2}^3},$$

где

$$\delta x_{i+1/2} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\sigma_{i+1/2}} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\delta^2 x_i = \frac{2}{\sigma_{i+1/2} + \sigma_{i-1/2}} (\delta x_{i+1/2} - \delta x_{i-1/2}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

и

$$\delta y_{i+1/2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\sigma_{i+1/2}} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\delta^2 y_i = \frac{2}{\sigma_{i+1/2} + \sigma_{i-1/2}} (\delta y_{i+1/2} - \delta y_{i-1/2}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Выберем число  $m$  существенно меньше, чем  $n$  и все множество точек  $\{M_i\}_{i=0}^n$  разобьем на  $N$  множеств по  $m$  точек, кроме, может быть, одного. Ясно, что  $N = [n/m]$ , как обычно, здесь  $[a]$  — целая часть числа  $a$ .

Для каждого из множеств  $\{M_i\}_{i=m_j}^{m(j+1)}$  определим прямую  $z = a_j\tau + b_j$ , так, чтобы

$$\Phi(a_j, b_j) = \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} (k_i - (a_j\tau_i + b_j))^2 \rightarrow \min.$$

Выпишем необходимые и достаточные условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_j} = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_j \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i^2 + b_j \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i = \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} k_i \tau_i \\ a_j \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i + b_j m = \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} k_i \end{cases}.$$

Решая полученную систему с помощью правила Крамера, сразу получаем требуемые значения коэффициентов прямой:

$$a_j = \frac{\Delta_{a_j}}{\Delta_j} \quad b_j = \frac{\Delta_{b_j}}{\Delta_j},$$

где

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i^2 & \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i \\ \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i & m \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{a_j} = \begin{vmatrix} \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} k_i \tau_i & \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i \\ \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} k_i & m \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{b_j} = \begin{vmatrix} \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i^2 & \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i k_i \\ \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} \tau_i & \sum_{i=m_j}^{m(j+1)} k_i \end{vmatrix}.$$

Теперь для каждого множества  $\{M_i\}_{i=m_j}^{m(j+1)}$  определим точку, значение кривизны в которой наиболее удалено от этой прямой, т.е. найдем тот номер  $i_j$ , для которого будет выполняться условие

$$d_{i_j} = \max\{d_i \mid i = m_j, \dots, m(j+1)\},$$

где

$$d_i = \frac{|k_i - (a_j \tau_i + b_j)|}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}}.$$

Если скачок кривизны между двумя соседними (к найденной точке) точками большой, то найденная точка является точкой излома. Так, если

$$|k_{i_j+1} - k_{i_j-1}| > (\sigma_{i+1/2} + \sigma_{i+1/2})^2,$$

то точка  $M_{i_j}$  – точка излома.

Пусть, теперь даны точки  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = N_k, \dots, N_{k+1}$ ), соответствующие гладкому участку кривой. Мы можем их снова перенумеровать, начиная с точки  $M_{N_k}$ . Так что, не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что даны точки  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, N_0$ ), где  $N_0 = N_{k+1} - N_k$ . Построим развертку этих точек по координатам, т.е. вычислим длины отрезков

$$\sigma_{i-1/2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (i = 1, 2, \dots, N_0)$$

и введем разбиение

$$0 = \vartheta_0 \leq \vartheta_1 \leq \dots \leq \vartheta_{N_0} = T,$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= 0, \quad \vartheta_1 = \sigma_{1/2}, \quad \vartheta_2 = \sigma_{1/2} + \sigma_{3/2}, \dots, \\ \dots \vartheta_{N_0} &= \sigma_{1/2} + \sigma_{3/2} + \dots + \sigma_{N_0-1/2}. \end{aligned}$$

Выберем число  $n$  существенно меньшим, чем  $N_0$  и рассмотрим разбиение отрезка  $[0, T]$  на  $n$  равных частей точками (см. рис.2.7)

$$t = ih, \quad h = T/n \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Рассмотрим теперь те точки  $\vartheta_i$ , которые лежат в промежутке  $[ih, (i+1)h]$ , и вычислим интеграл

$$x_i^{**} = \frac{1}{\vartheta_{i_1} - \vartheta_{i_0}} \int_{\vartheta_{i_0}}^{\vartheta_{i_1}} l(x, t) dt,$$

где  $l(x, t)$  – ломаная, соединяющая последовательно точки  $(\vartheta_\nu, x_\nu)$  ( $\nu = i_0, \dots, i_1$ ). Эту величину мы и будем принимать за среднее значение функции  $x(t)$  на промежутке  $[ih, (i+1)h]$ .

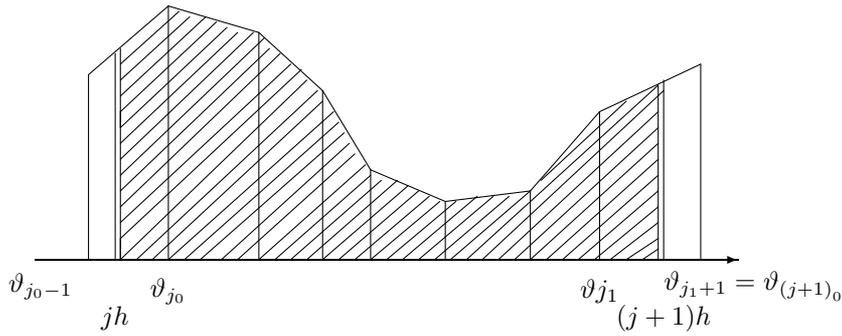


Рис. 2.7:

Вычислив приведенный выше интеграл, получаем

$$x_i^{**} = \frac{1}{2\theta} \sum_{\nu=i_0}^{i_1-1} (x_\nu + x_{\nu+1}) \sigma_{\nu+1/2},$$

где

$$\theta = \sum_{\nu=i_0}^{i_1-1} \sigma_{\nu+1/2}.$$

Аналогично вычисляются средние  $y_i^{**}$ .

**Замечание 2.2.1** Некоторые инженерные задачи приводят к необходимости выяснять интегральные характеристики кривой, определяемой опорными точками. В таком случае будем поступать следующим образом. По имеющимся опорным точкам построим параметрический интерполяционный сплайн  $s_3(\Gamma, \Delta_n, t)$  (см. параграф 2.1) и вычислим значения этого сплайна в большом количестве точек, после чего используем изложенный в этом параграфе алгоритм.

Таким образом, в дальнейшем будем считать, что средние значения функций  $x(t)$  и  $y(t)$  на интервалах вида  $[ih, (i+1)h]$  всегда известны.

## 2.3 Полярные сплайны

Полюс – от греч. *πόλος*, буквально – ось.

БСЭ т.34 с.94

Целесообразность использования тех или иных видов сплайнов обусловлена видом исходной информации. В этом параграфе рассмотрен один вид сплайнов, восстанавливающих кривую, заданную в полярной системе координат. В частности, такого рода задачи возникают в том случае, когда измерения контура проводятся по дуге окружности, описывающей данный контур (при измерении обечаек, кулачков и пр. ).

Пусть контур детали описывается кривой  $r = r(\varphi)$ , заданной опорными точками (см. рис. 2.8)  $(\varphi_i, r_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), причем

$$0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$$

и  $r_i \geq 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),  $r_0 = r_n$  и

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Далее мы рассмотрим случай, когда  $\varphi_i = \pi i/n$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n$ ) и при этом будем считать, что для всех  $i \in Z$ ,  $r_i = r_{i+2n}$ .

Рассмотрим сплайны

$$\rho_2(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{2n} (r_i - \frac{1}{8}\Delta^2 r_i)_{2,\pi/n}(\varphi - \varphi_i) \quad (2.29)$$

и

$$\rho_3(r, \varphi) = \sum_{i=-1}^{2n} (r_i - \frac{1}{6}\Delta^2 r_i)_{3,\pi/n}(\varphi - \varphi_i). \quad (2.30)$$

Как уже отмечалось в параграфе 1.7, для каждого значения  $\varphi$  лишь три слагаемых в (2.29) и четыре – в (2.30) отличны от нуля.

Точнее, если  $\varphi \in [(i - 0.5)\pi/n, (i + 0.5)\pi/n]$ , то

$$\begin{aligned} \rho_2(r, \varphi) &= (r_{i-1} - \frac{1}{8}\Delta^2 r_{i-1})_{2,\pi/n}(\varphi - \varphi_{i-1}) + \\ &+ (r_i - \frac{1}{8}\Delta^2 r_i)_{2,\pi/n}(\varphi - \varphi_i) + (r_{i+1} - \frac{1}{8}\Delta^2 r_{i+1})_{2,\pi/n}(\varphi - \varphi_{i+1}), \end{aligned}$$

и для  $\varphi \in [i\pi/n, (i + 1)\pi/n]$

$$\begin{aligned} \rho_3(r, \varphi) &= (r_{i-1} - \frac{1}{6}\Delta^2 r_{i-1})_{3,\pi/n}(\varphi - \varphi_{i-1}) + \\ &+ (r_i - \frac{1}{6}\Delta^2 r_i)_{3,\pi/n}(\varphi - \varphi_i) + (r_{i+1} - \frac{1}{6}\Delta^2 r_{i+1})_{3,\pi/n}(\varphi - \varphi_{i+1}) + \\ &+ (r_{i+2} - \frac{1}{6}\Delta^2 r_{i+2})_{3,\pi/n}(\varphi - \varphi_{i+2}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

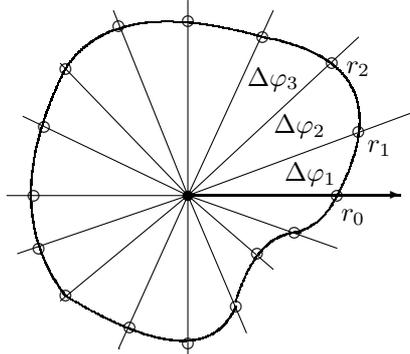


Рис. 2.8:

Кроме того, из (1.127) и (1.108) следует, что для всех целых  $i$  выполняются равенства

$$\rho_2(r, \varphi_i) = r_i - \frac{1}{64} \Delta^4 r_i$$

и

$$\rho_3(r, \varphi_i) = r_i - \frac{1}{36} \Delta^4 r_i.$$

Таким образом, сплайны  $\rho_\nu(r, \varphi)$  ( $\nu = 2, 3$ ) почти интерполируют (с точностью до  $(\Delta^4 r_i)$ ) исходные данные  $(\varphi_i, r_i)$  ( $i \in Z$ ). Это обуславливает многие свойства сплайнов  $\rho_\nu(r, \varphi)$  ( $\nu = 2, 3$ ). Аналоги результатов теорем 1.8.2 и 1.9.1 верны и для полярных сплайнов. Например, из результатов (см. (1.130)) следует, что если  $r(\varphi)$  – трижды непрерывно – дифференцируемая  $2\pi$ -периодическая функция, то

$$\|r - \rho_2(r)\|_C \leq \frac{7}{96} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \|r^{(3)}\|_C, \quad (2.32)$$

и

$$\|r - \rho_3(r)\|_C \leq \frac{185}{3456} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \|r^{(3)}\|_C. \quad (2.33)$$

Если  $2\pi$ -периодическая функция  $r(\varphi)$  четырежды непрерывно – дифференцируемая на всей оси, то из (1.111)

$$\|r - \rho_3(r)\|_C \leq \frac{79}{1152} \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \|r^{(4)}\|_C, \quad (2.34)$$

Кроме того,

$$\|r' - \rho'_2(r)\|_C \leq \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \|r^{(3)}\|_C, \quad (2.35)$$

$$\|r' - \rho'_3(r)\|_C \leq \frac{35}{1152} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \|r^{(4)}\|_C. \quad (2.36)$$

При этом константы в неравенствах (2.32) – (2.36) уменьшить нельзя.

Результаты такого рода называют априорными или гарантированно точными оценками восстановления гладких кривых. Они показывают, что сплайны  $\rho_2(r, \varphi)$  и  $\rho_3(r, \varphi)$  восстанавливают с высокой точностью не только сами гладкие кривые, но и их производные.

Из результатов параграфов 1.8 и 1.9 легко вывести асимптотические оценки погрешностей восстановления гладких кривых полярными сплайнами.

Пусть  $r(\varphi)$  есть трижды непрерывно - дифференцируемая на всей оси  $2\pi$ -периодическая функция. Тогда для  $\varphi \in [(i-0.5)\pi/n, (i+0.5)\pi/n]$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $\varphi$  и по  $i$  выполняются соотношения

$$r(\varphi) - \rho_2(r, \varphi) = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 (1 - \tau^2) \tau r^{(3)}(t) + (n^{-4}), \quad (2.37)$$

$$r'(\varphi) - \rho'_2(r, \varphi) = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 (1 - 3\tau^2) r^{(3)}(t) + (n^{-3}), \quad (2.38)$$

где  $\tau = (\varphi - \varphi_i)/(\pi/n)$ .

Если же  $r(\varphi)$  есть четырежды непрерывно - дифференцируемая  $2\pi$ -периодическая функция, то для  $\varphi \in [(i-1)\pi/n, i\pi/n]$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $\varphi$  и по  $i$  выполняются соотношения

$$r(\varphi) - \rho_3(r, \varphi) = \frac{1}{48} \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 (1 + 2\tau(1 - \tau^2)) r^{(4)}(t) + (n^{-5}), \quad (2.39)$$

$$r'(\varphi) - \rho'_3(r, \varphi) = \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \tau(1 - \tau)(2\tau - 1) r^{(4)}(t) + (n^{-4}), \quad (2.40)$$

$$r''(\varphi) - \rho''_3(r, \varphi) = \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 (6\tau^2 - 6\tau + 1) r^{(4)}(t) + (n^{-3}), \quad (2.41)$$

где  $\tau = (\varphi - \varphi_i)/(\pi/n)$ .

Асимптотические равенства (2.37) – (2.41) так же, как и неравенства (2.32) – (2.36), говорят о высокой точности восстановления гладких замкнутых контуров полярными сплайнами. Можно показать, что для

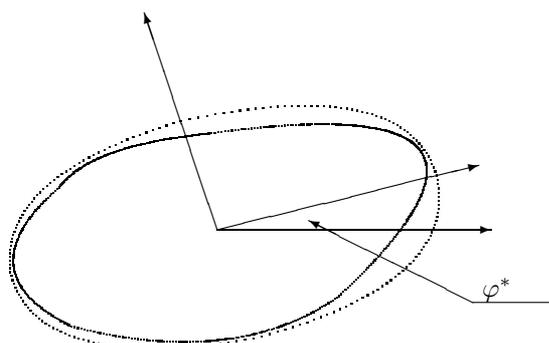


Рис. 2.9:

выполнения соотношений (2.37) – (2.38) в окрестности точки  $\varphi$  достаточно чтобы функция  $r(\varphi)$  была трижды дифференцируема в окрестности точки  $\varphi$ . Аналогичное замечание справедливо и для соотношений (2.39) – (2.41).

Кроме хороших аппроксимационных свойств полярные сплайны удобны для определения характеристик детали, ограниченной контуром  $r(\varphi)$ , таких, как: площадь фигуры, ограниченной данным контуром, координаты центра масс этой фигуры, углы овальности, углы осей биений и пр. Такого рода исследования необходимы при разработке и проектировании различных механических устройств, в которых очень важно гладкое описание контура детали, позволяющее избежать ударных нагрузок и пр. Это очень важно при контроле качества и обработке поверхности обечаек, при производстве кулачковых механизмов.

Введем обозначения величин, которые будут исследованы в этом параграфе.

Пусть

$S(r)$  – площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром  $r(\varphi)$ ;

$l(r)$  – длина контура  $r(\varphi)$ ;

$x_0(r)$ ,  $y_0(r)$  – координаты центра масс фигуры, ограниченной контуром  $r(\varphi)$ .

Под углом овальности  $\varphi^*$  будем понимать угол между полярной осью и ближайшей от полярной оси в положительном направлении оси наименьшего овала, описанного вокруг данного контура, или, что то же, угол между полярной осью и ближайшей в положительном направлении осью описанного прямоугольника с минимальной площадью (см. рис.2.9 и 2.10).

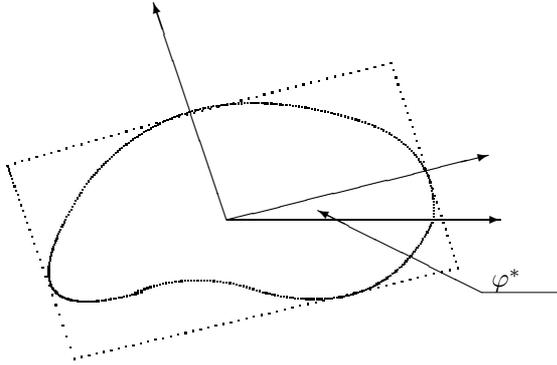


Рис. 2.10:

Аналогично, под углом биения  $\tilde{\varphi}$  будем понимать угол между полярной осью и ближайшим радиус – вектором вершины правильного треугольника, описанного вокруг контура  $r(\varphi)$  с минимальной площадью (см. рис.2.11).

Имеет место следующее утверждение:

**Теорема 2.3.1** Если  $r = r(\varphi)$  имеет не менее пяти непрерывных производных при  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , то площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho_2(r, \varphi)$  будет равна

$$S(\rho_2(r)) = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=-1}^{2n} r_i \left( r_i - \frac{9}{380} \Delta^4 r_i + \frac{11}{3840} \Delta^6 r_i \right), \quad (2.42)$$

центр масс этой фигуры будет иметь координаты

$$\begin{cases} x_0(\rho_2(r)) = \frac{M_y(\rho_2(r))}{S(\rho_2(r))}, \\ y_0(\rho_2(r)) = \frac{M_x(\rho_2(r))}{S(\rho_2(r))}, \end{cases} \quad (2.43)$$

где

$$\begin{aligned} M_x(\rho_2(r)) = & \frac{\pi}{9n} \sum_{i=-1}^{2n} \left( \frac{1}{512} \sin \frac{\pi i}{n} \left( 8r_i - \frac{1}{8} \Delta^4 r_i \right)^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi(2i+1)}{2n} \left( 2r_i + \Delta^4 r_{i-1/2} - \frac{1}{4} \Delta^2 r_i + \frac{1}{8} \Delta^4 r_i \right)^3 \right) + \frac{A(r)}{n^4}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

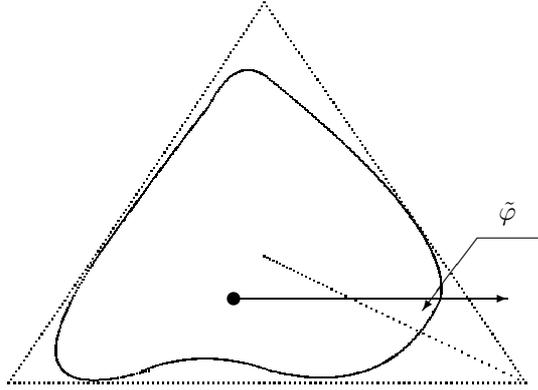


Рис. 2.11:

$$M_y(\rho_2(r)) = \frac{\pi}{9n} \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{1}{512} \cos \frac{\pi i}{n} \left( 8r_i - \frac{1}{8} \Delta^4 r_i \right)^3 + \right. \quad (2.45)$$

$$\left. + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi(2i+1)}{2n} \left( 2r_i + \Delta^4 r_{i-1/2} - \frac{1}{4} \Delta^2 r_i + \frac{1}{8} \Delta^4 r_i \right)^3 \right) + \frac{B(r)}{n^4}.$$

Здесь  $(r)$  и  $(r)$  – некоторые константы, зависящие от  $r(\varphi)$ .

Кроме того, длина линии  $\rho_2(r, \varphi)$  будет равна

$$l(\rho_2(r)) = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\alpha_i + 2\beta_i) + \frac{C(r)}{n^4}, \quad (2.46)$$

где

$$\alpha_i^2 = \frac{1}{64} \left( r_i - \frac{1}{8} \Delta^4 r_i \right)^2 + \frac{n^2}{4\pi^2} \left( 2\Delta r_{i-1/2} + \Delta^2 r_i - \frac{1}{4} \Delta^3 r_{i-1/2} - \frac{1}{8} \Delta^4 r_i \right)^2$$

и

$$\beta_i^2 = \frac{1}{4} \left( 2r_i + \Delta r_{i-1/2} - \frac{1}{4} \Delta^2 r_i + \frac{1}{8} \Delta^4 r_i \right),$$

где  $C(r)$  – некоторая константа, зависящая от  $r(\varphi)$ .

**Теорема 2.3.2** Справедливы равенства для вычисления угла овальности

$$\varphi_i^* = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a_2}{b_2} + \frac{\pi i}{2} \quad (i = 0, 1), \quad (2.47)$$

и угла биения

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{1}{3} \operatorname{arccctg} \frac{a_3}{b_3} + \frac{\pi i}{3} \quad (i = 0, 1, 2), \quad (2.48)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  – коэффициенты Фурье сплайна  $\rho_2(r^*, \varphi)$ .  
(Здесь

$$r^*(\varphi) = \sqrt{2r^2(\varphi) - 2r(\varphi)x_0 \cos \varphi - 2r(\varphi)y_0 \sin \varphi + x_0^2 + y_0^2}, \quad (2.49)$$

вычисляемые по формулам

$$a_k = - \left( \frac{2n}{k\pi} \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^3 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi k}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left( r_i - \frac{1}{8} \Delta^2 r_i \right) \cos \frac{\pi i k}{n}, \quad (2.50)$$

$$b_k = - \left( \frac{2n}{k\pi} \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^3 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi k}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left( r_i - \frac{1}{8} \Delta^2 r_i \right) \sin \frac{\pi i k}{n}. \quad (2.51)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для  $\rho_3(r, \varphi)$ .

**Доказательство теоремы 2.3.1.** Так как описание контура мы рассматриваем в полярной системе координат, причем полюс находится внутри контура, то площадь фигуры, ограниченной контуром  $\rho(\varphi)$ , будет вычисляться по формуле

$$S(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Таким образом, если

$$\rho_2(C, \varphi) = \sum_{i=-1}^{2n} C_i B_{2, \pi/n}(\varphi - \varphi_i), \quad (2.52)$$

то

$$S(\rho_2()) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=-1}^{2n} C_i B_{2, \pi/n}(\varphi - \varphi_i) \right)^2 d\varphi.$$

Кроме того из (1.86) и вида параболического В – сплайна следует, что для  $\varphi \in [(i - 0.5)\pi/n, (i + 0.5)\pi/n]$  выполняется равенство

$$\rho_2^2(C, \varphi) = \frac{1}{4} C_{i-1}^2 \left( \tau - \frac{1}{4} \right)^4 + C_i^2 \left( \frac{3}{4} - \tau^2 \right)^2 + \frac{1}{4} C_{i+1}^2 \left( \tau + \frac{1}{2} \right)^4 +$$

$$\begin{aligned}
& +C_i C_{i-1} \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{3}{4} - \tau^2 \right) + \\
& +C_i C_{i+1} \left( \tau + \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{3}{4} - \tau^2 \right) + \frac{1}{2} C_{i-1} C_{i+1} \left( \tau^2 - \frac{1}{4} \right)^2,
\end{aligned}$$

где  $\tau = (\varphi - \varphi_i)/(\pi/n)$ .

Интегрируя по частям  $\rho_2^2(C, \varphi)$  на данном промежутке, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{(i-0.5)\pi/n}^{(i+0.5)\pi/n} \rho_2^2(C, \varphi) d\varphi = \\
& = \frac{\pi}{60n} (3C_{i-1}^2 + 13C_{i-1}C_i + 27C_{i-1}^2 + 27C_i^2 + 13C_iC_{i+1} + 3C_{i+1}^2).
\end{aligned}$$

Просуммировав эти равенства по всем  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , после соответствующей перегруппировки слагаемых, получаем

$$\begin{aligned}
S(\rho_2()) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_2^2(C, \varphi) d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{240n} \sum_{i=1}^{2n} C_i (C_{i-2} + 26C_{i-1} + 66C_i + 26C_{i+1} + C_{i+2}) = \\
&= \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{2n} C_i \left( C_i + \frac{1}{4} \Delta^2 C_i + \frac{1}{120} \Delta^4 C_i \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, отсюда и из определения сплайнов  $\rho_2(r, \varphi)$  получаем соотношение (2.42).

Если  $D$  – область, ограниченная контуром  $r = r(\varphi)$ , то

$$M_x = \int_D \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$$

и

$$M_x(\rho_2(r)) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \rho_2^3(r, \varphi) \sin \varphi d\varphi,$$

а также

$$M_y = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \quad M_y(\rho_2(r)) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \rho_2^3(r, \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

Пользуясь для вычисления полученных интегралов формулой Симпсона для  $2\pi$ -периодических функций

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \frac{2\pi}{3n} \sum_{i=-1}^{2n} \left( f(\varphi_i) + 2f\left(\varphi_i + \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)\right) \right) + \frac{C(f)}{4},$$

получаем равенства (2.44) и (2.45).

Для завершения доказательства соотношения (2.43) остается заметить, что координаты центра тяжести плоской фигуры определяются равенствами

$$x_0 = \frac{M_y}{S} \quad y_0 = \frac{M_x}{S}.$$

Для доказательства (2.46) учтем, что

$$l(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi,$$

т.е.

$$l(\rho_2(r)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho_2'(r, \varphi))^2 + (\rho_2(r, \varphi))^2} d\varphi.$$

Так как для  $\varphi \in [(i-0.5)\pi/n, (i+0.5)\pi/n]$

$$\rho_2'(C, \varphi) = \frac{n}{\pi}(C_{i-1}(\tau - 0.5) + C_i\tau + C_{i+1}(\tau + 0.5)),$$

то

$$\rho_2(C, \pi i/n) = \frac{1}{8}(C_{i-1} + 6C_i + C_{i+1}),$$

$$\rho_2(C, \pi(i+0.5)/n) = \frac{1}{2}(C_i + C_{i+1}),$$

$$\rho_2'(C, \pi i/n) = \frac{n}{2\pi}(C_{i+1} - C_{i-1}),$$

$$\rho_2'(C, \pi(i+0.5)/n) = \frac{n}{\pi}(C_{i+1} - C_i).$$

Теперь учтем, что

$$C_i = r_i - \frac{1}{8}\Delta^2 r_i.$$

Поэтому

$$C_{i-1} + 6C_i + C_{i+1} = \left(r_{i+1} - \frac{1}{8}\Delta^2 r_{i+1}\right) + 6\left(r_i - \frac{1}{8}\Delta^2 r_i\right) + \left(r_{i-1} - \frac{1}{8}\Delta^2 r_{i-1}\right) = 8r_i - \frac{1}{8}\Delta^4 r_i$$

и

$$\begin{aligned}
C_i + C_{i+1} &= 2r_i + \Delta r_{i-1/2} - \frac{1}{4}\Delta^2 r_i - \frac{1}{8}\Delta^4 r_i, \\
C_{i+1} - C_i &= \Delta r_{i-1/2} - \frac{1}{8}\Delta^3 r_{i-1/2}, \\
C_{i+1} - C_{i-1} &= 2\Delta r_{i-1/2} - \frac{1}{4}\Delta^3 r_{i-1/2} + \Delta^2 r_i - \frac{1}{8}\Delta^4 r_i.
\end{aligned}$$

Используя эти соотношения в формуле Симпсона, получим соотношение (2.46), а с ним и утверждение теоремы 2.3.1.

**Доказательство теоремы 2.3.2.** Вначале введем замену переменных, переместив полюс в центр масс фигуры. Для этого в качестве исходного контура будем рассматривать кривую

$$r^*(\varphi) = \sqrt{r^2(\varphi) - 2r(\varphi)x_0 \cos \varphi - 2r(\varphi)y_0 \sin \varphi + x_0^2 + y_0^2}.$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
a_k(\rho_2()) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_2(C, \varphi) \cos k\varphi d\varphi, \\
b_k(\rho_2()) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_2(C, \varphi) \sin k\varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

Интегрируя три раза по частям, получаем

$$\begin{aligned}
a_k(\rho_2()) &= \frac{1}{\pi k^3} \int_0^{2\pi} \rho_2^{(3)}(C, \varphi) \sin k\varphi d\varphi = \\
&= \frac{n^3}{\pi^4 k^3} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2} (\Delta^2 C_{i+1} - \Delta^2 C_{i-1}) \sin \frac{\pi i k}{n} = \\
&= \frac{n^3}{\pi^4 k^3} \sum_{i=1}^{2n} C_i \left( \Delta^2 \sin \frac{\pi(i+1)k}{n} - \Delta^2 \sin \frac{\pi(i-1)k}{n} \right) = \\
&\quad - \left( \frac{2n}{k\pi} \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^3 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi k}{2n} \sum_{i=1}^{2n} C_i \cos \frac{\pi i k}{n}.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$b_k(\rho_2()) = - \left( \frac{2n}{k\pi} \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^3 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi k}{2n} \sum_{i=1}^{2n} C_i \sin \frac{\pi i k}{n}.$$

Отсюда сразу получаем равенства (2.50) и (2.51).

Соотношения (2.47) и (2.48) получаются сразу из геометрических соображений.

**Теорема 2.3.3** *Если*

$$\xi_2(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{2n} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{8} \right)^{\nu} \Delta^{2\nu} r_i \right) B_{2, \pi/n}(\varphi - \varphi_i)$$

– интерполяционный параболический полярный сплайн (см. параграф 1.9), то

$$a_k(\xi_2(r)) = \left( \frac{2n}{k\pi} \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^3 \frac{2 \cos(\pi k/(2n))}{\pi(2 + \sin^2(\pi k/(2n)))} \sum_{i=1}^{2n} r_i \cos \frac{\pi i k}{n},$$

$$b_k(\xi_2(r)) = \left( \frac{2n}{k\pi} \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^3 \frac{2 \cos(\pi k/(2n))}{\pi(2 + \sin^2(\pi k/(2n)))} \sum_{i=1}^{2n} r_i \sin \frac{\pi i k}{n}.$$

**Доказательство.** Из того, что

$$\Delta^{2\nu} \cos \frac{\pi i k}{n} = - \left( 2 \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^{2\nu} \cos \frac{\pi i k}{n}$$

и доказательства предыдущей теоремы, имеем

$$\begin{aligned} a_k(\xi_2(r)) &= - \left( \frac{2n}{k\pi} \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^3 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi k}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{8} \right)^{\nu} \Delta^{2\nu} r_i \cos \frac{\pi i k}{n} = \\ &= \left( \frac{2n}{k\pi} \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^3 \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi k}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{8} \right)^{\nu} \left( 2 \sin \frac{\pi k}{2n} \right)^{2\nu} r_i \cos \frac{\pi i k}{n}. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a q^{\nu} = \frac{a}{1-q} \quad |q| < 1,$$

сразу получаем доказываемое предложение.

## 2.4 Сплайны с почти естественной параметризацией

Вас мучает проблема выбора.  
У меня ее нет.  
*Анн и Серж Голом "Анжеллика"*

При работе с геометрическими объектами, например, с кривыми или поверхностями, важно иметь их математическое описание.

Достаточно эффективным методом описания кривых является использование параметрических сплайнов

$$S(\Gamma, t) = (s(x, t), s(y, t)).$$

При этом важной задачей является определение удачного выбора параметра  $t$ . Параметр должен равномерно изменяться при движении точки по кривой и не изменяться при изменении ориентации линии. Таким условиям удовлетворяет естественная параметризация кривой, т.е. когда в качестве параметра выбрана длина дуги кривой отсчитываемая от некоторой фиксированной точки (начала отсчета) до текущей точки на кривой. Однако, построение аппарата приближения, в том числе и сплайна, с естественной параметризацией является достаточно сложной задачей. В связи с этим, при построении сплайнов, описывающих кривые, имеет смысл использовать асимптотический подход, позволяющий сравнительно просто строить сплайны, обладающие свойствами близкими к свойствам кривых с естественной параметризацией, и в то же время достаточно хорошо описывающих данную кривую.

Всюду в дальнейшем функцию

$$S_r(\Gamma, t) = (s_r(x, t), s_r(y, t)), \quad (2.53)$$

где

$$\begin{cases} s_r(x, t) = \sum_{i=1}^{2n} b_i B_{r,h}(t), \\ s_r(y, t) = \sum_{i=1}^{2n} c_i B_{r,h}(t), \end{cases} \quad (2.54)$$

будем называть параметрическим сплайном минимального дефекта порядка  $r$ .

Пусть  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  (где  $x(t)$  и  $y(t)$  – непрерывно – дифференцируемые – периодические функции) есть замкнутая кривая, заданная

в естественной параметризации, т.е. кривая у которой для всех  $t$  выполняется равенство

$$\int_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau = t$$

а, следовательно, и равенство

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1.$$

Положим

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1/2}}^{t_{i+1/2}} x(t) dt \quad (i \in Z), \quad (2.55)$$

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1/2}}^{t_{i+1/2}} y(t) dt \quad (i \in Z), \quad (2.56)$$

где

$$t_i = ih, \quad t_{i+1/2} = ih + \frac{h}{2} \quad (i \in Z).$$

Пусть в (2.54) при  $r = 2$

$$b_i = \tilde{x}_i - \frac{1}{6} \Delta^2 \tilde{x}_i; \quad c_i = \tilde{y}_i - \frac{1}{6} \Delta^2 \tilde{y}_i, \quad (2.57)$$

а при  $r = 3$

$$b_i = \tilde{x}_i - \frac{5}{24} \Delta^2 \tilde{x}_i; \quad c_i = \tilde{y}_i - \frac{5}{24} \Delta^2 \tilde{y}_i. \quad (2.58)$$

Такие сплайны будем обозначать следующим образом

$$s_{r,h}(\Gamma, t) = (s_{r,h}(x, t), s_{r,h}(y, t))$$

и в дальнейшем называть почти интерполяционными в среднем параметрическими сплайнами. Это название обусловлено тем, что для всех  $i$  при  $r = 2$  выполняются равенства

$$\frac{1}{h} \int_{t_{i-1/2}}^{t_{i+1/2}} s_{2,h}(x, t) dt = \tilde{x}_i - \frac{1}{36} \Delta^4 \tilde{x}_i, \quad (2.59)$$

$$\frac{1}{h} \int_{t_{i-1/2}}^{t_{i+1/2}} s_{2,h}(y, t) dt = \tilde{y}_i - \frac{1}{36} \Delta^4 \tilde{y}_i,$$

а при  $r = 3$  – равенства

$$\frac{1}{h} \int_{t_{i-1/2}}^{t_{i+1/2}} s_{3,h}(x, t) dt = \tilde{x}_i - \frac{47}{1152} \Delta^4 \tilde{x}_i - \frac{5}{9216} \Delta^6 \tilde{x}_i, \quad (2.60)$$

$$\frac{1}{h} \int_{t_{i-1/2}}^{t_{i+1/2}} s_{3,h}(y, t) dt = \tilde{y}_i - \frac{47}{1152} \Delta^4 \tilde{y}_i - \frac{5}{9216} \Delta^6 \tilde{y}_i.$$

Как обычно обозначим через  $L_\infty^r(T)$  – множество всех  $r$ -периодических функций  $f(x)$ , у которых  $(r-1)$ -я производная локально абсолютно непрерывна на всей оси и  $f^{(r)} \in L_\infty$ .

Введем еще следующие обозначения

$$k(\mathbf{\Gamma}, t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t), \quad (2.61)$$

$$K_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = s'_{r,h}(x, t)s''_{r,h}(y, t) - s''_{r,h}(x, t)s'_{r,h}(y, t), \quad (2.62)$$

$$I_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = (s'_{r,h}(x, t))^2 + (s'_{r,h}(y, t))^2, \quad (2.63)$$

$$I'_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = s'_{r,h}(x, t)s''_{r,h}(x, t) + s'_{r,h}(y, t)s''_{r,h}(y, t), \quad (2.64)$$

$$v(\mathbf{\Gamma}, t) = x''(t)x'''(t) + y''(t)y'''(t), \quad (2.65)$$

$$u(\mathbf{\Gamma}, t) = x'(t)y^{(4)}(t) - y'(t)x^{(4)}(t), \quad (2.66)$$

$$q(\mathbf{\Gamma}, t) = (x''(t))^2 + (y''(t))^2. \quad (2.67)$$

**Теорема 2.4.1** Пусть замкнутая кривая  $\mathbf{\Gamma} = (x(t), y(t))$ , где  $x(t)$  и  $y(t) \in L_\infty^5(T)$  задана в естественной параметризации. Тогда при  $h \rightarrow 0$  для  $t \in [t_{i-1/2}, t_{i+1/2}]$  равномерно по  $i$  и по  $t$  выполняются соотношения

$$I_{2,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = 1 - h^2 q_i \left( \frac{1}{12} - \tau^2 \right) + O(h^3), \quad (2.68)$$

$$I'_{2,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = h q_i \tau + O(h^2), \quad (2.69)$$

$$K_{2,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = k_i - h^2 \frac{1}{24} k_i'' + O(h^4). \quad (2.70)$$

Кроме того, для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  равномерно по  $i$  и по  $t$  выполняются асимптотические равенства

$$I_{3,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = 1 - h^3 v_i \tau (1 - \tau) \left( \frac{1}{2} - \tau \right) + O(h^4), \quad (2.71)$$

$$I'_{3,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = \frac{3}{2} h^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \tau \right)^2 - \frac{1}{12} \right) + O(h^3), \quad (2.72)$$

$$K_{3,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = k(\mathbf{\Gamma}, t) - h^2 \frac{1}{2} u(t) \left( \left( \frac{1}{2} - \tau \right)^2 - \frac{1}{12} \right) + O(h^3). \quad (2.73)$$

Здесь и далее  $\tau = (t - t_i)/h$ .

**Следствие 2.4.2** Пусть замкнутая кривая  $\Gamma = (x(t), y(t))$ , где  $x(t)$  и  $y(t) \in L_\infty^5(T)$  задана в естественной параметризации и

$$k_{r,h}(\Gamma, t) = \frac{K_{r,h}(\Gamma, t)}{(I_{r,h}(\Gamma, t))^{3/2}}. \quad (2.74)$$

Тогда при  $h \rightarrow 0$  для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  равномерно по  $i$  и по  $t$  выполняется соотношение

$$k_{3,h}(\Gamma, t) = k(\Gamma, t) - \frac{h^2}{2} u_i \left( \frac{\varphi'(\tau)}{3} + 3k(\Gamma, t)h\varphi(\tau) \right) + O(h^4), \quad (2.75)$$

где

$$\varphi(\tau) = (\tau^2 - \tau)(\tau - 0.5),$$

а для  $t \in [t_{i-1/2}, t_{i+1/2}]$  равномерно по  $i$  и по  $t$  – соотношение

$$k_{2,h}(\Gamma, t) = k_i(\Gamma) - \frac{h^2}{2} \left( \frac{k_i''(\Gamma)}{12} - 3k_i(\Gamma)q_i \left( \frac{1}{12} - \tau^2 \right) \right) + O(h^3). \quad (2.76)$$

**Следствие 2.4.3** Пусть замкнутая кривая  $\Gamma = (x(t), y(t))$ , где  $x(t)$  и  $y(t) \in L_\infty^5(T)$  задана в естественной параметризации, тогда при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $i$  и по  $u$  выполняются соотношения

$$\int_0^u \sqrt{(s'_{2,h}(x, t))^2 + (s'_{2,h}(y, t))^2} dt = u + O(h^3), \quad (2.77)$$

$$\int_0^u \sqrt{(s'_{3,h}(x, t))^2 + (s'_{3,h}(y, t))^2} dt = u + O(h^4). \quad (2.78)$$

**Следствие 2.4.4** Пусть замкнутая кривая  $\Gamma = (x(t), y(t))$ , где  $x(t)$  и  $y(t) \in L_\infty^5(T)$  задана в естественной параметризации. Тогда при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $i$  выполняются соотношения

$$I_{2,h}(\Gamma) = \int_{t_{i-1/2}}^{t_{i+1/2}} \sqrt{I_{2,h}(t)} dt = h + O(h^4), \quad (2.79)$$

$$I_{3,h}(\Gamma) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{I_{3,h}(t)} dt = h + O(h^5). \quad (2.80)$$

**Доказательство.** Проведем доказательство утверждений теоремы для  $r = 3$ . Для  $r = 2$  доказательство проводится по той же схеме.

Вначале докажем асимптотическое равенство (2.71). Как уже известно (см. (1.97)), при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  сплайн  $s_{3,h}(x, t)$  можно представить в виде

$$s_{3,h}(x, t) = \frac{b_{i-1} + 4b_i + b_{i+1}}{6} + \frac{b_{i+1} - b_{i-1}}{2h}(t - t_i) + \quad (2.81)$$

$$+ \frac{\Delta^2 b_i}{2h^2}(t - t_i)^2 + \frac{\Delta^3 b_{i+1/2}}{6h^3}(t - t_i)^3,$$

где

$$\Delta^2 b_i = b_{i+1} - 2b_i + b_{i-1}, \quad \Delta^3 b_{i+1/2} = b_{i+2} - 3b_{i+1} + 3b_i - b_{i-1}.$$

Тогда первая и вторая производные для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  будут иметь вид

$$s'_{3,h}(x, t) = \frac{b_{i+1} - b_{i-1}}{2h} + \frac{\Delta^2 b_i}{h^2}(t - t_i) + \frac{\Delta^3 b_{i+1/2}}{2h^3}(t - t_i)^2 \quad (2.82)$$

и

$$s''_{3,h}(x, t) = \frac{\Delta^2 b_i}{h^2} + \frac{\Delta^3 b_{i+1/2}}{h^3}(t - t_i). \quad (2.83)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для  $s_{3,h}(y, t)$ .

Используя разложение функций  $x(t)$  и  $y(t)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $t_i$ , легко убедиться в том, что если  $x(t)$  и  $y(t) \in L^5_\infty(T)$ , то выполняются равенства

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = x_i + \frac{h^2}{24}x''_i + \frac{h^4}{1920}x^{(4)}_i + O(h^5), \\ \tilde{y}_i = y_i + \frac{h^2}{24}y''_i + \frac{h^4}{1920}y^{(4)}_i + O(h^5). \end{cases} \quad (2.84)$$

Используя аналогичные соотношения для  $\tilde{x}_{i+2}, \tilde{x}_{i+1}, \tilde{x}_i, \tilde{x}_{i-1}$  в точке  $t_i$ , получим

$$b_{i+1} - b_{i-1} = 2hx'_i + O(h^6), \quad (2.85)$$

$$\Delta^2 b_i = h^2 x''_i - \frac{h^4}{12} x^{(4)}_i + O(h^5), \quad (2.86)$$

$$\Delta^3 b_{i+1/2} = h^3 x'''_i + \frac{h^4}{2} x^{(4)}_i + O(h^5). \quad (2.87)$$

Поэтому

$$(b_{i+1} - b_{i-1})^2 = 4h^2 (x'_i)^2 + O(h^6), \quad (2.88)$$

$$\Delta^2 b_i (b_{i+1} - b_{i-1}) = 2h^3 x'_i x''_i - \frac{h^5}{6} x'_i x^{(4)}_i + O(h^6), \quad (2.89)$$

$$\Delta^3 b_{i+1/2}(b_{i+1} - b_{i-1}) = 2h^4 x'_i x_i''' + h^5 x'_i x_i^{(4)} + O(h^6). \quad (2.90)$$

Кроме того,

$$(\Delta^2 b_i)^2 = h^4 (x''_i)^2 - \frac{h^6}{6} x''_i x_i^{(4)} + O(h^7), \quad (2.91)$$

$$(\Delta^3 b_{i+1/2})^2 = h^6 (x_i''')^2 + O(h^7), \quad (2.92)$$

$$\Delta^2 b_i \Delta^3 b_{i+1/2} = h^5 x''_i x_i''' + O(h^6). \quad (2.93)$$

Все соотношения (2.84) – (2.93) выполняются равномерно по  $i$ .

Из соотношения (2.82) получаем

$$\begin{aligned} (s'_{3,h}(x, t))^2 &= \frac{1}{4h^2} (b_{i+1} - b_{i-1})^2 + \frac{\tau}{h^2} \Delta^2 b_i (b_{i+1} - b_{i-1}) + \\ &+ \frac{\tau^2}{2h^2} (\Delta^3 b_{i+1/2} (b_{i+1} - b_{i-1}) + 2(\Delta^2 b_i)^2) + \\ &+ \frac{\tau^3}{h^2} (\Delta^3 b_{i+1/2} \Delta^2 b_i) + \frac{\tau^4}{4h^2} (\Delta^3 b_{i+1/2})^2. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Отсюда и из асимптотических равенств (2.84) – (2.93) выводим

$$\begin{aligned} (s'_{3,h}(x, t))^2 &= (x'_i)^2 + \tau h (2x'_i x''_i - \frac{h^2}{6} x'_i x_i^{(4)}) + \\ &+ \tau^2 h^2 ((x''_i)^2 + x'_i x_i''' + \frac{h}{2} x'_i x_i^{(4)}) + \tau^3 h^3 x''_i x_i''' + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Аналогично выводится и асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} (s'_{3,h}(y, t))^2 &= (y'_i)^2 + \tau h (2y'_i y''_i - \frac{h^2}{6} y'_i y_i^{(4)}) + \\ &+ \tau^2 h^2 ((y''_i)^2 + y'_i y_i''' + \frac{h}{2} y'_i y_i^{(4)}) + \tau^3 h^3 y''_i y_i''' + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Следовательно, в силу определения (2.63) для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} I_{3,h}(t) &= (x'_i)^2 + (y'_i)^2 + \tau h \left[ 2(x'_i x''_i + y'_i y''_i) - \frac{h^2}{6} (x'_i x_i^{(4)} + y'_i y_i^{(4)}) \right] + \\ &+ \tau^2 h^2 [(x''_i)^2 + (y''_i)^2 + x'_i x_i''' + y'_i y_i''' + \\ &+ \frac{h}{2} (x'_i x_i^{(4)} + y'_i y_i^{(4)})] + \tau^3 h^3 (x''_i x_i''' + y''_i y_i''') + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Так как кривая задана в естественной параметризации, то для всех  $t \in [0, T]$  будет иметь место тождество (см. (1.13))

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \equiv 1. \quad (2.98)$$

Продифференцировав это тождество, получим равенства (см. (1.15) – (1.16) )

$$x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0, \quad (2.99)$$

$$(x''(t))^2 + (y''(t))^2 + x'(t)x'''(t) + y'(t)y'''(t) = 0 \quad (2.100)$$

и

$$x'(t)x^{(4)}(t) + y'(t)y^{(4)}(t) + 3(x''(t)x'''(t) + y''(t)y'''(t)) = 0. \quad (2.101)$$

Используя соотношения (2.98) – (2.101) в асимптотическом равенстве (2.97), немедленно получаем асимптотическое равенство (2.71).

Перейдем к доказательству утверждения (2.72). Для этого рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} s'_{3,h}(x, t)s''_{3,h}(x, t) &= \frac{1}{2h^3}\Delta^2 b_i(b_{i+1} - b_{i-1}) + \frac{\tau}{2h^3}(2(\Delta^2 b_i)^2 + \\ &+ \Delta^3 b_{i+1/2}(b_{i+1} - b_{i-1})) + \frac{3\tau^2}{2h^3}\Delta^3 b_{i+1/2}\Delta^2 b_i + \frac{\tau^3}{2h^3}(\Delta^3 b_{i+1/2})^2. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Отсюда и из соотношений (2.83) – (2.93) для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  получаем

$$\begin{aligned} s'_{3,h}(x, t)s''_{3,h}(x, t) &= x'_i x''_i - \frac{h^2}{12} x'_i x_i^{(4)} + \frac{\tau h^2}{2} x'_i x_i^{(4)} + \\ &+ \frac{3}{2} \tau^2 h^2 x''_i x_i''' + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Аналогично выводим соотношение

$$\begin{aligned} s'_{3,h}(y, t)s''_{3,h}(y, t) &= y'_i y''_i - \frac{h^2}{12} y'_i y_i^{(4)} + \frac{\tau h^2}{2} y'_i y_i^{(4)} + \\ &+ \frac{3}{2} \tau^2 h^2 y''_i y_i''' + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Следовательно, в силу определения (2.72)

$$I'_{3,h}(\Gamma, t) = x'_i x''_i + y'_i y''_i - \frac{h^2}{12} (x'_i x_i^{(4)} + y'_i y_i^{(4)}) +$$

$$+\frac{\tau h^2}{2}(x'_i x_i^{(4)} + y'_i y_i^{(4)}) + \frac{3}{2}\tau^2 h^2(x''_i x_i''' + y''_i y_i''') + O(h^3). \quad (2.105)$$

Сопоставляя теперь это соотношение с соотношениями (2.98) – (2.101), немедленно получаем асимптотическое равенство (2.72).

Рассмотрим теперь произведение

$$\begin{aligned} s'_{3,h}(x, t)s''_{3,h}(y, t) &= \frac{1}{2h^3}\Delta^2 c_i(b_{i+1} - b_{i-1}) + \\ &+ \frac{\tau}{2h^4}(2\Delta^2 b_i \Delta^2 c_i + \Delta^3 c_{i+1/2}(b_{i+1} - b_{i-1})) + \\ &+ \frac{\tau^2}{2h^5}(2\Delta^3 c_{i+1/2} \Delta^2 b_i + \Delta^3 b_{i+1/2} \Delta^2 c_i) + \frac{\tau^3}{2h^6} \Delta^3 b_{i+1/2} \Delta^3 c_{i+1/2}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Отсюда и из соотношений (2.85) – (2.93) получаем

$$\begin{aligned} s'_{3,h}(x, t)s''_{3,h}(y, t) &= x'_i y''_i - \frac{h^2}{12} x'_i y_i^{(4)} - \frac{\tau h^3}{24} (2x'_i y_i''' + h x'_i y_i^{(4)}) + \\ &+ \frac{1}{2} \tau^2 h^2 x''_i y_i''' + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Аналогично получаем и соотношение

$$\begin{aligned} s'_{3,h}(y, t)s''_{3,h}(x, t) &= y'_i x''_i - \frac{h^2}{12} y'_i x_i^{(4)} - \frac{\tau h^3}{24} (2y'_i x_i''' + h y'_i x_i^{(4)}) + \\ &+ \frac{1}{2} \tau^2 h^2 y''_i x_i''' + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.108)$$

Следовательно, в силу определения (2.62), верно асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} K_{3,h}(t) &= x'_i y''_i - y'_i x''_i - \frac{h^2}{12} (x'_i y_i^{(4)} - y'_i x_i^{(4)}) + \frac{\tau h^3}{24} (2(x'_i y_i''' - y'_i x_i''') + \\ &+ h(x'_i y_i^{(4)} - y'_i x_i^{(4)})) + \frac{1}{2} \tau^2 h^2 (x''_i y_i''' - y''_i x_i''') + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Используя теперь соотношения (2.98) – (2.101) из определений (2.61) и (2.66), немедленно получаем

$$\begin{aligned} K_{3,h}(t) &= k_i(\mathbf{\Gamma}) + \tau h k'_i(\mathbf{\Gamma}) + \frac{1}{2} \tau^2 h^2 k''_i(\mathbf{\Gamma}) - \frac{h^2}{2} u_i \left( \tau(\tau - 1) + \frac{1}{6} \right) + O(h^3) = \\ &= k(\mathbf{\Gamma}, t) - \frac{h^2}{2} u(t) \left( \left( \frac{1}{2} - \tau \right)^2 - \frac{1}{12} \right) + O(h^3), \end{aligned} \quad (2.110)$$

что и требовалось доказать.

Доказательство следствия тоже приведем лишь для случая  $r = 3$ .

Непосредственно из равенств (2.71), (2.73) и (2.74), получаем

$$k_{3,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = \frac{k(\mathbf{\Gamma}, t) - \frac{h^2}{2}u(t) \left( \left( \frac{1}{2} - \tau \right)^2 - \frac{1}{12} \right) + O(h^3)}{(1 + h^3\varphi(\tau)u_i + O(h^4))^{3/2}}. \quad (2.111)$$

Полагая

$$\varphi(\tau) = \tau(\tau - 1)(\tau - 0.5),$$

и учитывая, что в этом случае

$$\frac{1}{6}\varphi'(\tau) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2} - \tau \right)^2 - \frac{1}{12} \right),$$

получаем

$$k_{3,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = \frac{k(\mathbf{\Gamma}, t) - \frac{h^2}{6}u_i\varphi'(\tau) + O(h^3)}{(1 + h^3\varphi(\tau)u_i + O(h^4))^{3/2}}. \quad (2.112)$$

Применяя теперь известные соотношения (при  $z \rightarrow 0$ )

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)z^2 + \dots + \frac{1}{n!}\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)z^n + o(z^n),$$

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + o(z^n),$$

приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} k_{3,h}(\mathbf{\Gamma}, t) &= \left( k(\mathbf{\Gamma}, t) - \frac{h^2}{6}u_i\varphi'(\tau) \right) \left( 1 - \frac{3}{2}h^2\varphi(\tau)u_i \right) + O(h^4) = \\ &= k(\mathbf{\Gamma}, t) - \frac{h^2}{2}u_i \left( \frac{\varphi'(\tau)}{3} + 3k(\mathbf{\Gamma}, t)h\varphi(\tau) \right) + O(h^4), \end{aligned}$$

что и доказывает следствие 2.4.2 при  $r = 3$ .

Остальные следствия доказываются аналогично.

## 2.5 Восстановление не замкнутых кривых сплайнами с почти естественной параметризацией

А в попугаях я го-ораздо длиннее.  
Из мульт.ф. "38 попугаев".

В предыдущем параграфе мы уделили внимание сплайнам с почти естественной параметризацией. Но при этом оговорили, что они описывают замкнутые кривые. Условие наличия естественной параметризации для нас слишком важно, чтобы ограничиться лишь случаем замкнутых кривых. Поэтому имеет смысл так доопределить значения аппроксимируемой кривой  $\Gamma$  на ее концах и построить сплайн  $S(\Gamma, t)$ , чтобы, с одной стороны, и его аппроксимативные свойства на концах кривой не ухудшились (по сравнению с аналогичными свойствами внутри), а с другой, чтобы параметризация не слишком отличалась от параметризации его периодического аналога, рассмотренного ранее.

Для замкнутой кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) сплайны  $S_{r,h}(\Gamma, t)$  (по разбиению  $\{iT/(2n)\}_{i=0}^{2n}$ ) строились на основе средних значений  $\tilde{x}_i$  и  $\tilde{y}_i$  при  $i = -1, 0, \dots, 2n+1$ . Если же кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) не замкнута (т.е. функции  $x(t)$  и  $y(t)$  не периодические), то мы не можем построить значения  $\tilde{x}_i$  и  $\tilde{y}_i$  при  $i = -1, 0, 2n, 2n+1$ . Поэтому, прежде всего, доопределим недостающие значения  $\tilde{x}_i$  и  $\tilde{y}_i$  так, чтобы алгоритм построения сплайнов с почти естественной параметризацией, предложенный в предыдущем параграфе, был корректен и для незамкнутых кривых.

Пусть, вначале,  $r = 3$ . Обозначим

$$\tilde{x}_{(2i+1)/4} = \frac{2}{h} \int_{ih/2}^{(i+1)h/2} x(t) dt,$$

$$\tilde{y}_{(2i+1)/4} = \frac{2}{h} \int_{ih/2}^{(i+1)h/2} y(t) dt$$

$$(i = 0, 1, \dots, 4; i = 2n-5, 2n-4, \dots, 2n-1),$$

и, как и ранее,

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} x(t) dt \quad (i = 3, 4, \dots, n-3),$$

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} y(t) dt \quad (i = 3, 4, \dots, n-3).$$

Здесь  $h = T/(2n)$ . Определим коэффициенты  $a, b, c$  и  $d$  кубической параболы  $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$  исходя из условий

$$\tilde{x}_{(2i+1)/4} = \frac{2}{h} \int_{ih/2}^{(i+1)h/2} p(t) dt \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$a = \frac{4}{3h^3} \left( -\frac{4}{3}\tilde{x}_{1/4} + 4\tilde{x}_{3/4} - 4\tilde{x}_{5/4} + \frac{4}{3}\tilde{x}_{7/4} \right),$$

$$b = \frac{1}{h^2} (5\tilde{x}_{1/4} - 13\tilde{x}_{3/4} + 11\tilde{x}_{5/4} - 3\tilde{x}_{7/4}),$$

$$c = \frac{1}{6h} (-35\tilde{x}_{1/4} + 69\tilde{x}_{3/4} - 45\tilde{x}_{5/4} + 11\tilde{x}_{7/4}),$$

$$d = \frac{1}{12} (25\tilde{x}_{1/4} - 23\tilde{x}_{3/4} + 13\tilde{x}_{5/4} - 3\tilde{x}_{7/4}).$$

Доопределим недостающие  $\tilde{x}_i$  для  $i = -2, -1, \dots, 0, 1, 2$  равенствами

$$\tilde{x}_{-2} = \frac{1}{h} \int_{-5h/2}^{-3h/2} p(t) dt, \quad \tilde{x}_{-1} = \frac{1}{h} \int_{-3h/2}^{-h/2} p(t) dt,$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{-1/4} + \tilde{x}_{1/4}), \quad \tilde{x}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{3/4} + \tilde{x}_{5/4}), \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{7/4} + \tilde{x}_{9/4}),$$

где

$$\tilde{x}_{-1/4} = \frac{2}{h} \int_{-h/2}^0 p(t) dt.$$

Отсюда и из вида полинома  $p(t)$  выводим

$$\tilde{x}_0 = \frac{1}{2} (5\tilde{x}_{1/4} - 6\tilde{x}_{3/4} + 4\tilde{x}_{5/4} - \tilde{x}_{7/4}),$$

$$\tilde{x}_{-1} = \frac{1}{2} (30\tilde{x}_{1/4} - 65\tilde{x}_{3/4} + 51\tilde{x}_{5/4} - 14\tilde{x}_{7/4}),$$

$$\tilde{x}_{-2} = \frac{1}{2} (91\tilde{x}_{1/4} - 224\tilde{x}_{3/4} + 190\tilde{x}_{5/4} - 55\tilde{x}_{7/4}).$$

На другом конце кривой  $\Gamma$  значения величин  $\tilde{x}_i$  ( $i = n-2, n-1, n, n+1, n+2$ ) определим аналогично

$$\tilde{x}_{n-2} = \frac{1}{2} (\tilde{x}_{n-7/4} + \tilde{x}_{n-9/4}), \quad \tilde{x}_{n-1} = \frac{1}{2} (\tilde{x}_{n-3/4} + \tilde{x}_{n-5/4}),$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_n &= \frac{1}{2}(5\tilde{x}_{n-1/4} - 6\tilde{x}_{n-3/4} + 4\tilde{x}_{n-5/4} - \tilde{x}_{n-7/4}), \\ \tilde{x}_{n+1} &= \frac{1}{2}(30\tilde{x}_{n-1/4} - 65\tilde{x}_{n-3/4} + 51\tilde{x}_{n-5/4} - 14\tilde{x}_{n-7/4}), \\ \tilde{x}_{n+2} &= \frac{1}{2}(91\tilde{x}_{n-1/4} - 224\tilde{x}_{n-3/4} + 190\tilde{x}_{n-5/4} - 55\tilde{x}_{n-7/4}).\end{aligned}$$

По тому же правилу доопределим и величины

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \frac{1}{2}(\tilde{y}_{3/4} + \tilde{y}_{5/4}), \quad \tilde{y}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{y}_{7/4} + \tilde{y}_{9/4}), \\ \tilde{y}_0 &= \frac{1}{2}(5\tilde{y}_{1/4} - 6\tilde{y}_{3/4} + 4\tilde{y}_{5/4} - \tilde{y}_{7/4}), \\ \tilde{y}_{-1} &= \frac{1}{2}(30\tilde{y}_{1/4} - 65\tilde{y}_{3/4} + 51\tilde{y}_{5/4} - 14\tilde{y}_{7/4}), \\ \tilde{y}_{-2} &= \frac{1}{2}(91\tilde{y}_{1/4} - 224\tilde{y}_{3/4} + 190\tilde{y}_{5/4} - 55\tilde{y}_{7/4})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n-2} &= \frac{1}{2}(\tilde{y}_{n-7/4} + \tilde{y}_{n-9/4}), \quad \tilde{y}_{n-1} = \frac{1}{2}(\tilde{y}_{n-3/4} + \tilde{y}_{n-5/4}), \\ \tilde{y}_n &= \frac{1}{2}(5\tilde{y}_{n-1/4} - 6\tilde{y}_{n-3/4} + 4\tilde{y}_{n-5/4} - \tilde{y}_{n-7/4}), \\ \tilde{y}_{n+1} &= \frac{1}{2}(30\tilde{y}_{n-1/4} - 65\tilde{y}_{n-3/4} + 51\tilde{y}_{n-5/4} - 14\tilde{y}_{n-7/4}), \\ \tilde{y}_{n+2} &= \frac{1}{2}(91\tilde{y}_{n-1/4} - 224\tilde{y}_{n-3/4} + 190\tilde{y}_{n-5/4} - 55\tilde{y}_{n-7/4}).\end{aligned}$$

Полагая теперь

$$\tilde{b}_i = \tilde{x}_i - \frac{5}{24}\Delta^2\tilde{x}_i, \quad \tilde{c}_i = \tilde{y}_i - \frac{5}{24}\Delta^2\tilde{y}_i$$

и

$$\tilde{s}_{3,h}(x,t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \tilde{b}_i B_{3,h}(t), \quad \tilde{s}_{3,h}(y,t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \tilde{c}_i B_{3,h}(t),$$

получим параметрический сплайн

$$\tilde{S}_{3,h}(\Gamma, t) = (\tilde{s}_{3,h}(x, t), \tilde{s}_{3,h}(y, t)),$$

восстанавливающий незамкнутую кривую  $\Gamma(\mathbf{t})$ .

Ясно, что для  $i = 3, 4, \dots, n-3$  сплайн  $\tilde{S}_{3,h}(\Gamma, t)$  определен так же, как замкнутый сплайн  $S_{3,h}(\Gamma, t)$ , рассмотренный в предыдущем параграфе, и, соотношения для параметризации, установленные в предыдущем параграфе для этих значений  $i$ , останутся в силе. Кроме того, для этих значений  $i$  сплайн  $S_{3,h}(\Gamma, t)$  будет на промежутках  $[(2i-1)h/2, (2i+1)h/2]$  почти интерполяционным в среднем. Покажем, что и на концах промежутка изменения параметра, сплайн  $\tilde{S}_{3,h}(\Gamma, t)$  также будет почти интерполяционным в среднем.

Действительно, если

$$\delta(t) = \delta(x, t) = \tilde{s}_{3,h}(x, t) - x(t),$$

то непосредственным (но довольно громоздким) подсчетом можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1 &= \int_{h/2}^{3h/2} \delta(x, t) dt = \\ &= \frac{1}{9216} (922.5(x_{1/4} - x_{3/4}) - 1418.25(x_{3/4} - x_1) - 879.25(x_1 - x_{5/4}) + \\ &+ 1461.5(x_{5/4} - x_{7/4}) + 269.5(x_{7/4} - x_2) - 351(x_2 - x_3) - 5(x_3 - x_4)). \\ \tilde{\delta}_2 &= \int_{3h/2}^{5h/2} \delta(x, t) dt = \\ &= \frac{1}{9216} (470(x_{1/4} - x_{3/4}) - 65.125(x_{3/4} - x_1) - 422.375(x_1 - x_{5/4}) - \\ &- 435(x_{5/4} - x_{7/4}) - 269.5(x_{7/4} - x_2) - 1078(x_2 - x_3) - 351(x_3 - x_4) - 5(x_4 - x_5)). \\ \tilde{\delta}_3 &= \int_{5h/2}^{7h/2} \delta(x, t) dt = \\ &= \frac{1}{9216} (6.25(x_{1/4} - x_{3/4}) - 0.625(x_{3/4} - x_1) + 85.875(x_1 - x_{5/4}) + \\ &+ 176.75(x_{5/4} - x_{7/4}) + 87.75(x_{7/4} - x_2) - 1078(x_2 - x_3) + 1078(x_3 - x_4) - \\ &351(x_4 - x_5) - 5(x_5 - x_6)) \end{aligned}$$

и

$$\tilde{\delta}_i = \frac{47}{1152} \Delta^4 x_i - \frac{5}{9216} \Delta^6 x_i \quad (i = 4, 5, \dots, n-3).$$

Аналогичные соотношения имеют место и для  $\tilde{\delta}_i$  при  $i = n-2, n-1, n$ . Используя разложение в ряд Тейлора, легко убедиться в том, что при всех  $i = 1, \dots, n$  для гладких кривых выполняется асимптотическое

равенство  $\tilde{\delta}_i = O(h^4)$ . Аналогичные соотношения имеют место и для  $\tilde{\delta}_{1/4}$  и  $\tilde{\delta}_{n-1/4}$ . Таким образом, сплайны  $\tilde{S}_{3,h}(\Gamma, t)$  почти интерполируют в среднем кривую  $\Gamma$ . Это дает основание называть их параметрическими почти интерполяционными в среднем.

Рассмотрим теперь параболические сплайны, т.е. рассмотрим случай  $r = 2$ .

Пусть заданы значения интегралов:

$$\tilde{x}_{(2i+1)/4} = \frac{2}{h} \int_{ih/2}^{(i+1)h/2} x(t) dt,$$

$$\tilde{y}_{(2i+1)/4} = \frac{2}{h} \int_{ih/2}^{(i+1)h/2} y(t) dt,$$

$$(i = 0, 1, 2; i = 2n - 3, 2n - 2, 2n - 1)$$

и

$$\tilde{x}_i = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} x(t) dt \quad (i = 2, 3, \dots, n - 2),$$

$$\tilde{y}_i = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} y(t) dt \quad (i = 2, 3, \dots, n - 2).$$

Коэффициенты полинома  $p(t) = at^2 + bt + c$  будем определять из условий:

$$\tilde{x}_{(2i+1)/4} = \frac{2}{h} \int_{ih/2}^{(i+1)h/2} p(t) dt \quad (i = 0, 1, 2).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что

$$a = \frac{1}{h^2}(2\tilde{x}_{1/4} - 4\tilde{x}_{3/4} + 2\tilde{x}_{5/4}),$$

$$b = \frac{1}{h}(-4\tilde{x}_{1/4} + 6\tilde{x}_{3/4} - 2\tilde{x}_{5/4}),$$

$$c = \frac{1}{6}(11\tilde{x}_{1/4} - 7\tilde{x}_{3/4} + 2\tilde{x}_{5/4}).$$

Доопределим недостающие  $\tilde{x}_i$  для  $i = -2, -1, 0, 1, 2$  по аналогии с кубическими сплайнами:

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{3/4} + \tilde{x}_{1/4}), \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{7/4} + \tilde{x}_{5/4}),$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{1}{2}(4\tilde{x}_{1/4} - 3\tilde{x}_{3/4} + \tilde{x}_{5/4}),$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{-1} &= \frac{1}{2}(16\tilde{x}_{1/4} - 23\tilde{x}_{3/4} + 9\tilde{x}_{5/4}), \\ \tilde{x}_{-2} &= \frac{1}{2}(36\tilde{x}_{1/4} - 59\tilde{x}_{3/4} + 25\tilde{x}_{5/4}).\end{aligned}$$

На другом конце кривой  $\Gamma$  значения величин  $\tilde{x}_i$  ( $i = n-2, n-1, n, n+1, n+2$ ) определяются аналогично

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{n-1} &= \frac{1}{2}(\tilde{x}_{n-3/4} + \tilde{x}_{n-1/4}), \quad \tilde{x}_{n-2} = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{n-7/4} + \tilde{x}_{n-5/4}), \\ \tilde{x}_n &= \frac{1}{2}(4\tilde{x}_{n-1/4} - 3\tilde{x}_{n-3/4} + \tilde{x}_{n-5/4}), \\ \tilde{x}_{n+1} &= \frac{1}{2}(16\tilde{x}_{n-1/4} - 23\tilde{x}_{n-3/4} + 9\tilde{x}_{n-5/4}), \\ \tilde{x}_{n+2} &= \frac{1}{2}(36\tilde{x}_{n-1/4} - 59\tilde{x}_{n-3/4} + 25\tilde{x}_{n-5/4}).\end{aligned}$$

Точно так же как, и в случае кубических сплайнов, определяются значения

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \frac{1}{2}(\tilde{y}_{3/4} + \tilde{y}_{1/4}), \quad \tilde{y}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{y}_{7/4} + \tilde{y}_{5/4}), \\ \tilde{y}_0 &= \frac{1}{2}(4\tilde{y}_{1/4} - 3\tilde{y}_{3/4} + \tilde{y}_{5/4}), \\ \tilde{y}_{-1} &= \frac{1}{2}(16\tilde{y}_{1/4} - 23\tilde{y}_{3/4} + 9\tilde{y}_{5/4}), \\ \tilde{y}_{-2} &= \frac{1}{2}(36\tilde{y}_{1/4} - 59\tilde{y}_{3/4} + 25\tilde{y}_{5/4})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n-1} &= \frac{1}{2}(\tilde{y}_{n-3/4} + \tilde{y}_{n-1/4}), \quad \tilde{y}_{n-2} = \frac{1}{2}(\tilde{y}_{n-7/4} + \tilde{y}_{n-5/4}), \\ \tilde{y}_n &= \frac{1}{2}(4\tilde{y}_{n-1/4} - 3\tilde{y}_{n-3/4} + \tilde{y}_{n-5/4}), \\ \tilde{y}_{n+1} &= \frac{1}{2}(16\tilde{y}_{n-1/4} - 23\tilde{y}_{n-3/4} + 9\tilde{y}_{n-5/4}), \\ \tilde{y}_{n+2} &= \frac{1}{2}(36\tilde{y}_{n-1/4} - 59\tilde{y}_{n-3/4} + 25\tilde{y}_{n-5/4}).\end{aligned}$$

Полагая теперь

$$\tilde{b}_i = \tilde{x}_i - \frac{1}{6}\Delta^2\tilde{x}_i, \quad \tilde{c}_i = \tilde{y}_i - \frac{1}{6}\Delta^2\tilde{y}_i$$

и

$$\tilde{s}_{2,h}(x, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \tilde{b}_i B_{2,h}(t), \quad \tilde{s}_{2,h}(y, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \tilde{c}_i B_{2,h}(t),$$

получим параболические параметрические сплайны

$$\tilde{S}_{2,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = (\tilde{s}_{2,h}(x, t), \tilde{s}_{2,h}(y, t)).$$

С помощью аналогичных рассуждений можно убедиться в том, что сплайн  $\tilde{S}_{2,h}(\mathbf{\Gamma}, t)$  является параметрическим почти интерполяционным в среднем на отрезках  $[ih, (i+1)h]$  сплайном для кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$ .

Перед тем, как перейти к описанию характеристических свойств этих сплайнов, приведем некоторые обозначения:

Для гладкой кривой  $\mathbf{\Gamma}(t) = (x(t), y(t))$  ( $x, y \in C^4$ ) положим

$$k(\mathbf{\Gamma}, t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t),$$

$$I(\mathbf{\Gamma}, t) = (x'(t))^2 + (y'(t))^2,$$

$$q(\mathbf{\Gamma}, t) = (x''(t))^2 + (y''(t))^2,$$

$$v(\mathbf{\Gamma}, t) = x''(t)x'''(t) + y''(t)y'''(t),$$

$$u(\mathbf{\Gamma}, t) = x'(t)y^{(4)}(t) - y'(t)x^{(4)}(t),$$

$$\psi(\mathbf{\Gamma}, t) = x'(t)x^{(4)}(t) + y'(t)y^{(4)}(t),$$

$$\phi(\mathbf{\Gamma}, t) = x'(t)x'''(t) + y'(t)y'''(t).$$

А так же

$$\tilde{K}_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = \tilde{s}'_{r,h}(x, t)\tilde{s}''_{r,h}(y, t) - \tilde{s}''_{r,h}(x, t)\tilde{s}'_{r,h}(y, t),$$

$$\tilde{I}_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = (\tilde{s}'_{r,h}(x, t))^2 + (\tilde{s}'_{r,h}(y, t))^2.$$

И пусть  $l_n(t)$  – ломаная с узлами в точках  $ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) и принимающая значение – 277 на концах промежутка изменения параметра, т.е. при  $t = 0$  и  $t = T$ ; значение 56 при  $t = h, T-h$ ; значение 5 при  $t = 2h$  и  $T-2h$  и значение 0 в остальных узлах.

Тогда о степени отличия параметризации сплайна  $\tilde{S}_{3,h}(\mathbf{\Gamma}, t)$  от естественной параметризации дает представление следующее утверждение.

**Теорема 2.5.1** Пусть гладкая кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ , для которой  $x, y \in L_\infty^5[0, T]$ , задана в естественной параметризации. Тогда при  $h \rightarrow 0$  для  $t \in [ih, (i+1)h]$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{3,h}(\Gamma, t) &= k(\Gamma, t) - \frac{h^2}{2} u_i \left( \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right) + \\ &+ u(\Gamma, t) \frac{h^2}{768} l_n(t) + O(h^3), \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\tilde{I}_{3,h}(\Gamma, t) = 1 + h^3 \tau(\tau - 1)(\tau - 0.5)v_i + \psi(\Gamma, t) \frac{h^2}{7680} Q(t) + O(h^4) \quad (2.114)$$

и

$$\tilde{I}'_{3,h}(\Gamma, t) = \frac{3h^2}{2} v_i \left( \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right) + \psi(\Gamma, t) \frac{h^2}{384} l'_n(t) + O(h^3), \quad (2.115)$$

где  $\tau = (t - ih)/h$  и  $Q(t)$  – непрерывно дифференцируемая функция такая, что для всех  $t$  выполняется неравенство  $|Q(t)| \leq 1$ .

Аналогичное утверждение имеет место и для параболических сплайнов.

Пусть  $l_n(t)$  – ломаная с узлами в точках  $(i - 1/2)h$  ( $i = 1, \dots, n$ ) принимающая значения: 67 на концах промежутка – при  $t = 0$  и  $T$ ; – 4 при  $t = h/2$  и  $T - h/2$ ; – 1 при  $t = 3h/2$  и  $T - 3h/2$  и 0 в остальных узлах.

Тогда будет иметь место следующее утверждение.

**Теорема 2.5.2** Пусть гладкая кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ , для которой  $x, y \in L_\infty^5[0, T]$ , задана в естественной параметризации. Тогда для  $t \in [(2i - 1)h/2, (2i + 1)h/2]$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняются соотношения

$$\tilde{K}_{2,h}(\Gamma, t) = k_i(\Gamma) - \frac{h^2}{24} k''_i(\Gamma) + \phi(\Gamma, t) \frac{h}{96} l'_n(t) + O(h^2), \quad (2.116)$$

$$\tilde{I}_{2,h}(\Gamma, t) = 1 - h^2 q_i \left( \frac{1}{12} - \tau^2 \right) + \phi(\Gamma, t) \frac{h}{96} l_n(t) + O(h^3), \quad (2.117)$$

$$\tilde{I}'_{2,h}(\Gamma, t) = h q_i \tau + \phi(\Gamma, t) \frac{h}{48} l'_n(t) + O(h^2), \quad (2.118)$$

**Доказательство.** Пусть, вначале  $r = 3$ . Как показано в предыдущем параграфе,

$$b_i = b_i^* + O(h^5), \quad c_i = c_i^* + O(h^5),$$

где

$$b_i^* = x_i - \frac{1}{6}h^2 x_i'' - \frac{49}{1920}h^4 x_i^{(4)},$$

$$c_i^* = y_i - \frac{1}{6}h^2 y_i'' - \frac{49}{1920}h^4 y_i^{(4)}.$$

Если

$$\theta_i = \tilde{b}_i - b_i^*, \quad \vartheta_i = \tilde{c}_i - c_i^*,$$

то

$$\theta_{n+1} = \theta_{-1} = -\frac{375}{1920}h^4 x_0^{(4)} + O(h^5),$$

$$\theta_n = \theta_0 = \frac{165}{1920}h^4 x_0^{(4)} + O(h^5),$$

$$\theta_{n-1} = \theta_1 = \frac{25}{3840}h^4 x_0^{(4)} + O(h^5),$$

$$\theta_i = O(h^5) \quad (i = 2, \dots, n-2)$$

и

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_{-1} = -\frac{375}{1920}h^4 y_0^{(4)} + O(h^5),$$

$$\vartheta_n = \vartheta_0 = \frac{165}{1920}h^4 y_0^{(4)} + O(h^5),$$

$$\vartheta_{n-1} = \vartheta_1 = \frac{25}{3840}h^4 y_0^{(4)} + O(h^5),$$

$$\vartheta_i = O(h^5) \quad (i = 2, \dots, n-2).$$

Поэтому

$$\tilde{s}_{r,h}(x, t) = s_{r,h}(x, t) + \sigma_{r,h}(x, t),$$

$$\tilde{s}_{r,h}(y, t) = s_{r,h}(y, t) + \sigma_{r,h}(y, t),$$

где

$$\sigma_{r,h}(x, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \theta_i B_{r,h}(t), \quad \sigma_{r,h}(y, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \vartheta_i B_{r,h}(t)$$

и, следовательно,

$$\tilde{K}_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = (s_{r,h}(x, t) + \sigma_{r,h}(x, t))'(s_{r,h}(y, t) + \sigma_{r,h}(y, t))'' -$$

$$-(s_{r,h}(y,t) + \sigma_{r,h}(y,t))'(s_{r,h}(x,t) + \sigma_{r,h}(x,t))''.$$

Раскрывая скобки и учитывая (см. параграфы 1.10 – 1.11), что если  $x \in L_\infty^{r+1}[0, t]$  то при  $r = 2, 3$

$$\|x' - s'_{r,h}(x)\|_\infty = O(h^r),$$

получаем

$$\tilde{K}_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = K_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) + x'(t)\sigma''_{r,h}(y,t) - y'(t)s''_{r,h}(x,t) + O(h^r).$$

Аналогично, из равенства

$$\tilde{I}_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = (s'_{r,h}(x,t) + \sigma'_{r,h}(x,t))^2 + (s'_{r,h}(y,t) + \sigma'_{r,h}(y,t))^2$$

выводим

$$\tilde{I}_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) = I_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) + 2(x'(t)\sigma'_{r,h}(x,t) + y'(t)s'_{r,h}(y,t)) + O(h^{r+1})$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{I}'_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) &= 2((s_{r,h}(x,t) + \sigma_{r,h}(x,t))'(s_{r,h}(x,t) + \sigma_{r,h}(x,t))'' + \\ &+ (s_{r,h}(y,t) + \sigma_{r,h}(y,t))'(s_{r,h}(y,t) + \sigma_{r,h}(y,t))'') = \\ &= I'_{r,h}(\mathbf{\Gamma}, t) + 2(x'(t)\sigma''_{r,h}(x,t) + y'(t)s''_{r,h}(y,t)) + O(h^r). \end{aligned}$$

Из определения  $\sigma_{3,h}(x,t)$  следует, что для  $r = 3$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sigma''_{3,h}(x,0) &= -\frac{277}{768}h^2x_1^{(4)} + O(h^3), \\ \sigma''_{3,h}(x,h) &= \frac{56}{768}h^2x_1^{(4)} + O(h^3) \end{aligned}$$

и

$$\sigma''_{3,h}(x,2h) = \frac{5}{768}h^2x_1^{(4)} + O(h^3).$$

Следовательно, равномерно по  $t$  выполняется равенство

$$\sigma''_{3,h}(x,t) = \frac{1}{768}h^2x^{(4)}(t)l_n(t) + O(h^3).$$

Кроме того

$$\sigma''_{3,h}(y,t) = \frac{1}{768}h^2y^{(4)}(t)l_n(t) + O(h^3).$$

Отсюда немедленно получаем первое и последнее асимптотические равенства утверждения теоремы.

Докажем теперь второе равенство.

Рассмотрим параболический сплайн минимального дефекта  $\sigma'_{3,h}(x, t)$ .  
Так как

$$\sigma'_{3,h}(x, ih) = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h},$$

$$\sigma'_{3,h}(y, ih) = \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta_{i-1}}{2h}$$

и

$$\sigma'_{3,h}(x, (i + 1/2)h) = \frac{-\theta_{i-1} - \theta_i + \theta_{i+1} + \theta_{i+2}}{4h},$$

$$\sigma'_{3,h}(y, (i + 1/2)h) = \frac{-\vartheta_{i-1} - \vartheta_i + \vartheta_{i+1} + \vartheta_{i+2}}{4h},$$

то равномерно по  $i$  выполняются соотношения:

$$\sigma'_{3,h}(x, ih) = \frac{310}{3072}h^3x_i^{(4)} + O(h^4) \quad (i = 0, n),$$

$$\sigma'_{3,h}(x, ih) = -\frac{66}{3072}h^3x_i^{(4)} + O(h^4) \quad (i = 1, n - 1),$$

$$\sigma'_{3,h}(x, ih) = -\frac{5}{1536}h^3x_i^{(4)} + O(h^4) \quad (i = 2, n - 2),$$

$$\sigma'_{3,h}(x, ih) = O(h^4), \quad (i = 3, \dots, n - 3),$$

$$\sigma'_{3,h}(x, (i + 1/2)h) = \frac{79}{3072}h^3x_i^{(4)} + O(h^4) \quad (i = 0, n - 1),$$

$$\sigma'_{3,h}(x, (i + 1/2)h) = -\frac{71}{3072}h^3x_i^{(4)} + O(h^4) \quad (i = 1, n - 2),$$

$$\sigma'_{3,h}(x, (i + 1/2)h) = -\frac{5}{3072}h^3x_i^{(4)} + O(h^4) \quad (i = 2, n - 3),$$

$$\sigma'_{3,h}(x, (i + 1/2)h) = O(h^4) \quad (i = 3, \dots, n - 4).$$

Следовательно,

$$\sigma'_{3,h}(x, t) = h^3x^{(4)}(t)Q(t) + O(h^4),$$

где  $Q(t)$  – некоторая дифференцируемая функция, такая, что для всех  $t$  выполняется неравенство  $|Q(t)| \leq 1$ . Аналогично получаем

$$\sigma'_{3,h}(y, t) = h^3y^{(4)}(t)Q(t) + O(h^4).$$

Отсюда и из вида  $I_{3,h}(\Gamma, t)$  сразу следует утверждение (2.114). Таким образом теорема 2.5.1 доказана.

Теорема 2.5.2 доказывается аналогично. Отметим лишь, что для случая  $r = 2$ , как показано в предыдущем параграфе,

$$b_i = b_i^* + O(h^4), \quad c_i = c_i^* + O(h^4),$$

где

$$b_i^* = x_i - \frac{1}{8}h^2 x_i'', \quad c_i^* = y_i - \frac{1}{8}h^2 y_i''.$$

Кроме того, если

$$\theta_i = \tilde{b}_i - b_i^*, \quad \vartheta_i = \tilde{c}_i - c_i^*,$$

то

$$\theta_{n+1} = \theta_{-1} = \frac{112}{192}h^3 x_0^{(4)} + O(h^4),$$

$$\theta_n = \theta_0 = \frac{12}{192}h^3 x_0^{(4)} + O(h^4),$$

$$\theta_{n-1} = \theta_1 = -\frac{2}{192}h^3 x_0^{(4)} + O(h^4),$$

$$\theta_i = O(h^4) \quad (i = 2, \dots, n-2)$$

и

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_{-1} = \frac{112}{192}h^3 y_0^{(4)} + O(h^4),$$

$$\vartheta_n = \vartheta_0 = \frac{12}{192}h^3 y_0^{(4)} + O(h^4),$$

$$\vartheta_{n-1} = \vartheta_1 = -\frac{2}{192}h^3 y_0^{(4)} + O(h^4),$$

$$\vartheta_i = O(h^4) \quad (i = 2, \dots, n-2).$$

Далее доказательство повторяет аналогичную часть доказательства для случая кубических сплайнов.

## 2.6 Функции и сплайны Безье

До понимания некоторых истин можно не только дорости, но и опуститься.  
*В. Жемчужников*

Во многих устройствах, связанных с инженерной графикой, при конструировании используют кривые Безье (см., например, [25]). Это связано, прежде всего с простотой их представления.

Пусть даны две точки  $M_1$  и  $M_2$  (вообще говоря, точки любого линейного пространства, т.е. числа, точки на плоскости, в пространстве, функции, матрицы и пр.). Каждому значению параметра  $t \in [0, 1]$  поставим в соответствие точку

$$M_{1,2} = M_{1,2}(t) = (1-t)M_1 + tM_2, \quad (2.119)$$

делящую отрезок  $M_1, M_2$  в отношении  $(1-t)/t$ . Это и есть точка Безье, соответствующая значению параметра  $t$ .

Для трех точек  $M_1, M_2$  и  $M_3$  точка Безье определяется следующим образом

$$M_{1,2,3} = M_{1,2,3}(t) = (1-t)M_{1,2}(t) + tM_{2,3}(t), \quad (2.120)$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} M_{1,2,3}(t) &= (1-t)((1-t)M_1 + tM_2) + t((1-t)M_2 + tM_3) = \\ &= (1-t)^2M_1 + 2t(1-t)M_2 + t^2M_3. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Если  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – точки, лежащие на плоскости, то функцией Безье второго порядка назовем параметрическую кривую, интерполирующую точки с нечетными номерами и определенную равенствами

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^2x_1 + 2t(1-t)x_2 + t^2x_3, \\ y(t) &= (1-t)^2y_1 + 2t(1-t)y_2 + t^2y_3, \\ t &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Аналогично вводятся функции Безье третьего порядка.

Для четырех точек  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$

$$\begin{aligned} M_{1,2,3,4}(t) &= (1-t)M_{1,2,3}(t) + tM_{2,3,4}(t) = \\ &= (1-t)^3M_1 + 3t(1-t)^2M_2 + 3t^2(1-t)M_3 + t^3M_4. \end{aligned}$$

Для  $n$  точек точка Безье определяется рекуррентным соотношением

$$M_{1,2,\dots,n}(t) = (1-t)M_{1,2,\dots,n-1}(t) + tM_{2,3,\dots,n}(t). \quad (2.122)$$

Ясно, что

$$M_{1,2,\dots,n}(t) = \sum_{i=1}^n t^{i-1}(1-t)^{n-i}C_{n-1}^{i-1}M_i, \quad (2.123)$$

где  $C_n^k$  – биномиальные коэффициенты.

Для  $t \in [0, 1]$  равенства (2.122) – (2.123) определяют функции Безье.

Введем в рассмотрение сплайны Безье.

Пусть дан набор точек  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ). Сплайном Безье второго порядка назовем функцию, состоящую из кривых Безье 2-го порядка однозначно определенных тройками точек  $M_1, M_2, M_3$ ;  $M_3, M_4, M_5$ ;  $\dots$ ;  $M_{2n-1}, M_{2n}, M_{2n+1}$ . Таким образом, сплайн Безье второго порядка (см. рис. (2.12)) – это кривая, состоящая из  $M_{1,2,3}$ ;  $M_{3,4,5}$ ;  $\dots$ ;  $M_{2n-1,2n,2n+1}$ , т.е. это набор кривых

$$(1-t)^2 M_{2i-1} + 2t(1-t)M_{2i} + t^2 M_{2i+1} \quad (t \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n).$$

•  $M_{2i}$

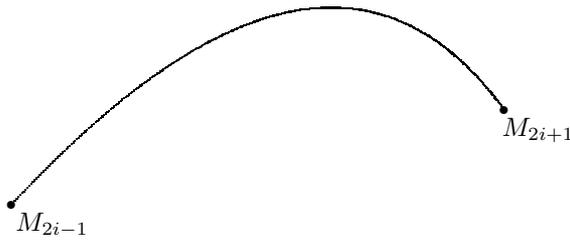


Рисунок 2.12:

Рассмотрим кубические сплайны Безье.

Пусть дан набор точек  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 3n + 1$ ). Сплайном Безье третьего порядка назовем функцию, состоящую из кривых Безье 3-го порядка однозначно определенных четверками точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$ ;  $M_4, M_5, M_6, M_7$ ;  $\dots$ ;  $M_{3n-2}, M_{3n-1}, M_{3n}, M_{3n+1}$ . Таким образом, сплайн Безье третьего порядка – это кривая, состоящая из наборов кривых Безье

$$M_{1,2,3,4}(t); M_{4,5,6,7}(t); \dots; M_{3n-2,3n-1,3n,3n+1}(t),$$

т.е. для  $i = 1, 2, \dots, n$  это кривая

$$(1-t)^3 M_{3i-2} + 3t(1-t)^2 M_{3i-1} + 3t^2(1-t)M_{3i} + t^3 M_{3i+1} \quad (t \in [0, 1]).$$

Если  $M_i = M_i(x_i, y_i)$  – точки плоскости, то сплайны Безье – это параметрические плоские сплайны, а если  $M_i = M_i(x_i, y_i, z_i)$  – точки пространства, то сплайны Безье это пространственные параметрические сплайны.

Для дальнейших исследований нам будет удобнее другая индексация точек, по которым будем строить сплайны Безье.

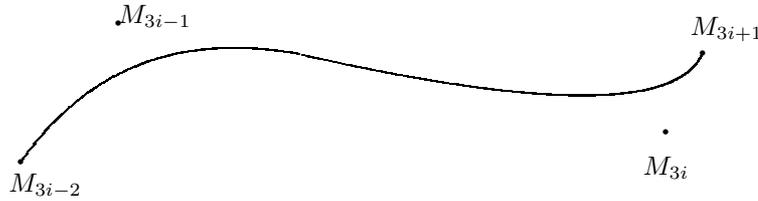


Рисунок 2.13:

Пусть даны точки  $M_1, M_{3/2}, M_2, M_{5/2}, \dots, M_n$ . Тогда сплайн Безье 2-го порядка – это кривая, определенная равенствами

$$(1-t)^2 M_i + 2t(1-t)M_{i+1/2} + t^2 M_{i+1},$$

для  $t \in [0, 1]$  и  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Аналогично, для точек  $M_1, M_{4/3}, M_{5/3}, M_2, M_{7/3}, \dots, M_n$  кубический сплайн Безье – это функция, определенная равенствами

$$(1-t)^3 M_i + 3t(1-t)^2 M_{i+1/3} + 3t^2(1-t)M_{i+2/3} + t^3 M_{i+1}$$

для  $t \in [0, 1]$  и  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Ясно, что сплайны Безье, определенные таким образом, интерполируют точки с целыми индексами.

## 2.7 Связь параметрических сплайнов со сплайнами Безье

Новое – это хорошо забытое старое.

*"В мире мудрых мыслей"*

В этом параграфе мы установим связь сплайнов Безье с классическими интерполяционными сплайнами, рассмотренными в параграфе 2.1. Эта задача, по существу, сводится к задаче пополнения опорных точек  $M_1, M_2, \dots, M_n$  точками с дробными индексами так, чтобы сплайн Безье, построенный по полному набору точек, совпал с интерполяционным сплайном.

Исследования проведем на примере кубических сплайнов.

Пусть, как обычно,  $\Delta_n = \{t_i\}_{i=1}^n$  – произвольное разбиение промежутка  $[0, T]$  изменения параметра  $t$  с шагом  $h_{i+1/2}$ ,  $s_3(M, t)$  ( $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ ) – параметрический кубический сплайн, проходящий через точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и  $A_i = s'_3(M, t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Определим точки  $M_{i+1/3}$  и  $M_{i+2/3}$  ( $1, 2, \dots, n-1$ ) равенствами

$$M_{i+1/3} = M_i + \frac{1}{3}h_{i+1/2}A_i, \quad (2.124)$$

$$M_{i+2/3} = M_{i+1} - \frac{1}{3}h_{i+1/2}A_{i+1}. \quad (2.125)$$

Построим сплайн Безье 3-го порядка по этим точкам. Покажем, что этот сплайн совпадает с интерполяционным сплайном.

Прежде, чем перейти к доказательству, отметим, что значения  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (первые моменты интерполяционного сплайна) находятся без особого труда. Алгоритмы их нахождения хорошо отлажены и подробно обсуждались нами в параграфе 2.1.

**Перейдем к доказательству.** Пусть  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $\tau = (t-t_i)/h_{i+1/2}$  (ясно, что  $\tau \in [0, 1]$ ) и

$$B(t) = (1-\tau)^3 M_i + 3\tau(1-\tau)^2 M_{i+1/3} + 3\tau^2(1-\tau) M_{i+2/3} + \tau^3 M_{i+1}.$$

Тогда

$$B(t_i) = M_i, \quad B(t_{i+1}) = M_{i+1}$$

и

$$B'(t) = \frac{3}{h_{i+1/2}} \left( -(1-\tau)^2 M_i + (1-3\tau)(1-\tau) M_{i+1/3} + \tau(2-3\tau) M_{i+2/3} + \tau^2 M_{i+1} \right),$$

следовательно,

$$B'(t_i) = \frac{3}{h_{i+1/2}} (M_{i+1/3} - M_i),$$

$$B'(t_{i+1}) = \frac{3}{h_{i+1/2}} (M_{i+1} - M_{i+2/3}).$$

Отсюда и из определения интерполяционного кубического сплайна (с учетом того, что на каждом промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  точки  $M_i, M_{i+1}, A_i$  и  $A_{i+1}$  определяются однозначно) следует, что для того, чтобы функция  $B(t)$  совпадала с ним, необходимо и достаточно выполнения условий

$$A_i = \frac{3}{h_i} (M_{i+1/3} - M_i),$$

$$A_{i+1} = \frac{3}{h_{i+1/2}}(M_{i+1} - M_{i+2/3}),$$

эквивалентных равенствам (2.124) – (2.125). Это и доказывает совпадение параметрических сплайнов с построенными таким образом сплайнами Безье.

## 2.8 Идентификация замкнутых кривых

А как здорово похожи друг на друга эти близнецы – особенно первый.

*Из разговора*

В этом параграфе строится алгоритм определения максимального совмещения гладких замкнутых кривых, т.е. такого их расположения, при котором они максимально совпадают. Предложена характеристика близости этих кривых (см. рис. 2.14, 2.15).

При решении различных технических задач возникает потребность в определении характеристики близости двух кривых. К примеру, такие задачи возникают при использовании роботизированных сварочных и сборочных систем. При этом естественно использовать в качестве расстояния различные типы хаусдорфовых метрик. В данном параграфе мы предлагаем метрику, позволяющую в явном виде решить задачу описания характеристики совпадения двух кривых.

Вначале рассмотрим случай плоских кривых.

Пусть две непрерывные замкнутые кривые заданы параметрическими уравнениями в естественной параметризации:

$$\Gamma_i(\tau_i) = (x_i(\tau_i), y_i(\tau_i)) \quad (\tau_i \in [0, T_i], \quad i = 1, 2).$$

Обозначим

$$\Gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t)) \quad (t \in [0, 1], \quad t = \tau_i/T_i) \quad (2.126)$$

и, если

$$u^0(t) = u(t) - \int_0^1 u(t) dt,$$

то

$$\Gamma_i^0(t) = (x_i^0(t), y_i^0(t)) \quad (t \in [0, 1], \quad i = 1, 2). \quad (2.127)$$

Положим

$$\mathbf{d}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min_{t_0} \sqrt{\int_0^1 ((x_1(t - t_0) - x_2(t))^2 + (y_1(t - t_0) - y_2(t))^2) dt}.$$

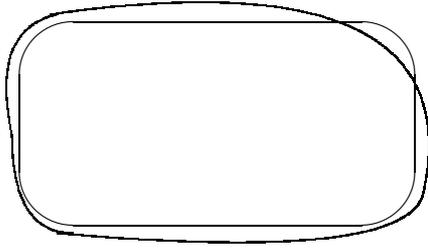


Рис. 2.14:

Кроме того, пусть

$$\Gamma(x_0, y_0, \phi, t) = (x_0 + x(t) \cos \phi + y(t) \sin \phi, y_0 + y(t) \cos \phi - x(t) \sin \phi),$$

и

$$\mathbf{d}^*(\Gamma_1, \Gamma_2) = \inf_{x_0, y_0, \phi} d(\Gamma_1, \Gamma_2(x_0, y_0, \phi))$$

**Теорема 2.8.1** Если  $x_i, y_i \in L_2[0,1]$  для  $i = 1, 2$ , то

$$\mathbf{d}^*(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sqrt{\|x_1^0\|_2^2 + \|x_2^0\|_2^2 + \|y_1^0\|_2^2 + \|y_2^0\|_2^2 - 2C},$$

где

$$C = \max_{t \in [0,1]} \sqrt{A^2(t) + B^2(t)}$$

и

$$A(t) = (x_1^0 * x_2^0 + y_1^0 * y_2^0)(t), \quad B(t) = (y_1^0 * x_2^0 - y_2^0 * x_1^0)(t),$$

а

$$(x * y)(t) = \int_0^1 x(u)y(t-u)du$$

– свертка функций  $x(t)$  и  $y(t)$  в точке  $t$ .

**Доказательство.** Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma_1, \Gamma_2, t_0, x_0, y_0, \phi) = & \int_0^1 \left( (x_1(t-t_0) - x_2(t) \cos \phi - y_2(t) \sin \phi - x_0)^2 + \right. \\ & \left. + (y_1(t-t_0) + x_2(t) \sin \phi - y_2(t) \cos \phi - y_0)^2 \right) dt. \end{aligned}$$

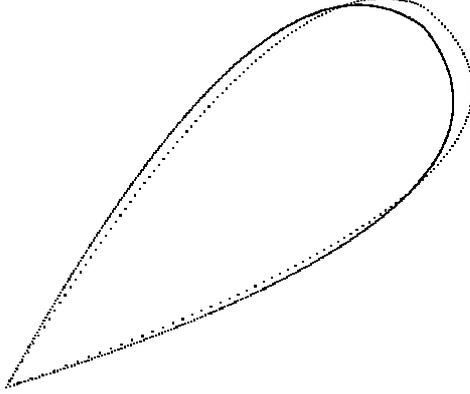


Рис. 2.15:

Ясно, что для любых  $t_0$  и  $\phi$

$$\inf_{x_0, y_0} \Delta(\Gamma_1, \Gamma_2, t_0, x_0, y_0, \phi) = \inf_{x_0, y_0} \Delta(\Gamma_1^0, \Gamma_2^0, t_0, x_0, y_0, \phi).$$

Вместо  $\Delta(\Gamma_1^0, \Gamma_2^0, t_0, x_0, y_0, \phi)$  с целью сокращения записи будем писать  $\Delta$ .

Легко выписать необходимые условия экстремума для величины  $\Delta$  по  $x_0$  и  $y_0$ . Эти условия имеют вид

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_0} = -2 \int_0^1 (x_1(t - t_0) - x_2(t) \cos \phi - y_2(t) \sin \phi - x_0) dt = 2x_0 = 0$$

и

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_0} = 2y_0 = 0,$$

т.е. для любых  $t_0$  и  $\phi$

$$\begin{aligned} \Delta^0 &= \inf_{x_0, y_0} \Delta = \Delta(\Gamma_1^0, \Gamma_2^0, 0, 0, \phi) = \|x_1^0\|_2^2 + \|x_2^0\|_2^2 \cos^2 \phi + \\ &+ \|y_2^0\|_2^2 \sin^2 \phi - 2(x_1^0 * x_2^0)(t_0) \cos \phi - 2(x_1^0 * y_2^0)(t_0) \sin \phi + \\ &+ 2(y_1^0 * x_2^0)(0) \sin \phi \cos \phi + \|y_1^0\|_2^2 + \|x_2^0\|_2^2 \sin^2 \phi + \|y_2^0\|_2^2 \cos^2 \phi + \\ &+ 2(y_1^0 * x_2^0)(t_0) \sin \phi - 2(y_1^0 * y_2^0)(t_0) \cos \phi - 2(x_2^0 * y_2^0)(0) \cos 2\phi = \\ &= \|x_1^0\|_2^2 + \|x_2^0\|_2^2 + \|y_1^0\|_2^2 + \|y_2^0\|_2^2 - 2((x_1^0 * y_2^0)(t_0) - \end{aligned}$$

$$-(y_1^0 * x_2^0)(t_0)) \sin \phi + (x_1^0 * x_2^0)(t_0) + (y_1^0 * y_2^0)(t_0)) \cos \phi.$$

Покажем, что для любых чисел  $a$  и  $b$

$$\max_{\phi} (a \cos \phi + b \sin \phi) = a \cos \phi_0 + b \sin \phi_0,$$

где

$$\phi_0 = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Действительно

$$a \cos \phi + b \sin \phi = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \phi + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \phi \right).$$

Кроме того

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Т.е. существует такой угол  $\phi_0$ , что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \phi_0, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \phi_0.$$

Используя формулы тригонометрических преобразований, получим

$$a \cos \phi + b \sin \phi = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом

$$\max_{\phi} (a \cos \phi + b \sin \phi) = a \cos \phi_0 + b \sin \phi_0 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Отсюда сразу получаем

$$\begin{aligned} \max_{t_0, \phi} \left( (x_1^0 * y_2^0)(t_0) - (y_1^0 * x_2^0)(t_0) \right) \sin \phi + \left( x_1^0 * x_2^0)(t_0) + \right. \\ \left. + (y_1^0 * y_2^0)(t_0) \right) \cos \phi = \max_{t_0 \in [0, 1]} \sqrt{A^2(t_0) + B^2(t_0)} = C, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы.

Чтобы идентифицировать две кривые в пространстве необходимо найти сдвиг параметра  $t_0$ , координат  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  и углы поворота координатных осей таких чтобы отличие между кривыми было минимальным.

Естественно, что подход, изложенный ранее, годится и для пространственных кривых, но при этом алгоритм существенно усложняется. Поэтому мы предложим иной подход, позволяющий, в некоторой мере, свести эту задачу к рассмотренной ранее.

Пусть замкнутые кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в пространстве заданы в естественной параметризации. Как и ранее, сведем промежуток изменения параметра к отрезку  $[0, 1]$  и, аналогично тому, как было сделано ранее, запишем кривые в виде

$$\Gamma_i^0(t) = (x_i^0(t), y_i^0(t), z_i^0(t)) \quad (t \in [0, 1], i = 1, 2).$$

Основной особенностью нашего подхода является то, что в начале для каждой из кривых мы определяем некоторое направление, характерное именно для нее. Это направление определяется "псевдонормальным" вектором  $\mathbf{n}_i$ , являющимся нормалью плоскости, наиболее прилегающей к данной кривой. Т.е. вектор  $\mathbf{n}_i$  есть решение экстремальной задачи

$$\int_0^1 (\Gamma_i^0 \cdot \mathbf{n}_i)^2 dt \rightarrow \min \quad (2.128)$$

при условии  $|\mathbf{n}_i| = 1$ .

Пусть вектор  $\mathbf{n}_i$  имеет координаты  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_i &:= \int_0^1 (\Gamma_i^0 \cdot \mathbf{n}_i)^2 dt = \int_0^1 (x_i^0(t)a_i + y_i^0(t)b_i + z_i^0(t)c_i)^2 dt = \\ &= a_i^2 \|x_i^0\|_2^2 + b_i^2 \|y_i^0\|_2^2 + c_i^2 \|z_i^0\|_2^2 + \\ &+ 2a_i b_i (x_i^0 * y_i^0)(0) + 2c_i b_i (z_i^0 * y_i^0)(0) + 2c_i a_i (z_i^0 * x_i^0)(0) \end{aligned}$$

и условия минимума примут вид

$$\begin{cases} a_i(\|x_i^0\|_2^2 - \lambda_i) + b_i(x_i^0 * y_i^0)(0) + c_i(z_i^0 * x_i^0)(0) = 0, \\ a_i(x_i^0 * y_i^0)(0) + b_i(\|y_i^0\|_2^2 - \lambda_i) + c_i(z_i^0 * y_i^0)(0) = 0, \\ a_i(x_i^0 * z_i^0)(0) + b_i(z_i^0 * y_i^0)(0) + c_i(\|z_i^0\|_2^2 - \lambda_i) = 0, \\ a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1. \end{cases} \quad (2.129)$$

Чтобы система имела решение, необходимо выполнение условия

$$\begin{pmatrix} \|x_i^0\|_2^2 - \lambda & (x_i^0 * y_i^0)(0) & (z_i^0 * x_i^0)(0) \\ (x_i^0 * y_i^0)(0) & \|y_i^0\|_2^2 - \lambda & (z_i^0 * y_i^0)(0) \\ (z_i^0 * x_i^0)(0) & (z_i^0 * y_i^0)(0) & \|z_i^0\|_2^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (2.130)$$

Умножая первые три уравнения системы (2.129) на  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$ , соответственно, и, суммируя их, убеждаемся, что если  $\lambda_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) является действительным корнем уравнения (2.130) (а такое решение существует всегда), то  $\sigma_i = \lambda_i^*$ . Таким образом, решению задачи (2.128) соответствует  $\lambda_0^*$ , являющееся минимальным среди всех действительных корней уравнения (2.130).

Теперь, исключая одно из первых трех уравнений системы (2.129) и используя  $\lambda_0^*$ , определим координаты  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$  вектора  $\mathbf{n}_i$  и проведем преобразование координат, совмещающее (для каждой кривой в отдельности) ось  $OZ$  с направлением вектора  $\mathbf{n}_i$ . Тогда в новых координатах уравнения кривых примут вид

$$\begin{aligned} x_i^*(t) &= \frac{x_i^0(t)b_i + y_i^0(c_i - a_i) - z_i^0(t)b_i}{\sqrt{1 + b_i^2 - 2a_i c_i}}, \\ y_i^*(t) &= \frac{x_i^0(t)(a_i c_i - b_i^2 - c_i^2) + y_i^0(c_i + a_i)b_i + z_i^0(t)(a_i c_i - a_i^2 - b_i^2)}{\sqrt{(a_i c_i - b_i^2 - c_i^2)^2 + b_i^2(a_i + c_i)^2 + (a_i c_i - a_i^2 - b_i^2)^2}}, \\ z_i^*(t) &= x_i^0 a_i + y_i^0 b_i + z_i^0 c_i. \end{aligned}$$

Если обозначим, как и ранее,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\Gamma_1, \Gamma_2) &= \min_{t_0} \left( \int_0^1 ((x_1(t - t_0) - x_2(t))^2 + (y_1(t - t_0) - y_2(t))^2 + \right. \\ &\quad \left. + (z_1(t - t_0) - z_2(t))^2) dt \right)^{1/2}, \\ \Gamma(x_0, y_0, z_0, \phi, t) &= \\ &= (x_0 + x(t) \cos \phi + y(t) \sin \phi, y_0 + y(t) \cos \phi - x(t) \sin \phi, z(t) + z_0) \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{d}^*(\Gamma_1, \Gamma_2) = \inf_{x_0, y_0, z_0, \phi} \mathbf{d}(\Gamma_1, \Gamma_2(x_0, y_0, z_0, \phi)),$$

то, почти дословно повторяя доказательство предыдущей теоремы, убеждаемся в том, что

$$\mathbf{d}^*(\Gamma_1^*, \Gamma_2^*) = \sqrt{\|x_1^*\|_2^2 + \|x_2^*\|_2^2 + \|y_1^*\|_2^2 + \|y_2^*\|_2^2 + \|z_1^*\|_2^2 + \|z_2^*\|_2^2 - 2D},$$

где

$$D = \max_{t \in [0,1]} \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$$

и

$$a(t) = (x_1^* * x_2^* + y_1^* * y_2^*)(t), \quad b(t) = (y_1^* * x_2^* - y_2^* * x_1^*)(t).$$

**Замечание 2.8.2** При программной реализации предложенного алгоритма в качестве параметрического задания кривых наиболее удобно брать сплайны (см. предыдущие параграфы настоящей главы). Потому, что, во – первых, легко вычислить их норму в  $L_2$ , а, во – вторых, достаточно легко вычислить значения сверток сплайнов в узлах. По этим значениям нужно вновь построить сплайны, с помощью которых уже легко определить значения как  $C$ , так и  $D$ .

На практике нередко возникает задача идентификации поверхностей. Примером таких задач может быть нанесение изображений с помощью трафаретных поверхностей, разметка поверхности, различные задачи сборки и пр. Решение таких задач весьма сложно. На основе изложенных ранее результатов нами предложен следующий алгоритм идентификации поверхностей.

Пусть даны две регулярные поверхности  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2$ ), заданные уравнениями

$$x_i = x_i(u_i, v_i), \quad y_i = y_i(u_i, v_i), \quad z_i = z_i(u_i, v_i) \quad (u_i, v_i \in \Omega_i, \quad i = 1, 2),$$

где  $\Omega_i$  – замкнутые односвязные области, для которых величина  $EG - F^2$  мало изменяется ( $E, G$  и  $F$  – коэффициенты первой основной квадратичной формы). Выбирая направление "псевдонормального" вектора из условия

$$\iint_{\Omega_i} (\Pi_i \cdot \mathbf{n}_i) du_i dv_i \rightarrow \min \quad (|\mathbf{n}_i| = 1)$$

аналогично тому, как это было сделано ранее, проведем преобразование пространства так, чтобы направление "псевдонормального" вектора совпало с направлением оси  $OZ$ . Пусть  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) – граница проекции поверхности. Используя изложенный ранее алгоритм, произведем максимальное совмещение контуров  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ), в соответствии с которым и сдвинем поверхности  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) (обозначим их через  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2$ )). После этого остается найти сдвиг  $z$  вдоль оси  $OZ$ , при котором

$$\iint_{\Omega_i} (z_1^*(u, v) - z_2^*(u, v) - z_0)^2 du dv \rightarrow \min,$$

(где  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ).

## 2.9 Контроль качества сложных изображений

Невеста была всем хороша, но у нее есть маленький недостаток – она чуть – чуть беременна от другого.

*Из разговора*

В условиях массового производства актуальной является задача быстрого сопоставления реальной детали на конвейере с эталоном. Как правило, такого рода задачи возникают при изготовлении деталей сложной конфигурации, которые во время технологической обработки фиксируются на конвейере. Для этих целей в последнее время разработаны различные системы технического зрения с применением видео- и телевизионной техники.

Одной из таких задач мы уделили внимание в предыдущем параграфе. Предложенные там алгоритмы, легко реализовать на ЭВМ в случае, когда деталь описана одним или несколькими контурами простой конфигурации. Однако они становятся довольно трудоемкими в случаях, когда контролируемая деталь имеет сложную конфигурацию (детальный чертеж, печатная плата и подобные изделия, полученные травлением, напылением и пр.).

В этих случаях для контроля качества геометрических характеристик детали, ее изображение выводится на экран и записывается в виде матрицы цветности. Тогда задача сводится к исследованию свойств матрицы цветности. В простейшем случае (в случае черно – белого изображения) эта матрица двухцветна.

Методы, использующие сравнение цветности каждой точки (и даже групп точек) как правило требуют большого объема вычислительной работы, что делает невозможным использование их в реальном режиме времени. К тому – же, как правило, деталь на конвейере крепится с некоторым смещением (сдвиги вдоль осей и повороты). Несмотря на то, что эти смещения обычно достаточно малы, в случае детали сложной конфигурации (типа печатных плат), матрицы цветности одинаковых деталей, смещенных относительно друг друга, оказываются совершенно различными. Тот же эффект вызывают и случайные (даже достаточно малые, но регулярные, например, вибрация) помехи и недостаточная разрешающая способность экрана и пр.

В связи с этим, сравнение, основанное на простейших приемах, таких как совпадение количества ячеек с одинаковым цветом, не дает

желаемого результата.

Эффективными являются методы обработки матрицы цветности, которые после фильтрации сигналов (сглаживания информации для устранения случайных малых помех) определяют оптимальный угол поворота и величины сдвигов и только после этого проводят сравнение. Эти методы оправданы при контроле качества дорогостоящих деталей в случаях единичного и мало серийного производства.

В настоящее время имеется достаточное число методов обработки матриц цветности, основанных на сжатии (кодировании) информации и дальнейшей работе с уже закодированной информацией. Один из таких методов и предложен в настоящем параграфе.

Для достаточно широкого круга задач эффективными являются интегральные методы сравнения, когда сравниваются количества точек одной цветности, лежащих на некоторых выделенных линиях (в нашем случае это будут строки и столбцы).

Тот факт, что случайные помехи и смещения, как правило, достаточно малы, позволяет надеяться, что и в этом случае окажется эффективным асимптотический подход. Перейдем к детальному изложению в случае, когда матрица двухцветна.

Пусть дана двухцветная матрица детали, т.е. определены точки на экране, заданные координатами  $(i, j)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$  ( $m \times n$  – размерность экрана)) и функция цвета, принимающая значение 1, если точка соответствует (принадлежит) детали и – значение 0, если точка соответствует фону. При этом мы считаем, что изображение лежит полностью внутри фона (помещается на экран).

Предложенный алгоритм основан на сравнении чисел вида

$$\sum_{j=0}^m f_{i,j}.$$

В наших условиях можно считать, что это дискретный аналог величины

$$F(x) = \int_0^b f(x, y) dy,$$

когда  $f(x, y)$  есть непрерывный аналог дискретной функции  $f_{i,j}$ .

Для повышения надежности контроля, можно аналогичные исследования провести для чисел

$$\sum_{i=0}^n f_{i,j}.$$

Вначале мы решим задачу для непрерывно – дифференцируемой функции  $f(x, y)$ , а затем проведем дискретизацию полученного результата, которая и даст нам желаемый алгоритм.

Итак, пусть изображение на экране определяется с помощью непрерывно – дифференцируемой функции  $f_d(x, y)$ , а изображение эталона – с помощью функции  $f_e(x, y)$ . Обе эти функции заданы на прямоугольнике  $D = [0, a] \times [0, b]$ . При этом найдется число  $h > 0$  такое, что вне прямоугольника  $D_h = [h, a - h] \times [h, b - h]$  будут выполняться равенства  $f_d(x, y) = 0$  и  $f_e(x, y) = 0$ . Это соответствует тому, что изображение детали и эталона лежат внутри фона, и, допускается малое смещение их без выхода за пределы экрана.

Пусть  $x_0$  и  $y_0$  – сдвиги, а  $\phi_0$  – поворот изображения детали относительно изображения эталона. Требуется определить эти величины  $x_0$ ,  $y_0$  и  $\phi_0$  таким образом, чтобы величина  $\delta$ , на которую отличаются изображения эталона и детали (после сдвига на  $x_0$  и  $y_0$  и поворота на  $\phi_0$ ), была минимальной. Формализация этой задачи такова.

Определить значения величин  $x_0$ ,  $y_0$  и  $\phi_0$ , реализующих минимум в задаче

$$\delta = \min_{x_0, y_0, \phi_0} \int_0^a |\tilde{F}_e(x) - F_d(x)|^2 dx,$$

и вычислить значение  $\delta$  при этих  $x_0$ ,  $y_0$  и  $\phi_0$ . Здесь

$$F_d(x) = \int_0^b f_d(x, y) dy,$$

$$\tilde{F}_e(x) = \int_0^b \tilde{f}_e(x, y) dy,$$

а

$$\tilde{f}_e(x, y) = f_e(x_0 + x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0, y_0 + y \cos \phi_0 - x \sin \phi_0). \quad (2.131)$$

Введем обозначения

$$F_e(x) = \int_0^b f_e(x, y) dy,$$

$$F_{e,x}(x) = \frac{d}{dx} F_e(x),$$

$$F_{e,y}(x) = \frac{d}{dx} \int_0^b y \cdot f_e(x, y) dy,$$

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= \int_0^a F_{e,x}^2(x) dx, \\
A_{2,1} = A_{1,2} &= \int_0^a F_{e,x}(x) F_{d,y} dx, \\
A_{2,2} &= \int_0^a F_{e,y}^2(x) dx, \\
B_{1,1} &= \int_0^a F_{e,x}(x) (F_d(x) - F_e(x)) dx, \\
B_{1,2} &= \int_0^a (F_d(x) - F_e(x))^2 dx
\end{aligned}$$

и

$$B_{2,2} = \int_0^a F_{e,y}(x) (F_d(x) - F_e(x)) dx.$$

Тогда мера погрешности  $\delta$  при асимптотически оптимальных сдвигах  $x_0$  и  $y_0$  и повороте  $\phi_0$  будет вычисляться по формуле

$$\delta = B_{1,2} - \frac{A_{1,2}B_{2,2}^2 - 2A_{1,2}B_{1,1}B_{2,2} + A_{2,2}B_{1,1}^2}{A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2}.$$

При этом величина асимптотически оптимальных сдвигов  $x_0$  и  $y_0$  будет равна

$$x_0 = \frac{A_{2,2}B_{1,1} - A_{1,2}B_{2,2}}{A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2}, \quad y_0 = 0,$$

а асимптотически оптимальный угол поворота вычисляется так

$$\phi_0 = \frac{B_{2,2}A_{1,1} - A_{1,2}B_{1,1}}{A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2}.$$

Докажем справедливость приведенного утверждения. Из условий, наложенных на функцию  $f_e(x, y)$ , следует, что для достаточно малых значений сдвига (вдоль оси  $OY$ ) будет иметь место равенство

$$\int_0^b f_e(x, y + y_0) dy = \int_0^b f_e(x, y) dy$$

и как следствие – равенство

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \int_0^b f_e(x, y + y_0) dy = 0.$$

Пусть  $\tilde{f}_e(x, y)$  – функция, определенная равенством (2.131).  
Рассмотрим функцию

$$\Psi(x_0, y_0, \phi_0) = \int_0^b f_e(x, y + y_0) dy.$$

Тогда, если  $M_0 = (0, 0, 0)$ , то используя формулу Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \Psi(x_0, y_0, \phi_0) &= \Psi(M_0) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_0}(M_0)x_0 + \\ &+ \frac{\partial \Psi}{\partial y_0}(M_0)y_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial \phi_0}(M_0)\phi_0 + \sigma, \end{aligned}$$

где  $\sigma$  – величина, стремящаяся к нулю при  $x_0 \rightarrow 0$ ,  $y_0 \rightarrow 0$  и  $\phi_0 \rightarrow 0$  быстрее, чем остальные слагаемые в левой части последнего равенства (т.е.  $\sigma$  есть бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем остальные слагаемые).

Так как

$$\Psi(M_0) = F_e(x),$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_0}(M_0) = F_{e,x}(x)$$

и

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \phi_0}(M_0) = F_{e,y}(x),$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_0}(M_0) = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^b f_e(x_0 + x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0, y_0 + y \cos \phi_0 - x \sin \phi_0) dy = \\ = F_e(x) + F_{e,x}(x)x_0 + F_{e,y}(x)\phi_0 + \sigma. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если пренебречь величинами более высокого порядка малости, то наша задача сведется к нахождению минимума по  $x_0$  и  $y_0$  величины

$$\Theta(x_0, \phi_0) = \int_0^b (F_e(x) + F_{e,x}(x)x_0 + F_{e,y}(x)\phi_0)^2 dx.$$

Это обычная задача минимизации квадратичного функционала. Она легко решается традиционными методами. Необходимое и достаточное

условие экстремума этой задачи состоит в том, что частные производные функции по  $x_0$  и  $y_0$  равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial x_0} \Big|_{(x_0, \phi_0)} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \phi_0} \Big|_{(x_0, \phi_0)} = 0, \end{cases}$$

что можно переписать в виде

$$\begin{cases} \int_0^b (F_e(x) + F_{e,x}(x)x_0 + F_{e,y}(x)\phi_0)F_{e,x}(x)dx = 0, \\ \int_0^b (F_e(x) + F_{e,x}(x)x_0 + F_{e,y}(x)\phi_0)F_{e,y}(x)dx = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, и, подставляя вычисленные в результате решения значения, получим приведенные выше значения  $x_0$ ,  $\phi_0$  и  $\delta$ .

Таким образом, в случае предположения о непрерывной дифференцируемости функций  $f_d(x, y)$  и  $f_e(x, y)$ , решение задачи найдено.

Приведем дискретный аналог решения задачи, который и даст нам алгоритм проверки качества совпадения детали и эталона.

Пусть заданы два массива информации

$$f_{e,i,j}, f_{d,i,j} \quad (i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m).$$

При этом для некоторого  $\nu > 0$  выполняются равенства  $f_{e,i,j} = f_{d,i,j} = 0$  для  $i = \nu, \nu + 1, \dots, n - \nu$  и  $j = \nu, \nu + 1, \dots, m - \nu$ .

Для каждого  $i = 0, 1, \dots, n$  вычислим величины

$$F_{e,i} = \sum_{j=0}^m f_{e,i,j},$$

$$F_{d,i} = \sum_{j=0}^m f_{d,i,j},$$

$$F_{e,x,i} = \sum_{j=0}^m (f_{e,i,j} - f_{e,i-1,j}),$$

$$F_{e,y,i} = \sum_{j=0}^m j f_{e,i,j}$$

и числа

$$a_{1,1} = \sum_{i=0}^n F_{e,x,i}^2,$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} &= a_{2,1} = \sum_{i=0}^n F_{e,x,i} F_{e,y,i}, \\
a_{2,2} &= \sum_{i=0}^n F_{e,y,i}^2, \\
b_{1,1} &= \sum_{i=0}^n F_{e,x,i} (F_{d,i} - F_{e,i}), \\
b_{2,2} &= \sum_{i=0}^n F_{e,y,i} (F_{d,i} - F_{e,i}), \\
b_{1,2} &= \sum_{i=0}^n (F_{d,i} - F_{e,i})^2.
\end{aligned}$$

Тогда величина отличия двух массивов информации (эталона и детали) определяется равенством

$$\delta = b_{1,2} - \frac{a_{1,2} b_{2,2}^2 - 2a_{1,2} b_{1,1} b_{2,2} + a_{2,2} b_{1,1}^2}{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2}. \quad (2.132)$$

На практике в некоторых случаях более удобна не абсолютная погрешность (2.132), а относительная, равная

$$\Delta = \sqrt{\frac{\delta}{a_{1,1}}}.$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость алгоритма, он позволяет проводить расчеты достаточно быстро, ибо все приведенные формулы имеют вид сумматоров. Кроме того основное число величин связано с эталоном (и вычисляются один раз), а с самой контролируемой деталью связаны лишь величины  $b_{1,1}$ ,  $b_{1,2}$ ,  $b_{2,2}$  и  $\delta$ .

Предложенный алгоритм допускает различные модификации. К примеру, в случае необходимости более тщательного контроля некоторого участка детали, мы можем вести весовую функцию  $\rho(x, y)$  равную, к примеру, 2 на этом участке и 1 – на остальных. В этом случае мы приходим к задаче минимизации величины

$$\delta = \int_0^a \rho(x, y) |\tilde{F}_e(x) - F_d(x)|^2 dx$$

которую можно решить аналогичным путем.

В случае, если важно определить точное место, где отличие детали от эталона наибольшее, то решив задачи

$$\delta_i = \min_{x_0, y_0, \phi_0} \int_{ai/n}^{a(i+1)/n} |\tilde{F}_e(x) - F_d(x)|^2 dx, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\varepsilon_j = \min_{x_0, y_0, \phi_0} \int_{bj/n}^{b(j+1)/n} |\tilde{F}_e(x) - F_d(x)|^2 dx, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1),$$

получим значения  $i_0$  и  $j_0$ , при которых

$$\delta_{i_0} = \max\{\delta_i | i = 0, 1, \dots, n-1\}$$

и

$$\varepsilon_{j_0} = \max\{\varepsilon_j | j = 0, 1, \dots, m-1\}.$$

Эти значения определяют то место на изображении детали, на котором расхождение между изображением детали и изображением эталона наибольшее.

Если изображение является ажурным, когда ширина коридоров соизмерима с величиной сдвига, то предложенная дискретизация не совсем адекватно отражает непрерывный аналог алгоритма. В этом случае функции  $F_{e,i}$ ,  $F_{d,i}, \dots$  имеют явно выраженный импульсный характер, что сказывается на устойчивости алгоритма. При этом целесообразно использовать в алгоритме вместо функций  $F_{e,i}$ ,  $F_{d,i}, \dots$  их сглаженные значения, т.е.

$$F_{e,i}^* = F_{e,i} + \alpha \Delta^2 F_{e,i},$$

$$F_{d,i}^* = F_{d,i} + \alpha \Delta^2 F_{d,i}, \dots,$$

где  $\alpha \in [0, 1/3]$  параметр сглаживания. Ясно, что если  $\alpha = 0$  то  $F_{e,i}^* = F_{e,i}$ ,  $F_{d,i}^* = F_{d,i}, \dots$ . При  $\alpha = 1/8$  это соответствует сглаживанию данных при помощи параболических сплайнов (см. параграф 1.9), а при  $\alpha = 1/6$  – с помощью кубических сплайнов (см. параграф 1.8).

## Глава 3

# Оптимальное восстановление кривых технологическими линиями

### 3.1 Вспомогательные утверждения

С тех пор как начали доказывать очевидные утверждения, многие из них оказались ошибочными

*Б. Рассел*

Здесь мы приведем некоторые утверждения, которые будут использоваться в дальнейшем. Часть приведенного материала освещена в математической литературе и довольно часто используется в задачах, связанных с приложениями математических методов. В этом параграфе мы приведем интересующие нас результаты и изложим их в удобном для решения рассматриваемых задач. Тем самым мы упростим изложение дальнейших результатов и, с другой стороны, дадим наглядное представление о методах решения экстремальных задач рассматриваемых в этой главе.

Прежде всего, напомним хорошо известное из курса математического анализа утверждение, называемое первой теоремой о среднем значе-

нии для интегралов.

**Теорема 3.1.1** Пусть функция  $f(t)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда найдется точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что

$$\int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b - a).$$

В дальнейшем нам потребуются две простые экстремальные задачи. Несмотря на их очевидную простоту, они будут базой при получении основных результатов приведенных в этой главе.

Пусть

$$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

и

$$\min\{C_i \mid i \in I_n\} := \min_{i \in I_n} C_i,$$

$$\max\{C_i \mid i \in I_n\} := \max_{i \in I_n} C_i.$$

**Лемма 3.1.2** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$  и  $C_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда

$$\min \left\{ \max\{C_i^\alpha \mid i \in I_n\}, C_i \geq 0, \sum_{i \in I_n} C_i = \mathcal{C} \right\} = \left(\frac{\mathcal{C}}{n}\right)^\alpha. \quad (3.1)$$

Т.е. в множестве векторов  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  с неотрицательными координатами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{i \in I_n} C_i := \sum_{i=1}^n C_i = \mathcal{C}, \quad (3.2)$$

наименьшее значение величины  $\max\{C_i \mid i \in I_n\}$  достигается, когда все  $C_i$  равны между собой, т.е. когда

$$C_i = C_i^0 = \frac{\mathcal{C}}{n} \quad (i \in I_n).$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что если  $A_{n,\alpha}(\mathbf{C})$  есть левая часть соотношения (3.1), то

$$A_{n,\alpha}(\mathbf{C}) \leq \max_{i \in I_n} (C_i^0)^\alpha = \left(\frac{\mathcal{C}}{n}\right)^\alpha.$$

Так что, если равенство (3.1) не верно, то

$$A_{n,\alpha}(\mathbf{C}) > \left(\frac{\mathcal{C}}{n}\right)^\alpha.$$

В этом случае найдется вектор  $\mathbf{C}^* = (C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$  с неотрицательными координатами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{i=1}^n C_i^* = \mathcal{C},$$

для которого выполняется неравенство

$$B_{n,\alpha}(\mathbf{C}) = \max_{i \in I_n} (C_i^*)^\alpha > \left(\frac{\mathcal{C}}{n}\right)^\alpha.$$

Обозначим через  $I_n^*$  множество всех индексов  $i \in I_n$ , для которых

$$\max_{\nu \in I_n} (C_\nu^*)^\alpha = (C_i^*)^\alpha,$$

а через  $n_*$  – число элементов множества  $I_n^*$ . Тогда

$$1 \leq n_* \leq n - 1$$

и

$$D = \max_{i \in I_n \setminus I_n^*} C_i^* < B_{n,\alpha}(\mathbf{C}).$$

Пусть

$$\theta = B_{n,\alpha}(\mathbf{C}) - \left(\frac{\mathcal{C}}{n}\right)^\alpha, \quad \eta = D - B_{n,\alpha}(\mathbf{C}).$$

Рассмотрим вектор  $C_i^{**}$  ( $i \in I_n$ ), у которого

$$C_i^{**} = \begin{cases} C_i^* - \eta/(2n_*), & i \in I_n^*, \\ C_i^* + \eta/(2(n - n_*)), & i \in I_n \setminus I_n^*. \end{cases}$$

Тогда  $C_i^* > 0$  и

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i^{**} &= \sum_{i \in I_n^*} C_i^{**} + \sum_{i \in I_n \setminus I_n^*} C_i^{**} = \\ &= \sum_{i \in I_n^*} \left(C_i^* - \frac{\eta}{2n_*}\right) + \sum_{i \in I_n \setminus I_n^*} \left(C_i^* + \frac{\eta}{2(n - n_*)}\right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i \in I_n^*} C_i^* - \frac{\eta n^*}{2n^*} + \sum_{i \in I_n \setminus I_n^*} C_i^* + \frac{\eta(n - n^*)}{2(n - n^*)} = \sum_{i \in I_n} C_i^* = \mathcal{C},$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^n C_i^{**} = \mathcal{C}.$$

Кроме того, для  $i \in I_n \setminus I_n^*$

$$C_i^{**} \leq D + \frac{\eta}{2} = B_{n,\alpha}(\mathbf{C}) - \frac{\eta}{2}$$

и, следовательно,

$$\left( \max_{i \in I_n} C_i^{**} \right)^\alpha \leq \max_{i \in I_n} (C_i^{**})^\alpha = \left( (B_{n,\alpha}(\mathbf{C}))^{1/\alpha} - \frac{\eta}{2n^*} \right)^\alpha < B_{n,\alpha}(\mathbf{C}),$$

т.е.

$$\max_{i \in I_n} (C_i^{**})^\alpha < B_{n,\alpha}(\mathbf{C}) = \min \left\{ \max_{i \in I_n} C_i^\alpha \mid C_i \geq 0, \sum_{i=1}^n C_i = \mathcal{C} \right\},$$

что противоречит определению минимума.

Следующее утверждение является аналогом леммы 3.1.2 для сумм.

**Лемма 3.1.3** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$  и  $\mathcal{C} > 0$ . Тогда

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n C_i^\alpha \mid C_i \geq 0, \sum_{i=1}^n C_i = \mathcal{C} \right\} = n \left( \frac{\mathcal{C}}{n} \right)^\alpha.$$

Т. е. в множестве векторов  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  с неотрицательными координатами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{i \in I_n} C_i := \sum_{i=1}^n C_i = \mathcal{C}, \quad (3.3)$$

наименьшее значение величины

$$\sum_{i \in I_n} C_i^\alpha$$

достигается, когда все  $C_i$  равны между собой, т.е. когда

$$C_i = C_i^0 = \frac{\mathcal{C}}{n} \quad (i \in I_n).$$

**Доказательство.** При  $\alpha = 1$  утверждение теоремы очевидно. Пусть  $\alpha > 1$ .

Введем обозначения

$$\Psi(\mathbf{C}) = \sum_{i \in I_n} C_i^\alpha.$$

При  $\alpha > 1$  функция  $\Psi(\mathbf{C})$  выпукла вниз, поэтому на открытом симплексе (внутренность  $n$ -мерной пирамиды)

$$\left\{ \mathbf{C} \mid C_i > 0, \sum_{i \in I_n} C_i = \mathcal{C} \right\}$$

эта функция достигает своего экстремума в одной и только в одной точке. И этот экстремум – минимум. Следовательно, необходимое условие экстремума является и достаточным. Выпишем это условие, пользуясь хорошо известным методом Лагранжа отыскания условного экстремума.

Пусть

$$\mathcal{L}(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{C}) - \lambda \left( \sum_{i \in I_n} C_i - \mathcal{C} \right).$$

Необходимое и достаточное условие минимума таково

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_i} = 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i \in I_n} C_i = \mathcal{C} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha C_i^{\alpha-1} = \lambda & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i \in I_n} C_i = \mathcal{C}. \end{cases}$$

Единственное решение этой системы есть

$$C_i = C_i^0 = \frac{\mathcal{C}}{n} \quad (i \in I_n),$$

что и доказывает теорему.

Приведем еще несколько теорем, необходимых нам в дальнейшем.

**Теорема 3.1.4** Пусть функции  $f(t)$  и  $\phi(t)$  ( $f(t) \not\equiv 0$ ) непрерывны на отрезке  $[a, b]$  таковы, что

$$\int_a^b f(t)\phi(t)dt = 0. \quad (3.4)$$

Тогда при  $x \rightarrow 0$  выполняется соотношение

$$\|f + x\phi\|_2 = \|f\|_2(1 + O(x^2)),$$

где, как обычно,

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

норма функции  $f$  в гильбертовом пространстве  $L_2$  на промежутке  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Из равенств

$$\begin{aligned} \|f + x\phi\|_2^2 &= \int_a^b (f(t) + x\phi(t))^2 dt = \int_a^b (f(t))^2 dt + 2x \int_a^b f(t)\phi(t) dt + \\ &+ x^2 \int_a^b (\phi(t))^2 dt = \|f\|_2^2 + x^2 \|\phi\|_2^2 + 2x \int_a^b f(t)\phi(t) dt \end{aligned}$$

и из условия (3.4) следует, что

$$\|f + x\phi\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 + x^2 \|\phi\|_2^2} = \|f\|_2 \sqrt{1 + Mx^2},$$

где

$$M = (\|f\|_2 / \|\phi\|_2)^2.$$

Эту теорему дополняют следующие утверждения.

**Теорема 3.1.5** Пусть  $p \geq 1$ ,

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

и непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(t)$  и  $\phi(t)$  таковы, что

$$\int_a^b |f(t)|^{p-1} \text{sign}(f(t)) \phi(t) dt = 0, \quad (3.5)$$

и, кроме того, при  $p = 1$  мера множества точек  $t$ , для которых  $f(t) = 0$ , равна нулю. Тогда для всех действительных чисел  $x$  выполняется неравенство

$$\|f + x\phi\|_p \geq \|f\|_p.$$

**Доказательство** этой теоремы немедленно следует из критерия элемента наилучшего приближения в пространствах  $L_p[a, b]$ .

Можно доказать, что для пространств  $L_p[a, b]$  верен аналог теоремы 3.1.4, т.е. справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.1.6** Пусть  $p > 1$  и выполнены условия теоремы 3.1.5. Тогда найдется число  $M > 0$  такое, что

$$\|f\|_p \leq \|f + x\phi\|_p \leq \|f\|_p(1 + Mx^2).$$

Пусть функция  $\phi(t)$  в точках обращения в ноль функции  $f(t)$ , также имеет нули, кратность которых не меньше, чем кратность соответствующих нулей функции  $f(t)$ . Тогда найдется число  $M > 0$  такое, что при  $x \rightarrow 0$  будет выполняться соотношение

$$\|f\|_1 \leq \|f + x\phi\|_1 \leq \|f\|_1(1 + Mx^2).$$

Рассмотрим теперь аналог теоремы 3.1.4 в равномерной метрике (в пространстве  $C_{[a,b]}$ ). Этот случай для нас является наиболее важным.

**Теорема 3.1.7** Пусть функции  $f(t)$  и  $\phi(t)$  дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$ , и  $\mathcal{E}$  – множество всех точек  $t$  из отрезка  $[a, b]$  для которых выполняется равенство

$$\|f\|_\infty = \max_{u \in [a,b]} |f(u)| = |f(t)|.$$

Если  $\min_{t \in \mathcal{E}} |f''(t)| \neq 0$  и  $\phi(t) = 0$  для всех  $t \in \mathcal{E}$ , то найдется число  $M > 0$  такое, что для всех достаточно малых  $x \rightarrow 0$  выполняется соотношение

$$\|f\|_\infty \leq \|f + x\phi\|_\infty \leq \|f\|_\infty(1 + Mx^2).$$

**Доказательство.** Пусть

$$A_x = \|f + x\phi\|_\infty \quad A_0 = \|f\|_\infty.$$

Нам необходимо доказать, что

$$0 \leq A_x - A_0 = O(x^2).$$

Прежде всего, отметим, что если  $t \in \mathcal{E}$ , то  $|f(t)| = A_0$  и  $\phi(t) = 0$ . Поэтому для любого  $x$

$$A_x = \max_{t \in [a,b]} |f(t) + x\phi(t)| \geq \max_{t \in \mathcal{E}} |f(t) + x\phi(t)| = \max_{t \in \mathcal{E}} |f(t)| = A_0,$$

т.е. для всех  $x$  верно неравенство

$$A_x - A_0 \geq 0. \quad (3.6)$$

Пусть  $u_x$  – какая – нибудь точка из  $[a, b]$ , в которой

$$A_x = |f(u_x) + x\phi(u_x)|$$

и  $t_x$  – ближайшая к ней точка из множества  $\mathcal{E}$ . Для определенности будем считать, что  $u_x \geq t_x$ .

Ясно, что при малых  $x$  точка  $u_x$  лежит внутри интервала  $(a, b)$  и является точкой экстремума функции  $f(t) + x\phi(t)$ . Поэтому

$$f'(u_x) + x\phi'(u_x) = 0. \quad (3.7)$$

Кроме того, из определения множества  $\mathcal{E}$  следует, что

$$f'(t_x) = 0. \quad (3.8)$$

Отсюда и из условия теоремы (и того факта, что  $\phi(t_x) = 0$ ) получаем

$$A_x - A_0 = |f(u_x) - f(t_x) + x(\phi(u_x) - \phi(t_x))|. \quad (3.9)$$

Согласно формуле Тейлора, найдется точка  $\eta_x \in [u_x, t_x]$  такая, что

$$f(u_x) - f(t_x) = f'(t_x)h_x + \frac{1}{2}f''(\eta_x)h_x^2,$$

где  $h_x = u_x - t_x$ , что вместе с (3.8) позволяет записать

$$f(u_x) - f(t_x) = \frac{1}{2}f''(\eta_x)h_x^2$$

и

$$f(u_x) - f(u_x) + f'(u_x)h_x - \frac{1}{2}f''(\xi_x)h_x^2 = \frac{1}{2}f''(\eta_x)h_x^2,$$

где  $\xi_x \in [u_x, t_x]$ . Отсюда и из (3.7) следует, что найдется точка  $\theta_x \in [u_x, t_x]$  такая, что

$$x\phi'(u_x) = -f''(\theta_x)h_x,$$

Тогда для любой точки  $\theta_x \in [t_x, u_x]$  получаем

$$\begin{aligned} f(u_x) - f(t_x) &= \frac{1}{2}f''(\eta_x)h_x^2 = \frac{1}{2}(f''(\eta_x) - f''(\theta_x))h_x^2 + \frac{h_x}{2}f''(\theta_x)h_x = \\ &= -x\frac{1}{2}\phi'(u_x)h_x + M_x h_x^3, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$|M_x| \leq \frac{1}{2} \|f'''\|_\infty = N_1.$$

Кроме того,

$$\phi(u_x) - \phi(t_x) = \phi'(u_x)h_x + N_x h_x^2, \quad (3.11)$$

где

$$|N_x| \leq \frac{1}{2} \|\phi''\|_\infty = N_2.$$

Используя теперь (3.10) и (3.11) в (3.9), получаем соотношение

$$A_x - A_0 = |x| \frac{3}{2} \phi'(u_x) h_x + P_x h_x^2 (h_x + |x|),$$

где

$$|P_x| \leq \max\{N_1; N_2\} = N_3.$$

Теперь мы можем записать

$$A_x - A_0 = \frac{3(\phi'(u_x))^2}{2|f''(\theta_x)|} x^2 + P_x h_x^2 (h_x + |x|)$$

Отсюда и из того, что

$$h_x \leq 2|x| \|\phi'\|_\infty / m,$$

где

$$m = \min_{t \in \mathcal{E}} |f''(t)|$$

(из условия теоремы следует, что  $m \neq 0$ ), получаем, что равномерно по  $t$  выполняется соотношение

$$A_x - A_0 = \frac{3(\phi'(u_x))^2}{2|f''(\theta_x)|} x^2 + O(x^3) = \frac{(\phi'(t_x))^2}{2|f''(t_x)|} x^2 + O(x^3),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что на самом деле, мы доказали несколько больше, чем сформулировали в теореме. Нами доказано, что если функции  $f(x)$  и  $\phi(x)$  удовлетворяют условиям теоремы, то

$$\|f + x\phi\|_\infty = \|f\|_\infty + \frac{3x^2}{2} \max_{t \in E} \frac{(\phi'(t))^2}{f''(t)} + O(x^3). \quad (3.12)$$

Приведем некоторые примеры применения теорем 3.1.4 – 3.1.7.

**Следствие 3.1.8** Пусть непрерывная на  $[-1, 1]$  функция  $f(x)$  четна, а непрерывная на  $[-1, 1]$  функция  $\phi(x)$  нечетна. Тогда при  $x \rightarrow 0$  и всех  $p > 1$  выполняется соотношение

$$\|f + x\phi\|_p = \|f\|_p + O(x^2). \quad (3.13)$$

Если, кроме того, функция  $\phi(x)$  имеет нули в точках, где обращается в нуль  $f(x)$  (с той же кратностью), то соотношение (3.13) выполняется и при  $p = 1$ .

Всем этим условиям и условиям теоремы 3.1.7 удовлетворяют следующие пары функций:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - t^2, & \phi(t) &= t(1 - t^2), \\ f(t) &= t(1 - t^2), & \phi(t) &= (1 - t^2)t^2, \\ f(t) &= (1 - t^2)^2, & \phi(t) &= t(1 - t^2)^2 \end{aligned}$$

и др.

## 3.2 Предпосылки для хаусдорфовой метрики

Понимание причин, от которых все происходит значит гораздо более, чем простое знание факта.

*Г. Галилей*

В этом параграфе мы приведем доказательства основных утверждений, связанных с асимптотически оптимальным выбором узлов для максимумов. К ним, в конечном итоге, и сведутся задачи асимптотически оптимального выбора узлов при приближении гладких кривых различными видами сплайнов и подобных им технологических кривых, а вместе с этим и задачи о построении асимптотически оптимальной траектории движения инструмента в визуальной (хаусдорфовой) метрике.

Перед тем, как привести формулировки результатов, напомним некоторые определения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Пусть:

$$\Delta_n = \{0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \dots < t_{n-1,n} < t_{n,n} = T\} = \{t_{i,n}\}_{i=0}^n$$

– произвольное разбиение отрезка  $[0, t]$ ;

$$h_{i-1/2,n} = t_{i,n} - t_{i-1,n} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.14)$$

– переменный шаг разбиения;

$$h_n = \max\{h_{i-1/2,n} \mid i = 1, 2, \dots, n\} \quad (3.15)$$

– максимальный шаг разбиения;

для  $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$

$$\tau = (2t - (t_{i,n} + t_{i-1,n}))/h_{i-1/2,n} \quad (3.16)$$

– безразмерная переменная;

$$\omega(f, \delta) = \max\{|f(t_2) - f(t_1)| \mid t_1, t_2 \in [0, T], |t_2 - t_1| \leq \delta\}$$

– модуль непрерывности функции  $f$ .

Отметим некоторые основные свойства модуля непрерывности, необходимые нам в дальнейшей работе.

1. Для любой непрерывной на  $[\alpha, \beta]$  функции  $f(t)$  модуль непрерывности  $\omega(f, \delta)$  есть также непрерывная неубывающая на отрезке  $[0, \beta - \alpha]$  функция, такая, что  $\omega(f, 0) = 0$ .
2.  $\omega(f, \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f, \delta) \quad (\delta, \lambda > 0)$ .
3.  $\omega(f, \delta_1 + \delta_2) \leq \omega(f, \delta_1) + \omega(f, \delta_2)$   
(это свойство называют свойством полуаддитивности модуля непрерывности).
4. Если  $f$  – есть непрерывно – дифференцируемая на  $[\alpha, \beta]$  функция, то

$$\omega(f, \delta) \leq \|f'\|_\infty \delta. \quad (3.17)$$

**Теорема 3.2.1** Пусть  $\alpha > 0$  и функция  $f \in C_{[0,T]}$  такова, что мера множества ее нулей равна нулю,  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  произвольная последовательность разбиений отрезка  $[0, T]$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0.$$

$\xi_{i,n}$  – произвольные точки из промежутков  $[t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ , соответственно, и  $\xi = \{\xi_{i,n}\}_{i=1}^n$ .

Пусть, при  $n \rightarrow \infty$  для  $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$  равномерно по  $i$  и по  $t$  выполняется асимптотическое равенство

$$R(f, \Delta_n, t) = \phi(\tau) h_{i-1/2,n}^\alpha f(\xi_{i,n}) + O(h_{i-1/2,n}^\alpha \omega(f, h_{i-1/2,n})), \quad (3.18)$$

где  $\tau$  определено равенством (3.16), а  $\phi(\tau)$  некоторая фиксированная непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$  функция. Тогда

$$\|R(f, \Delta_n)\|_\infty = \max \{|R(f, \Delta_n, t)| \mid t \in [0, T]\} \geq \frac{\mathcal{B}}{n^\alpha} \|f\|_{1/\alpha} (1 + o(1)),$$

где

$$\|\Phi\|_\infty := \max \{|\Phi(t)| \mid t \in [0, T]\},$$

$$\mathcal{B} = \max \{|\phi(\tau)| \mid \tau \in [-1, 1]\},$$

и

$$\|f\|_{1/\alpha} = \left( \int_0^T |f(t)|^{1/\alpha} dt \right)^\alpha. \quad (3.19)$$

**Доказательство.** Пусть  $\omega_n = \omega(f, h_n)$ . Из соотношения (3.18) следует, что найдется число  $M > 0$  такое, что при всех  $n$  для  $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$

$$h_{i-1/2,n}^\alpha \max \{|f(\xi_{i,n})| \mid \phi(\tau) - M\omega_n; 0\} \leq$$

$$\leq |R(f, \Delta_n, t)| \leq h_{i-1/2,n}^\alpha (|f(\xi_{i,n})| \mid \phi(\tau) + M\omega_n). \quad (3.20)$$

Отсюда следует, что для  $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$

$$\|R(f, \Delta_n)\|_{C_{[t_{i-1,n}, t_{i,n}]}} = \max \{|R(f, \Delta_n, t)| \mid t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]\} \geq$$

$$\geq h_{i-1/2,n}^\alpha \max \{|f(\xi_{i,n})| \mid \phi(\tau) - M\omega_n \mid \tau \in [-1, 1]\} =$$

$$= h_{i-1/2,n}^\alpha (|f(\xi_{i,n})| \mid \max \{|\phi(\tau)| \mid \tau \in [-1, 1]\} - M\omega_n).$$

Таким образом

$$\|R(f, \Delta_n)\|_{C_{[t_{i-1,n}, t_{i,n}]}} \geq h_{i-1/2,n}^\alpha (\mathcal{B} |f(\xi_{i,n})| - M\omega_n) \geq 0. \quad (3.21)$$

Пусть

$$F_{i,n} = \max \{\mathcal{B} |f(\xi_{i,n})| - M\omega_n; 0\}. \quad (3.22)$$

Неравенство (3.21) позволяет записать

$$\|R(f, \Delta_n)\|_{C_{[t_{i-1,n}, t_{i,n}]}} \geq h_{i-1/2,n}^\alpha F_{i,n} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.23)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|R(f, \Delta_n)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \|R(f, \Delta_n)\|_{C_{[t_{i-1,n}, t_{i,n}]}} \geq \\ &\geq \max_{1 \leq i \leq n} h_{i-1/2,n}^\alpha F_{i,n}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Через  $\Phi_n(t) = \Phi_n(\Delta_n, t)$  обозначим кусочно – постоянную функцию с узлами в точках  $t_{i,n}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), определенную на полуинтервалах  $[t_{i-1,n}, t_{i,n})$  равенствами

$$\Phi_n(t) = F_{i,n}. \quad (3.25)$$

Тогда

$$h_{i-1/2,n}^\alpha F_{i,n} = \left( \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} \Phi_n^{1/\alpha} dt \right)^\alpha := C_i^\alpha,$$

и неравенство (3.24) примет вид

$$\|R(f, \Delta_n)\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} C_i^\alpha. \quad (3.26)$$

Отметим, что  $C_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и

$$\sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n \left( \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} \Phi_n^{1/\alpha} dt \right) = \int_0^T \Phi_n^{1/\alpha} dt := \mathcal{C}.$$

Из леммы 3.1.2 следует, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} C_i^\alpha \geq \left( \frac{\mathcal{C}}{n} \right)^\alpha = \frac{1}{n^\alpha} \left( \int_0^T \Phi_n^{1/\alpha} dt \right)^\alpha = \frac{1}{n^\alpha} \|\Phi_n\|_{1/\alpha}.$$

Для завершения доказательства теоремы 3.2.1 остается учесть, что если  $h_n \rightarrow 0$ , то (см. (3.23) и (3.17)) при  $n \rightarrow \infty$

$$\|\Phi_n - \mathcal{B}f\|_\infty \rightarrow 0,$$

и, следовательно,

$$\|\Phi_n\|_{1/\alpha} \rightarrow \|\mathcal{B}f\|_{1/\alpha} = \mathcal{B}\|f\|_{1/\alpha}.$$

Утверждения типа теоремы 3.2.1 в теории аппроксимации называются оценками снизу (в данном случае величины  $\|R(f, \Delta_n)\|_\infty$ ).

Следующее утверждение дает оценку сверху величины  $\|R(f, \Delta_n)\|_\infty$ .

**Теорема 3.2.2** Пусть  $M, \alpha > 0, 0 < \gamma < \alpha/(1 + \alpha), 0 < \mu < \gamma, f \in C^1_{[0, T]}$  и  $\varepsilon_n = \omega^\gamma(f, 1/n)$ .  $\{f_n(t)\}_{i=1}^n$  – последовательность кусочно-непрерывных на отрезке  $[0, T]$  функций таких, что

$$\|f - f_n\|_\infty \leq M\omega(f, n^{-\mu}). \quad (3.27)$$

Определим последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$ , (где  $\Delta_n^* = \{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$ ) следующими равенствами

$$\int_0^{t_{i,n}^*} (|f_n(t)|^{1/\alpha} + \varepsilon_n) dt = \frac{i}{n} \int_0^T (|f_n(t)|^{1/\alpha} + \varepsilon_n) dt \quad (3.28)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots).$$

Пусть  $\xi_{i,n}^* \in [t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и для  $t \in [t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняется соотношение

$$R(f, \Delta_n^*, t) = \phi(\tau)(h_{i-1/2,n}^*)^\alpha f(\xi_{i,n}^*) + O\left((h_{i-1/2,n}^*)^\alpha \omega(f, h_{i-1/2,n}^*)\right). \quad (3.29)$$

Тогда

$$\|R(f, \Delta_n^*)\|_\infty = \frac{\mathcal{B}}{n^\alpha} \|f\|_{1/\alpha} (1 + o(1)). \quad (3.30)$$

Пусть некоторая неотрицательная величина  $\rho(\Delta_n)$  зависит от разбиения  $\Delta_n$ .

Разбиение  $\Delta_n^{**}$  называется наилучшим (оптимальным) для  $\rho(\Delta_n)$ , если

$$\inf\{\rho(\Delta_n) \mid \Delta_n\} = \rho(\Delta_n^{**}).$$

Последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$  называется асимптотически оптимальной для величины  $\rho = \rho(\Delta_n)$ , если при  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение

$$\rho(\Delta_n^*) = \rho(\Delta_n^{**}) (1 + o(1)).$$

Из теоремы 3.2.1 следует, что если функция  $f(t)$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$ , и мера множества ее нулей равна нулю (в этом случае разбиения, у которых  $h_n \not\rightarrow 0$  заведомо не являются оптимальными по порядку и, тем более, не являются ни оптимальными, ни асимптотически оптимальными), то

$$\|R(f, \Delta_n^{**})\|_\infty \geq \frac{\mathcal{B}}{n^\alpha} \|f\|_{1/\alpha}.$$

Отсюда и из теоремы 3.2.2 следует, что узлы  $\{\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n\}_{n=1}^\infty$ , определенные равенствами (3.28) являются асимптотически оптимальными для величины  $\|R(f, \Delta_n)\|_\infty$ .

Этот факт имеет простое и наглядное представление.

Пусть задана фиксированная непрерывная на  $[-1, 1]$  функция  $\phi(\tau)$ . С помощью линейной замены переводим ее на отрезок  $[t_{i-1,n}, t_{i,n}]$  (это и есть  $\phi(t)$ ) и умножаем на число  $h_{i-1/2,n}^\alpha f(\xi_{i,n})$ .

С некоторой малой добавкой это и есть  $R(f, \Delta_n, t)$ . Для того, чтобы максимум модуля этой величины был (асимптотически) наименьшим, надо, чтобы максимумы модулей на элементарных отрезках были примерно одинаковыми. А для этого необходимо, чтобы величины  $h_{i-1/2,n}^\alpha f(\xi_{i,n})$  были примерно одинаковыми, или, что то же, чтобы примерно одинаковыми были величины  $h_{i-1/2,n}(f(\xi_{i,n}))^{1/\alpha}$ . Так как функция  $f(t)$  непрерывна, а максимальная длина промежутка  $[t_{i-1,n}, t_{i,n}]$  стремится к нулю, то величина  $(f(\xi_{i,n}))^{1/\alpha}$  мало зависит от выбора точек  $\xi_{i,n}$ .

Теперь вспомним, что по теореме 3.1.1

$$\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} (f(t))^{1/\alpha} dt = h_{i-1/2,n}(f(\xi_{i,n}))^{1/\alpha}.$$

Так что величина  $\|R(f, \Delta_n)\|_\infty$  минимальна, если величины

$$\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} (f(t))^{1/\alpha} dt \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

почти одинаковы. Последние равенства можно переписать так

$$\int_0^{t_{i,n}} (f(t))^{1/\alpha} dt = \frac{i}{n} \int_0^T (f(t))^{1/\alpha} dt \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.31)$$

Функцию  $(f(t))^{1/\alpha}$  и подобные ей функции в равенствах вида (3.31) (или (3.28)) будем называть функциями, управляющими сгущением узлов. Более сложный вид функции, управляющей сгущением узлов в (3.28), объясняется тем, что в качестве функции  $f(t)$  в дальнейшем будут фигурировать величины типа кривизны кривой, изменения кривизны кривой и им подобные. Как правило, вычислить такие величины мы точно не можем. Теорема 3.2.2 утверждает, что для нахождения асимптотически оптимальной последовательности разбиений достаточно иметь в распоряжении даже "плохое" приближение функции  $(f(t))^{1/\alpha}$ .

Наличие в управляющей функции (3.28) величины  $\varepsilon_n$  (мы увидим в дальнейшем, что ее можно заменить более простой величиной) связано с тем, что если функция  $(f(t))^{1/\alpha}$  равна нулю или близка к нулю на некотором интервале  $[\alpha, \beta]$ , то для того, чтобы величины  $h_{i-1/2,n}(f(\xi_{i,n}))^{1/\alpha}$  были примерно одинаковыми, необходимо, чтобы длина отрезка разбиения  $[t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ , для которого  $\xi_{i,n} \in [\alpha, \beta]$ , была большой. В этом случае асимптотические равенства нарушаются (асимптотику можно использовать лишь когда  $R(f, \Delta_n, t) \rightarrow 0$ ). Впрочем, это видно и непосредственно из (3.31).

Действительно, если случится так, что найдется отрезок  $(\alpha, \beta)$ , на котором  $(f(t))^{1/\alpha} = 0$ , то при любом  $n$  хотя бы один из элементарных промежутков  $[t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]$  целиком содержит отрезок  $[\alpha, \beta]$ , и, следовательно, максимальный промежуток разбиения не стремится к нулю.

Равенства (3.28) имеют простой геометрический смысл. Во – первых, уже сейчас заметим, что в дальнейшем в качестве  $f_n(t)$  у нас будут фигурировать кусочно – постоянные функции. Равенства (3.28) утверждают, что для нахождения асимптотически оптимальной последовательности узлов достаточно выполнить следующие операции

1. К кусочно – постоянной функции  $(f_n(t))^{1/\alpha}$  прибавить добавку  $\varepsilon_n$  (см. рис. 3.1);

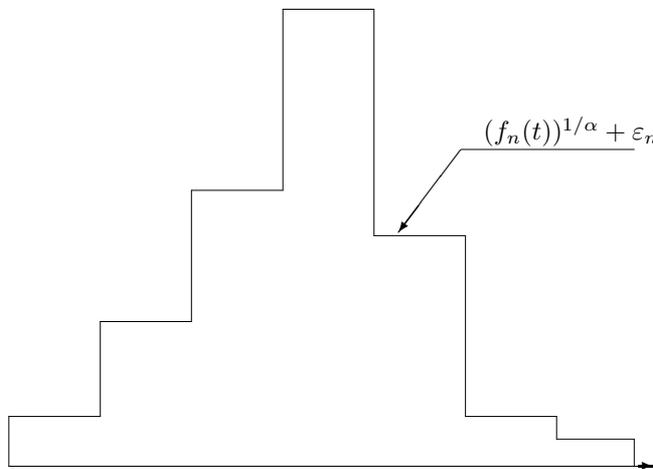


Рис. 3.1:

2. Построить монотонно – возрастающую функцию (см.рис.3.2)

$$\Psi(t) = \int_0^t (|f_n(t)|^{1/\alpha} + \varepsilon_n) dt;$$

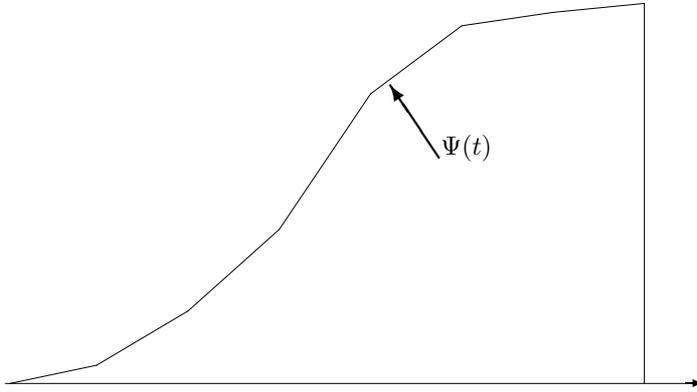


Рис. 3.2:

3. Разбиваем отрезок  $[0, \Psi(T)]$  на  $n$  равных частей точками  $y_i = i\Psi(T)/n$  и находим точки пересечения прямых  $y = y_i$  с графиком функции  $y = \Psi(t)$ . Проекции этих точек пересечения на отрезок  $[0, T]$  и есть узлы  $t_{i,n}^*$ . (рис. 3.3).

Если функция  $f(t)$  является непрерывно – дифференцируемой на отрезке  $[0, T]$ , то согласно (3.17) выполняется неравенство

$$\omega\left(f, \frac{1}{n^\gamma}\right) \leq \|f'\|_\infty \frac{1}{n^\gamma},$$

в этом случае формулировку теоремы 3.2.2 можно упростить. Этот факт можно сформулировать в следующем виде.

**Следствие 3.2.3** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $M > 0$ ,  $0 < \gamma < \alpha/(\alpha + 1)$ , функция  $f \in C_{[0,T]}^1$  такова, что мера множества ее нулей равна нулю, и последовательность кусочно – непрерывных на  $[0, T]$  функций  $\{f_n(t)\}_{i=1}^n$  такова, что

$$\|f - f_n\|_\infty \leq M \frac{1}{n^\gamma}. \quad (3.32)$$

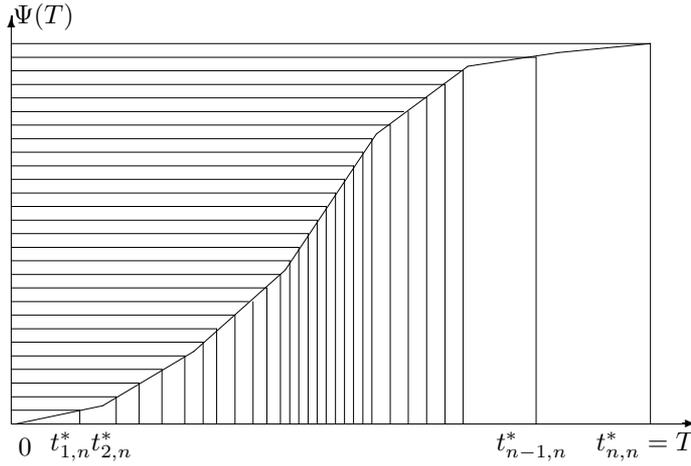


Рис. 3.3:

Последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty = \{\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n\}_{n=1}^\infty$  определим следующими равенствами

$$\int_0^{t_{i,n}^*} \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt = \frac{i}{n} \int_0^T \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt \quad (3.33)$$

$(i = 0, 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots).$

Пусть  $\xi_{i,n}^* \in [t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), и для  $t \in [t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняется соотношение

$$R(f, \Delta_n^*, t) = \phi(\tau)(h_{i-1/2,n}^*)^\alpha f(\xi_{i,n}^*) + O\left(\phi(\tau)(h_{i-1/2,n}^*)^{\alpha+1}\right). \quad (3.34)$$

Тогда

$$\|R(f, \Delta_n^*)\|_\infty \leq \frac{\mathcal{B}}{n^\alpha} \|f\|_{1/\alpha} (1 + o(1)). \quad (3.35)$$

**Доказательство** теоремы 3.2.2 в идейном плане мало отличается от доказательства следствия 3.2.3. Однако техника доказательства теоремы на много более сложная и громоздкая (в основном из-за оперирования с модулем непрерывности). В связи с этим, мы приведем полное доказательство лишь для следствия.

Из равенств (3.33) следует, что если

$$\Psi_n = \int_0^T \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt, \quad (3.36)$$

то

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1,n}^*}^{t_{i,n}^*} \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt &= \int_0^{t_{i,n}^*} \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt - \\ &- \int_0^{t_{i-1,n}^*} \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt = \frac{i}{n} \Psi_n - \frac{i-1}{n} \Psi_n = \frac{1}{n} \Psi_n. \end{aligned}$$

То есть

$$\int_{t_{i-1,n}^*}^{t_{i,n}^*} \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt = \frac{1}{n} \Psi_n. \quad (3.37)$$

Отсюда и из теоремы о средних значениях для интегралов следует, что найдутся точки  $\eta_{i,n}^* \in [t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]$  такие, что

$$\left( |f_n(\eta_{i,n}^*)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} h_{i-1/2,n}^* = \frac{1}{n} \Psi_n$$

или, что то же

$$\left( |f_n(\eta_{i,n}^*)| + \frac{1}{n^\gamma} \right) (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha = \frac{1}{n^\alpha} \Psi_n^\alpha. \quad (3.38)$$

Из условия (3.32) следует асимптотическое равенство

$$|f_n(\eta_{i,n}^*)| = |f(\eta_{i,n}^*)| + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Кроме того

$$\begin{aligned} |f(\eta_{i,n}^*)| - |f(\xi_{i,n}^*)| &\leq |f(\eta_{i,n}^*) - f(\xi_{i,n}^*)| \leq \omega(f, |\eta_{i,n}^* - \xi_{i,n}^*|) \leq \\ &\leq \omega(f, h_{i-1/2,n}^*), \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу неравенства (3.17), равномерно по  $i$  выполняется асимптотическое равенство

$$|f(\eta_{i,n}^*)| = |f(\xi_{i,n}^*)| + O(h_{i-1/2,n}^*). \quad (3.39)$$

Кроме того, если

$$\Psi = \int_0^T |f(t)|^{1/\alpha} dt,$$

то в силу условия (3.32)

$$\Psi_n = \int_0^T \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt \leq \int_0^T \left( |f(t)| + \frac{M}{n^\gamma} + \frac{1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt =$$

$$= \int_0^T \left( |f(t)| + \frac{M+1}{n^\gamma} \right)^{1/\alpha} dt.$$

Т.е.

$$\Psi_n \leq \int_0^T |f(t)|^{1/\alpha} dt + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) = \Psi + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Аналогично устанавливается и неравенство

$$\Psi_n \geq \Psi + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Таким образом

$$\Psi_n = \Psi + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Следовательно,

$$\Psi_n^\alpha = \Psi^\alpha + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Сопоставляя соотношения (3.38) и (3.39), приходим к выводу, что равномерно по  $i$  выполняется асимптотическое равенство

$$\left( |f(\xi_{i,n}^*)| + \frac{1}{n^\gamma} \right) (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha = \left( \frac{\Psi}{n} \right)^\alpha + O\left( \frac{1}{n^{\alpha+\gamma}} \right),$$

или (тоже равномерно по  $i$ )

$$|f(\xi_{i,n}^*)| (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha = \left( \frac{\Psi}{n} \right)^\alpha + O\left( \frac{1}{n^{\alpha+\gamma}} + (h_{i-1/2,n}^*)^{\alpha+1} \right). \quad (3.40)$$

Перейдем теперь непосредственно к оценке величины (3.34). Для этого прежде всего отметим, что в силу (3.17), равномерно по  $i$  выполняется порядковое соотношение

$$\omega(f, h_{i-1/2,n}^*) = O(h_{i-1/2,n}^*).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|R(f, \Delta_n^*)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in [t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]} |R(f, \Delta_n^*, t)| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left( \left( \max_{|\tau| \leq 1} |\Psi(\tau)| \right) |f(\xi_{i,n}^*)| (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha + O\left( (h_{i-1/2,n}^*)^{\alpha+1} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \mathcal{B} |f(\xi_{i,n}^*)| (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha + O((h_{i-1/2,n}^*)^{\alpha+1}) \right\} = \\
&= \mathcal{B} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |f(\xi_{i,n}^*)| (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha + O((h_{i-1/2,n}^*)^{\alpha+1}) \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.40) следует, что найдется константа  $M^*$  такая, что

$$\begin{aligned}
&\|R(f, \Delta^*)\|_\infty = \\
&= \mathcal{B} \left( \left( \frac{\Psi}{n} \right)^\alpha + M^* \left( \frac{(h_{i-1/2,n}^*)^\alpha}{n^\gamma} + \frac{1}{n^{\alpha+\gamma}} + (h_{i-1/2,n}^*)^{\alpha+1} \right) \right). \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Оценим величину  $h_{i-1/2,n}^*$ .

Из (3.40) следует, что найдется постоянная  $M$ , такая что

$$\begin{aligned}
&\left( |f(\xi_{i,n}^*)| + \frac{1}{n^\gamma} \right) (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha = \left( \|f\|_{C[t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]} + \right. \\
&\left. + M h_{i-1/2,n}^* + \frac{1}{n^\gamma} \right) (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha = \left( \frac{\Psi}{n} \right)^\alpha + O\left( \frac{1}{n^{\alpha+\gamma}} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда и из выбора параметра  $\alpha$  получаем

$$(h_{i-1/2,n}^*)^\alpha = \left( \frac{\Psi}{n} \right)^\alpha \frac{1}{\|f\|_{C[t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]}} + O\left( \frac{1}{n^{\alpha+\gamma}} \right).$$

Остается доказать, что при наших предположениях о числе  $\gamma$ , при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  выполняется соотношение

$$(h_{i-1/2,n}^*)^{\alpha+1} = o(n^{-\alpha}). \quad (3.42)$$

Докажем, что это так. Из (3.40) следует, что равномерно по  $i$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^\gamma} (h_{i-1/2,n}^*)^\alpha \leq \left( \frac{\Psi}{n} \right)^\alpha + O\left( \frac{1}{n^{\alpha+\gamma}} \right).$$

Отсюда следует, что найдется число  $M^{**}$  такое, что

$$(h_{i-1/2,n}^*)^\alpha \leq (M^{**})^{\alpha/(\alpha+1)} \frac{n^\gamma}{n^\alpha}$$

или

$$(h_{i-1/2,n}^*)^{\alpha+1} \leq M^{**} \frac{n^{\gamma(\alpha+1)/\alpha}}{n^{\alpha+1}} = \frac{M^{**}}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{1-\gamma(\alpha+1)/\alpha}}$$

и, следовательно, для  $0 < \gamma < \alpha/(\alpha+1)$  выполняется соотношение (3.42), которое вместе с (3.41) и завершает доказательство следствия 3.2.3.

Покажем, что если функция  $f(t)$  дважды непрерывно дифференцируема и не обращается в ноль на промежутке  $[0, T]$ , то теорему 3.2.1 и следствие 3.2.3 можно существенно уточнить. В этом случае будет справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.2.4** Пусть  $\alpha > 0$ , функция  $f(x)$  – дважды непрерывно дифференцируема и не имеет нулей на отрезке  $[0, T]$ ,  $\Delta_n$  произвольное разбиение отрезка  $[0, T]$  такое, что  $h_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и функции  $\phi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$  ( $\tau \in [-1, 1]$ ) удовлетворяют условиям теоремы 3.1.7.

Пусть, кроме того, для  $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$  равномерно по  $t$  по  $i$  выполняется соотношение

$$\begin{aligned} R(f, \Delta_n, t) &= \phi(\tau)(h_{i-1/2,n})^\alpha f(t_{i-1/2,n}) + \\ &+ \psi(\tau)h_{i-1/2,n}^{\alpha+1} f'(t_{i-1/2,n}) + O(h_{i-1/2,n}^{\alpha+2}), \end{aligned} \quad (3.43)$$

где

$$t_{i-1/2,n} = (t_{i-1,n} + t_{i,n})/2.$$

Тогда

$$\|R(f, \Delta_n^*)\|_\infty \geq \frac{\mathcal{B}}{n^\alpha} \|f\|_{1/\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right).$$

Кроме того, если последовательность разбиений  $\{\Delta_n^{**}\}_{n=1}^\infty$  определена равенствами

$$\int_0^{t_{i,n}^{**}} |f(t)|^{1/\alpha} dt = \frac{i}{n} \int_0^T |f(t)|^{1/\alpha} dt \quad (3.44)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots),$$

то

$$\|R(f, \Delta_n^{**})\|_\infty \leq \frac{\mathcal{B}}{n^\alpha} \|f\|_{1/\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right). \quad (3.45)$$

Здесь величины  $\mathcal{B}$ ,  $\|f\|_{1/\alpha}$  и  $\tau$  определяются так же, как и в теореме 3.2.1

**Доказательство.** Так как  $f(t)$  не обращается в ноль на промежутке  $[0, T]$ , то, в силу теоремы 3.1.7 (см. (3.12)), при  $h_n \rightarrow 0$  равномерно по  $i$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & \max_{|\tau| \leq 1} |\phi(\tau)f(t_{i-1/2,n}) + \psi(\tau)f'(t_{i-1/2,n})h_{i-1/2,n}| = \\ & = |f(t_{i-1/2,n})| \left\| \phi + \frac{f'(t_{i-1/2,n})}{f(t_{i-1/2,n})} h_{i-1/2,n} \psi \right\|_{\infty [-1,1]} = \\ & = \mathcal{B}|f(t_{i-1/2,n})|(1 + O(h_{i-1/2,n}^2)) = \mathcal{B}|f(t_{i-1/2,n})| + O(h_{i-1/2,n}^2). \end{aligned}$$

Поэтому для любого разбиения  $\Delta_n$  такого, что  $h_n \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & \|R(f, \Delta_n)\|_{\infty [t_{i-1,n}, t_{i,n}]} = \\ & = h_{i-1/2,n}^\alpha \max_{|\tau| \leq 1} |\phi(\tau)f(t_{i-1/2,n}) + \psi(\tau)h_{i-1/2,n}f'(t_{i-1/2,n})| + O(h_{i-1/2,n}^{\alpha+2}) = \\ & = h_{i-1/2,n}^\alpha \left( \mathcal{B}|f(t_{i-1/2,n})| + O(h_{i-1/2,n}^\alpha) \right) + O(h_{i-1/2,n}^{\alpha+2}) \\ & = \mathcal{B}h_{i-1/2,n}^\alpha |f(t_{i-1/2,n})| + O(h_{i-1/2,n}^{\alpha+2}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\|R(f, \Delta_n)\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \mathcal{B} \left( h_{i-1/2,n}^\alpha |f(t_{i-1/2,n})| + O(h_{i-1/2,n}^{\alpha+2}) \right). \quad (3.46)$$

Если  $t_{i,n}^0 = Ti/n$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), то

$$\|R(f, \Delta_n^0)\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \mathcal{B} \left( \frac{T}{n} \right)^\alpha |f(t_{i-1/2,n}^0)| + O\left( \frac{1}{n^{\alpha+2}} \right) \right) = O\left( \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Кроме того, из (3.46) следует, что если

$$M = \max_{t \in [0, T]} |f(t)|, \quad m = \min_{t \in [0, T]} |f(t)|,$$

то для любого разбиения  $\Delta_n$  и для любого  $0 < \varepsilon < m$  при достаточно больших  $n$  будут выполняться неравенства

$$\mathcal{B}(m - \varepsilon)h_n = \mathcal{B}(m - \varepsilon) \max_{1 \leq i \leq n} h_{i-1/2,n}^\alpha \leq$$

$$\leq \|R(f, \Delta_n)\|_\infty \leq \mathcal{B}(M + \varepsilon) \max_{1 \leq i \leq n} h_{i-1/2,n}^\alpha = \mathcal{B}(M + \varepsilon) h_n.$$

Отсюда и из того, что  $\|R(f, \Delta_n)\|_\infty = O(n^{-\alpha})$ , следует, что достаточно рассмотреть лишь те последовательности разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ , для которых при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  выполняется асимптотическое равенство

$$\|R(f, \Delta_n)\|_\infty = \mathcal{B} \max_{1 \leq i \leq n} |f(t_{i-1/2,n})| h_{i-1/2,n}^\alpha + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \quad (3.47)$$

и

$$h_n = O(1/n). \quad (3.48)$$

Для таких разбиений согласно формуле Тейлора

$$\begin{aligned} & \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |f(t)|^{1/\alpha} dt = \left| \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} f(t)^{1/\alpha} dt \right| = \\ & = \left| \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} \left[ (f(t_{i-1/2,n}))^{1/\alpha} + \frac{1}{\alpha} f(t_{i-1/2,n})^{1/\alpha-1} f'(t_{i-1/2,n})(t - \right. \right. \\ & \left. \left. - t_{i-1/2,n}) \right] dt \right| + O(h_{i-1/2,n}^3) = |f(t_{i-1/2,n})|^{1/\alpha} h_{i-1/2,n} + O(h_{i-1/2,n}^3) = \\ & = |f(t_{i-1/2,n})|^{1/\alpha} h_{i-1/2,n} (1 + O(h_{i-1/2,n}^2)) = \\ & = |f(t_{i-1/2,n})|^{1/\alpha} h_{i-1/2,n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Последнее следует из того, что  $f(t) \geq m > 0$  для  $t \in [0, T]$  и из соотношения (3.48).

Таким образом, для любой асимптотически оптимальной последовательности разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  (и даже оптимальной по порядку) выполняется асимптотические равенства

$$\begin{aligned} & \left( \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |f(t)|^{1/\alpha} dt \right)^\alpha = \\ & = \left( |f(t_{i-1/2,n})|^{1/\alpha} h_{i-1/2,n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right)^\alpha = \\ & = |f(t_{i-1/2,n})| h_{i-1/2,n}^\alpha \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \end{aligned}$$

$$= |f(t_{i-1/2,n})| h_{i-1/2,n}^\alpha + O\left(h_{i-1/2,n}^\alpha \frac{1}{n^2}\right)$$

или

$$|f(t_{i-1/2,n})| h_{i-1/2,n}^\alpha = \left( \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |f(t)|^{1/\alpha} dt \right)^\alpha + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right).$$

Отсюда и из (3.47) следует, что если выполнены условия теоремы 3.2.4, и, последовательность разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  оптимальна хотя бы по порядку (т.е. для нее  $\|R(f, \Delta_n)\|_\infty = O(n^\alpha)$ ), то

$$\|R(f, \Delta_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |f(t)|^{1/\alpha} dt \right)^\alpha + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right). \quad (3.50)$$

Полагая

$$C_i = \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |f(t)|^{1/\alpha} dt \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

в лемме 3.1.2, и, замечая, что при этом

$$\sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |f(t)|^{1/\alpha} dt = \int_0^T |f(t)|^{1/\alpha} dt = \|f\|_{1/\alpha}^{1/\alpha},$$

немедленно получаем оценку снизу в теореме.

Если же узлы  $\{t_{i,n}^{**}\}_{i=1}^n$  выбраны из условий (3.44), то

$$\int_{t_{i-1,n}^{**}}^{t_{i,n}^{**}} |f(t)|^{1/\alpha} dt = \frac{1}{n} \int_0^T |f(t)|^{1/\alpha} dt = \frac{1}{n} \|f\|_{1/\alpha}^{1/\alpha},$$

что вместе с (3.50) и доказывает оценку сверху (неравенство (3.45)), а с ним и утверждение теоремы.

### 3.3 Предпосылки для интегральных метрик

Доказательство, которое не является строгим – ничто.

*А. Пуанкаре*

Здесь мы приведем результаты, аналогичные результатам предыдущего параграфа. В нем минимизировались величины вида

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left( f(\xi_{i,n}) h_{i-1/2,n}^\alpha + O(h_{i-1/2,n}^\alpha a_{i,n}) \right).$$

В данном параграфе мы рассмотрим задачу минимизации сумм

$$\sum_{i=1}^n \left( f(\xi_{i,n}) h_{i-1/2,n}^\alpha + O(h_{i-1/2,n}^\alpha a_{i,n}) \right).$$

Это позволит в дальнейшем решать задачи асимптотически оптимального выбора узлов при восстановлении кривых различными видами сплайнов в интегральных метриках.

Мы убедились, что в основе всех результатов лежит лемма 3.1.2 и теорема о средних значениях для интегралов. Аналогичная ситуация и здесь. Только базой всех результатов этого параграфа является лемма 3.1.3.

Далее мы сохраняем все обозначения параграфа 3.2.

Аналог теоремы 3.2.1 для сумм дает следующее утверждение.

**Теорема 3.3.1** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $f \in C_{[0,T]}$ ,  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  – произвольная последовательность разбиений отрезка  $[0, T]$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0, \quad (3.51)$$

и  $\xi_{i,n}$  – произвольные точки из промежутков  $[t_{i-1,n}, t_{i,n}]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), а  $\xi = \{\xi_{i,n}\}_{i=1}^n$ .

Пусть, при  $n \rightarrow \infty$  (для  $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ ) равномерно по  $i$  и по  $t$  выполняются условия

$$R(f, \Delta_n, t) = \phi(\tau) h_{i-1/2,n}^\alpha f(\xi_{i,n}) + O(h_{i-1/2,n}^\alpha \omega(f, h_{i-1/2,n})), \quad (3.52)$$

где  $\tau$  определено равенствами (3.16), а  $\phi(\tau)$  некоторая фиксированная непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$  функция.

Тогда

$$\|R(f, \Delta_n)\|_p \geq \frac{\mathcal{B}_p}{n^{\alpha-1}} \|f\|_\beta (1 + o(1)), \quad (3.53)$$

где  $\beta = 1/(\alpha + 1/p)$ , и для любого  $q > 0$

$$\|f\|_q = \left( \int_0^T |f(t)|^q dt \right)^{1/q} \quad (3.54)$$

и

$$\mathcal{B}_p = \|\phi\|_{p[-1,1]} = \left( \int_{-1}^1 |\phi(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}. \quad (3.55)$$

**Доказательство.** Из соотношения (3.52) следует, что найдется число  $M > 0$  такое, что при всех  $n$  для  $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$

$$R(f, \Delta_n, t) \geq \max h_{i-1/2,n}^\alpha \{ \phi(\tau) f(\xi_{i,n}) - M\omega_n, 0 \},$$

где  $\omega_n = \omega(f, h_n)$  – значение модуля непрерывности функции  $f$  на максимальном шаге.

Отсюда следует, что найдется число  $Q > 0$ , такое, что при всех  $i$  и  $n$  будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \|R(f, \Delta_n)\|_p^p &= \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |R(f, \Delta_n, t)|^p dt \geq \\ &\geq h_{i-1/2,n}^{p\alpha} F_{i,n}^p \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |\phi(\tau)|^p d\tau, \end{aligned}$$

где

$$F_{i,n} = \max\{f(\xi_{i,n}) - Q\omega_n, 0\}.$$

Учитывая теперь, что

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |\phi(\tau)|^p d\tau &= \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |\phi(h_{i-1/2,n}^{-1}(2t - t_{i-1,n} - t_{i,n}))|^p dt = \\ &= h_{i-1/2,n} \int_{-1}^1 |\phi(\tau)|^p d\tau = h_{i-1/2,n} \mathcal{B}_p^p, \end{aligned}$$

получаем

$$\|R(f, \Delta_n)\|_p^p = \sum_{i=1}^n \|R(f, \Delta_n)\|_{p[t_{i-1,n}, t_{i,n}]}^p \geq \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_p^p F_{i,n}^p h_{i-1/2,n}^{\alpha p+1}. \quad (3.56)$$

Как и в теореме 3.1.1, обозначим через  $\Phi_n(t) = \Phi_n(\Delta_n, t)$  – кусочно – постоянную функцию с узлами в точках  $t_{i,n}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), определенную на интервалах  $[t_{i-1,n}, t_{i,n}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) равенствами

$$\Phi_n(t) = F_{i,n}.$$

Тогда

$$F_{i,n}^p h_{i-1/2,n}^{\alpha p+1} = \left( \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} \Phi_n^{p/(p\alpha+1)} dt \right)^{p\alpha+1} := C_{i,n}^{p\alpha+1}.$$

В этом случае неравенство (3.56) примет вид

$$\|R(f, \Delta_n)\|_p^p \geq \mathcal{B}_p^p \sum_{i=1}^n C_{i,n}^{p\alpha+1}. \quad (3.57)$$

Из леммы 3.1.3 следует, что

$$\sum_{i=1}^n C_{i,n}^{p\alpha+1} \geq \frac{(\|\Phi_n\|_\beta^\beta)^{p\alpha+1}}{n^{p\alpha}} = \frac{\|\Phi_n\|_\beta^p}{n^{p\alpha}}.$$

Отсюда и из неравенства (3.57) получаем

$$\|R(f, \Delta_n)\|_p^p \geq \mathcal{B}_p \frac{\|\Phi_n\|_\beta^p}{n^{p\alpha}}$$

и, следовательно,

$$\|R(f, \Delta_n)\|_p \geq \mathcal{B}_p \frac{\|\Phi_n\|_\beta}{n^\alpha}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается учесть, что в силу (3.51)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n\|_\beta = \|f\|_\beta.$$

Аналогично следствию 3.2.3 устанавливается следующий его аналог для сумм.

**Теорема 3.3.2** Пусть  $M > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $f \in C_{[0,T]}^1$ ,  $0 < \gamma < (p\alpha + 1)/(p\alpha + 2)$  и последовательность кусочно – непрерывных на  $[0, T]$  функций  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  такова, что

$$\|f - f_n\|_\infty \leq Mn^{-\gamma}, \quad (3.58)$$

а последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty = \{\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n\}_{n=1}^\infty$  определяется из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}^*} \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^\beta dt = \frac{i}{n} \int_0^T \left( |f_n(t)| + \frac{1}{n^\gamma} \right)^\beta dt \quad (3.59)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Пусть  $\xi_{i,n}^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – произвольные точки из промежутков  $[t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]$ , соответственно, и для  $t \in [t_{i-1,n}^*, t_{i,n}^*]$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняется соотношение

$$R(f, \Delta_n^*, t) = \phi(\tau)(h_{i-1/2,n}^*)^\alpha f(\xi_{i,n}^*) + O((h_{i-1/2,n}^*)^\alpha \omega(f, h_{i-1/2,n}^*)).$$

Тогда

$$\|R(f, \Delta_n^*)\|_p \leq \frac{\mathcal{B}_p}{n^\alpha} \|f\|_\beta \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (3.60)$$

**Доказательство.** Аналогично тому, как получено соотношение (3.40), устанавливается, что если узлы  $t_{i,n}^*$  выбраны исходя из равенств (3.59), то при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  и  $t$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & \left( |f(\xi_{i,n}^*)|^p + \frac{1}{n^\gamma} \right) (h_{i-1/2,n}^*)^{p\alpha+1} = \\ & = \left( \int_0^T |f(t)|^{p/(p\alpha+1)} dt \right)^{p\alpha+1} + O\left( n^{-p\alpha+1+\gamma} + (h_{i-1/2,n}^*)^{p\alpha+2} \right) = \\ & = \frac{\|f\|_\beta^p}{n^{p\alpha+1}} + O\left( n^{-p\alpha+1+\gamma} + (h_{i-1/2,n}^*)^{p\alpha+2} \right). \end{aligned}$$

Аналогично (3.42) устанавливается, что если число  $\gamma$  таково, что  $0 < \gamma < (p\alpha + 1)/(p\alpha + 2)$ , то равномерно по  $i$  имеет место асимптотическое равенство

$$(h_{i-1/2,n}^*)^{p\alpha+2} = o(n^{-p\alpha-1}). \quad (3.61)$$

Следовательно, при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  будут выполняться и следующие асимптотические равенства

$$\left( |f(\xi_{i,n}^*)|^p + \frac{1}{n^\gamma} \right) (h_{i-1/2,n}^*)^{p\alpha+1} = \frac{\|f\|_\beta^p}{n^{p\alpha+1}} (1 + O(n^{-1})). \quad (3.62)$$

Кроме того, из (3.52) следует, что найдется число  $M > 0$  такое, что при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $t$  и по  $i$  будет

$$\begin{aligned} |R(f, \Delta_n^*, t)|^p & \leq |\phi(\tau)|^p (h_{i-1/2,n}^*)^{p\alpha} |f(\xi_{i,n}^*)|^p + M (h_{i-1/2,n}^*)^{p\alpha+p} = \\ & = \frac{1}{h_{i-1/2,n}^*} |\phi(\tau)|^p (h_{i-1/2,n}^*)^{p\alpha+1} |f(\xi_{i,n}^*)|^p + o\left( \frac{1}{n^{p\alpha+1}} \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь соотношением (3.62), получаем, что равномерно по  $t$  и по  $i$

$$|R(f, \Delta_n^*, t)|^p \leq |\phi(\tau)|^p \frac{1}{h_{i-1/2,n}^*} \frac{\|f\|_\beta^p}{n^{p\alpha+1}} (1 + o(1)) + o\left( \frac{1}{n^{p\alpha+1}} \right),$$

т.е. найдутся последовательности  $\sigma_n \rightarrow 0$  и  $\delta_n \rightarrow 0$  (при  $n \rightarrow \infty$ ) такие, что для равномерно по  $t$  и  $i$  будут выполняться асимптотические неравенства

$$|R(f, \Delta_n^*, t)|^p \leq |\phi(\tau)|^p \frac{1}{h_{i-1/2,n}^*} \frac{\|f\|_\beta^p}{n^{p\alpha+1}} (1 + \delta_n) + \sigma_n \frac{1}{n^{p\alpha+1}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\|R(f, \Delta_n)\|_p^p &= \sum_{i=1}^n \|R(f, \Delta_n)\|_p^p|_{[t_{i-1,n}, t_{i,n}]} \leq \\
&\leq \frac{\|f\|_\beta^p}{n^{p\alpha+1}} (1 + \delta_n) \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_{i-1/2,n}^*} \int_{t_{i-1,n}^*}^{t_{i,n}^*} |\phi(\tau)| dt + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_n}{n^{p\alpha+1}} \int_{t_{i-1,n}^*}^{t_{i,n}^*} dt = \\
&= \frac{\|f\|_\beta^p}{n^{p\alpha+1}} (1 + \delta_n) \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 |\phi(\tau)| d\tau + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_n}{n^{p\alpha+1}} h_{i-1/2,n}^* = \\
&= \frac{\|f\|_\beta^p}{n^{p\alpha+1}} (1 + \delta_n) n \mathcal{B}_p^p + \frac{\sigma_n}{n^{p\alpha+1}} T = \left( \mathcal{B}_p \frac{\|f\|_\beta}{n^\alpha} \right)^p \left( 1 + \delta_n + \frac{\sigma_n T}{\|f\|_\beta^p \mathcal{B}_p^p n} \right),
\end{aligned}$$

т.е.

$$\|R(f, \Delta_n)\|_p^p \leq \left( \mathcal{B}_p \frac{\|f\|_\beta}{n^\alpha} \right)^p (1 + o(1)),$$

что эквивалентно утверждению теоремы.

Получим теперь для сумм аналог теоремы 3.2.4.

**Теорема 3.3.3** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $f(x)$  – дважды непрерывно – дифференцируемая на отрезке  $[0, T]$  функция, которая не обращается в ноль на этом отрезке и произвольная последовательность разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  отрезка  $[0, T]$  такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0.$$

Пусть, еще  $t_{i-1/2,n} = (t_{i-1,n} + t_{i,n})/2$  и  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  – непрерывные на отрезке  $[-1, 1]$  функции, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1.5.

Кроме того, пусть для  $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняется равенство (3.43).

Тогда

$$\|R(f, \Delta_n)\|_p \geq \frac{\mathcal{B}_p}{n^\alpha} \|f\|_\beta + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right). \quad (3.63)$$

Если последовательность разбиений  $\{\Delta_n^{**}\}_{n=1}^\infty = \{\{t_{i,n}^{**}\}_{i=1}^\infty\}_{n=1}^\infty$  определяется из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}^{**}} |f(t)|^\beta dt = \frac{i}{n} \int_0^T |f(t)|^\beta dt \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.64)$$

то

$$\|R(f, \Delta_n^{**})\|_p \leq \frac{\mathcal{B}_p}{n^\alpha} \|f\|_\beta + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right). \quad (3.65)$$

Здесь, как и ранее,  $\beta = 1/(\alpha + 1/p)$ .

**Доказательство.** Так как  $f(t)$  не имеет нулей на отрезке  $[0, T]$ , то в силу теоремы 3.1.6, при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  будут выполняться асимптотические равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{i-1/2,n}} \|\phi(\tau)f(t_{i-1/2,n}) + \psi(\tau)f'(t_{i-1/2,n})h_{i-1/2,n}\|_{p[t_{i-1,n}, t_{i,n}]}^p = \\ & = |f(t_{i-1/2,n})|^p \int_{-1}^1 |\phi(t) + \theta_{i,n}\psi(t)h_{i-1/2,n}|^p dt = \\ & = |f(t_{i-1/2,n})|^p \|\phi + \theta_{i,n}h_{i-1/2,n}\psi\|_{p[-1,1]}^p = \\ & = |f(t_{i-1/2,n})|^p (\|\phi\|_{p[-1,1]} + O(h_{i-1/2,n}^2))^p = \\ & = |f(t_{i-1/2,n})|^p \|\phi\|_{p[-1,1]}^p + O(h_{i-1/2,n}^2) = \mathcal{B}_p^p |f(t_{i-1/2,n})|^p + O(h_{i-1/2,n}^2). \end{aligned}$$

Здесь

$$\theta_{i,n} = \frac{|f'(t_{i-1/2,n})|}{|f(t_{i-1/2,n})|}.$$

Отсюда и из условия теоремы (из равенства (3.43)) следует, что для любой последовательности разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  такой, что  $h_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|R(f, \Delta_n)\|_p^p &= \sum_{i=1}^n \|R(f, \Delta_n)\|_{p[t_{i-1,n}, t_{i,n}]}^p = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( h_{i-1/2,n}^{p\alpha+1} \frac{1}{h_{i-1/2,n}} \|\phi(\tau)f(t_{i-1/2,n}) + \right. \\ & \left. + \psi(\tau)f'(t_{i-1/2,n})h_{i-1/2,n} + O(h_{i-1/2,n}^2)\|_{p[t_{i-1,n}, t_{i,n}]}^p \right) = \\ &= \mathcal{B}_p^p \sum_{i=1}^n \left( h_{i-1/2,n}^{p\alpha+1} |f(t_{i-1/2,n})|^p + O\left(h_{i-1/2,n}^{p\alpha+3}\right) \right). \quad (3.66) \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.2.4, устанавливается, что если  $f(t)$  не имеет нулей на  $[0, T]$ , то

$$h_{i-1/2,n}^{p\alpha+1} |f(t_{i-1/2,n})|^p = C_{i,n}^{p\alpha+1} + O\left(h_{i-1/2,n}^{p\alpha+3}\right), \quad (3.67)$$

где

$$C_{i,n} = \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |f(t)|^\beta dt. \quad (3.68)$$

Из этого соотношения следует также, что

$$h_{i-1/2,n}^{p\alpha+1} \leq \frac{1}{m} C_{i,n}^{p\alpha+1} + O\left(h_{i-1/2,n}^{p\alpha+3}\right),$$

где

$$m = \min_{t \in [0, T]} |f(t)|$$

(по условию теоремы  $m > 0$ ). Следовательно равномерно по  $i$

$$h_{i-1/2,n}^{p\alpha+1} = O\left(C_{i,n}^{p\alpha+1}\right)$$

и

$$h_{i-1/2,n}^{p\alpha+3} = O\left(C_{i,n}^{p\alpha+3}\right). \quad (3.69)$$

Из соотношений (3.66) – (3.69) следует, что равномерно по  $i$  выполняется асимптотическое равенство

$$\|R(f, \Delta_n)\|_p^p = \mathcal{B}_p^p \sum_{i=1}^n C_{i,n}^{p\alpha+1} \left(1 + O\left(C_{i,n}^{p\alpha+2}\right)\right).$$

Теперь утверждение теоремы 3.3.3 следует из леммы 3.1.3, очевидного равенства

$$\sum_{i=1}^n C_{i,n} = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} |f(t)|^\beta dt = \int_0^T |f(t)|^\beta dt = \|f\|_\beta^\beta$$

и того факта, что если узлы  $\{t_{i,n}^{**}\}_{n=1}^\infty$  выбраны из условий (3.64), то

$$\begin{aligned} C_{i,n}^* &= \int_{t_{i-1,n}^{**}}^{t_{i,n}^{**}} |f(t)|^\beta dt = \int_0^{t_{i,n}^{**}} |f(t)|^\beta dt - \int_0^{t_{i-1,n}^{**}} |f(t)|^\beta dt = \\ &= \frac{i}{n} \int_0^T |f(t)|^\beta dt - \frac{i-1}{n} \int_0^T |f(t)|^\beta dt = \frac{1}{n} \int_0^T |f(t)|^\beta dt = \\ &= \frac{1}{n} \|f\|_\beta^\beta = \frac{1}{n} \|f\|_\beta^{1/(\alpha+1/p)}. \end{aligned}$$

### 3.4 Асимптотически оптимальная интерполяция ломаными в хаусдорфовой метрике

Take it easy.

Как правило, инженерные расчеты, связанные с описанием контуров (проекций) и поверхностей деталей, основаны на замене кривой или поверхности, описывающей эту деталь, другой кривой или поверхностью, близкой к исходной, но более простой и определяемой технологическими особенностями конструирования или производства. Такие кривые и поверхности в дальнейшем будем называть технологическими.

В этом параграфе мы подробно остановимся на задачах, связанных с описанием плоских контуров. Наиболее простым и распространенным методом описания кривых является метод кусочно – линейной аппроксимации, и, в частности, кусочно – линейной интерполяции. Первые результаты в этом направлении получены еще в XVIII веке Леонардом Эйлером. В дальнейшем этой теме было посвящено множество работ как теоретического, так и практического направления.

При решении задач инженерной геометрии звенья ломаной (шаг интерполяции) выбирались таким образом, чтобы обеспечить заданную точность описания кривой. Этого можно добиться, например, уменьшая шаг интерполяции. Но при этом неизбежно увеличивается число звеньев ломаной, а, следовательно, и число кадров управляющей программы (если речь идет о станках с ЧПУ) или линий чертежа (если речь идет о САПРах). Кроме того, при этом длинные "почти прямые" участки контура излишне детализируются.

Особенно заметным это становится тогда, когда требуется большая точность (малая погрешность) описания контуров, т.е. в условиях высокоточного производства.

Повышения точности описания кривой (контура) с помощью кусочно – линейной аппроксимации (впрочем, как мы убедимся дальше, и многих других способов восстановления (описания) кривых) можно добиться и другим путем – путем сгущения узлов интерполяции на участках большой кривизны кривой. Этому направлению также посвящено значительное количество работ (как инженерных, так и теоретических), связанных с оптимизацией управляющих программ для станков с ЧПУ и графопостроителей. Один из широко используемых на практике методов сгущения точек интерполяции на участках большой кривизны

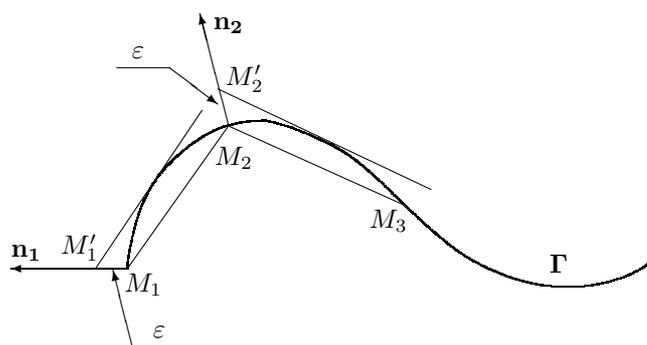


Рис. 3.4:

подробно описан в монографии [9]. Идейная сторона его состоит в следующем.

В начальной точке  $M_1$ , заданной кривой  $\Gamma$  (см.рис. 3.4), вычисляются (точно, если кривая  $\Gamma$  задана явно (т.е. уравнениями) и приближенно – в противном случае) направление нормали  $\mathbf{n}_1$  к кривой, на которой со стороны выпуклости кривой  $\Gamma$  на расстоянии допустимого отклонения  $\varepsilon$  откладывают точку  $M'_1$ .

Из точки  $M'_1$  проводят касательную к кривой  $\Gamma$ , и через точку  $M_1$  проводят прямую параллельную этой касательной. Ближайшая справа точка пересечения (если  $M_1$  – левый конец кривой) этой прямой с кривой  $\Gamma$  и есть вторая точка интерполяции. Принимаем ее за начало отсчета кривой  $\Gamma$  и повторяем алгоритм.

Остановимся на достоинствах и недостатках алгоритмов, основанных на этой идее.

Основным его достоинством является то, что в случае выпуклой кривой, в результате применения этого алгоритма мы получаем ломаную, описывающую кривую  $\Gamma$  с заданной точностью  $\varepsilon$  с асимптотически *минимальным* числом звеньев, а значит, соответствующая этой ломаной управляющая программа будет иметь асимптотически наименьшую длину.

Алгоритм легко допускает модификации. Так, заменяя  $\varepsilon$  на  $2\varepsilon$ , и, находя точки пересечения прямых, проходящих на одинаковом расстоянии от касательной и хорды ( см. рис.3.5), получим наилучшую ломаную, описывающую контур  $\Gamma$ .

Соответствующая ей управляющая программа имеет асимптотически *минимальное* число кадров среди всех программ, построенных на базе кусочно – линейной аппроксимации. При заданном числе звеньев погрешность аппроксимации в этом случае в два раза лучше, чем при линейной интерполяции. Или, при заданной точности описания  $\varepsilon$ , управляющая программа для станка с ЧПУ имеет примерно в  $\sqrt{2}$  раз меньше кадров, чем соответствующая "интерполяционная" управляющая программа. То есть, при стремлении  $\varepsilon$  к нулю, число кадров  $n_1(\varepsilon)$  интерполяционного алгоритма асимптотически равно  $\sqrt{2}n_0(\varepsilon)$ , где  $n_0(\varepsilon)$  число кадров соответствующего наилучшего алгоритма.

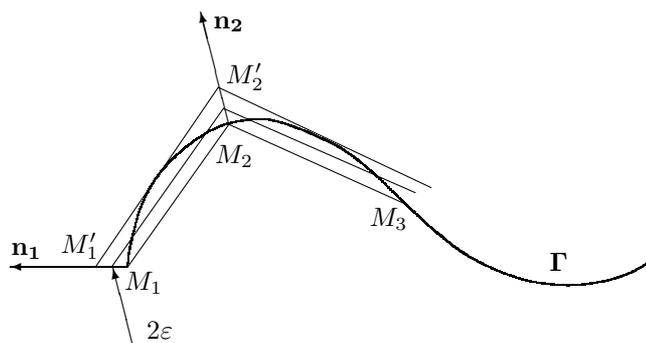


Рис. 3.5:

Алгоритм легко допускает другие модификации, например, одностороннюю аппроксимацию (см. рис. 3.6), необходимую в случае недопустимости "зарезов" детали.

Как и в случае интерполяционного алгоритма, основное достоинство его модификаций – это их оптимальность. Как мы уже отмечали ранее, алгоритм оптимальный в каком – то одном случае оказывается оптимальным и во многих других случаях. Так, например, все три приведенных алгоритма таковы, что погрешность на *каждом* шаге аппроксимации примерно одинакова. При доводке детали это обеспечит, в дальнейшем, равномерный износ инструмента и ритмичность его работы, что в конечном итоге продлит время их эксплуатации.

Остановимся теперь на недостатках такого рода алгоритмов.

Первым и основным недостатком, на наш взгляд, является тот факт, что их трудно сделать универсальными. На рисунках 3.4 и 3.5 мы не

случайно не построили точку  $M_4$ , ибо для ее построения нужна модификация алгоритма. В зависимости от вида кривой необходимо предусмотреть модификации и уточнения алгоритма на случай пересечения кривой  $\Gamma$  и прямой параллельной касательной (впрочем, как и самой касательной) более, чем в одной точке (кроме  $M_1$ ), случай изменения знака кривизны, случай "угловых" точек кривой и многие другие модификации. Все это делает окончательную программную реализацию алгоритма длинной и трудно обозримой. Для новых, не предусмотренных ранее "нештатных ситуаций" потребуются постоянный контакт с разработчиками такой продукции, что неизбежно сузит круг пользователей такой программы.

Вторым существенным недостатком такого рода алгоритмов является то, что для их работы требуется явно или параметрически заданная кривая. Казалось бы, что этот недостаток легко устранить, заменив исходную кривую более простой, но хорошо описывающей ее кривой, например, сплайном. Но и в этом случае нам пришлось бы на *каждом* шаге решать трудные для программирования задачи проведения касательной из точки к кривой (сплайну)  $\Gamma$  и нахождения точек пересечения прямой с кривой  $\Gamma$ .

В третьих, далеко не очевидным является построение подобных алгоритмов для случая, когда движение происходит по эквидистанте к кривой  $\Gamma$ , и, тем более, когда станки с ЧПУ предусматривают движение центра фрезы как по отрезкам прямых, так и по дугам окружностей или другим подобным траекториям. Не понятно как провести модификацию алгоритма для случая, когда исходная кривая определена в пространстве. Совсем не ясно как данную идею можно использовать при описании поверхностей.

Уже перечисленные недостатки не позволяют надеяться на создание на этом пути универсальных алгоритмов построения управляющих программ, особенно в условиях, когда число кадров управляющей программы достаточно велико. Последнее условие наиболее существенно в условиях современного высокоточного производства.

Целью данного и следующего параграфов является построение асимптотически оптимальных алгоритмов кусочно – линейной интерполяции плоской кривой, которые в значительной мере свободны от перечисленных выше недостатков.

Алгоритм приведенный в этом параграфе легко получить как частный случай из приведенных далее алгоритмов. Например, для получения его из результатов параграфа 3.10 необходимо лишь считать равной нулю третью координату, а чтобы получить его из результатов парагра-

фа 3.11, необходимо (с некоторыми поправками) принять радиус фрезы равным нулю.

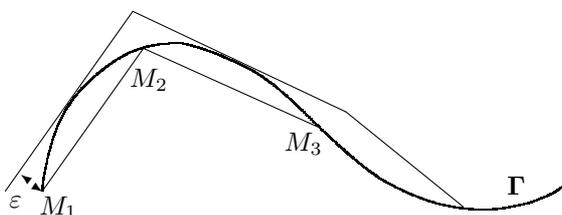


Рис. 3.6:

Тем не менее мы сочли необходимым рассмотреть этот вопрос отдельно. Это объясняется следующими причинами.

Во – первых, на этой задаче, как на модельной, мы продемонстрируем идеи и методы, лежащие в основе всех дальнейших наших результатов.

Во – вторых, обозначения и определения, принятые нами для решения этой задачи, имеют простую и наглядную интерпретацию.

В – третьих, математические выкладки в этом случае предельно просты и не требуют (если не считать, что они используют результаты предыдущих параграфов) никаких специальных математических знаний и навыков, разве что знания формулы Тейлора, понятия кривизны, расстояния между кривыми и умения находить расстояние от точки до прямой.

И наконец, в – четвертых, эта задача как фундамент ляжет в основание построения всех дальнейших алгоритмов описания плоских контуров с помощью кусочно – линейной аппроксимации.

Приведенные ниже алгоритмы асимптотически оптимальны, и, поэтому, естественно, они не могут дать управляющую программу меньшую, чем описанный выше алгоритм и оптимальные алгоритмы. Однако для больших управляющих программ они дают практически тот же результат, что и оптимальные алгоритмы. Отличие составляет 1 – 3 кадра. Дальнейшие их достоинства и границы применимости наших алгоритмов мы обсудим позже, когда будет ясна их идейная сторона.

Приведем несколько необходимых нам для дальнейшего определений и дополнительных построений.

Пусть задана плоская кривая  $\Gamma$  и допустимая погрешность  $\varepsilon$ .

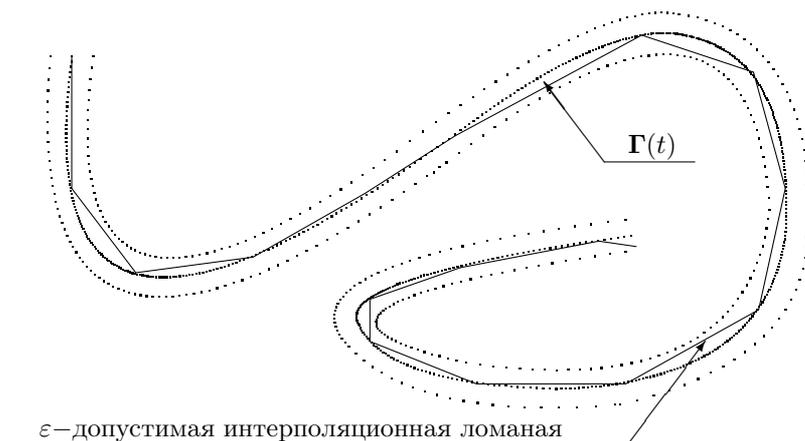


Рис. 3.7:

Напомним, что если

$$K_\varepsilon(M_0) = \{M : |MM_0| \leq \varepsilon\}$$

– круг радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$ , то множество

$$\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma) = \bigcup_{N \in \Gamma} K_\varepsilon(N)$$

(объединение всех кругов радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках кривой  $\Gamma$ ) называется  $\varepsilon$ -коридором (или допустимым множеством расположения технологических кривых) кривой  $\Gamma$ .

Всякую ломаную  $\Gamma_n$  (с  $n$  звеньями), интерполирующую заданную кривую  $\Gamma$  в узлах (точках излома), и, лежащую в  $\varepsilon$ -коридоре кривой  $\Gamma$ , назовем  $\varepsilon$ -допустимым интерполяционным режимом обработки кривой  $\Gamma$  (см. рис. 3.8), а допустимый режим обработки  $\Gamma_{n_0}$  ( $\Gamma_{n_0} \subset \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$ ) с минимальным числом звеньев назовем  $\varepsilon$ -оптимальным интерполяционным режимом обработки кривой  $\Gamma$  (см. рис. 3.8).

При каждом фиксированном  $\varepsilon$  через  $n_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon, \Gamma)$  обозначим число звеньев  $\varepsilon$ -оптимального режима обработки кривой  $\Gamma$ .

Ясно, что если  $\Gamma$  не есть отрезок прямой, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n_0(\varepsilon) = \infty.$$

Наша задача состоит в нахождении таких  $\varepsilon$ -допустимых режимов обработки, число звеньев которых равно или близко к числу  $n_0(\varepsilon)$ .

Для того, чтобы определиться с понятием "близко дадим определение асимптотически оптимальных последовательностей допустимых обработок.

Пусть для каждого  $\varepsilon$  дан допустимый режим обработки  $\Gamma_{n_*}(\varepsilon)$ .

Инфинитную последовательность  $\{\Gamma_{n_*}(\varepsilon)\}$  назовем асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_*(\varepsilon)}{n_0(\varepsilon)} = 1$$

или, что то же,

$$n_*(\varepsilon) = n_0(\varepsilon) (1 + o(1)).$$

Рассмотрим двойственную к этой постановку задачи.

Наименьшее положительное число  $\varepsilon$  такое, что кривая  $\Gamma$  содержится в  $\varepsilon$ -коридоре ломаной  $\Gamma_n$  обозначим через  $\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_n)$ :

$$\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_n) = \min\{\varepsilon : \Gamma \subset \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_n)\}.$$

Задача построения оптимальных, в этом смысле, ломаных (отыскание ломаных с  $n$  звеньями, обеспечивающих наименьшую погрешность приближения) состоит в том, чтобы при фиксированном  $n$  точно вычислить величину

$$\mathcal{R}_n(\Gamma) = \min_{\Gamma_n} \mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_n)$$

и построить соответствующую этой величине последовательность наилучших интерполирующих ломаных, т.е. таких интерполяционных ломаных  $\Gamma_n^0$ , что (см. рис. 3.8)

$$\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_n^0) = \mathcal{R}_n(\Gamma).$$

Последовательность  $\{\Gamma_n^*\}_{n=1}^\infty$  (зависящую от  $n$ ) назовем асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$  последовательностью интерполяционных ломаных, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_n^*)}{\mathcal{R}_n(\Gamma)} = 1$$

или, что то же

$$\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_n^*) = \mathcal{R}_n(\Gamma) (1 + o(1)).$$

То название (двойственная) которое мы дали последней экстремальной задаче оправдывает следующее утверждение, которое нам удобно сформулировать в виде леммы.

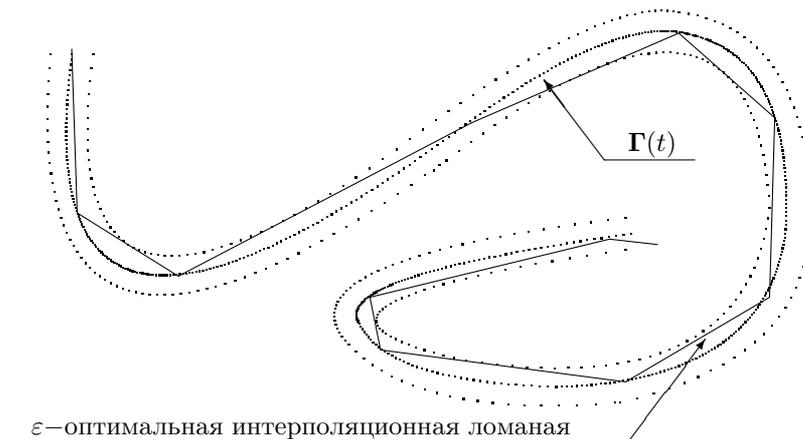


Рис. 3.8:

**Лемма 3.4.1** Пусть гладкая кривая  $\Gamma$  не имеет самопересечений, тогда

$$n_0(\mathcal{R}(\Gamma_n^0, \Gamma)) = n$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{R}_{n_0(\varepsilon)}(\Gamma)}{\varepsilon} = 1$$

или, что то же,

$$\mathcal{R}_{n_0(\varepsilon)} = \varepsilon + o(\varepsilon)$$

и, тем более,

$$n_*(\mathcal{R}(\Gamma_n^*, \Gamma)) = n + o(n)$$

и

$$\mathcal{R}_{n_*}(\varepsilon) = \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Таким образом, с точки зрения асимптотики рассматриваемые нами задачи эквивалентны.

В упрощенной формулировке утверждение леммы можно сформулировать так. Найти интерполяционную ломаную, обеспечивающую минимальную погрешность приближения почти то же, что при заданной погрешности приближения найти интерполяционную ломаную с минимальным числом звеньев.

Аналогичные утверждения верны и в случае негладких, и самопересекающихся кривых, и во многих других случаях (например, при *наилучшей* аппроксимации ломаными, аппроксимации кусочно – окружностными кривыми, сплайнами и т.д.). Доказательства их аналогичны, но несколько более громоздки. В то же время, с инженерной точки зрения они почти очевидны. Ввиду этого мы не будем стремиться к точным доказательствам утверждений такого рода.

Перейдем к изложению основных результатов этого параграфа.

**Теорема 3.4.2** Пусть функции  $x(t), y(t) \in C^3_{[0, T]}$  определяют параметрически заданную кривую  $\Gamma(t)$ , заданы числа  $M > 0$  и  $\alpha \in (0, 2/3)$ . Для каждого  $n$  определим узлы  $\Delta_n^* = \{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$  из условий

$$\int_0^{t_{i,n}^*} (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt = \frac{i}{n} \int_0^T (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt \quad (3.70)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n),$$

где  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$  – произвольная последовательность суммируемых на  $[0, T]$  функций таких, что

$$\|\Phi_n\|_\infty \leq M n^{-\alpha}$$

и

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}}.$$

Последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{i=0}^n$  (или, что то же, последовательность интерполяционных ломаных  $\{\ell(\Gamma, \Delta_n^*, t)\}_{i=0}^n$ ) будет асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$  (в метрике Хаусдорфа) и при  $n \rightarrow \infty$  будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \inf_{\Delta_n} \mathcal{R}(\Gamma, \ell(\Gamma, \Delta_n)) &= \mathcal{R}(\Gamma, \ell(\Gamma, \Delta_n^*)) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{8n^2} \left(\int_0^T \Phi(t) dt\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что доказательство этой теоремы опирается на теорему 2.3.3. Если ослабить условия на производные и потребовать существования не третьих, а вторых производных  $x''(t)$  и  $y''(t)$ , то изменится и формулировка теоремы (см. теорему 3.2.2).

Теорема, дающая решение двойственной задачи, т.е. задачи определения узлов интерполяционной ломаной с наименьшим количеством звеньев, описывающих кривую  $\Gamma$  с заданной точностью  $\varepsilon$  будет выглядеть следующим образом.

**Теорема 3.4.3** Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и при любом фиксированном  $\varepsilon$  число  $n = n(\varepsilon)$  определено равенством

$$n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt \right\rceil + 1,$$

( $[\alpha]$  – целая часть числа  $\alpha$ ) и узлы разбиения  $\Delta_n^* = \{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$  выбраны из условий (3.70), тогда при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  последовательность ломаных  $\ell(\Gamma, \Delta_n^*, t)$  будет асимптотически  $\varepsilon$ -оптимальной для кривой  $\Gamma$  последовательностью интерполяционных ломаных.

**Докажем** теорему 3.4.2. Пусть  $\{\Delta_n^*\}_{i=0}^n$  – произвольная последовательность разбиений отрезка  $[0, T]$  такая, что при  $n \rightarrow \infty$  максимальная величина шага стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq n-1} h_{i+1/2} = 0.$$

Здесь, как обычно,  $h_{i+1/2} = t_{i+1,n} - t_{i,n}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Тогда для  $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$  расстояние от точки  $(x(t), y(t))$  на кривой  $\Gamma(t)$  до интерполяционной ломаной будет равно

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Gamma, \Delta_n, t) &= \\ &= \left| \frac{x(t) - x_{i,n}}{x_{i+1,n} - x_{i,n}} - \frac{y(t) - y_{i,n}}{y_{i+1,n} - y_{i,n}} \right| \left( \sqrt{\frac{1}{(x_{i+1,n} - x_{i,n})^2} + \frac{1}{(y_{i+1,n} - y_{i,n})^2}} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

или, что то же

$$\mathcal{R}(\Gamma, \Delta_n, t) = \frac{|(x(t) - x_{i,n})(y_{i+1,n} - y_{i,n}) - (y(t) - y_{i,n})(x_{i+1,n} - x_{i,n})|}{\sqrt{(x_{i+1,n} - x_{i,n})^2 + (y_{i+1,n} - y_{i,n})^2}}.$$

Кроме того, используя формулу Тейлора для величин  $x_{i,n}$ ,  $x_{i+1,n}$ ,  $x(t)$  и  $y_{i,n}$ ,  $y_{i+1,n}$ ,  $y(t)$  в окрестностях точек  $(x_{i+1/2,n}, y_{i+1/2,n})$  получаем

$$\begin{aligned} x_{i,n} &= x_{i+1/2,n} - x'_{i+1/2,n} \frac{h_{i+1/2,n}}{2} + \frac{1}{8} x''_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n}^2 + O(h_{i+1/2,n}^3), \\ x_{i+1,n} &= x_{i+1/2,n} + x'_{i+1/2,n} \frac{h_{i+1/2,n}}{2} + \frac{1}{8} x''_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n}^2 + O(h_{i+1/2,n}^3), \end{aligned}$$

$$x(t) = x_{i+1/2,n} + x'_{i+1/2,n} \frac{h_{i+1/2,n}}{2} \tau + \frac{1}{8} x''_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n}^2 \tau^2 + O(h_{i+1/2,n}^3)$$

и

$$y_{i,n} = y_{i+1/2,n} - y'_{i+1/2,n} \frac{h_{i+1/2,n}}{2} + \frac{1}{8} y''_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n}^2 + O(h_{i+1/2,n}^3),$$

$$y_{i+1,n} = y_{i+1/2,n} + y'_{i+1/2,n} \frac{h_{i+1/2,n}}{2} + \frac{1}{8} y''_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n}^2 + O(h_{i+1/2,n}^3),$$

$$y(t) = y_{i+1/2,n} + y'_{i+1/2,n} \frac{h_{i+1/2,n}}{2} \tau + \frac{1}{8} y''_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n}^2 \tau^2 + O(h_{i+1/2,n}^3).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Gamma, \Delta_n, t) &= \\ &= \frac{|x''_{i+1/2,n} y'_{i+1/2,n} - y''_{i+1/2,n} x'_{i+1/2,n}|}{8 \sqrt{(x'_{i+1/2,n})^2 + (y'_{i+1/2,n})^2}} h_{i+1/2,n}^2 (1 - \tau^2) + O(h_{i+1/2,n}^3) = \\ &= \frac{1}{8} \Phi_{i+1/2,n}^2 h_{i+1/2,n}^2 (1 - \tau^2) + O(h_{i+1/2,n}^3). \end{aligned}$$

Отсюда, из теоремы 3.2.1 и следствия 3.2.3 сразу получаем утверждение теоремы.

**Теорема 3.4.4** Пусть заданная в параметрической форме кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $x(t), y(t) \in C_{[0,T]}^3$ ) такова, что  $\Phi(t)$  не имеет нулей на  $[0, T]$  и узлы  $\Delta_n^* = \{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$  определены из условий

$$\int_0^{t_{i,n}^*} \Phi(t) dt = \frac{i}{n} \int_0^T \Phi(t) dt$$

( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Последовательность интерполяционных ломаных  $\{\ell(\Gamma, \Delta_n^*, t)\}_{i=0}^n$  будет асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$  (в метрике Хаусдорфа) и при  $n \rightarrow \infty$  будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \inf_{\Delta_n} \mathcal{R}(\Gamma, \ell(\Gamma, \Delta_n)) &= \mathcal{R}(\Gamma, \ell(\Gamma, \Delta_n^*)) \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{8n^2} \left(\int_0^T \Phi(t) dt\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^4}\right). \end{aligned}$$

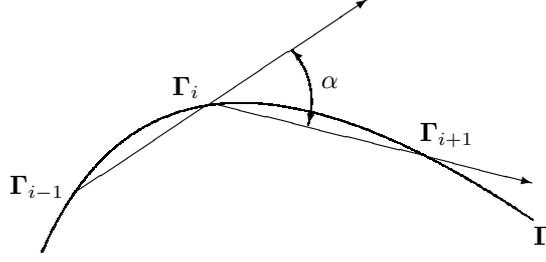


Рис. 3.9:

Хотя говорить о гладкости ломаной нет смысла, использование степени негладкости кривой, введенное параграфе 1.1, позволяет получить какую-то характеристику гладкости и для ломаных.

**Теорема 3.4.5** Пусть параметрическая кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  удовлетворяет условию теоремы 3.4.2 и последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}$  определена условиями (3.70), тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\alpha(\ell(\Gamma, \Delta_n^*), t_{i,n}^*) = \frac{A}{n} \sqrt{k_{i,n}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right),$$

где  $k_{i,n}$  – кривизна кривой  $\Gamma$  в точке  $\Gamma(t_{i,n}^*)$  и

$$A = \int_0^T \Phi(t) dt.$$

**Доказательство** теоремы 3.4.5. Ясно (см. рис. 3.9), что

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|\Gamma_i \Gamma_{i+1} \times \Gamma_{i-1} \Gamma_i|}{|\Gamma_i \Gamma_{i+1}| |\Gamma_{i-1} \Gamma_i|} = \\ &= \frac{|(x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{i+1,n} - y_{i,n}) - (y_{i,n} - y_{i-1,n})(x_{i+1,n} - x_{i,n})|}{\sqrt{(x_{i+1,n} - x_{i,n})^2 + (y_{i+1,n} - y_{i,n})^2} \sqrt{(x_{i,n} - x_{i-1,n})^2 + (y_{i,n} - y_{i-1,n})^2}}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться том, что

$$\begin{aligned} (x_{i,n} - x_{i-1,n})(y_{i+1,n} - y_{i,n}) - (y_{i,n} - y_{i-1,n})(x_{i+1,n} - x_{i,n}) &= \\ = \frac{1}{2} (x'_{i,n} y''_{i,n} - y'_{i,n} x''_{i,n}) h_{i+1/2,n} h_{i-1/2,n} (h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}) + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{6}(x'_{i,n}y'''_{i,n} - y'_{i,n}x'''_{i,n})h_{i+1/2,n}h_{i-1/2,n}(h_{i-1/2,n}^2 - h_{i+1/2,n}^2) + O(h_n^5).$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\sqrt{(x_{i+1,n} - x_{i,n})^2 + (y_{i+1,n} - y_{i,n})^2}} =$$

$$\frac{1}{h_{i+1/2,n}\sqrt{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2}} \left( 1 + \frac{h_{i+1/2,n}}{2} \frac{x'_{i,n}x''_{i,n} + y'_{i,n}y''_{i,n}}{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2} + O(h_{i+1/2,n}^3) \right),$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{(x_{i,n} - x_{i-1,n})^2 + (y_{i,n} - y_{i-1,n})^2}} =$$

$$\frac{1}{h_{i-1/2,n}\sqrt{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2}} \left( 1 - \frac{h_{i-1/2,n}}{2} \frac{x'_{i,n}x''_{i,n} + y'_{i,n}y''_{i,n}}{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2} + O(h_{i-1/2,n}^3) \right).$$

Таким образом для произвольного разбиения  $\Delta_n$  имеет место соотношение

$$\sin \alpha(\ell(\Gamma, \Delta_n), t_{i,n}) = \frac{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}}{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2} \left[ \frac{1}{2}(x'_{i,n}y''_{i,n} - y'_{i,n}x''_{i,n}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}(x'_{i,n}y'''_{i,n} - y'_{i,n}x'''_{i,n})(h_{i-1/2,n} - h_{i+1/2,n}) \right] \left( 1 + \frac{h_{i+1/2,n}}{2} \frac{x'_{i,n}x''_{i,n} + y'_{i,n}y''_{i,n}}{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2} \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{h_{i-1/2,n}}{2} \frac{x'_{i,n}x''_{i,n} + y'_{i,n}y''_{i,n}}{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2} \right) (1 + O(h_n^2)).$$

Тогда, если значения параметра  $t_{i,n}^*$  выбраны из условия теоремы, то рассуждая так же, как в параграфе 3.2, получаем

$$h_{i+1/2,n} = \frac{\mathcal{A}}{n\Phi_{i,n}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

и

$$h_{i-1/2,n} = \frac{\mathcal{A}}{n\Phi_{i,n}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Учитывая вид функции  $\Phi(t)$  и то, что при  $\alpha \rightarrow 0$

$$\sin \alpha = \alpha + O(\alpha^3),$$

сразу получаем утверждение теоремы.

### 3.5 Регулятор сгущения узлов

И если точно есть предопределение, то зачем же нам дана воля, рассудок ?

*М.Ю.Лермонтов "Фаталист"*

Пусть нам задана в параметрическом виде гладкая плоская кривая  $\Gamma$

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in [0, T]). \quad (3.71)$$

В конкретных алгоритмах вместо нее мы будем брать один из сплайнов, подробно изученных в предыдущих главах.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{1/2}}}. \quad (3.72)$$

Функция  $\Phi(t)$  в дальнейшем будет называться регулятором сгущения узлов. Вид этой функции зависит от рассматриваемой задачи, т.е. от характера технологической кривой (ломаная, эквидистанта, кусочно – окружностная кривая и т.д.), от размерности задачи (плоская или пространственная кривая, задача восстановления поверхности) и от рассматриваемой метрики.

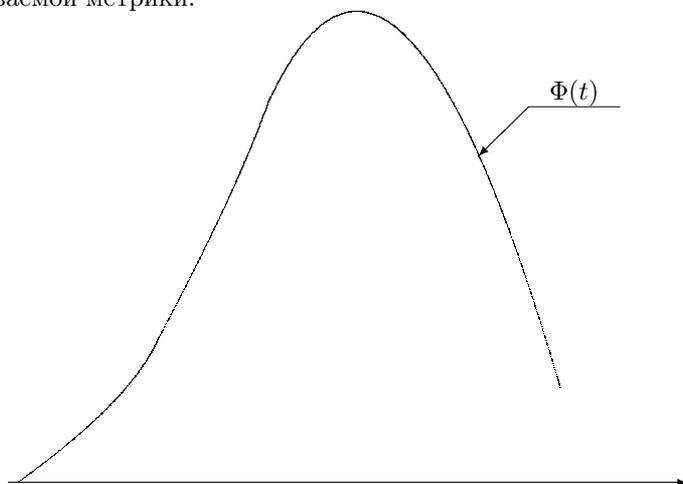


Рис. 3.10:

В случае аппроксимации кривой интерполяционными ломаными почти очевидно, что регулятор сгущения узлов связан с кривизной кривой, так как любой близкий к оптимальному алгоритм должен учитывать сгущение узлов там, где кривизна кривой больше. Тот факт, что в этом случае регулятор сгущения узлов имеет именно вид (3.72) менее очевиден. Как будет видно из дальнейшего, это связано с выбором метрики в которой ведется восстановление. Например, (см. параграф 3.9) при восстановлении кривой в интегральной метрике хаусдорфоваго типа вместо показателя степени  $1/2$  будет фигурировать показатель степени  $1/3$ . Выбор функции  $\Phi(t)$  нам не подвластен. Он жестко детерминирован характером задачи. В какой – то мере идею ее возникновения можно усмотреть из результатов параграфов 3.2 и 3.3.

Отметим, что функция  $\Phi(t)$  всегда неотрицательна.

Обсудим теперь вопрос о названии функции  $\Phi(t)$ . Пусть узлы  $t_{i,n}^0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) выбраны из условий

$$\int_0^{t_{i,n}^0} \Phi(t) dt = \frac{i}{n} \int_0^T \Phi(t) dt. \quad (3.73)$$

Положим

$$\Psi(t) = \int_0^t \Phi(u) du.$$

Тогда  $\Psi(t)$  есть неубывающая на  $[0, T]$  функция и условия (3.73) примут вид

$$\Psi(t_{i,n}^0) = \frac{i}{n} \Psi(T) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (3.74)$$

Равенства вида (3.73) в дальнейшем будут фигурировать во всех наших алгоритмах и поэтому остановимся на них подробнее. Во – первых, обратим внимание на их геометрический смысл (рис. 3.12). Узлы  $t_{i,n}^0$  получаются следующим образом: разбиваем отрезок  $(0, \Psi(T))$  (на вертикальной оси) на  $n$  равных частей и узлы  $t_{i,n}^0$  это проекции на горизонтальную ось точек пересечения прямых  $y = \frac{i}{n} \Psi(T)$  с графиком функции  $\Psi(t)$ . Математически это выражается совсем просто

$$t_{i,n}^0 = \Psi^{-1}\left(\frac{i}{n} \Psi(T)\right) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3.75)$$

где  $f^{-1}$  – функция, обратная к  $f$ .

Естественно, что равенство возможно использовать лишь тогда, когда  $\Psi(t)$  строго возрастает на  $[0, T]$ . В случае, если функция  $\Psi(t)$  имеет участки постоянства, необходимы уточнения, которые мы приведем позже.

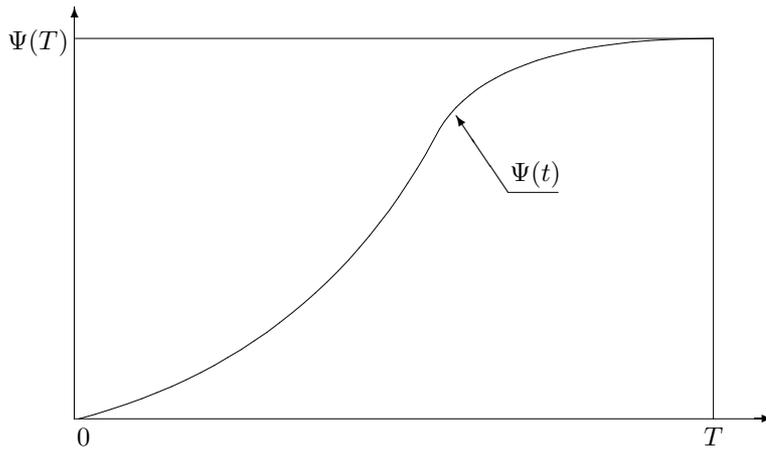


Рис. 3.11:

Как хорошо видно из рисунка 3.12 узлы  $t_{i,n}^0$  сгущаются там, где велик градиент функции  $\Psi(t)$ , т.е. там, где велика величина  $\Phi(t)$ . Можно показать, что узлы  $t_{i,n}^0$  сгущены почти пропорционально величине  $\Phi(t)$ .

Действительно, если  $n_{\alpha,\beta}(\Phi)$  ( $[\alpha, \beta] \subset [0, T]$ ) – число узлов  $t_{i,n}^0$  попавших в промежуток  $[\alpha, \beta]$ , то

$$\frac{\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)}{\Psi(T)}(n-1) \leq n_{\alpha,\beta}(\Phi) \leq \frac{\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)}{\Psi(T)}(n+1),$$

т.е. при  $n \rightarrow \infty$  выполняется асимптотическое равенство

$$n_{\alpha,\beta}(\Phi) = \frac{\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)}{\Psi(T)}n + O(1).$$

Отсюда следует, что для любой точки  $t \in [0, T]$  и любого числа  $\delta$  ( $0 < t - \delta < t < t + \delta \leq T$ ) имеет место соотношение

$$m_{t-\delta, t+\delta}(\Phi) = \frac{n}{\Psi(T)} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \Phi(u) du + O(1).$$

Но тогда для непрерывной функции  $\Phi(u)$  при малых  $\delta$  выполняется асимптотическое равенство

$$m_{t-\delta, t+\delta}(\Phi) = \frac{n}{\Psi(T)} 2\delta \Phi(t) + o(n\delta),$$

т.е. мера сгущения узлов в окрестности точки  $t$ , выбранных исходя из равенств (3.73), почти пропорциональна (с коэффициентом пропорциональности  $\Psi^{-1}(T)$ ) общему их количеству  $n$ , длине интервала  $2\delta$  и величине  $\Phi(t)$ .

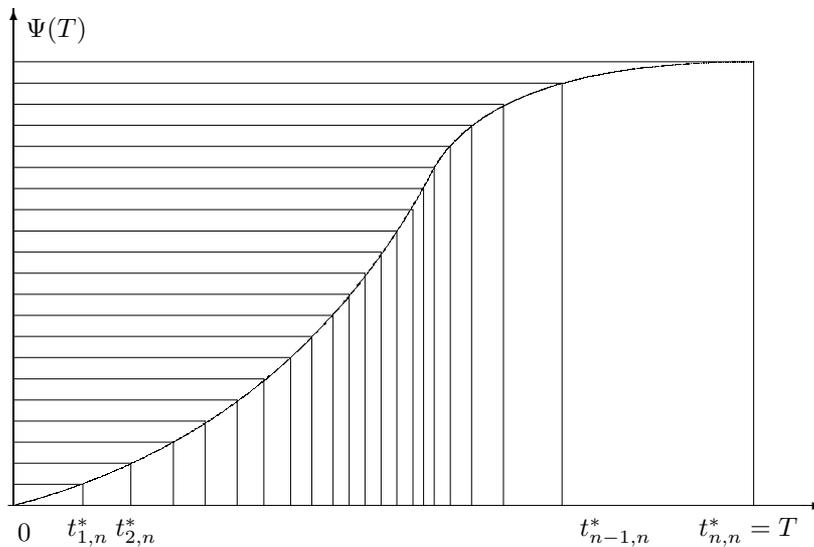


Рис. 3.12:

Если функция  $\Psi(t)$  строго возрастает на промежутке  $[0, T]$  и узлы выбраны из условий (3.73), то с увеличением  $n$  максимальная длина промежутков разбиения (максимальное расстояние между соседними узлами) стремится к нулю. Если же  $\Psi(t)$  имеет участки постоянства, то ясно, что это не так.

В заключение параграфа отметим, что все приведенные далее алгоритмы базируются на том, что оптимальные узлы выбираются исходя из равенств вида (3.73). Меняться будет лишь вид функции  $\Phi(t)$ . В каждом алгоритме это будет *единственное* место, где используются неявные формулы. Эквивалентные (3.73) и (3.74) формулы (в случае строгой монотонности функции  $\Psi(t)$ ) нельзя считать явными, так как они требуют вычисления обратной к  $\Psi(t)$  функции). Благодаря возможности замены функции  $\Phi(t)$  кусочно – постоянной функцией, достаточно грубо аппроксимирующей функцию  $\Phi(t)$ , мы можем предположить довольно простой и эффективный алгоритм процедуры поиска узлов

$t_{i,n}^0$  по функции  $\Phi(t)$ . Далее он будет вписан во все алгоритмы в качестве одного из элементов (в программной реализации – как подпрограмма). В связи с последним обстоятельством, прежде, чем переходить к конкретным алгоритмам, мы рекомендуем тщательно ознакомиться со всеми тонкостями приведенного в конце параграфа 3.7 алгоритма. При этом можно рассмотреть другие аппроксимации функции  $\Phi(t)$  кусочно – постоянными или модифицировать сам алгоритм поиска узлов  $t_{i,n}^0$  по предложенной нами аппроксимации. Полезно также проварьировать  $n$ , чтобы определиться с границами применимости и скоростью работы алгоритма.

### 3.6 Еще раз об идейной стороне вопроса

Repetitio est mater studiorum.

Наши рассуждения в этом параграфе будут более наглядны, если кривую  $\Gamma(t)$  задать в естественной параметризации или в параметризации близкой к естественной. Способы задания кривой в естественной или близкой к естественной параметризации нами обсуждались ранее (см. параграфы 2.4, 2.5). Здесь же лишь напомним, что для задания плоской гладкой кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  в естественной параметризации необходимо и достаточно, чтобы для всех  $t$  выполнялось равенство

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \equiv 1.$$

Для задания пространственной гладкой кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  в естественной параметризации необходимо и достаточно, чтобы для всех  $t$  выполнялось равенство

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \equiv 1,$$

или, что то же

$$|\Gamma'(t)| \equiv 1.$$

В первом случае функция регулирующая узлы  $\Phi(t)$ , фигурирующая в параграфе 3.6 будет иметь вид

$$\Phi(t) = \sqrt{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|},$$

т.е.

$$\Phi(t) = \sqrt{|k(t)|},$$

где  $k(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$  – кривизна кривой.

Точно так же, функция  $\Phi(t)$  в задаче, рассмотренной в параграфе 3.9, будет иметь вид

$$\Phi(t) = |k(t)|^{1/3}.$$

Учитывая сказанное, результаты параграфа 3.6 – 3.9 можно этот факт резюмировать следующим образом.

Для получения асимптотически оптимального алгоритма восстановления плоской кривой при помощи интерполяционных ломаных в метрике Хаусдорфа узлы ломаной необходимо сгущать пропорционально квадратному корню из величины кривизны кривой.

Для получения асимптотически оптимального алгоритма восстановления плоской кривой при помощи интерполяционных ломаных в интегральной метрике хаусдорфова типа узлы необходимо сгущать пропорционально корню кубическому из величины кривизны кривой.

Таким образом, мы получим "мостик" от самой "жесткой" метрики (метрики Хаусдорфа, где  $\Phi(t) = |k(t)|^{1/2}$ ) до самой "мягкой" метрики (интегральной, метрики хаусдорфова типа, где  $\Phi(t) = |k(t)|^{1/3}$ ), то есть, чем "мягче" метрика, тем меньше необходимо реагировать на кривизну.

Можно дать простое геометрическое истолкование результатов, изложенных в предыдущих параграфах.

Хотя рассуждения, приведенные ниже, строго говоря, нельзя назвать доказательствами, их имеет смысл привести, ибо они, на наш взгляд, проясняют суть вопроса и помогают предугадать дальнейшие модификации и обобщения алгоритмов.

Рассмотрим маленький участок кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Заменим его дугой касательной к окружности в некоторой точке  $\xi$ . Положим

$$k(\xi) = \frac{1}{R},$$

где  $R$  – радиус этой окружности. Тогда для прогиба  $\varepsilon$  кривой  $\Gamma$  будет выполняться приближенное равенство

$$\varepsilon(2R - \varepsilon) \approx \frac{h^2}{4}$$

или

$$\varepsilon \approx \frac{h^2}{8R} = k \frac{h^2}{8}.$$

Так что на каждом участке кривой погрешность аппроксимации примерно равна  $kh^2/8$ . Если на каком-то участке (участках) кривой погрешность больше, чем на остальных, мы можем укоротить звено (или

увеличить, если погрешность слишком мала) и тем самым уменьшить общую погрешность. Этот процесс (процесс уменьшения общей погрешности без увеличения количества звеньев) становится невозможным когда погрешности на каждом участке выравниваются. Но именно этот факт и отражают теоремы 3.4.2 – 3.4.4. Действительно, если для достаточно гладкой кривой, заданной в естественной параметризации, узлы  $t_{i,n}^*$  выбраны из условий

$$\int_0^{t_{i,n}^*} |k(t)|^{1/2} dt = \frac{i}{n} \int_0^T |k(t)|^{1/2} dt := \frac{i}{n} \mathcal{A},$$

то

$$\begin{aligned} \int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} |k(t)|^{1/2} dt &= \int_0^{t_{i+1,n}^*} |k(t)|^{1/2} dt - \int_0^{t_{i,n}^*} |k(t)|^{1/2} dt = \\ &= \frac{i+1}{n} \mathcal{A} - \frac{i}{n} \mathcal{A} = \frac{1}{n} \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Поэтому для всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} |k(t)|^{1/2} dt = \frac{1}{n} \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} = \int_0^T |k(t)|^{1/2} dt.$$

Но тогда, согласно формуле Тейлора (если  $k(t)$  – гладкая функция),

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \mathcal{A} &= \int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} \left( |k(t_{i+1/2,n}^*)|^{1/2} + \right. \\ &\left. + \frac{k'(t_{i+1/2,n}^*)}{|k(t_{i+1/2,n}^*)|^{1/2}} (t - t_{i+1/2,n}^*) + O(h_{i-1/2,n}^2) \right) dt, \end{aligned}$$

где

$$t_{i+1/2,n}^* = (t_{i,n}^* + t_{i+1,n}^*)/2.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{n} \mathcal{A} = |k(t_{i+1/2,n}^*)|^{1/2} h_{i-1/2,n} + O(h_{i+1/2,n}^3),$$

т.е.

$$|k(t_{i,n}^*)| h_{i-1/2,n}^2 = \left( \frac{\mathcal{A}}{n} \right)^2 + O(h_{i-1/2,n}^4),$$

где, как обычно,

$$h_{i+1/2,n}^* = t_{i+1,n}^* - t_{i,n}^*.$$

Следовательно, для всех  $i$

$$\frac{|k(t_{i,n}^*)|h_{i+1/2,n}^2}{8} \approx \frac{\mathcal{A}^2}{8n^2}.$$

Аналогично обстоят дела и в интегральной метрике. В этом случае достаточно подсчитать площадь  $S$ , ограниченную интерполяционной ломаной и кругом.

Пишем

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{2\pi} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha).$$

Кроме того, при малых  $\alpha$

$$\sin \alpha \approx \frac{h}{2R}$$

и

$$\alpha \approx \frac{h}{2R}.$$

Таким образом,

$$S \approx \frac{R^2 \alpha^3}{12} \approx \frac{R^2 h^3}{12 \cdot 8R^3} = \frac{1}{96} k(t_{i,n}^*) h^3.$$

Мы свели нашу задачу к задаче минимизации величины

$$\frac{1}{96} \sum_{i=1}^n k(t_{i,n}^*) h_{i-1/2,n}^3 = \frac{1}{96} \sum_{i=1}^n (k^{1/3}(t_{i,n}^*) h_{i-1/2,n})^3.$$

Минимальное (асимптотически минимальное) значение эта величина принимает в случае, когда шаг разбиения  $h_{i-1/2,n}$  пропорционален (почти пропорционален) величине  $(k(t_{i,n}^*))^{1/3}$ .

Теперь становится понятной идеология дальнейших построений. Для того, чтобы получить наилучшую аппроксимацию ломаными, необходимо указать удобный (явный) алгоритм проведения на каждом промежутке вместо интерполяционной ломаной отрезка прямой, лежащего посередине между ломаной и касательной. Такой алгоритм, при том же числе звеньев ломаной, даст результат в два раза лучше (с асимптотической точки зрения), чем алгоритм использующий интерполяционные ломаные.

Более того, ясно, что нам нет нужды описывать способ построения асимптотически наилучшей ломаной. Достаточно "угадать" ее (или, с помощью каких – то своих умозаключений, получить). Действительно, если ломаная нам каким – то образом представлена, то для того, чтобы

доказать, что она асимптотически наилучшая, достаточно показать, что при одном и том же количестве звеньев, качество аппроксимации в два раза лучше, чем у соответствующей интерполяционной ломаной.

Строить асимптотически наилучшую ломаную мы будем следующим образом. Через точки кривой  $\Gamma$ , соответствующие значениям параметра  $t_k$  и  $t_{k+1}$  проведем прямую, а затем параллельно ей – прямую через точку  $\Gamma((t_k + t_{k+1})/2) - (\Gamma(t_k) + \Gamma(t_{k+1}))/2$ . Аналогичную операцию на следующем промежутке. Затем найдем точку пересечения этих прямых и выделим главный член значения ее асимптотики. Это и будет искомого значение точки излома асимптотически наилучшей ломаной. После того, как мы его найдем, можно "забыть как мы нашли это значение, и доказательство начать со слов: "Докажем, что погрешность аппроксимации равна . . . и т.д. Аналогично будет ставиться вопрос и в дальнейшем. В связи с этим, далее мы не будем подробно описывать метод получения наилучшего аппарата приближения, а предъявлять конкретный алгоритм построения аппроксимирующей кривой (ломаной, кусочно - окружностной линии и пр.) и будем доказывать его асимптотическую оптимальность.

### 3.7 Алгоритм линейного интерполятора

Время собирать камни и  
время разбрасывать камни.  
*Библия*

Мы уделили большое внимание теоретическому обоснованию построения асимптотически оптимальной интерполяционной ломаной. Предложенные в теоремах 3.4.2 – 3.4.4 алгоритмы не выглядят достаточно конструктивными. В них указан способ определения узлов асимптотически оптимальной интерполяционной ломаной, но для их применения необходимо знать не только значения параметрической кривой в некоторых точках, но и значения кривизны в узлах кривой. Кроме этого, метод определения точек разбиения  $\{t_{i,n}^*\}_{i=1}^n$  промежутка изменения параметра  $[0, T]$  тоже не выглядит достаточно просто алгоритмизируемым.

В этом параграфе мы покажем, что это не совсем так. Здесь мы приведем рабочий алгоритм асимптотически оптимального линейного интерполятора, построенный на основе теоремы 3.4.2. Приведенный ниже алгоритм будет частным случаем приведенных далее алгоритмов. Например, для получения алгоритма асимптотически оптимального линейного интерполятора из алгоритма, изложенного в параграфе 3.10,

достаточно положить в нем все значения  $z$ , равными нулю.

То, что линейный интерполятор как составная часть присутствует во многих приведенных далее алгоритмах, и обуславливает необходимость его подробного рассмотрения. Кроме этого, линейный интерполятор имеет и самостоятельный интерес. Этот алгоритм можно использовать непосредственно в САПРах, для графопостроителей.

Рассматривая задачи связанные с конструированием асимптотически оптимальных алгоритмов, мы исходим и будем исходить из того, что нам известны параметрические уравнения, достаточно точно описывающие гладкие участки исходной кривой. Мы не считаем это обстоятельство сужающим область использования алгоритмов. Вопросам описания (в том числе и параметрического) кривых были посвящены первые две главы книги.

Дальнейшее содержание параграфа посвящено построению дискретных аналогов всех величин, входящих в формулировку теоремы 3.4.2. На этом пути мы приведем один из алгоритмов линейного интерполятора.

Прежде всего, мы должны представить дискретный аналог самой кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ).

Методы восстановления кривых, описанные в первых двух главах, дают нам достаточно хорошее описание кривой параметрическими уравнениями в параметризации близкой к естественной (см. параграфы 2.4, 2.5), что позволяет при нахождении дискретного аналога кривой  $\Gamma(t)$  разбивать отрезок  $[0, T]$  на равные части.

Уже этот первый шаг приводит нас к вопросу – на сколько частей необходимо разбивать при этом отрезок  $[0, T]$ ? Т.е. какова может быть степень дискретизации? Если взять на кривой слишком много точек, то увеличится объем вычислительной работы, если же точек будет мало – потеряем точность восстановления контура.

Как показывает теорема 3.4.2, для построения  $\varepsilon$ -оптимального алгоритма линейного интерполятора требуется по порядку примерно  $\varepsilon^{-1/2}$  звеньев (и, соответственно, узлов интерполяции). Так что первоначальная дискретизация должна содержать большее по порядку число точек, к примеру, по порядку равное  $\varepsilon^{-1}$ .

Перейдем к детальному изложению алгоритма и его анализу.

Итак, пусть заданы допустимая погрешность  $\varepsilon$  и параметрические уравнения  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) гладкого участка исходной кривой.

Прежде всего найдем степень дискретизации кривой

$$N = [1/\varepsilon] + 1$$

( $[\alpha]$  – целая часть числа  $\alpha$ ) и определим набор точек

$$x_i = x\left(\frac{iT}{N}\right), y_i = y\left(\frac{iT}{N}\right) \quad (i = 0, 1, \dots, N).$$

Дальнейшей нашей задачей является построение дискретного аналога функции  $\Phi$  – регулятора сгущения узлов.

В рассматриваемом нами случае это функция

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}}.$$

Заметим, что основная формула

$$\int_0^{t_{i,n}^*} \Phi(t) dt = \frac{i}{n} \int_0^T \Phi(t) dt,$$

определяющая асимптотически оптимальные узлы  $\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$  однородна относительно  $\Phi(t)$ , т.е. если функцию заменить на  $a\Phi(t)$ , где  $a$  – произвольное положительное число, то узлы, определяемые этой формулой, не изменятся. Эта особенность позволяет нам рассматривать в качестве дискретных аналогов производных разности (а не разделенные разности, как обычно делается при дискретизации производных), что упрощает алгоритм.

В дальнейшем в качестве исходных данных будем понимать точки снимаемые со сплайна с естественной или близкой к естественной параметризацией, например, со сплайна  $s_3^*(\Gamma, t)$ . Можно использовать большой набор точек снимаемых сканером или копиром. В этом случае требуется предварительное сглаживание данных. Это дает право вместо дискретного аналога функции  $\Phi(t)$  использовать дискретный аналог более простого выражения:

$$\sqrt{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}.$$

Дискретными аналогами производных  $x'_i$  и  $y'_i$  будут являться разности

$$\Delta x_{i-1/2} = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

и

$$\Delta y_{i-1/2} = y_i - y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Соответственно роль вторых производных  $x''_i$  и  $y''_i$  будут играть вторые разности

$$\Delta^2 x_i = \Delta x_{i+1/2} - \Delta x_{i-1/2} \quad (i = 1, \dots, N-1)$$

и

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1/2} - \Delta y_{i-1/2} \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Недостающие разности (т.е.  $\Delta x_{-1/2}, \Delta y_{-1/2}$ , а также  $\Delta^2 x_0, \Delta^2 y_0$  и  $\Delta^2 x_1, \Delta^2 y_1$ ) доопределим следующим образом (см. параграф 1.3)

$$\Delta x_{-1/2} = 2\Delta x_{1/2} - \Delta x_{3/2}, \quad \Delta y_{-1/2} = 2\Delta y_{1/2} - \Delta y_{3/2}$$

и

$$\Delta^2 x_1 = 2\Delta^2 x_2 - \Delta^2 x_3, \quad \Delta^2 y_1 = 2\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_3,$$

а также

$$\Delta^2 x_0 = 3\Delta^2 x_2 - 2\Delta^2 x_3, \quad \Delta^2 y_0 = 3\Delta^2 y_2 - 2\Delta^2 y_3.$$

Вычислим числа

$$\Phi_i = \sqrt{|\Delta^2 x_i \Delta y_{i-1/2} - \Delta^2 y_i \Delta x_{i-1/2}|} + \frac{1}{N} \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

которые и дают нам дискретный аналог регулятора узлов.

Вычислим теперь дискретный аналог первообразной:

$$\Psi(t) = \int_0^t \Phi(u) du.$$

Это будет система чисел

$$\Psi_i = \frac{T}{N} \sum_{\nu=0}^i \Phi_\nu \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\Psi_0 = 0.$$

Далее, вычислим число кадров (узлов) асимптотически оптимальной ломаной по формуле

$$n = [\Psi_N N / \sqrt{8}] + 1$$

и находим узлы  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) асимптотически оптимального разбиения согласно алгоритму указанному в теоремах 3.4.2 – 3.4.3

$$t_j = (j-1)\Psi_N/n - \Psi_{k-1}/\Psi_k + (k-2)T/N$$

где индекс  $j$  таков, что

$$\frac{iT}{N} \leq t_j \leq \frac{(i+1)T}{N}$$

и

$$\Psi_k < (j-1)\Psi_N/n$$

для  $k = 2, 3, \dots$  и  $i \leq n$ .

Остается вычислить дискретные аналоги величин

$$(x(t_j), y(t_j)) \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Это будут значения

$$\begin{aligned} x(t_j) &= x_i \left( i + 1 - \frac{Nt_j}{T} \right) + x_{i+1} \left( \frac{Nt_j}{T} - i \right), \\ y(t_j) &= y_i \left( i + 1 - \frac{Nt_j}{T} \right) + y_{i+1} \left( \frac{Nt_j}{T} - i \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Остановимся на некоторых деталях приведенного алгоритма. Прежде всего отметим, что, во – первых, согласно теореме 3.4.2 для построения асимптотически оптимальных узлов  $t_i$  нет необходимости в излишней детализации (подобной дискретизации). Т.е. достаточно было бы положить

$$N = [1/\sqrt{\varepsilon}] + 1.$$

В этом случае значительно сократится объем вычислений на первом этапе (построение узлов  $t_j$ ). Но мы в этом случае столкнемся с тем, что формулы (3.76) уже не будут надежно определять узлы асимптотически оптимальной ломаной (они их дадут с точностью  $O(\varepsilon)$ , т.е. на уровне заданной погрешности), что недопустимо. Избежать этого можно, к примеру, так.

Выберем число

$$N = [1/\sqrt{\varepsilon}] + 1$$

и вычислим узлы  $t_j$ . Затем, если

$$t_j \in [(i-1)T/N, (i+1)T/N],$$

то вычислим точку  $(x(t_j), y(t_j))$  по значениям парабол, проходящих через точки  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  и  $y_{i-1}, y_i, y_{i+1}$  при  $t = (i-1)T/n, iT/n, (i+1)T/n$ , соответственно, т.е. положим

$$\begin{aligned} x(t_j) &= x_{i-1} \frac{N^2}{2T^2} \left( t_j - \frac{iT}{N} \right) \left( t_j - \frac{(i+1)T}{N} \right) - \\ &- x_i \frac{N^2}{T^2} \left( t_j - \frac{(i-1)T}{N} \right) \left( t_j - \frac{(i+1)T}{N} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x_{i+1} \frac{N^2}{2T^2} \left( t_j - \frac{(i-1)T}{N} \right) \left( t_j - \frac{iT}{N} \right), \\
y(t_j) = & y_{i-1} \frac{N^2}{2T^2} \left( t_j - \frac{iT}{N} \right) \left( t_j - \frac{(i+1)T}{N} \right) - \\
& -y_i \frac{N^2}{T^2} \left( t_j - \frac{(i-1)T}{N} \right) \left( t_j - \frac{(i+1)T}{N} \right) + \\
& +y_{i+1} \frac{N^2}{2T^2} \left( t_j - \frac{(i-1)T}{N} \right) \left( t_j - \frac{iT}{N} \right).
\end{aligned}$$

Это и будут точки изломов (узлы) искомой интерполяционной ломаной.

Ниже приведена программная реализация на языке PASKAL алгоритма асимптотически оптимальной линейной интерполяции.

```

Program line_opt (input,output);
{Программа строит асимптотически оптимальную интерполяционную
ломаную и приводит геометрическую иллюстрацию.
Приближаемая кривая задается или в параметрическом виде или
в виде набора точек. В случае если кривая замкнута, значения
в первой и последней точках должны совпадать.}
uses graph, Crt;
const pi=3.1415926536459;
      nm=390;
type arr=array[1..400] of real;
var ii,i,k,m,n,io,nl,rx,ry:integer;
    ix,iy:array[1..400] of integer;
    x,y,t,tz,f,fi,s,a:array [1..400] of real;
    t0,t1,xmx,ymx,xmn,ymn,e,h,a1,a1,eps:real;
    Ch : char;
    o: LongInt;
    GraphDriver : integer;
    GraphMode   : integer;
    ErrorCode   : integer;
    mx,my,hl,tu,xo,yo,la,mu : arr;
Procedure Initialize;
begin
  Graphdriver := Detect;
  InitGraph(GraphDriver, GraphMode, '');

```

```

ErrorCode := GraphResult;
if ErrorCode <> grOk then
begin
  Writeln('Graphics error: ', GraphErrorMsg(ErrorCode));
  readln;
  Halt(1);
end;
end;

Procedure pr(l,m,x,hl:arr;n:integer;var xm: arr);
{Вычисление коэффициентов интерполяционного кубического
сплайна, выполняющего роль теоретической кривой.}
var g,f,z,a:array [1..50] of real;
    i:integer;
begin
  g[1]:=0; f[1]:=0;
  for i:=3 to n-2 do
  begin
    z[i]:=m[i]*(x[i+1]-x[i])/hl[i];
    z[i]:=3*(z[i]+l[i]*(x[i]-x[i-1]))/hl[i-1]); a[i]:=2;
  end;
  a[2]:=hl[2]*x[n+1]*(1-x[n+1])*(1-x[n+1]);
  a[n-1]:=hl[n-2]*x[n+2]*x[n+2]*(x[n+2]-1);
  z[2]:=x[1]-x[2]*(1+2*x[n+1])*sqr(1-x[n+1]);
  z[2]:=z[2]-x[3]*sqr(x[n+1])*(3-2*x[n+1]);
  z[n-1]:=x[n]-x[n-2]*sqr(1-x[n+2])*(1+2*x[n+2]);
  z[n-1]:=z[n-1]-x[n-1]*sqr(x[n+2])*(3-2*x[n+2]);
  for i:=2 to n-1 do
  begin
    f[i]:=-m[i]/(a[i]+l[i]*f[i-1]);
    g[i]:=(z[i]-l[i]*g[i-1])/(a[i]+l[i]*f[i-1]);
  end;
  i:=n-2; xm[n-1]:=g[n-1];
  while i>=1 do
  begin
    xm[i]:=g[i]+f[i]*xm[i+1]; i:=i-1;
  end
end;

function fz(j:integer;t:real;i:integer;Z,A:arr):real;
{Вычисление значения интерполяционного кубического
сплайна в текущей точке.}

```

```

var e:real;
begin
  if j=0 then
    begin
      e:=z[i]*sqr(1-t)*(1+2*t)+z[i+1]*t*t*(3-2*t);
      fz:=e+a[i]*hl[i]*sqr(1-t)*t-a[i+1]*hl[i]*t*t*(1-t);
    end
  else if j=1 then
    begin
      e:=6*(1-t)*t*(z[i+1]-z[i])/hl[i];
      fz:=e+a[i]*(1-t)*(1-3*t)-a[i+1]*t*(2-3*t);
    end
  else if j=2 then
    begin
      e:=6*(1-2*t)*(z[i+1]-z[i])/sqr(hl[i]);
      fz:=e+2*(3*t-2)*a[i]/hl[i]+2*a[i+1]*(3*t-1)/hl[i];
    end
  else if j=3 then
    begin
      e:=12*(z[i]-z[i+1])/(hl[i]*sqr(hl[i]));
      fz:=e+6*(a[i]+a[i+1])/sqr(hl[i]);
    end;
end;

function fx(j:integer;e:real):real;
{Вычисление абсциссы текущей точки.}
begin
  io:=1;
  while tu[io+1]<=e do io:=io+1;
  a1:=(e-tu[io])/hl[io];
  fx:=fz(j,a1,io,xo,mx);
  if e>=t1 then
    begin
      if o=1 then fx:=fz(j,1,n-2,xo,mx);
    end;
  end;
end;

function fy(j:integer;e:real):real;
{Вычисление ординаты текущей точки.}
begin
  fy:=fz(j,a1,io,yo,my);
  if e>=t1 then

```

```

begin
  if o=1 then fy:=fz(j,1,n-2,yo,my);
  end;
end;
function fo(e:real):real;
{Демонстрационная параметрически заданная функция.
Абсцисса x(t)}
begin
  fo:=e*sqr(1-e); {замкнутая кривая}
{fo:=e*(sin(4*pi*e)); } {незамкнутая кривая}
end;
function f1(e:real):real;
{Демонстрационная параметрически заданная функция.
Ордината y(t)}
begin
  f1:=sqr(e)*(1-e); {замкнутая кривая}
{f1:=e*(cos(4*pi*e));} {незамкнутая кривая}
end;

begin
  Initialize;
  RestoreCrtMode;
  rx:=Round(GetMaxX/2); ry:=Round(GetMaxY/4.2);
  o:=1; HighVideo;
  Write('ДЕМОНСТРАЦИЯ АЛГОРИТМА АСИМПТОТИЧЕСКИ ');
  Writeln('ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ. ');
  Writeln; LowVideo; While KeyPressed do ch:= ReadKey;
  Writeln('Нажмите клавишу Enter'); Writeln;
  Write('Если желаете ввести свои данные, ');
  Writeln('нажмите любую другую клавишу');
  NormVideo; ch:= ReadKey; While KeyPressed do ch:= ReadKey;
  if ch=#13 then
    begin
      ii:=0; Sound(300); Delay(100); NoSound;
    end
  else
    begin
      ii:=1; Sound(600); Delay(100); NoSound;
    end;
end;

{Ввод данных.}

```

```
if ii=1 then
begin
Write('Введите количество точек N=');readln(n);writeln;
Write('Введите значение погрешности интерполяции eps= ');
readln(eps); Writeln('Покоординатный ввод данных:');
Write('(Если кривая замкнута, то первая и последняя ');
Writeln('точки должны совпадать)');
for i:=1 to n do
begin
write('x['i,']='); read(xo[i]);
write('y['i,']='); read(yo[i]);
writeln;
end;
end
else
begin
n:=40;
for i:=1 to n do
begin
xo[i]:=fo((i-1)/(n-1)); yo[i]:=f1((i-1)/(n-1));
end;
end;
if xo[1]=xo[n]
then if yo[1]=yo[n]
then
begin
o:=0;
for i:=1 to n do
begin
x[i+1]:=xo[i]; y[i+1]:=yo[i];
end;
xo[1]:=xo[n-1]; yo[1]:=yo[n-1];
xo[n+2]:=xo[2]; yo[n+2]:=yo[2];
for i:=2 to n+1 do
begin
xo[i]:=x[i]; yo[i]:=y[i];
end;
n:=n+2;
end;

tu[1]:=0;
```

```

for i:=1 to n-1 do
  begin
    hl[i]:=sqrt(sqr(xo[i+1]-xo[i])+sqr(yo[i+1]-yo[i]));
    tu[i+1]:=tu[i]+hl[i];
    end;
  if o=0 then
    begin
      t0:= tu[2]; t1:= tu[n-1];
      end;
  t[1]:=xo[2]; t[2]:=xo[n-1];
  t[3]:=yo[2]; t[4]:=yo[n-1];
  xo[2]:=xo[1]; yo[2]:=yo[1];
  xo[n-1]:=xo[n]; yo[n-1]:=yo[n];
  xo[1]:=t[1]; xo[n]:=t[2];
  yo[1]:=t[3]; yo[n]:=t[4];
  t[1]:=hl[1]/(hl[1]+hl[2]);
  t[2]:=hl[n-2]/(hl[n-1]+hl[n-1]);
  hl[2]:=hl[1]+hl[2]; hl[n-2]:=hl[n-1]+hl[n-2];
  tu[2]:=0; tu[n-1]:=tu[n];
  mu[2]:=hl[2]*sqr(t[1])*(t[1]-1); la[2]:=0;
  mu[n-1]:=0; la[n-1]:=hl[n-2]*t[2]*sqr(1-t[2]);
for i:=3 to n-2 do
  begin
    la[i]:=hl[i]/(hl[i]+hl[i-1]); mu[i]:=1-la[i];
    end;
  xo[n+1]:=t[1]; xo[n+2]:=t[2];
  yo[n+1]:=t[1]; yo[n+2]:=t[2];

```

{Получение аналитического задания кривой в виде  
интерполяционного кубического сплайна минимального дефекта.}

```

PR(la,mu,xo,hl,n,mx); PR(la,mu,yo,hl,n,my);
if o=1 then
  begin
    t0:=0; t1:=tu[n];
    end;
  xmn:=0; xmx:=0; ymn:=0; ymx:=0;
{Определение минимального и максимального значений координат
приближаемой кривой (для масштабирования "картинки").}
for i:=1 to nm do
  begin
    x[i]:=fx(0,t0+(i-1)*(t1-t0)/nm);

```

```

        y[i]:=fy(0,t0+(i-1)*(t1-t0)/nm);
        if x[i]<=xmn then xmn:=x[i];
        if x[i]>=xmx then xmx:=x[i];
        if y[i]<=ymn then ymn:=y[i];
        if y[i]>=ymx then ymx:=y[i];
    end;
if ii=0 then eps:=t1/100;{ПРИМЕР}
    nl:=399;
    h:=(t1-t0)/nl;
    for i:=1 to nl+1 do
        begin
            tz[i]:=t0+(i-1)*h;
        end;
    al:=0;

{Вычисление значений функции-регулятора узлов.}
    for i:=1 to nl+1 do
        begin
            s[i]:=Sqr(fx(1,tz[i]))+Sqr(fy(1,tz[i]));
            a[i]:=(fx(1,tz[i])*fy(2,tz[i])-fy(1,tz[i])*fx(2,tz[i]));
            f[i]:=Sqrt(Sqrt(Sqr(a[i])/s[i]))+1/nl;
            e:=f[i]*h;  al:=al+e;  fi[i]:=al;
        end;
    fi[1]:=0; e:=Sqrt(eps*8); m:=trunc(fi[nl+1]/e)+1;  io:=m;
    write('Количество асимптотически оптимальных');
    writeln(' узлов равно N= ',m);
    if m>399 then m:=390;

{Вычисление асимптотически оптимальных значений параметра.}
    t[1]:=t0;  i:=2;
    for k:=2 to nl+1 do
        begin
            while fi[k]>=((i-1)*fi[nl+1]/m) do
                begin
                    t[i]:=((i-1)*fi[nl+1]/m-fi[k-1])/f[k]+t0+(k-2)*h;
                    if i<m+2 then i:=i+1;
                    if i=m+1 then k:=nl+1;
                end;
            end;
        end;
    t[m+1]:=t1;  nl:=io;

write('Значения параметров соответствующие узлам');

```

```

writeln(' асимптотически оптимальной ломаной:');
for i:=1 to m+1 do
  writeln('t('i,')='t[i]);
  HighVideo;  writeln;
  writeln('
          ГРАФИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ');
  NormVideo;  writeln;
  writeln('Зеленым цветом изображена приближаемая кривая. ');
  write('Белым цветом изображена асимптотически ');
  writeln('оптимальная интерполяционная ломаная. ');
  writeln('Нажмите любую клавишу');
  ch:= ReadKey;  While KeyPressed do ch:= ReadKey;
  for i:=1 to m+1 do
    begin
      x[i]:=fx(0,t[i]);  y[i]:=fy(0,t[i]);
    end;
SetGraphMode(0);
n:=2;
for k:=1 to n do
  for i:=1 to nm+1 do
    begin
      e:=t0+(k-1+(i-1)/nm)*(t1-t0)/n;
      ix[i]:=round(rx*(fx(0,e)-xmn)/(xmx-xmn))+10;
      iy[i]:=round(ry*(fy(0,e)-ymn)/(ymx-ymn))+10;
      putpixel(ix[i],iy[i],lightgreen);
    end;
for i:=1 to m+1 do
  begin
    ix[i]:=round(rx*(x[i]-xmn)/(xmx-xmn))+10;
    iy[i]:=round(ry*(y[i]-ymn)/(ymx-ymn))+10;
  end;
  for i:=2 to m+1 do
    line(ix[i-1],iy[i-1],ix[i],iy[i]);
  Ch := Readkey;  closegraph; writeln('bye');
end.

```

### 3.8 Асимптотически наилучшая аппроксимация плоских кривых ломаными

Лучшее – враг хорошего.

Во многих задачах, связанных с программным обеспечением станков с ЧПУ вполне хватает того аппарата восстановления кривых, который мы рассматривали в предыдущем параграфе. В то же время, почти очевидно, что чуть изменив ломаную (см. рис. 3.5) можно существенно (почти в два раза) улучшить качество восстановления кривой. В этом случае говорят о наилучшей или асимптотически наилучшей аппроксимации кривой ломаными. В этом параграфе мы приведем результаты, которые позволят построить алгоритм асимптотически наилучшей аппроксимации ломаными. Из этих результатов, в частности, будет следовать, что при одном и том же количестве звеньев наилучшая ломаная дает погрешность (с асимптотической точки зрения) в два раза меньше, чем интерполяционная, или, что при одной и той же допустимой погрешности обработки наименьшая управляющая программа, построенная на базе наилучших ломаных, будет иметь в  $\sqrt{2}$  кадров меньше, чем соответствующая ей наименьшая управляющая программа, построенная на базе интерполяционных ломаных.

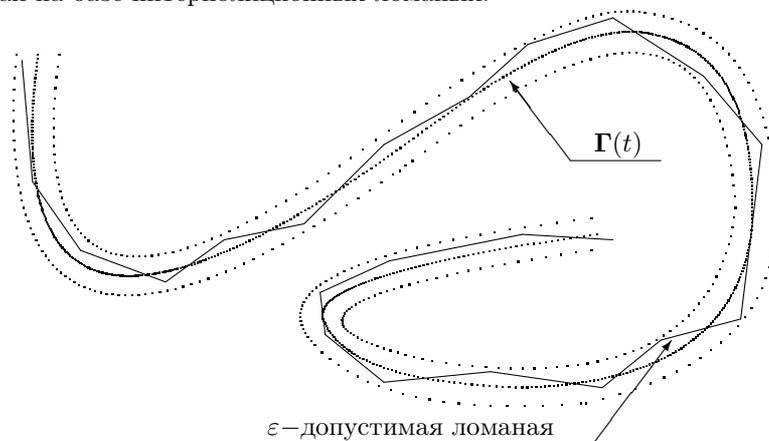


Рис. 3.13:

Материал, изложенный в этом параграфе, можно условно разделить на три части:

1. Постановки задачи и формулировка основного результата.
2. Доказательство оценки сверху, т.е. построение наилучшего (в этом месте мы можем только предположить это) алгоритма.
3. Доказательство оптимальности приведенного в предыдущем пункте алгоритма.

Третья часть (самая сложная) содержит дополнительные построения, связанные с получением погрешности восстановления кривой с помощью кусочно – окружностных кривых. Эти результаты носят вспомогательный характер в данном параграфе. Однако, в дальнейшем мы их будем использовать и по прямому назначению – для построения оптимальных алгоритмов кусочно – окружностной аппроксимации. В связи с этим, результаты связанные с кусочно – окружностной аппроксимацией мы изложим с достаточно подробными доказательствами.

Рассмотрим приближение кривых ломаными в хаусдорфовой (визуальной) метрике. Пусть, как и ранее,  $\mathcal{R}(\Gamma_1, \Gamma_2)$  – хаусдорфово расстояние между кривыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Напомним, что это наименьшее значение  $\varepsilon$ , при котором кривая  $\Gamma_1$  лежит в  $\varepsilon$ -коридоре кривой  $\Gamma_2$ , а кривая  $\Gamma_2$  – лежит в  $\varepsilon$ -коридоре линии  $\Gamma_1$ , т.е. (см. рис.3.13):

$$\mathcal{R}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min \{ \varepsilon : \Gamma_1 \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_2); \Gamma_2 \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_1) \}.$$

Ломаную  $\Gamma_n(\Gamma)$  с  $n$  звеньями будем называть  $\varepsilon$ - допустимым режимом обработки кривой  $\Gamma_n(\Gamma)$ , если

$$\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_n(\Gamma)) \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon$ -Оптимальным режимом обработки кривой  $\Gamma$  назовем  $\varepsilon$ -допустимый режим обработки с минимальным числом звеньев (в дальнейшем будем обозначать число его звеньев через  $n_\varepsilon(\Gamma)$  или  $n_\varepsilon$ , если понятно о какой кривой  $\Gamma$  идет речь) (см. рис.3.14).

Последовательность  $\varepsilon$ -допустимых режимов  $\{\Gamma_n(\Gamma, \varepsilon)\}_{n=1}^\infty$  будем называть  $\varepsilon$ -оптимальной последовательностью режимов обработки кривой  $\Gamma$ , если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{R}(\Gamma, \Gamma_n(\Gamma, \varepsilon))}{\varepsilon} = 1.$$

Прежде, чем переходить к изложению алгоритма построения асимптотически оптимальных режимов обработки кривой и его обоснованию, приведем несколько замечаний, помогающих понять идейную сторону излагаемых далее алгоритмов.

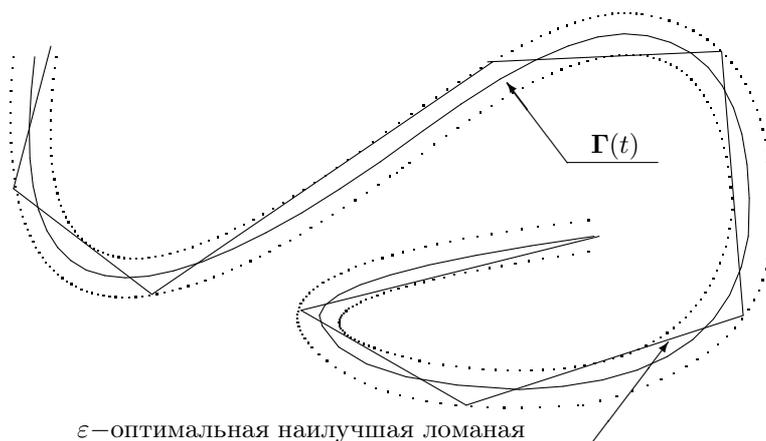


Рис. 3.14:

Для простоты изложения, рассмотрим вначале выпуклый участок кривой  $\Gamma$  и асимптотически оптимальную последовательность интерполяционных ломаных, описывающих кривую  $\Gamma$  с точностью  $2\varepsilon$ .

Очевидно, что для получения из этой кривой наилучшей, необходимо каждое звено этой интерполяционной ломаной сместить на величину  $\varepsilon$  в сторону приближаемой кривой  $\Gamma$ .

Для этого необходимо построить прямую параллельную  $M_{i-1}M_i$  на расстоянии  $\varepsilon$  от прямой  $M_{i-1}M_i$  в сторону выпуклости кривой  $\Gamma$  и прямую параллельную  $M_iM_{i+1}$  на расстоянии  $\varepsilon$  от прямой  $M_iM_{i+1}$  в сторону выпуклости кривой  $\Gamma$  и найти точку пересечения  $M_i^*$  этих прямых (см. рис.3.15). И так на каждой паре звеньев. Полученные точки  $\{M_i^*\}_{i=1}^{n-1}$  являются узлами асимптотически оптимальной ломаной для кривой  $\Gamma$ .

Кажущаяся простота построения этих точек обманчива. Ясно, что при описании алгоритма построения узлов  $\{M_i^*\}_{i=1}^{n-1}$  ломаной, нам придется столкнуться со всеми возможными случаями, в частности, с тем, который изображен на рис.3.16. К тому же, используя такого рода построения, мы теряем одно из основных преимуществ описанного ранее алгоритма определения узлов асимптотически оптимальных интерполяционных ломаных – то, что алгоритм содержит *только* явные фор-

мулы. Разрешить это противоречие поможет опять – таки асимптотический подход. Как мы уже отмечали в параграфе 3.6, если  $M_{i-1/2}^*$  – середина звена  $M_{i-1}M_i$  интерполяционной ломаной, отстоящей от интерполируемой кривой  $\Gamma$  на расстоянии  $2\varepsilon$ , то с точностью до величин более высокого порядка малости, чем  $\varepsilon$ , длина вектора  $M_{i-1/2}^*M_{i-1/2}$  равна  $2\varepsilon$  (где  $M_{i-1/2}$  – середина дуги  $M_iM_{i+1}$  кривой  $\Gamma$ ). Таким образом, при сдвиге отрезка ломаной  $M_{i-1}M_i$  вдоль вектора  $M_{i-1/2}^*M_{i-1/2}$  на расстояние  $|M_{i-1/2}^*M_{i-1/2}|/2$  точка  $M_i$  почти совпадает с точкой  $M_i^*$ , а точка  $M_{i-1}$  – с точкой  $M_{i-1}^*$ , т.е.

$$M_i^* \approx M_i + \frac{1}{2}(M_{i-1/2} - M_{i-1/2}^*).$$

Аналогично,

$$M_i^* \approx M_i + \frac{1}{2}(M_{i+1/2} - M_{i+1/2}^*).$$

В качестве узлов ломаной наилучшего приближения можно взять любое из этих значений, но, для более высокой устойчивости вычислений и ввиду равноправности точек  $M_{i-1}$  и  $M_{i+1}$  по отношению к точке  $M_i$ , целесообразно в качестве  $M_i^*$  взять среднее арифметическое этих величин, т.е. положить

$$M_i^* \approx M_i + \frac{1}{4}(M_{i-1/2} - M_{i-1/2}^* + M_{i+1/2} - M_{i+1/2}^*).$$

Кроме того ясно, что

$$M_{i-1/2}^* = \frac{1}{2}(M_i + M_{i-1}), \quad M_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(M_{i+1} + M_i)$$

и, следовательно,

$$M_i^* \approx M_i + \frac{1}{8}(2M_{i-1/2} + 2M_{i+1/2} - M_{i+1} - 2M_i - M_{i-1}). \quad (3.77)$$

Таким образом мы приходим к явной формуле определения узлов  $\{M_i^*\}_{i=1}^n$ .

Недостатком полученных приближенных равенств является тот факт, что они содержат точки  $M_{i\pm 1/2} = (x_{i\pm 1/2}, y_{i\pm 1/2})$ . Чтобы избавиться от этих промежуточных значений кривой снова применим асимптотический подход.

Согласно формуле Тейлора

$$x_{i+1/2,n} = x_{i,n} + \frac{1}{2}h_{i+1/2,n}x'_{i,n} + \frac{1}{8}h_{i+1/2,n}^2x''_{i,n} + O(h_{i+1/2,n}^3), \quad (3.78)$$

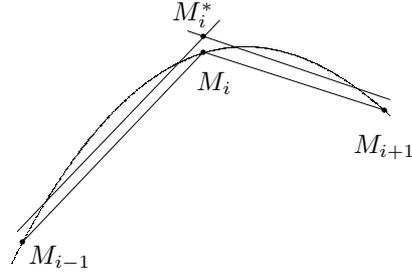


Рис. 3.15:

$$x_{i+1,n} = x_{i,n} + h_{i+1/2,n}x'_{i,n} + \frac{1}{2}h_{i+1/2,n}^2x''_{i,n} + O(h_{i+1/2,n}^3), \quad (3.79)$$

и

$$x_{i-1/2,n} = x_{i,n} - \frac{1}{2}h_{i-1/2,n}x'_{i,n} + \frac{1}{8}h_{i-1/2,n}^2x''_{i,n} + O(h_{i-1/2,n}^3), \quad (3.80)$$

$$x_{i-1,n} = x_{i,n} - h_{i-1/2,n}x'_{i,n} + \frac{1}{2}h_{i-1/2,n}^2x''_{i,n} + O(h_{i-1/2,n}^3), \quad (3.81)$$

где  $h_{i-1/2,n}$  — длина звена  $M_{i-1}M_i$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} & 2x_{i-1/2,n} + 2x_{i+1/2,n} - x_{i-1,n} - 2x_{i,n} - x_{i+1,n} = \\ & = -\frac{1}{4}x''_{i,n}(h_{i-1/2,n}^2 + h_{i+1/2,n}^2) + O(h_{i-1/2,n}^3 + h_{i+1/2,n}^3) = \\ & = -\frac{1}{2}x''_{i,n} \left( \frac{h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n}}{2} \right)^2 + O \left( \left( \frac{h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n}}{2} \right)^3 \right). \end{aligned}$$

Если мы повторим аналогичные рассуждения для выражения

$$\frac{x_{i+1,n} - x_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{x_{i,n} - x_{i-1,n}}{\mu_i},$$

где

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1/2,n}}{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}} \quad \mu_i = \frac{h_{i-1/2,n}}{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}},$$

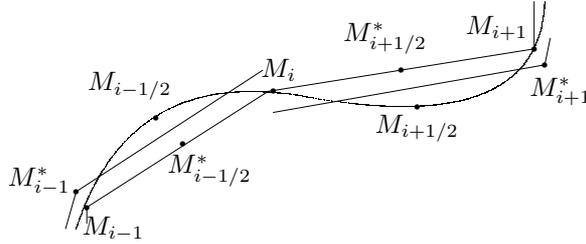


Рис. 3.16:

то получим

$$\begin{aligned} & \frac{x_{i+1,n} - x_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{x_{i,n} - x_{i-1,n}}{\mu_i} = \\ & = 2x''_{i,n} \left( \frac{h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n}}{2} \right)^2 + O \left( \left( \frac{h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n}}{2} \right)^3 \right). \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до величин  $O((h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n})^3)$  (а для асимптотически оптимальных узлов это значит – с точностью до  $\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$ ), будет выполняться равенство

$$x_{i,n}^* \approx x_{i,n} + \delta x_i$$

и, аналогично,

$$y_{i,n}^* \approx y_{i,n} + \delta y_i,$$

где

$$\begin{aligned} \delta x_i &= -\frac{1}{32} \left( \frac{x_{i+1,n} - x_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{x_{i,n} - x_{i-1,n}}{\mu_i} \right), \\ \delta y_i &= -\frac{1}{32} \left( \frac{y_{i+1,n} - y_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{y_{i,n} - y_{i-1,n}}{\mu_i} \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{h_{i+1/2,n}}{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}}, \\ \mu_i &= \frac{h_{i-1/2,n}}{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}}. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к формулировке основного результата этого параграфа.

Сформулируем его в виде теоремы.

**Теорема 3.8.1** Пусть функции  $x(t), y(t)$ , определяющие параметрическое задание кривой  $\Gamma = (x(t), y(t))$ , трижды непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[0, T]$ , т.е.  $(x, y \in C_{[0, T]}^3)$ ,  $\alpha$  – произвольное число ( $0 < \alpha < 1/4$ ) и для произвольного  $\varepsilon > 0$  число звеньев  $n = n(\varepsilon)$  определит равенством

$$n = \left[ \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt \right] + 1. \quad (3.82)$$

Пусть, кроме того, узлы  $\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$  выбраны исходя из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}^*} \left( \Phi(t) + \frac{1}{n^\alpha} \right) dt = \frac{i}{n} \int_0^T \left( \Phi(t) + \frac{1}{n^\alpha} \right) dt, \quad (3.83)$$

где

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}}.$$

Тогда последовательность ломаных  $\{\Gamma_n^0(\Gamma)\}_{n=1}^\infty$  с узлами в точках  $M_i^*(x_{i,n}^*, y_{i,n}^*)$  будет асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$ . Здесь

$$x_{i,n}^* = x_{i,n} + \delta x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3.84)$$

$$y_{i,n}^* = y_{i,n} + \delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3.85)$$

$$x_{i,n} = x(t_{i,n}^*), \quad y_{i,n} = y(t_{i,n}^*) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$\delta x_i = -\frac{1}{32} \left( \frac{x_{i+1,n} - x_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{x_{i,n} - x_{i-1,n}}{\mu_i} \right) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3.86)$$

$$\delta y_i = -\frac{1}{32} \left( \frac{y_{i+1,n} - y_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{y_{i,n} - y_{i-1,n}}{\mu_i} \right) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (3.87)$$

При этом

$$x_{-1,n} = \frac{1}{3}(4x_{0,n} + x_{1,n} - 2x_{2,n}), \quad y_{-1,n} = \frac{1}{3}(4y_{0,n} + y_{1,n} - 2y_{2,n}),$$

$$x_{n+1,n} = \frac{1}{3}(4x_{n,n} + x_{n-1,n} - 2x_{n-2,n}), \quad y_{n+1,n} = \frac{1}{3}(4x_{n,n} + y_{n-1,n} - 2y_{n-2,n}),$$

а также,

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1/2,n}}{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$\mu_i = \frac{h_{i-1/2,n}}{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

и

$$h_{i+1/2,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n} \quad (i = 0, \dots, n-1),$$

$$h_{-1/2,n} = \frac{1}{3}(4h_{1/2,n} + x_{3/2,n} - 2x_{5/2,n}),$$

$$h_{n+1/2,n} = \frac{1}{3}(4h_{n-1/2,n} + x_{n-3/2,n} - 2x_{n-5/2,n}).$$

Как мы видим, узлы ломаной, построенные в теореме 3.8.1, отличаются от соответствующих значений, полученных в теореме 3.4.3, лишь малыми добавками  $\delta x_i$  и  $\delta y_i$ . Выбор же узлов разбиения остался без изменений.

Здесь мы не будем приводить алгоритм нахождения асимптотически оптимальной траектории в силу нескольких причин. Во – первых, он очевидным образом следует из алгоритма, построенного в предыдущем параграфе ( достаточно лишь учесть добавки  $(\delta x_i, \delta y_i)$ ), а, во – вторых, потому, что он получается как частный случай из задачи об эквидистанте (при нулевом радиусе фрезы), изложенной далее.

Отметим, что также как и алгоритм предыдущего параграфа, данный алгоритм (кроме его основного свойства – асимптотической оптимальности ) обладает также замечательным свойством равномерности погрешности приближения, т.е. на каждом звене ломаная отклоняется как с одной, так и с другой стороны кривой  $\Gamma$  на расстояние почти равное  $\varepsilon$ , что чрезвычайно важно для дальнейшей обработки (доводки) контура детали.

Те рассуждения, которые мы привели для определения добавок  $\delta x_i$  и  $\delta y_i$ , строго говоря, нельзя назвать доказательством (они относятся к разряду доказательных рассуждений) и их и не обязательно было приводить. Мы могли бы просто предъявить вид этих добавок и строго доказать, что именно они и дают наилучшую аппроксимацию. В дальнейшем иногда мы так и будем поступать, однако мы постараемся не злоупотреблять этим приемом (иногда его называют методом вынимания кролика из шляпы). Несмотря на то, что этот метод позволяет быстрее всего получить требуемый результат, он лишает читателя возможности проследить цепь умозаключений, приводящих к желаемому результату и понять идейную сторону вопроса, а дает лишь результат в готовом виде.

**Доказательство теоремы.** Здесь, как и во всех последующих случаях, нам необходимо доказать две части теоремы. С одной стороны, требуется доказать, что предъявленный метод обеспечивает (с точностью до величин более малого порядка)  $\varepsilon$ -аппроксимацию кривой  $\Gamma$ , а с

другой, доказать, что *никакой* другой метод не может дать погрешность аппроксимации меньшую, чем  $\varepsilon$ .

Перейдем к доказательству первой части теоремы.

Пусть узлы ломаной выбраны из условий (3.83). Для  $t \in [t_{i,n}^*, t_{i+1,n}^*]$  ломаная будет иметь вид

$$\frac{x - x_{i,n}^*}{x_{i+1,n}^* - x_{i,n}^*} = \frac{y - y_{i,n}^*}{y_{i+1,n}^* - y_{i,n}^*}.$$

Тогда расстояние от произвольной точки  $M(t) = (x(t), y(t))$ , лежащей на дуге  $M_i M_{i+1}$  до ломаной (звена ломаной)  $\Gamma_n^0(\Gamma)$  будет вычисляться по формуле

$$d(t) = \frac{|(x(t) - x_{i,n}^*)(y_{i+1,n}^* - y_{i,n}^*) - (y(t) - y_{i,n}^*)(x_{i+1,n}^* - x_{i,n}^*)|}{\sqrt{(x_{i+1,n}^* - x_{i,n}^*)^2 + (y_{i+1,n}^* - y_{i,n}^*)^2}}. \quad (3.88)$$

Исходя из способа построения координат  $x_{i,n}^*$  и  $y_{i,n}^*$ , и, используя формулу Тейлора, получаем, что в окрестности точки  $M_{i+1/2,n}(x_{i+1/2,n}, y_{i+1/2,n})$  будут иметь место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} x_{i,n}^* &= x_{i+1/2,n} - \frac{1}{2}x'_{i+1/2,n}h_{i+1/2,n} + \frac{1}{8}x''_{i+1/2,n}(h_{i+1/2,n}^2 - \\ &\quad - \frac{1}{8}(h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n})^2) + O((h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n})^3), \\ x_{i+1,n}^* &= x_{i+1/2,n} + \frac{1}{2}x'_{i+1/2,n}h_{i+1/2,n} + \frac{1}{8}x''_{i+1/2,n}(h_{i+1/2,n}^2 - \\ &\quad - \frac{1}{8}(h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n})^2) + O((h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n})^3), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{i+1/2,n} + x'_{i+1/2,n}(\tau - 1/2)h_{i+1/2,n} + \frac{1}{2}x''_{i+1/2,n}(\tau - 1/2)^2h_{i+1/2,n}^2 + \\ &\quad + O(h_{i+1/2,n}^3). \end{aligned}$$

Аналогично получаются соотношения для  $y_{i,n}^*$ ,  $y_{i+1,n}^*$  и  $y(t)$ . Здесь, как обычно,  $\tau = (t - t_{i+1/2,n}^*)/h_{i+1/2,n}$  и  $h_{i+1/2,n} = 2(t_{i+1/2,n}^* - t_{i,n}^*)$ .

Так как узлы  $\{t_{i,n}^*\}_{n=1}^n$  выбраны из условия (3.83), то

$$\int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} \left( \Phi(t) + \frac{1}{n^\alpha} \right) dt = \frac{\mathcal{A}}{n}, \quad (3.89)$$

где

$$\mathcal{A} = \int_0^T \left( \Phi(t) + \frac{1}{n^\alpha} \right) dt.$$

Тогда отсюда и из формулы Тейлора для функции  $\Phi(t)$  в окрестности точки  $t_{i+1/2,n}^*$  следует, что

$$\Phi(t) = \Phi_{i+1/2,n} + \Phi'_{i+1/2,n}(\tau - 1/2)h_{i+1/2,n} + O(h_{i+1/2,n}^2).$$

Это позволяет записать

$$\int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} \left( \Phi(t) + \frac{1}{n^\alpha} \right) dt = \left( \Phi_{i+1/2,n} + \frac{1}{n^\alpha} \right) h_{i+1/2,n} + O(h_{i+1/2,n}^3) = \frac{\mathcal{A}}{n}. \quad (3.90)$$

Кроме того, так как в силу (3.83)

$$h_{i+1/2,n} \frac{1}{n^\alpha} = \int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} \frac{1}{n^\alpha} dt \leq \int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} \left( \Phi(t) + \frac{1}{n^\alpha} \right) dt = \frac{\mathcal{A}}{n},$$

то

$$h_{i+1/2,n} \leq \frac{\mathcal{A}}{n^{1-\alpha}}.$$

Отсюда и из (3.90) получим, что величина  $i$ -го шага разбиения будет удовлетворять асимптотическому равенству

$$h_{i+1/2,n} = \frac{\mathcal{A}}{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} + O\left(\frac{1}{n^{3-2\alpha}}\right). \quad (3.91)$$

Аналогично,

$$h_{i-1/2,n} = \frac{\mathcal{A}}{n(\Phi_{i-1/2,n} + n^{-\alpha})} + O\left(\frac{1}{n^{3-2\alpha}}\right).$$

Отсюда и из предыдущих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} x_{i+1,n}^* - x_{i,n}^* &= x'_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n} + \frac{1}{64} x''_{i+1/2,n} (h_{i-1/2,n} - h_{i+3/2,n})(h_{i+3/2,n} + \\ &+ 2h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}) + O((h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n} + h_{i+3/2,n})^3) = \\ &= \frac{\mathcal{A} x'_{i+1/2,n}}{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

и

$$\begin{aligned}
x(t) - x_{i,n}^* &= x'_{i+1/2,n} \tau h_{i+1/2,n} + \frac{1}{2} x''_{i+1/2,n} \left[ \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 h_{i+1/2,n}^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} h_{i+1/2,n}^2 + \frac{1}{32} (h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n})^2 \right] + O((h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n})^3) = \\
&= \frac{\mathcal{A} x'_{i+1/2,n}}{n (\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} \tau + \frac{\mathcal{A}^2 x''_{i+1/2,n}}{2 n^2 (\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})^2} \left[ \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] + \\
&\quad + O\left( \frac{1}{n^{3-3\alpha}} \right).
\end{aligned}$$

Аналогичные соотношения получаем для величины  $y_{i+1,n}^* - y_{i,n}^*$ , а также и для величины  $y(t) - y_{i,n}^*$ . Подставляя эти значения в соотношение (3.88), и, проведя очевидные упрощения, получим

$$\begin{aligned}
d(t) &= \frac{\mathcal{A}^2}{2 n^2 (\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})^2} \frac{|x''_{i+1/2,n} y'_{i+1/2,n} - x'_{i+1/2,n} y''_{i+1/2,n}|}{\sqrt{(x'_{i+1/2,n})^2 + (y'_{i+1/2,n})^2}} \times \\
&\quad \times \left[ \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] + O\left( \frac{1}{n^{3-3\alpha}} \right) = \\
&= \frac{\mathcal{A}^2}{2 n^2 (\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})^2} \Phi_{i+1/2,n}^2 \left[ (\tau - 1/2)^2 - 1/8 \right] + O\left( \frac{1}{n^{3-3\alpha}} \right) = \\
&= \frac{\mathcal{A}^2}{2 n^2} \left[ (\tau - 1/2)^2 - 1/8 \right] \left( 1 + \frac{C_i}{n^\alpha} \right),
\end{aligned}$$

где  $|C_i| \leq C$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $C$  — некоторая постоянная, зависящая только от кривой  $\Gamma$ . Отсюда и из выбора числа  $n = n(\varepsilon)$  (см.(3.82)), получаем

$$\begin{aligned}
d(t) &= 8\varepsilon \left[ \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] (1 - C_{1,i} \sqrt{\varepsilon})(1 - C_{2,i} \varepsilon^{\alpha/2}) = \\
&= 8\varepsilon \left[ \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] (1 + C_{3,i} \varepsilon^{\alpha/2}),
\end{aligned}$$

где  $|C_{\nu,i}| \leq C_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $C_1, C_2, C_3$  — постоянные, зависящие только от кривой  $\Gamma$ .

Кроме того, так как

$$\max_{\tau \in [0,1]} \left[ \left( \tau - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] = \frac{1}{8},$$

то

$$\max_{t \in [t_{i,n}^*, t_{i+1,n}^*]} d(t) = \varepsilon(1 + O(\varepsilon^{\alpha/2})),$$

что и доказывает первую часть теоремы, т.е. то, что алгоритм, приведенный в условии теоремы, описывает кривую  $\Gamma$  с точностью до  $\varepsilon$ , если пренебречь величинами порядка  $O(\varepsilon^{\alpha/2})$ .

Доказательство второй части теоремы существенно сложнее. Этот факт присущ всей теории оптимальных алгоритмов. Как правило, оптимальный алгоритм проще просто угадать, чем доказать, что именно он и является оптимальным. Для пользователя важно лишь то обстоятельство, что он должен быть уверен, что предъявленный алгоритм можно упрощать, модернизировать, обобщать, адаптировать к той или иной конкретной задаче, но улучшить его нельзя. В связи с этим разработчик программного обеспечения может опустить вторую часть доказательства теоремы без всякого ущерба для разрабатываемого алгоритма.

Идея доказательства второй части теоремы состоит в том, что вначале мы приблизим кривую  $\Gamma$  кусочно – окружностной линией. Гладкую кривую  $\Gamma$  можно приблизить (см. 3.8.2) кусочно – окружностными кривыми с  $n$  звеньями с погрешностью порядка  $O(n^{-3})$  (заметим, что порядок погрешности приближения ломаными не может быть выше  $O(n^{-2})$ ). Этот факт и поможет доказать нам вторую часть теоремы.

Выберем число

$$N = N(\varepsilon) = \lceil \varepsilon^{-0.4} \rceil + 1$$

и приблизим кривую  $\Gamma$  кусочно – окружностной кривой с  $N$  звеньями. Порядок приближения при этом будет равен

$$O(N^{-3}) = O(\varepsilon^{1.2}),$$

т.е. меньше, чем  $O(\varepsilon)$ , поэтому, если ломаная  $\Gamma_n$  приближает кривую  $\Gamma$  с порядком приближения  $O(\varepsilon)$ , то она и кусочно – окружностную кривую приблизит с порядком  $O(\varepsilon)$ . Затем мы докажем простую лемму о наилучшем приближении дуги окружности ломаной и воспользуемся рассуждениями, близкими к тем, которые мы применяли при доказательстве оценок снизу в теоремах параграфа 3.2 и 3.3.

Вначале докажем лемму об аппроксимации гладкой кривой кусочно – окружностными кривыми. Это утверждение понадобится нам и

в дальнейшем для задачи отыскания асимптотически оптимальных последовательностей разбиений при восстановлении кривых кусочно – окружностными линиями.

Пусть кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) задана в естественной параметризации, и, последовательность  $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ , где

$$\Delta_n = \{t_{i,n}\}_{i=0}^n = \{0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \dots < t_{n,n} = T\}$$

– произвольное разбиение отрезка  $[0, T]$  такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq n-1} h_{i+1/2,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0,$$

где, как и ранее,

$$h_{i+1/2,n} = (t_{i+1,n} - t_{i,n})/2 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

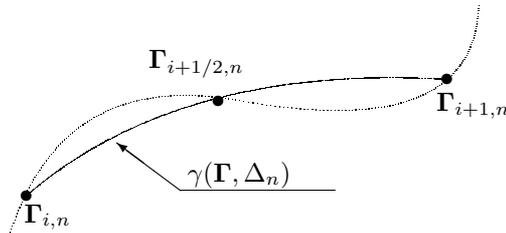


Рис. 3.17:

Каждому из разбиений  $\Delta_n$  поставим в соответствие кривую  $\gamma(\Gamma, \Delta_n)$ , состоящую из дуг окружностей, каждая из которых проходит через точки  $\Gamma_{i,n}$ ,  $\Gamma_{i+1/2,n}$ ,  $\Gamma_{i+1,n}$  (см. рис.3.17), где

$$\Gamma_{i,n} = \Gamma(t_{i,n}) = (x_{i,n}, y_{i,n}) = (x(t_{i,n}), y(t_{i,n})) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+1/2,n} &= \Gamma(t_{i+1/2,n}) = \\ &= (x_{i+1/2,n}, y_{i+1/2,n}) = (x(t_{i+1/2,n}), y(t_{i+1/2,n})) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее,

$$t_{i+1/2,n} = (t_{i+1,n} + t_{i,n})/2 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

**Лемма 3.8.2** Пусть кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ), заданная в естественной параметризации, такова, что  $x, y \in C_{[0, T]}^4$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  выполняется равенство

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) = \frac{1}{72\sqrt{3}} \max_{1 \leq i \leq n} \left[ |F_{i+1/2, n}| h_{i+1/2, n}^3 + O(h_{i+1/2, n}^4) \right],$$

где

$$F(t) = x'(t)y'''(t) - y'(t)x'''(t)$$

и, в частности, если

$$\bar{\Delta}_n = \{iT/N\}_{i=0}^N,$$

то

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \bar{\Delta}_n)) = \frac{T^3}{72\sqrt{3}N^3} \max_t |F(t)| + O\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

**Доказательство.** Пусть  $t \in [t_{i, n}, t_{i+1, n}]$ . Ради простоты и удобства доказательства, положим  $t_{i, n} = a$ ,  $t_{i+1, n} = b$  и  $b - a = 2h$ . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что  $a = -h$  и  $b = h$ . Тогда уравнение окружности (т.е. координаты центра  $X, Y$  и радиус  $R$ ), проходящей через точки

$$(x(-h), y(-h)), \quad (x(0), y(0)) \quad (x(h), y(h)),$$

определится из системы уравнений

$$\begin{cases} (X - x(-h))^2 + (Y - y(-h))^2 = R^2, \\ (X - x(0))^2 + (Y - y(0))^2 = R^2, \\ (X - x(h))^2 + (Y - y(h))^2 = R^2. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, легко определить координаты центра и величину радиуса искомой окружности. Получим

$$X = A_x/B_x, \tag{3.93}$$

где

$$A_x = (y(0) - y(h))(x^2(-h) - x^2(0) + y^2(-h) - y^2(0)) - \\ - (y(0) - y(-h))(x^2(h) - x^2(0) + y^2(h) - y^2(0)),$$

$$B_x = 2((y(0) - y(-h))(x(0) - y(h)) - (y(0) - y(h))(x(0) - x(-h)))$$

и

$$Y = A_y/B_y, \tag{3.94}$$

где

$$A_y = (x(0) - x(-h))(y^2(h) - y^2(0) + x^2(h) - x^2(0)) - \\ - (x(0) - x(h))(y^2(-h) - y^2(0) + x^2(-h) - x^2(0)),$$

$$B_y = 2((y(0) - y(-h))(x(0) - y(h)) - (y(0) - y(h))(x(0) - x(-h)))$$

и

$$R = \sqrt{(X - x(0))^2 + (Y - y(0))^2}.$$

Согласно формуле Тейлора, если  $x_0^{(\nu)} = x^{(\nu)}(0)$ , то

$$x(h) = x_0 + x'_0 h + \frac{1}{2} x''_0 h^2 + \frac{1}{6} x'''_0 h^3 + \frac{1}{24} x_0^{(4)} h^4 + O(h^5) \quad (3.95)$$

и

$$x(-h) = x_0 - x'_0 h + \frac{1}{2} x''_0 h^2 - \frac{1}{6} x'''_0 h^3 + \frac{1}{24} x_0^{(4)} h^4 + O(h^5), \quad (3.96)$$

Аналогичные асимптотические равенства верны и для  $y(h)$  и  $y(-h)$ .

Учитывая теперь естественную параметризацию кривой  $\Gamma$ , в частности, тот факт, что

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$$

и

$$x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0,$$

получаем при  $h \rightarrow 0$

$$(y(0) - y(-h))(x^2(h) - x^2(0) + y^2(h) - y^2(0)) = \\ = 2h^2(y'(0) - \frac{1}{2}y''_0 h + \frac{1}{6}y'''_0 h^2 - \frac{1}{24}x'''_0 h^3 + O(h^4)) \times \\ \times ((x_0 x'(0) + y_0 y'(0)) + \frac{1}{2}h(x_0 x''_0 + y_0 y''_0 + 1) + \\ + \frac{1}{4}h^2(x_0 x'''_0 + y_0 y'''_0) + \frac{1}{24}h^4(x_0 x_0^{(4)} + y_0 y_0^{(4)} + x'_0 x'''_0 + y'_0 y'''_0) + O(h^4)).$$

Тогда числитель  $A_x$  будет иметь вид

$$h^3((x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0) + \frac{1}{6}h^2(x'_0 y_0^{(4)} - x_0^{(4)} y'_0) - \\ - \frac{1}{3}h^2(2(x'_0 y'''_0 - x'''_0 y'_0) - 2y'_0 - \frac{1}{6}h^2 y'_0(x'_0 x'''_0 + y'_0 y'''_0) - \frac{1}{3}h^2 y_0''')) + O(h^6).$$

Аналогично устанавливаем, что знаменатель  $B_x$  равен

$$h^3 \left( (x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0) + \frac{1}{12} h^2 (x'_0 y_0^{(4)} - x_0^{(4)} y'_0) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} h^2 (x''_0 y_0''' - x_0''' y''_0) \right) + O(h^6).$$

Подставляя значения  $A_x$  и  $B_x$ , после очевидных упрощений, придем к асимптотическому равенству

$$X = x_0 - \frac{y'_0 + \frac{1}{12} h^2 y'_0 (x'_0 x_0''' + y'_0 y_0''') + \frac{1}{6} h^2 y_0''' + O(h^4)}{k_0 + \frac{1}{12} h^2 F'_0 - \frac{1}{4} h^2 (x''_0 y_0''' - x_0''' y''_0) + O(h^4)}. \quad (3.97)$$

Аналогично устанавливаются следующие равенства

$$Y = y_0 + \frac{x'_0 + \frac{1}{12} h^2 y'_0 (x'_0 x_0''' + y'_0 y_0''') + \frac{1}{6} h^2 x_0''' + O(h^4)}{k_0 + \frac{1}{12} h^2 F'_0 - \frac{1}{4} h^2 (x''_0 y_0''' - x_0''' y''_0) + O(h^4)}$$

и

$$R = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2} h^2 y'_0 (x'_0 x_0''' + y'_0 y_0''') + O(h^4)}}{|k_0 + \frac{1}{12} h^2 F'_0 - \frac{1}{4} h^2 (x''_0 y_0''' - x_0''' y''_0) + O(h^4)|}, \quad (3.98)$$

где

$$k(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t),$$

и, как уже отмечали ранее,

$$F(t) = k'(t) = x'(t)y'''(t) - y'(t)x'''(t).$$

Пусть, теперь

$$\varepsilon^2(t) = (x(t) - X)^2 + (y(t) - Y)^2 - R^2.$$

Отсюда и из формулы Тейлора

$$x(\xi) = x_0 + x'_0 \xi + \frac{1}{2} x''_0 \xi^2 + \frac{1}{6} x'''_0 \xi^3 + \frac{1}{24} x_0^{(4)} \xi^4 + O(h^5)$$

(где  $\xi \in [-h, h]$ ) и аналогичного соотношения для  $y(\xi)$ , получаем

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{6} \frac{k_0 F_0 (h^2 - \xi^2) \xi + O(h^4)}{k_0 + \frac{1}{12} h^2 F'_0 - \frac{1}{4} h^2 (x''_0 y_0''' - x_0''' y''_0) + O(h^4)} = \\ = \frac{1}{6} F_0 (h^2 - \xi^2) \xi + O(h^4).$$

Заменяя здесь  $\varepsilon(t)$  на  $\varepsilon_i(t)$ , число  $-h$  на  $t_{i,n}$ , число  $0$  на  $t_{i+1/2,n}$ , и число  $h$  на  $h_{i+1/2,n}/2$ , получим

$$\varepsilon_i(t) = \frac{1}{48} F_{i+1/2,n} (1 - \tau^2) \tau h_{i+1/2,n}^3 + O(h_{i+1/2,n}^4),$$

где  $\tau = 2(t - t_{i+1/2,n})/h_{i+1/2,n}$ .

Таким образом

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) = \max_i \varepsilon_i,$$

где

$$\varepsilon_i = \max_{t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \varepsilon_i(t).$$

Легко видеть, что

$$\max_{|\tau| \leq 1} |\tau(1 - \tau^2)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом, равномерно по  $i$

$$\varepsilon_i(t) = \frac{1}{72\sqrt{3}} F_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n}^3 + O(h_{i+1/2,n}^4)$$

и

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) = \frac{1}{72\sqrt{3}} \max_{1 \leq i \leq n-1} [F_{i+1/2,n} h_{i+1/2,n}^3 + O(h_{i+1/2,n}^4)].$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

**Замечание 3.8.3** Если условие  $x, y \in C_{[0,T]}^4$  в лемме 3.8.2 заменить условием  $x, y \in C_{[0,T]}^5$  то равномерно по  $i$  и по  $t$  будут выполняться более точные асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) = \frac{1}{48} F_{i+1/2,n} (1 - \tau^2) \tau h_{i+1/2,n}^3 + \psi_{i+1/2,n} (1 - \tau^2) (3 - \tau^2) h_{i+1/2,n}^4 + \\ + O(h_{i+1/2,n}^5) \end{aligned}$$

где  $\tau = 2(t - t_{i+1/2,n})/h_{i+1/2,n}$  и  $\psi(t) = \psi(\Gamma, t)$ .

Это утверждение устанавливается аналогично предыдущему.

Обозначим через  $l(\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n})$  длину дуги окружности которая проходит через точки  $\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n}$ , и, как и ранее, пусть  $R_{i+1/2,n}$  — радиус этой окружности.

Кроме того, положим

$$q_{i+1/2,n}(\Gamma) = \frac{l(\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n})}{4\sqrt{R_{i+1/2,n}}}.$$

Приведем вспомогательное утверждение, необходимое нам в дальнейшем.

**Лемма 3.8.4** Пусть кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) такова, что  $x, y \in C_{[t_{i,n}, t_{i+1,n}]}^4$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  выполняется равенство

$$q_{i+1/2,n}(\Gamma) = \frac{1}{4}h_{i+1/2,n}\Phi_{i+1/2,n}(1 + O(h_{i+1/2,n}^2)).$$

В частности, если разбиение

$$\{t_{i,N}\}_{i=0}^N = \{iT/N\}_{i=0}^N$$

равномерное, то

$$q_{i+1/2,N}(\Gamma) = \frac{T}{2N}\Phi_{i+1/2,N}(1 + O(N^{-2})),$$

где, как и ранее,

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}}.$$

**Доказательство.** Ясно, что если  $\varphi_{i+1/2,n}$  – центральный угол, стягивающий дугу окружности, проходящей через точки  $\Gamma_{i,n}$ ,  $\Gamma_{i+1/2,n}$ ,  $\Gamma_{i+1,n}$  и  $R_{i+1/2,n}$  – ее радиус, то

$$l(\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n}) = \varphi_{i+1/2,n}R_{i+1/2,n}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} q_{i+1/2,n}(\Gamma) &= \frac{l(\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n})}{4\sqrt{R_{i+1/2,n}}} = \\ &= \frac{\varphi_{i+1/2,n}R_{i+1/2,n}}{4\sqrt{R_{i+1/2,n}}} = \frac{1}{4}\varphi_{i+1/2,n}\sqrt{R_{i+1/2,n}}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Как и ранее, без ущерба для строгости доказательства, можно считать, что

$$\Gamma_{i,n} = (x_{i,n}, y_{i,n}) = (x(-h), y(-h)),$$

$$\Gamma_{i+1,n} = (x_{i+1,n}, y_{i+1,n}) = (x(h), y(h))$$

и

$$\Gamma_{i+1/2,n} = (x_{i+1/2,n}, y_{i+1/2,n}) = (x(0), y(0)) = (x_0, y_0),$$

где  $h$  – длина дуг окружности  $\Gamma_{i,n}\Gamma_{i+1/2,n}$  и  $\Gamma_{i+1/2,n}\Gamma_{i+1,n}$ .

Как легко видеть (см. рис.3.18)

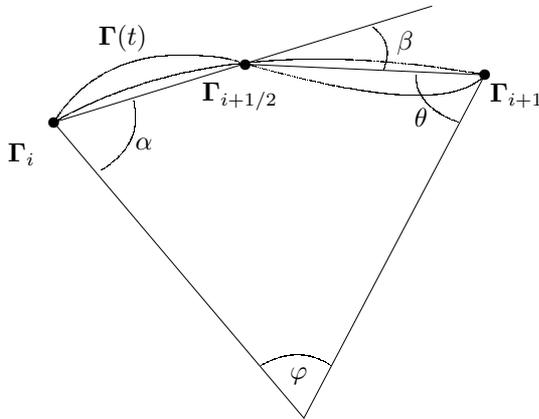


Рис. 3.18:

$$\angle\varphi = 2\pi - (2\angle\alpha + 2\angle\theta) = 2(\pi - (\angle\alpha + \angle\theta)),$$

где  $\angle\alpha$  – угол между вектором, соединяющим центр окружности и точку  $\Gamma_{i,n}$ , и вектором  $\Gamma_{i,n}\Gamma_{i+1/2,n}$  и  $\angle\theta$  – угол между вектором, соединяющим центр окружности и точку  $\Gamma_{i+1,n}$  и вектором  $\Gamma_{i+1,n}\Gamma_{i+1/2,n}$ .

Если  $\angle\beta$  – угол между векторами  $\Gamma_{i,n}\Gamma_{i+1/2,n}$  и  $\Gamma_{i+1/2,n}\Gamma_{i+1,n}$ , то он дополняет  $\angle\alpha + \angle\theta$  до  $\pi$ . Тогда  $\angle\beta = \pi - (\angle\alpha + \angle\theta)$ . Отсюда получаем  $\angle\varphi = 2\angle\beta$ . Из векторной алгебры известно, что

$$\sin \beta = \frac{|\Gamma_{i,n}\Gamma_{i+1/2,n} \times \Gamma_{i+1/2,n}\Gamma_{i+1,n}|}{|\Gamma_{i,n}\Gamma_{i+1/2,n}| |\Gamma_{i+1/2,n}\Gamma_{i+1,n}|},$$

где  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  – векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а  $|\mathbf{a}|$  – длина вектора  $\mathbf{a}$ . В координатной форме это будет выглядеть так

$$\sin \beta = \frac{|(x_0 - x(-h))(y(h) - y_0) - (y_0 - y(-h))(x(h) - x_0)|}{\sqrt{(x_0 - x(-h))^2 + (y_0 - y(-h))^2} \sqrt{(x(h) - x_0)^2 + (y(h) - y_0)^2}}. \quad (3.100)$$

Так как, по условию,  $x$  и  $y$  имеют четыре непрерывные производные, то используя формулы Тейлора в окрестности точки  $x_0$  (см. (3.95) и (3.96)), найдем более удобный для использования вид числителя

$$\begin{aligned} & |(x_0 - x(-h))(y(h) - y_0) - (y_0 - y(-h))(x(h) - x_0)| = \\ & = \left| \left( x_0' h - \frac{1}{2} x_0'' h^2 + \frac{1}{6} x_0''' h^3 - \frac{1}{24} x_0^{(4)} h^4 + O(h^5) \right) \times \right. \\ & \quad \times \left( y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2 + \frac{1}{6} y_0''' h^3 + \frac{1}{24} y_0^{(4)} h^4 + O(h^5) \right) - \\ & \quad - \left( x_0' h + \frac{1}{2} x_0'' h^2 + \frac{1}{6} x_0''' h^3 + \frac{1}{24} x_0^{(4)} h^4 + O(h^5) \right) \times \\ & \quad \left. \times \left( y_0' h - \frac{1}{2} y_0'' h^2 + \frac{1}{6} y_0''' h^3 - \frac{1}{24} y_0^{(4)} h^4 + O(h^5) \right) \right|. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, проведем очевидные упрощения. Тогда числитель примет вид

$$h^3 \left| (x_0' y_0'' - x_0'' y_0') + \frac{h^2}{12} ((x_0' y_0^{(4)} - x_0^{(4)} y_0') - 2(x_0'' y_0''' - x_0''' y_0'')) \right| + O(h^6).$$

Перейдем к рассмотрению знаменателя. Для этого вначале преобразуем подкоренное выражение

$$\begin{aligned} (x_0 - x(-h))^2 + (y_0 - y(-h))^2 &= \left( x_0' h - \frac{1}{2} x_0'' h^2 + \frac{1}{6} x_0''' h^3 + O(h^4) \right)^2 + \\ &+ \left( y_0' h - \frac{1}{2} y_0'' h^2 + \frac{1}{6} y_0''' h^3 + O(h^4) \right)^2 = h^2 ((x_0')^2 + (y_0')^2) - \\ &- h^3 (x_0' x_0'' + y_0' y_0'') + h^4 \left( \frac{1}{4} ((x_0'')^2 + (y_0'')^2) + \frac{1}{6} (x_0' x_0''' + y_0' y_0''') \right) + O(h^5) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (x(h) - x_0)^2 + (y(h) - y_0)^2 &= h^2 ((x_0')^2 + (y_0')^2) + \\ &+ h^3 (x_0' x_0'' + y_0' y_0'') + h^4 \left( \frac{1}{4} ((x_0'')^2 + (y_0'')^2) + \frac{1}{6} (x_0' x_0''' + y_0' y_0''') \right) + O(h^5). \end{aligned}$$

Тогда знаменатель можно записать в виде

$$h^2 ((x_0')^2 + (y_0')^2) + C^* h^4,$$

где  $|C^*| < C$  и  $C$  – постоянная, зависящая только от кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Подставляя полученные значения числителя и знаменателя в равенство (3.100) и проводя некоторые упрощения, получаем

$$\beta = \frac{h|x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0|}{(x'_0)^2 + (y'_0)^2} + O(h^2).$$

Таким образом, центральный угол стягивающий дугу, проходящую через точки  $(x(-h), y(-h))$ ,  $(x_0, y_0)$  и  $(x(h), y(h))$ , с точностью до  $h^2$ , будет равен величине

$$\frac{2h|x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0|}{(x'_0)^2 + (y'_0)^2}. \quad (3.101)$$

Для завершения доказательства заметим, что с точностью до  $O(h)$  можно в качестве  $R$  взять радиус кривизны кривой  $\Gamma(t)$  в точке  $(x_0, y_0)$ , т.е.

$$R = \frac{((x'_0)^2 + (y'_0)^2)^{3/2}}{|x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0|} (1 + O(h)). \quad (3.102)$$

Используя (3.101) и (3.102) в (3.99), получаем

$$q = \frac{1}{4} \varphi \sqrt{R} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{|x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0|}{\sqrt{(x'_0)^2 + (y'_0)^2}}} + O(h^2) = \frac{h}{2} \Phi_0 + O(h^2).$$

Заменяя  $h$  на  $h_{i+1/2, n}/2$ , а  $\Phi_0$  на  $\Phi_{i+1/2, n}$ , получаем утверждение леммы 3.8.4.

**Лемма 3.8.5** Пусть  $\gamma$  – дуга окружности радиуса  $R$ . Если отрезок прямой длины  $l_\varepsilon$  лежит в  $\varepsilon$ -коридоре дуги  $\gamma$ , то

$$l_\varepsilon \leq 4\sqrt{R\varepsilon}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим отрезок прямой максимальной длины  $\mathcal{L}_\varepsilon$ , лежащий в  $\varepsilon$ -коридоре  $K_\varepsilon(\gamma)$  (см. рис.3.19).

Нетрудно видеть, что его длина  $\mathcal{L}_\varepsilon$  выражается равенством

$$\mathcal{L}_\varepsilon = 2(R + \varepsilon) \sin \frac{\varphi}{2},$$

где угол  $\varphi$  такой, что

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{R - \varepsilon}{R + \varepsilon}.$$

Тогда

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{R - \varepsilon}{R + \varepsilon}\right)^2} = \frac{2\sqrt{R\varepsilon}}{R + \varepsilon}$$

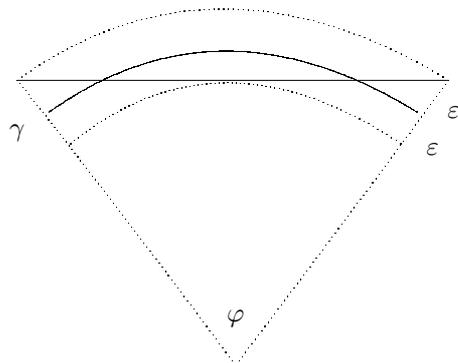


Рис. 3.19:

и максимальная длина отрезка, который может поместиться в коридоре  $K_\varepsilon(\gamma)$ , будет выражена равенством

$$\mathcal{L}_\varepsilon = 4\sqrt{R\varepsilon}.$$

Следовательно, длина  $l_\varepsilon$  любого другого отрезка, лежащего в коридоре  $K_\varepsilon(G)$  будет меньше, т.е. будет удовлетворять неравенству

$$l_\varepsilon \leq 4\sqrt{R\varepsilon}.$$

Доказательство оставшейся части теоремы 3.8.1 следует из леммы 3.8.2 и следующего ниже утверждения.

**Лемма 3.8.6** Пусть  $\gamma$  – дуга окружности радиуса  $R$  и длиной  $l(\gamma)$ . Если  $\ell_n$  – ломаная, такая, что хаусдорфово расстояние между этой ломаной и дугой не превосходит данного значения  $\varepsilon$

$$\mathcal{R}(\gamma, \ell_n) \leq \varepsilon,$$

то

$$n \geq \frac{l(\gamma)}{4\sqrt{R\varepsilon}}(1 + O(\sqrt{\varepsilon})).$$

**Доказательство.** Из предыдущей леммы имеем

$$l(\gamma) \leq n l(\ell_n) + 2\varepsilon \leq 4n\sqrt{R\varepsilon} + 2\varepsilon.$$

Отсюда сразу получаем неравенство

$$n \geq \frac{l(\gamma) - 2\varepsilon}{4\sqrt{R\varepsilon}} = \frac{l(\gamma)}{4\sqrt{R\varepsilon}}(1 + O(\sqrt{\varepsilon})).$$

Основываясь на изложенных выше вспомогательных утверждениях, докажем оценку снизу в теореме 3.8.1.

Пусть параметрически заданная кривая  $\mathbf{\Gamma}(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) удовлетворяет условию теоремы 3.8.1. Рассмотрим разбиение

$$\bar{\Delta}_N = \left\{ \frac{iT}{N} \right\}_{i=0}^N,$$

где

$$N = [\varepsilon^{-0.4}] + 1,$$

а  $\varepsilon$  – заданная погрешность аппроксимации.

Тогда по лемме 3.8.2, если  $\gamma(\mathbf{\Gamma}, \bar{\Delta}_N)$  – кусочно – окружностная функция, которая для  $t \in [iT/N, (i+1)T/N]$  совпадает с окружностью, проходящей через точки

$$\mathbf{\Gamma}_{i,N} = \mathbf{\Gamma}(iT/N), \quad \mathbf{\Gamma}_{i+1/2,N} = \mathbf{\Gamma}((2i+1)T/(2N)),$$

$$\mathbf{\Gamma}_{i+1,N} = \mathbf{\Gamma}((i+1)T/N),$$

и ломаная  $\mathbf{\Gamma}_n = \mathbf{\Gamma}_n(\mathbf{\Gamma})$  такая, что хаусдорфово расстояние между этой ломаной и кривой  $\mathbf{\Gamma}$  не превосходит заданного значения  $\varepsilon$ , т.е.

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}_n) \leq \varepsilon,$$

то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место оценка

$$\mathcal{R}(\gamma(\mathbf{\Gamma}, \bar{\Delta}_N), \mathbf{\Gamma}_n) \leq \varepsilon(1 + o(1)).$$

Если  $n_i$  – число звеньев ломаной  $\mathbf{\Gamma}_n(\mathbf{\Gamma})$ , то в силу лемм 3.8.4 и 3.8.6, получаем

$$n_i \geq \frac{T}{4N\sqrt{\varepsilon}} \Phi_{i+1/2,n}(1 + O(\sqrt{\varepsilon})).$$

Кроме того, использование формулы Тейлора, приводит нас к равенству

$$\int_{iT/N}^{(i+1)T/N} \Phi(t) dt = \int_{iT/N}^{(i+1)T/N} \left( \Phi_{i+1/2,n} + \Phi'_{i+1/2,N} \left( t - \left( i + \frac{1}{2} \right) \frac{T}{N} \right) + \right.$$

$$+\Phi''(\xi_{i,N}) \left( t - \left( i + \frac{1}{2} \right) \frac{T}{N} \right)^2 dt,$$

где  $\xi_{i,N} \in [iT/N, (i+1)T/N]$ . Отсюда следует, что

$$\int_{iT/N}^{(i+1)T/N} \Phi(t) dt = \frac{T}{N} \Phi_{i+1/2,N} + \frac{2T^3}{3N^3} \Phi''(\xi_{i,N}).$$

Следовательно,

$$\frac{T}{N} \Phi_{i+1/2,N} = \int_{iT/N}^{(i+1)T/N} \Phi(t) dt + O(N^{-3}).$$

Таким образом, число звеньев  $n$  ломаной  $\Gamma_n$  будет удовлетворять неравенству

$$n \geq \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{iT/N}^{(i+1)T/N} \Phi(t) dt + O(N\sqrt{\varepsilon}).$$

Отсюда и из того, что  $N = [\varepsilon^{-0.4}] + 1$ , получаем

$$n \geq \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt + O(\varepsilon^{0.1}),$$

что и завершает доказательство.

### 3.9 Оптимальное восстановление плоских кривых ломаными в интегральной метрике

Геометрия – от греч.  $\gamma\tilde{\eta}$  – земля и  $\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\varepsilon}\omega$  – мерю. Произошла от необходимости вычисления площадей.

*БСЭ т.10 с.533*

В предыдущих параграфах отмечено, что многие задачи оптимизации траектории движения инструмента сводятся к задаче восстановления кривой ломаными так, чтобы нигде на контуре погрешность приближения (ошибка описания или допуск обработки) не превосходила заданной допустимой величины  $\varepsilon$ . Как правило, в точном машиностроении необходима дальнейшая обработка детали. Это может быть шлифовка либо какая – то иная лекальная доводка. В ряде случаев затраты

на эти операции обходятся дороже или соизмеримы с затратами на первоначальную обработку. В этом случае можно исходить из того, что затраты на доводку изделия пропорциональны количеству материала, снимаемого с детали во время доводки. Таким образом первоначальное описание контура кривой должно быть, во – первых, таким, чтобы ломаная лежала почти (с точностью до величин более малых) с одной стороны контура, а, во – вторых, чтобы площадь фигуры, ограниченной контуром и аппроксимирующей ломаной, не превышала заданной величины  $\varepsilon$ .

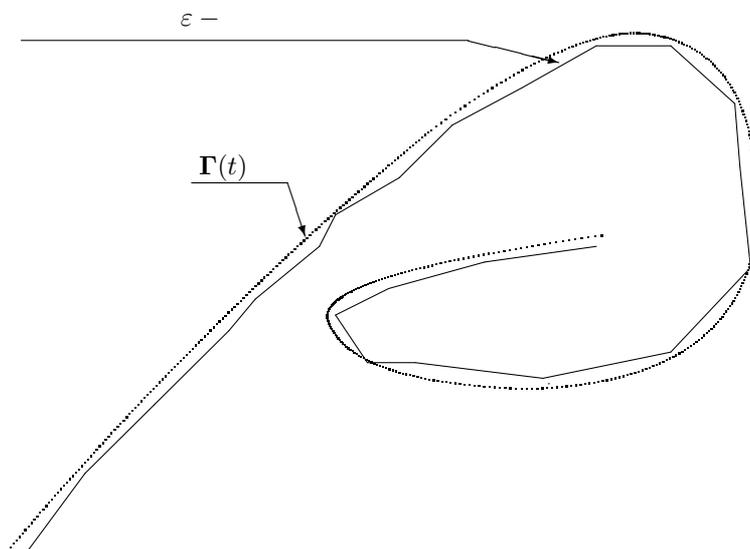


Рис. 3.20:

Пусть, вначале,  $\Gamma$  – замкнутая кривая. Обозначим через  $\mathcal{K}(\Gamma)$  область, ограниченную кривой  $\Gamma$ . Ломаную  $\Gamma_\varepsilon^+(\Gamma)$  будем называть  $\varepsilon^+$ -допустимой в интегральной метрике, если  $\Gamma_\varepsilon^+(\Gamma) \in \mathcal{K}(\Gamma)$ , и, площадь фигуры, ограниченной ломаной  $\Gamma_\varepsilon^+$  и кривой  $\Gamma$  не превосходит заданной погрешности  $\varepsilon$ .

Аналогично, ломаную  $\Gamma_\varepsilon^-(\Gamma)$  будем называть  $\varepsilon^-$ -допустимой в интегральной метрике, если  $\Gamma_\varepsilon^- \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{K}(\Gamma)$  (где  $\mathfrak{R}$  – множество всех точек на плоскости), и, площадь фигуры, ограниченной ломаной  $\Gamma_\varepsilon^-$  и кривой  $\Gamma$  не превосходит  $\varepsilon$  (см. рис.3.20).

$\varepsilon^+$ -допустимую ломаную (не обязательно единственную) с минимальным числом звеньев  $n^+(\varepsilon)$  назовем  $\varepsilon^+$ -оптимальной ломаной или  $\varepsilon^+$ -

оптимальным допустимым интегральным режимом обработки кривой  $\Gamma$  (см. рис.3.21).

Аналогично,  $\varepsilon^-$ -допустимую ломаную с минимальным числом звеньев  $n^-(\varepsilon)$  назовем  $\varepsilon^-$ -оптимальным допустимым интегральным режимом обработки кривой  $\Gamma$ .

Подобно тому, как мы уже делали ранее, задачу о нахождении  $\varepsilon^\pm$  оптимального интегрального режима обработки кривой, сформулируем следующим образом.

Среди всех ломаных,  $\Gamma_\varepsilon^+$  (или  $\Gamma_\varepsilon^-$ ) найти ту, которая имеет минимальное число звеньев.

Двойственная задача будет иметь следующий вид. Среди всех ломаных с  $n$  звеньями, лежащих с одной стороны кривой, найти ту, у которой площадь, ограниченная этой кривой и кривой  $\Gamma$ , минимальна.

Как и в случае аналогичной задачи для классической хаусдорфовой метрики, и здесь нет необходимости в определении точного решения. Асимптотический подход обеспечивает необходимую на практике точность решения. Асимптотически оптимальный алгоритм будет иметь не только "почти" оптимальное число узлов, обеспечивающее заданную погрешность, но и ломаная в этом случае будет проходить "почти" с одной стороны заданного контура.

Как и в предыдущем параграфе, здесь естественно возникают два случая:

1. Контур обрабатываемой детали выпуклый вне (от инструмента).
2. Контур обрабатываемой детали выпуклый во внутрь.

Почти очевидно, что в первом случае кусочно – линейная аппроксимация должна быть по отрезкам касательных к контуру, а во – втором – по отрезкам хорд (по интерполяционной ломаной), ибо в противном случае, ломаную всегда можно подправить так, чтобы площадь ограниченная ею и кривой при том же количестве звеньев, уменьшилась.

Как и ранее, будем считать, что кривая  $\Gamma$  задана в естественной параметризации  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  и пусть

$$k(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t),$$

и

$$\Phi^\pm(t) = \left( \frac{1}{48} |k(t)| (3 \pm \text{sign } k(t)) \right)^{1/3},$$

$$\delta x_i = -\frac{1}{32} \left( \frac{x_{i,n} - x_{i-1,n}}{\mu_i} - \frac{x_{i+1,n} - x_{i,n}}{\lambda_i} \right),$$

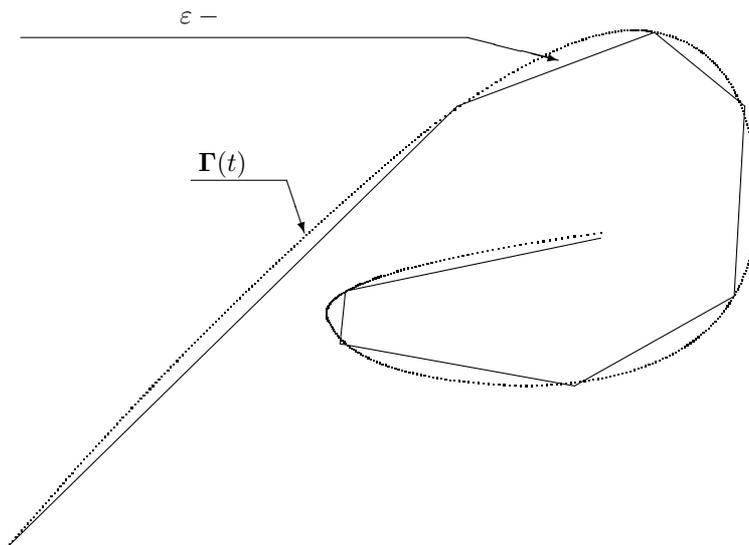


Рис. 3.21:

$$\delta y_i = -\frac{1}{32} \left( \frac{y_{i,n} - y_{i-1,n}}{\mu_i} - \frac{y_{i+1,n} - y_{i,n}}{\lambda_i} \right),$$

где, как и ранее,

$$\lambda_i = h_{i+1/2,n} / (h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n}),$$

$$\mu_i = h_{i-1/2,n} / (h_{i-1/2,n} + h_{i+1/2,n}).$$

Кроме того, пусть

$$\Psi_{\pm} = \left( \int_0^T \Phi^{\pm}(t) dt \right)^3.$$

**Теорема 3.9.1** Пусть функции  $x(t), y(t)$ , определяющие параметрическое задание кривой  $\Gamma$ , трижды непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[0, T]$  ( $x, y \in C_{[0,T]}^3$ ),  $\alpha$  – произвольное число ( $0 < \alpha < 2/3$ ) и при любом  $\varepsilon$  число звеньев  $n^{\pm} = n^{\pm}(\varepsilon)$  определяется равенством

$$n^{\pm} = \left[ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \Psi_{\pm}} \right] + 1,$$

а узлы  $t_{i,n}^\pm$  выбраны из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}^\pm} \left( \Phi^\pm(t) + \frac{1}{n^\alpha} \right) dt = \frac{i}{n} \int_0^T \left( \Phi^\pm(t) + \frac{1}{n^\alpha} \right) dt.$$

Тогда последовательность ломаных  $\{\Gamma_{n^+}^+(\Gamma)\}_{n^+=1}^\infty$  с узлами в точках  $M_i^+(x_{i,n}^+, y_{i,n}^+)$  будет  $\varepsilon^+$ -оптимальным интегральным режимом обработки кривой  $\Gamma$ , где

$$x_{i,n}^+ = x_{i,n} + \delta^+ x_{i,n}, \quad y_{i,n}^+ = y_{i,n} + \delta^+ y_{i,n} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$x_{i,n} = x(t_{i,n}^+), \quad y_{i,n} = y(t_{i,n}^+) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

и

$$\delta^+ x_{i,n} = -\frac{1}{32} \left( \frac{x_{i+1,n} - x_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{x_{i,n} - x_{i-1,n}}{\mu_i} \right) (1 - \text{sign } q_{i,n}),$$

$$\delta^+ y_{i,n} = -\frac{1}{32} \left( \frac{y_{i+1,n} - y_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{y_{i,n} - y_{i-1,n}}{\mu_i} \right) (1 - \text{sign } q_{i,n}).$$

Последовательность ломаных  $\{\Gamma_{n^-}^-(\Gamma)\}_{n^-=1}^\infty$  определяемая узлами в точках  $M_i^-(x_{i,n}^-, y_{i,n}^-)$  будет асимптотически  $\varepsilon^-$ -оптимальным режимом обработки кривой  $\Gamma$ .

Здесь

$$x_{i,n}^- = x_{i,n} + \delta x_{i,n} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$y_{i,n}^- = y_{i,n} + \delta y_{i,n} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_{i,n} = x(t_{i,n}^-), \quad y_{i,n} = y(t_{i,n}^-) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

где

$$\delta x_{i,n} = -\frac{1}{32} \left( \frac{x_{i,n} - x_{i-1,n}}{\mu_i} - \frac{x_{i+1,n} - x_{i,n}}{\lambda_i} \right) (1 + \text{sign } q_{i,n}),$$

$$\delta y_{i,n} = -\frac{1}{32} \left( \frac{y_{i,n} - y_{i-1,n}}{\mu_i} - \frac{y_{i+1,n} - y_{i,n}}{\lambda_i} \right) (1 + \text{sign } q_{i,n}).$$

В первом и во втором случаях

$$q_{i,n} = (x_{i+1,n} - x_{i-1,n})(y_{i+1,n} - 2y_{i,n} + y_{i-1,n}) - \\ - (y_{i+1,n} - y_{i-1,n})(x_{i-1,n} - 2x_{i,n} + x_{i+1,n}).$$

**Доказательство теоремы.** В этом случае, как и ранее, нам необходимо доказать две части. Сначала покажем, что последовательность ломаных, предложенных в формулировке теоремы, обеспечит (с точностью до величин более высокого порядка малости)  $\varepsilon$ -аппроксимацию кривой в интегральной метрике, а затем покажем, что никакая другая последовательность ломаных, лежащих с одной стороны от кривой, не может дать меньшую погрешность.

В принципе, необходимо доказать еще, что последовательность ломаных  $\{\Gamma_{n^+}(\Gamma)\}_1^\infty$  лежит "почти" с внутренней стороны контура, а последовательность ломаных  $\{\Gamma_{n^-}(\Gamma)\}_1^\infty$  – "почти" с внешней стороны, и расшифровать, что такое "почти". Мы не будем останавливаться на этом вопросе, так как, во – первых, это почти очевидно, а во – вторых, подобное утверждение доказано в теореме 3.8.1.

Пусть  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  – произвольная последовательность разбиений отрезка  $[0, T]$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq n-1} h_{i+1/2, n} = 0.$$

Как и в предыдущем параграфе, для простоты написания, вначале можно считать, что  $t_{i, n} = -h$  и  $t_{i+1, n} = h$ .

Как известно из общего курса математического анализа, площадь  $\mathcal{S}$  фигуры, ограниченной непрерывной, выпуклой вверх параметрической кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  и отрезком прямой, соединяющим ее крайние точки, будет определяться равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -\frac{y(-h) + y(h)}{2}(x(h) - x(-h)) + \int_{-h}^h y(t)x'(t)dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h}^h (2y(t) - y(-h) - y(h))x'(t)dt \end{aligned}$$

или равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{x(-h) + x(h)}{2}(y(h) - y(-h)) - \int_{-h}^h x(t)y'(t)dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-h}^h (2x(t) - x(-h) - x(h))y'(t)dt. \end{aligned}$$

Среднее арифметическое этих величин (это та же площадь  $\mathcal{S}$ ) вычисляться по формуле

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} \int_{-h}^h [(2y(t) - y(-h) - y(h))x'(t) - (2x(t) - x(-h) - x(h))y'(t)] dt. \quad (3.103)$$

Используя формулу Тейлора для функции  $\mathbf{\Gamma}(t) = (x(t), y(t))$  в окрестности точки 0, получаем

$$x(t) = x_0 + x'_0 t + \frac{1}{2} x''_0 t^2 + \frac{1}{6} x'''(\theta_1(t)) t^3$$

и

$$x'(t) = x'_0 + x''_0 t + \frac{1}{2} x'''(\theta_2(t)) t^2,$$

где  $|\theta_j(t)| \leq h$ . Кроме того

$$x(h) = x_0 + x'_0 h + \frac{1}{2} x''_0 h^2 + \frac{1}{6} x'''(\theta_1(h)) h^3,$$

$$x(-h) = x_0 - x'_0 h + \frac{1}{2} x''_0 h^2 - \frac{1}{6} x'''(\theta_1(-h)) h^3.$$

Аналогичные соотношения верны и для  $y$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} (2x(t) - x(-h) - x(h))y'(t) &= \\ &= 2x'_0 y'_0 t + 2x'_0 y''_0 t^2 + y'_0 x''_0 (t^2 - h^2) + M(\mathbf{\Gamma})h^3, \end{aligned}$$

где  $M(\mathbf{\Gamma})$  – величина, ограниченная постоянной, зависящей только от кривой  $\mathbf{\Gamma}$ . Аналогично

$$\begin{aligned} (2y(t) - y(-h) - y(h))x'(t) &= \\ &= 2x'_0 y'_0 t + 2y'_0 x''_0 t^2 + x'_0 y''_0 (t^2 - h^2) + N(\mathbf{\Gamma})h^3. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения в (3.103), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{4} \int_{-h}^h ((t^2 + h^2)(x''_0 y'_0 - x'_0 y''_0) + L(\mathbf{\Gamma})h^3) dt = \\ &= \frac{2}{3} (x''_0 y'_0 - x'_0 y''_0) h^3 + L_1(\mathbf{\Gamma}) h^4. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается, что если кривая  $\mathbf{\Gamma}$  выпукла вниз, то площадь фигуры, ограниченной этой кривой и хордой, стягивающей ее концы, будет удовлетворять асимптотическому равенству

$$\mathcal{S} = -\frac{2}{3} (x''_0 y'_0 - x'_0 y''_0) h^3 + L_2(\mathbf{\Gamma}) h^4.$$

Если же кривая меняет свою выпуклость на отрезке, то

$$\mathcal{S} = L_*(\mathbf{\Gamma}) h^4.$$

Таким образом, для любой гладкой кривой

$$\mathcal{S} = \frac{2}{3}|x_0''y_0' - x_0'y_0''|h^3 + L_*(\Gamma)h^4. \quad (3.104)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что если  $\mathcal{S}$  – площадь фигуры, ограниченной кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [-h, h]$ ) и касательной к ней в точке 0

$$x_0'(y - y_0) = y_0'(x - x_0),$$

то

$$\mathcal{S} = \frac{1}{3}|x_0''y_0' - x_0'y_0''|h^3 + L_{**}(\Gamma)h^4. \quad (3.105)$$

Учитывая теперь, что

$$k_0(t) = y_0''(t)x_0'(t) - y_0'(t)x_0''(t),$$

получаем

$$\mathcal{S} = \frac{1}{6}|k_0|(3 + \text{sign } k_0)h^3 + C(\Gamma)h^4.$$

Рассматривая теперь промежуток  $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ , получаем для приближения контура изнутри

$$\mathcal{S}_{i+1/2,n} = \frac{h_{i+1/2,n}^3}{48}|k_{i+1/2,n}|(3 + \text{sign } k_{i+1/2,n}) + C_{i,n}(\Gamma)h_{i+1/2,n}^4,$$

где константы  $C_{i,n}(\Gamma)$  равномерно по  $i$  ограничены. Следовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{S}_{i+1/2,n} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{h_{i+1/2,n}^3}{48}|k_{i+1/2,n}|(3 + \text{sign } k_{i+1/2,n}) + C_{i,n}(\Gamma)h_{i+1/2,n}^4 \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\Phi_{i+1/2,n}^+)^3 h_{i+1/2,n}^3 + C(\Gamma)h_{i+1/2,n}^4. \end{aligned}$$

Аналогично, для приближения контура снаружи

$$\mathcal{S} = \sum_{i=0}^{n-1} (\Phi_{i+1/2,n}^-)^3 h_{i+1/2,n}^3 + C_1(\Gamma)h_{i+1/2,n}^4.$$

Дальнейшие рассуждения проведем для случая  $\varepsilon^+$ -оптимального режима.

При  $k_{i+1/2,n} > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{i+1/2,n} &= \frac{1}{12} k_{i+1/2,n} |h_{i+1/2,n}^3 + C_{i,n}(\Gamma) h_{i+1/2,n}^4 = \\ &= (\Phi_{i+1/2,n}^+)^3 h_{i+1/2,n}^3 + C_{i,n}(\Gamma) h_{i+1/2,n}^4. \end{aligned}$$

Рассуждения, аналогичные тем, что мы провели при доказательстве теоремы 3.8.1, приводят к соотношению

$$h_{i+1/2,n} = \frac{\mathcal{A}}{n(\Phi_{i+1/2,n}^+ + n^{-\alpha})} + O\left(\frac{1}{n^{3-2\alpha}}\right),$$

где

$$\mathcal{A} = \int_0^T (\Phi^+(t) + n^{-\alpha}) dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{i+1/2,n} &= \frac{\mathcal{A}^3 (\Phi_{i+1/2,n}^+)^3}{n^3 (\Phi_{i+1/2,n}^+ + n^{-\alpha})^3} + O\left(\frac{1}{n^{3+2\alpha}}\right) = \\ &= \frac{\mathcal{A}^3}{n^3} \left(1 - \frac{3}{\Phi_{i+1/2,n}^+ n^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3+2\alpha}}\right) = \frac{\mathcal{A}^3}{n^3} + \frac{C_{i,n}}{n^{3+\alpha}}. \end{aligned}$$

Если же  $k_{i+1/2,n} < 0$ , то ломаная описывается уравнением

$$\frac{x - x_{i,n}^+}{x_{i+1,n}^+ - x_{i,n}^+} = \frac{y - y_{i,n}^+}{y_{i+1,n}^+ - y_{i,n}^+},$$

где величины  $x_{i,n}^+$  и  $y_{i,n}^+$  определены в условии теоремы. Тогда

$$\begin{aligned} x_{i+1,n}^+ - x_{i,n}^+ &= x_{i+1,n} - x_{i,n} - (\delta^+ x_{i+1,n} - \delta^+ x_{i,n}) = \\ &= x_{i+1,n} - x_{i,n} - \frac{1}{8} \left( x_{i+1,n}'' \left( \frac{h_{i+1/2,n} + h_{i+3/2,n}}{2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - x_{i,n}'' \left( \frac{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}}{2} \right)^2 \right) + O\left(h_{i+1/2,n}^3\right). \end{aligned}$$

Снова используя формулу Тейлора, приходим к соотношениям

$$x_{i+1,n}^+ - x_{i,n}^+ = h_{i+1/2,n} x'_{i+1/2,n} + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right)$$

и

$$y_{i+1,n}^+ - y_{i,n}^+ = h_{i+1/2,n} y'_{i+1/2,n} + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right).$$

Т.е. угловой коэффициент ломаной с точностью до слагаемого порядка  $O(n^{-2+2\alpha})$  совпадает с угловым коэффициентом касательной к кривой  $\Gamma$  в точке  $(x_{i+1/2,n}, y_{i+1/2,n})$ . Кроме того, по построению, линия  $\Gamma_{n^+}^+(\Gamma)$  с точностью до слагаемого  $O(h_{i+1/2,n}^3)$  проходит через эту же точку.

Таким образом, линия  $\Gamma_{n^+}^+(\Gamma)$  и касательная

$$\frac{x - x_{i+1/2,n}}{x'_{i+1/2,n}} = \frac{y - y_{i+1/2,n}}{y'_{i+1/2,n}}$$

совпадают на отрезке  $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$  с точностью до  $O(n^{-2+2\alpha})$ . Следовательно, равномерно по  $i$  выполняется равенство

$$\mathcal{S}_{i+1/2,n} = \frac{\mathcal{A}^3}{n^3} + \frac{C_{i,n}(\Gamma)}{n^{3+\alpha}}$$

Если на отрезке кривизна меняет знак, то на этом отрезке есть точка перегиба кривой. Исходя из этого факта, нетрудно доказать, что

$$\mathcal{S}_{i+1/2,n} = \frac{C_{i,n}(\Gamma)}{n^{3+\alpha}}.$$

Таким образом

$$\mathcal{S} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\mathcal{A}^3}{n^3} + \frac{C_{i,n}(\Gamma)}{n^{3+\alpha}} \right) = \frac{\mathcal{A}^3}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right).$$

Отсюда, учитывая выбор числа  $n$ , окончательно получаем оценку сверху

$$\mathcal{S} = \frac{\mathcal{A}^3 \varepsilon}{\mathcal{A}^3} (1 + o(1)) = \varepsilon (1 + o(1)).$$

Доказательство оценки снизу проводится по схеме доказательства оценки снизу теоремы 3.8.1 и основывается на утверждениях аналогичных леммам 3.8.4 – 3.8.6.

Приведем эти утверждения для случая вписанной ломаной.

Как и ранее обозначим через  $l(\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n})$  длину дуги окружности, проходящей через точки  $\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n}$ , и  $R_{i+1/2,n}$  – радиус этой окружности.

Кроме того, положим

$$q_{i+1/2,n}(\Gamma) = \frac{l(\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n})}{\sqrt[3]{12 R_{i+1/2,n}}}.$$

**Лемма 3.9.2** Пусть кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) такова, что  $x, y \in C^4_{[t_i, n, t_{i+1, n}]}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  выполняется равенство

$$q_{i+1/2,n}(\Gamma) = h_{i+1/2,n} \sqrt[3]{\frac{|k_{i+1/2,n}|}{12}} (1 + O(h_{i+1/2,n}^2)).$$

**Лемма 3.9.3** Пусть  $\gamma$  – дуга окружности радиуса  $R$ . Если отрезок прямой длины  $l_\varepsilon$  стягивает на этой дуге сегмент площадью не более  $\varepsilon$ , то

$$l_\varepsilon \leq \sqrt[3]{12 R \varepsilon}.$$

**Лемма 3.9.4** Пусть  $\gamma$  – дуга окружности радиуса  $R$  и длиной  $l(\gamma)$ . Если  $l_n$  вписанная ломаная, такая, что площадь фигуры ограниченной этой ломаной и дугой не превосходит данного значения  $\varepsilon$ , то

$$n \geq \frac{l(\gamma)}{\sqrt[3]{12 R \varepsilon}} (1 + O(\sqrt{\varepsilon})).$$

Аналогичные соотношения имеют место для описанных ломаных.

### 3.10 Оптимальная кусочно – линейная интерполяция пространственных кривых

Разве в мире бесконечном направление  
есть?

Разве далям бесконечным измеренье  
есть?

*Низами*

Как мы уже отмечали ранее, наиболее простой и часто используемой технологической кривой является интерполяционная ломаная. Подавляющее большинство аппроксимационных алгоритмов в той или иной

степени используют интерполяционные ломаные. Вопросу асимптотически оптимальной кусочно – линейной интерполяции на плоскости мы уделили достаточно внимания в параграфе 3.4. Безусловно, что аналогичная задача актуальна и в пространственном случае. Уникальность кусочно – линейной интерполяции заключается в чрезвычайно простом ее задании, независимо от того, плоская ли интерполируемая кривая или пространственная.

Так, если  $\Gamma(t)$  - параметрически заданная кривая ( $t \in [0, T]$ ) и

$$\Delta_n = \{0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \dots < t_{n,n} = T\}$$

– разбиение промежутка изменения параметра, то параметрическое задание интерполяционной ломаной будет таким

$$\ell(\Gamma, \Delta_n, t) = \Gamma_{i,n}(1 - \tau) + \Gamma_{i+1,n}\tau,$$

где  $\Gamma_{i,n} = \Gamma(t_{i,n})$  и

$$\tau = (t - t_{i,n})/h_{i+1/2,n}, \quad h_{i+1/2,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n}.$$

В координатной форме это будет выглядеть так

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (t \in [0, T])$$

и

$$\ell(\Gamma, \Delta_n, t) = \begin{cases} x_{i,n}(1 - \tau) + x_{i+1,n}\tau, \\ y_{i,n}(1 - \tau) + y_{i+1,n}\tau, \\ z_{i,n}(1 - \tau) + z_{i+1,n}\tau. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение вектор – функцию

$$\Gamma^{(\nu)}(t) = (x^{(\nu)}(t), y^{(\nu)}(t), z^{(\nu)}(t)),$$

и пусть

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{|\Gamma'(t) \times \Gamma''(t)|}{|\Gamma'(t)|}},$$

где  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  – векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а  $|\mathbf{a}|$  – длина вектора  $\mathbf{a}$ .

Основной результат параграфа сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.10.1** Пусть функции  $x(t), y(t)$  и  $z(t)$ , определяющие параметрически заданную кривую  $\Gamma(t)$  – трижды непрерывно – дифференцируемы на отрезке  $[0, T]$ , т.е.  $x, y, z \in C_{[0,T]}^3$  и  $\alpha$  – произвольное число

из интервала  $(0, 2/3)$ . Пусть при каждом  $n$  узлы  $\{t_{i,n}\}_{i=0}^n$  выбраны из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}} (\Phi_n(t) + 1/n^\alpha) dt = \frac{i}{n} \int_0^T (\Phi_n(t) + 1/n^\alpha) dt$$

$$(i = 0, 1, \dots, n),$$

где  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$  – произвольная последовательность неотрицательных суммируемых на отрезке  $[0, T]$  функций, такая, что

$$\|\Phi - \Phi_n\|_\infty \leq Mn^{-\alpha}.$$

Тогда последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$ , а, следовательно, и последовательность  $\{\ell(\Gamma, \Delta_n^*, t)\}_{n=1}^\infty$  интерполяционных ломаных будет асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$  (в метрике Хаусдорфа) и при  $n \rightarrow \infty$  будут выполняться соотношения

$$\inf_{\Delta_n} \mathcal{R}(\Gamma, \ell(\Gamma, \Delta_n)) = \mathcal{R}(\Gamma, \ell(\Gamma, \Delta_n^*)) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{8n^2} \left(\int_0^T \Phi(t) dt\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Заметим, что, как и для случая плоской ломаной, условие существования непрерывных третьих производных  $x'''(t)$ ,  $y'''(t)$  и  $z'''(t)$  избыточно и от него можно избавиться. Тогда формула выбора узлов несколько усложнится.

Сформулируем двойственную, более важную для нас, задачу – задачу построения ломаной с минимальным количеством звеньев, интерполирующую кривую  $\Gamma$  с заданной точностью  $\varepsilon$ .

**Теорема 3.10.2** Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и при любом  $\varepsilon$  число  $n = n(\varepsilon)$  задано равенством

$$n = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt \right\rceil + 1,$$

как и ранее,  $[\alpha]$  – целая часть числа  $\alpha$ , и узлы  $t_{i,n}^*$  выбраны, исходя из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}^*} (\Phi_n(t) + 1/n^\alpha) dt = \frac{i}{n} \int_0^T (\Phi_n(t) + 1/n^\alpha) dt.$$

Тогда последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$  ( $\Delta_n^* = \{t_{i,n}^*\}_{n=1}^\infty$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будет асимптотически  $\varepsilon$ -оптимальной для кривой  $\Gamma$  при приближении ее интерполяционными ломаными.

**Доказательство** теоремы 3.10.1. Пусть  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  — произвольная последовательность разбиений отрезка  $[0, T]$  такая, что при  $n \rightarrow \infty$  максимальная длина интервалов разбиения стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq n-1} h_{i+1/2, n} = 0.$$

Тогда, как мы уже отмечали, уравнение интерполяционной ломаной для  $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$  будет иметь вид

$$\ell(\Gamma, \Delta_n, t) = \Gamma_{i,n}(1 - \tau) + \Gamma_{i+1,n}\tau,$$

где  $\tau \in [0, 1]$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |\Gamma(u) - \ell(\Gamma, \Delta_n, t)|^2 &= |\Gamma(u) - \Gamma_{i,n}(1 - \tau) - \Gamma_{i+1,n}\tau|^2 = \\ &= |\Gamma(u) - \Gamma_{i,n} - (\Gamma_{i+1,n} - \Gamma_{i,n})\tau|^2, \end{aligned}$$

и, следовательно, будет иметь место равенство

$$\mathcal{R}(\Gamma, \ell(\Gamma, \Delta_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{u \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \min_{\tau \in [0, 1]} (\mathbf{a}_{i,n} - \tau \mathbf{b}_{i,n})^2, \quad (3.106)$$

где

$$\mathbf{a}_{i,n} = \Gamma(u) - \Gamma_{i,n}, \quad \mathbf{b}_{i,n} = \Gamma_{i+1,n} - \Gamma_{i,n}.$$

Отсюда и из леммы 2.1.2 (см. параграф 2.1) сразу получаем

$$\mathcal{R}(\Gamma, \ell(\Gamma, \Delta_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{u \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \frac{|\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i|^2}{|\mathbf{b}_i|^2}. \quad (3.107)$$

Если положить  $t_{i,n} = -h$ , и  $t_{i+1,n} = h$  то, используя в векторной форме формулу Тейлора, получаем

$$\mathbf{a}_{i,n} = \Gamma(u) - \Gamma_{i,n} = \Gamma'_0(\xi + h) + \frac{1}{2}\Gamma''_0(\xi^2 - h^2) + O(h^3)$$

и

$$\mathbf{b}_{i,n} = 2\Gamma'_0 h + O(h^3).$$

Отсюда и из того, что  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ , имеем

$$\mathbf{a}_{i,n} \times \mathbf{b}_{i,n} = \Gamma''_0 \times \Gamma'_0 h(\xi^2 - h^2) + O(h^4),$$

где  $\xi \in [-h, h]$ .

Возвращаясь назад, заменив  $-h$  на  $t_{i,n}$  и  $h$  на  $t_{i+1,n}$ , получим

$$\mathbf{a}_{i,n} \times \mathbf{b}_{i,n} = \frac{h_{i+1/2,n}}{2} \mathbf{\Gamma}_{i+1/2,n}'' \times \mathbf{\Gamma}_{i+1/2,n}' (u - t_{i,n})(t_{i+1,n} - u) + O(h_{i+1/2,n}^4),$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}, \ell(\mathbf{\Gamma}, \Delta_n)) = \\ = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{u \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \frac{1}{2} \left( \frac{|\mathbf{\Gamma}_{i+1/2,n}'' \times \mathbf{\Gamma}_{i+1/2,n}'|}{|\mathbf{\Gamma}_{i+1/2,n}'|} (u - t_{i,n})(t_{i+1,n} - u) + \right. \\ \left. + O(h_{i+1/2,n}^3) \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{8} \left( \Phi_{i+1/2,n}^2 h_{i+1/2,n}^2 + O(h_{i+1/2,n}^3) \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 3.2.1 и следствия 3.2.3 сразу получаем утверждение теоремы 3.10.1.

Ясно, что дискретная реализация алгоритма во многом повторит содержание параграфа 3.7.

### 3.11 Построение оптимальных эквидистант для ломаных

Путешественники ехали без всяких приключений... только в стороне синели верхушки отдаленного леса, тянувшегося по берегам Днепра.

*Н.В.Гоголь "Тарас Бульба".*

Во многих инженерных задачах, в частности, при построении управляющих программ для металлообрабатывающих станков, не столь важно знать по какой траектории движется режущая кромка инструмента, лишь бы эта траектория лежала в поле допуска. Основная задача здесь состоит в построении эквидистанты (для задач металлообработки это траектория движения центра фрезы). Традиционный подход решения такого рода задач состоит в следующем. В начале строят подходящую траекторию движения режущей кромки, а уже к ней подстраивают эквидистанту, которую и используют в качестве траектории движения

центра инструмента. Однако такой подход построения траектории движения центра фрезы неестественен и неэффективен, ибо, если траектория движения режущей кромки описывается ломаной, то соответствующая ей эквидистанта, во – первых, содержит в два раза больше кадров, а во – вторых, состоит не только из кусочно – линейных участков, но и из дуг окружностей (см. рис. 3.22).

О нерациональности такого подхода говорит и то, что если использовать для построения управляющей траектории дуги окружностей, то можно эту траекторию построить с существенно меньшим количеством участков. Об этом подробно мы будем говорить позже.

Более естественным является построение оптимальной траектории не для обрабатываемого контура, а построение такой кусочно – линейной траектории с минимальным числом звеньев, эквидистанта к которой (на расстоянии радиуса фрезы) лежит в поле допуска обрабатываемого контура.

Перейдем к точным формулировкам.

Пусть известна кривая  $\Gamma$  (для простоты изложения будем считать ее замкнутой). Внутренней эквидистантой кривой  $\Gamma(t)$  назовем внутреннюю границу  $r$ -коридора  $\mathcal{K}_r(\Gamma)$  кривой  $\Gamma(t)$ . Внутреннюю эквидистанту будем обозначать  $\Gamma_r^+(t)$ . Соответственно внешнюю границу  $r$ -коридора кривой назовем внешней эквидистантой  $\Gamma(t)$  и обозначим через  $\Gamma_r^-(t)$ .

Пусть  $\mathfrak{N}_n$  – некоторое определенное множество функций с кусочно – однородной структурой (вид технологической кривой). Это может быть множество ломаных, линий состоящих из склеенных дуг окружностей, параметрических сплайнов и пр.

Для заданной кривой  $\Gamma$  и величины  $\varepsilon$  линию  $\Gamma_n \in \mathfrak{N}_n$  назовем допустимым режимом, если ее  $r$ -коридор  $\mathcal{K}_r(\Gamma_n)$  является двусвязным множеством и кривая  $\Gamma$  целиком лежит в  $\varepsilon$ -коридоре внутренней (внешней) эквидистанты  $\Gamma_r^\pm(t)$ .

Допустимый режим  $\Gamma_{n_0} \in \mathfrak{N}_n$  ( $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ) назовем оптимальным, если для любого другого допустимого режима  $\Gamma_n \in \mathfrak{N}_n$  будет иметь место неравенство  $n_0 \leq n$ .

Последовательность допустимых режимов  $\{\Gamma_{n(\varepsilon)}^*\}$  назовем асимптотически оптимальной, если при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будет  $n(\varepsilon) = n_0(1 + o(1))$ .

Пусть теперь  $\mathfrak{N}_n$  – множество ломаных с  $n$  звеньями.

Ведем в рассмотрение функцию

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}}$$

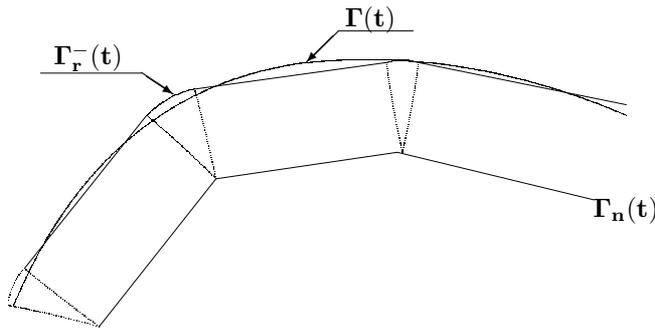


Рис. 3.22:

и обозначения

$$G(t) = \sqrt{\frac{|x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)|}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

и

$$x_{i,n}^* = x_{i,n} + \delta x_{i,n} \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad y_{i,n}^* = y_{i,n} + \delta y_{i,n} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

где

$$\delta x_{i,n} = -\frac{1}{32} \left( \frac{x_{i+1,n} - x_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{x_{i,n} - x_{i-1,n}}{\mu_i} \right)$$

и

$$\delta y_{i,n} = -\frac{1}{32} \left( \frac{y_{i+1,n} - y_{i,n}}{\lambda_i} - \frac{y_{i,n} - y_{i-1,n}}{\mu_i} \right).$$

Здесь

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1/2,n}}{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}}, \quad \mu_i = \frac{h_{i-1/2,n}}{h_{i+1/2,n} + h_{i-1/2,n}}.$$

**Теорема 3.11.1** Пусть кривая  $\Gamma$ , не имеющая точек самопересечения, задана параметрическими уравнениями

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in [0, T]).$$

И узлы разбиения  $\{\Delta_{n^*}^*\}$  определены равенствами (3.83). Тогда последовательность ломаных  $\{\Gamma_\varepsilon(\Delta_{n^*}^*)\}$  с узлами в точках

$$X_{i,n} = x_{i,n}^* \pm \frac{r y'_{i,n}}{\sqrt{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2}},$$

$$Y_{i,n} = y_{i,n}^* \mp \frac{r x'_{i,n}}{\sqrt{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2}}$$

будет асимптотически  $\varepsilon$ -оптимальным внутренним (внешним) режемом обработки кривой  $\Gamma$ .

**Замечание 3.11.2** Если будут наложены условия на площадь, ограниченную искомым контуром и траекторией режущей кромки, то значения  $x_{i,n}^*, y_{i,n}^*$  нужно брать из теоремы (3.9.1).

**Доказательство.** Для доказательства теоремы достаточно показать, что точки эквидистанты, соответствующие узлам ломаной  $\Gamma_\varepsilon(\Delta_n)$ , будут лежать в коридоре  $\mathcal{K}_{\varepsilon+o(\varepsilon)}(\Gamma)$ , или (что то же), что расстояние

$$d_{j,n} = \frac{|(X_{i,n} - x_{j,n}^*)(y_{j+1,n}^* - y_{j,n}^*) - (Y_{i,n} - y_{j,n}^*)(x_{j+1,n}^* - x_{j,n}^*)|}{\sqrt{(x_{j+1,n}^* - x_{j,n}^*)^2 + (y_{j+1,n}^* - y_{j,n}^*)^2}}$$

при  $j = i$  и  $j = i - 1$  с точностью до  $o(\varepsilon)$  будет равно  $r$ .

Пусть, вначале,  $j = i$  и задана эквидистанта  $\Gamma_r^+$ .

В параграфе 3.8 (см. (3.94)) мы установили, что

$$x_{i+1,n}^* - x_{i,n}^* = \frac{\mathcal{A} x'_{i+1/2,n}}{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right)$$

и

$$y_{i+1,n}^* - y_{i,n}^* = \frac{\mathcal{A} y'_{i+1/2,n}}{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right),$$

где

$$\mathcal{A} = \int_0^T (\Phi(t) + n^{-\alpha}) dt.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1,n}^* - x_{i,n}^*)^2 + (y_{i+1,n}^* - y_{i,n}^*)^2}} = \\ & = \frac{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})}{\mathcal{A} \sqrt{(x'_{i+1/2,n})^2 + (y'_{i+1/2,n})^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right)\right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(X_{i,n} - x_{i,n}^*)(y_{i+1,n}^* - y_{i,n}^*) - (Y_{i,n} - y_{i,n}^*)(x_{i+1,n}^* - x_{i,n}^*) =$$

$$= r \left( \frac{y'_{i,n}}{\sqrt{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2}} y'_{i+1/2,n} + \frac{x'_{i,n}}{\sqrt{(x'_{i,n})^2 + (y'_{i,n})^2}} x'_{i+1/2,n} \right) \cdot \left( \frac{\mathcal{A}}{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right) \right).$$

Тогда проводя несложные преобразования и учитывая равенство (3.93)

$$h_{i+1/2,n} = \frac{r \mathcal{A}}{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} + O\left(\frac{1}{n^{3-2\alpha}}\right)$$

получаем

$$\begin{aligned} d_{i,n} &= \frac{r \mathcal{A}}{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} \left( \sqrt{(x'_{i+1/2,n})^2 + (y'_{i+1/2,n})^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h_{i+1/2,n}}{2} G_{i+1/2,n}^2 \sqrt{(x'_{i+1/2,n})^2 + (y'_{i+1/2,n})^2} \right) \times \\ &\quad \times \frac{n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})}{\mathcal{A} \sqrt{(x'_{i+1/2,n})^2 + (y'_{i+1/2,n})^2}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right) \right) = \\ &= r \left( 1 - \frac{h_{i+1/2,n}}{2} G_{i+1/2,n}^2 \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом

$$d_{i,n} = r \left( 1 - \frac{\mathcal{A} G_{i+1/2,n}^2}{2n(\Phi_{i+1/2,n} + n^{-\alpha})} \right) \left( 1 + O\left(\frac{1}{n^{3-3\alpha}}\right) \right).$$

Учитывая выбор числа  $n$ , сразу получаем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $i$  выполняется соотношение

$$d_{i,n} = r(1 + o(1)),$$

что и требовалось доказать.

Случай  $j = i - 1$ , а так же случай эквидистанты  $\Gamma_r^-$  рассматривается аналогично.

**Замечание 3.11.3** Во многих случаях требуется описание контура с одной стороны. Этот вопрос мы достаточно подробно обсуждали в

параграфе 3.9. При этом мы акцентировали внимание на интегральных свойствах. Однако, одностороннее приближение может быть полезным и в случае использования хаусдорфовой метрики. Тогда в теореме 3.11.1 качестве радиуса  $r$  нужно взять величину погрешности  $\varepsilon$ , тогда  $\{\Gamma_\varepsilon^+\}$  будет последовательностью  $\varepsilon$ -оптимальных ломаных, описывающих замкнутый контур  $\Gamma$  изнутри, а  $\{\Gamma_\varepsilon^-\}$  будет описывать извне.

## 3.12 Оптимальная кусочно – окружностная интерполяция

И вывел Моисей народ свой на Землю  
обетованную....

*Библия*

Большая часть современных станков с ЧПУ используют управляющие программы, направляющие центр фрезы либо по ломаной, либо по дуге окружности. При одной и той же заданной погрешности обработки (точности) при аппроксимации траектории движения центра фрезы по дугам окружностей можно добиться значительно меньшего числа переключений, чем при аппроксимации этой траектории кусочно – линейной функцией. Особенно ощутимо это проявляется в случае, когда число переключений велико, т.е. при высокоточной обработке. Качественный выигрыш при кусочно – окружностной аппроксимации будет виден, из результатов этого и следующего параграфа.

В предыдущих параграфах мы подробно обсудили различные подходы к построению оптимальных (точнее – асимптотически оптимальных) траекторий движения центра фрезы по кусочно – линейным траекториям. Были рассмотрены некоторые наиболее употребляемые алгоритмы, на которых основаны (с той или иной модификацией) почти все управляющие программы для ЧПУ. Аналогичных алгоритмов кусочно – окружностной аппроксимации значительно меньше. Это, в первую очередь, связано с тем (и в этом мы сполна убедимся чуть позже), что задача аппроксимации кусочно – окружностными линиями (и особенно определение погрешности аппроксимации) технически гораздо сложнее соответствующей задачи кусочно – линейной аппроксимации. И, во вторых, здесь невозможно использовать интуитивные геометрические соображения правильного расположения точек стыковки соседних дуг.

Напомним некоторые старые и введем новые обозначения.

Через  $\mathfrak{R}_n$  обозначим множество всех непрерывных кривых, состоящих из  $n$  дуг окружностей (включая отрезки прямых, которые рассматриваются как дуги окружностей бесконечно большого радиуса).

Как и ранее, кривую  $\Gamma_n \in \mathfrak{R}_n$  будем называть  $\varepsilon$ -допустимой для кривой  $\Gamma$ , если она лежит в  $\varepsilon$ -коридоре кривой  $\Gamma$ , а кривую  $\Gamma_{n_0}$  ( $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ) будем называть  $\varepsilon$ -оптимальной для кривой  $\Gamma$ , если она  $\varepsilon$ -допустима, и для любой  $\varepsilon$ -допустимой кривой  $\Gamma_n$  выполняется неравенство  $n \geq n_0$ .

Последовательность  $\varepsilon$ -допустимых кривых  $\Gamma_{n^*(\varepsilon)}$  будем называть асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$ , если при  $n \rightarrow \infty$  выполняется асимптотическое равенство

$$n^*(\varepsilon) = n_0(\varepsilon) (1 + o(1)).$$

Рассмотрим один конкретный метод восстановления кривой (в дальнейшем мы покажем, что при подходящем выборе разбиений, он асимптотически оптимален) кусочно-окружностными линиями.

Пусть кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) задана в естественной параметризации и

$$\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\{t_{i,n}\}_{i=0}^n\}_{n=1}^{\infty}$$

произвольная последовательность разбиений промежутка изменения параметра  $[0, T]$ .

Через  $\gamma(\Gamma, \Delta_n, t)$  обозначим кривую, которая для  $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) совпадает с дугой окружности, проходящей через точки

$$\Gamma_{i,n}, \Gamma_{i+1/2,n}, \Gamma_{i+1,n},$$

где

$$\Gamma_{i,n} = (x(t_{i,n}), y(t_{i,n})), \quad \Gamma_{i+1/2,n} = (x(t_{i,n} + h_{i+1/2,n}/2), y(t_{i,n} + h_{i+1/2,n}/2)),$$

и

$$h_{i+1/2,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Будем считать, что и эта кривая задана в естественной параметризации.

Ясно, что

$$\gamma(\Gamma, \Delta_n) \in \mathfrak{R}_n.$$

Последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$  будем называть асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$ , если при  $n \rightarrow \infty$  выполняется асимптотическое равенство

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n^*)) = \inf_{\Delta_n} \mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) (1 + o(1)).$$

Основной целью настоящего параграфа является отыскание асимптотически оптимальных последовательностей  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$  и построении на их основе асимптотически оптимальных алгоритмов восстановления гладких кривых кусочно – окружностными линиями  $\gamma(\Gamma, \Delta_n)$ .

Заметим, что практически эта задача решена нами ранее, параграфе 3.8. Об этом мы поговорим чуть позже.

Справедливо более сильное утверждение. Последовательность кривых  $\{\gamma(\Gamma, \Delta_n^*)\}_{n=1}^\infty$  является асимптотически оптимальной на всех множествах  $\{\mathfrak{R}_n\}$  (т.е. никакая другая последовательность непрерывных кусочно – окружностных линий не может дать результат лучший (в асимптотическом смысле), чем  $\{\gamma(\Gamma, \Delta_n^*)\}_{n=1}^\infty$ ). Тем самым, задача об асимптотически оптимальном восстановлении гладких кривых непрерывными кусочно – окружностными линиями полностью решена.

Ради удобства ссылок основные результаты параграфа сформулируем в виде теорем.

Пусть

$$k(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$$

и

$$\Phi(t) = |x'(t)y'''(t) - y'(t)x'''(t)|^{1/3}.$$

**Теорема 3.12.1** Пусть функции  $x(t), y(t)$ , определяющие кривую  $\Gamma(t)$ , заданную в естественной параметризации, таковы, что  $x, y \in C_{[0, T]}^4$  числа  $M > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1/4)$  и  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$  – произвольная последовательность кусочно – непрерывных функций такая, что

$$\|\Phi - \Phi_n\|_\infty \leq Mn^{-\alpha},$$

а узлы  $\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$  выбраны из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}^*} (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt = \frac{i}{n} \int_0^T (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt$$

$$(i = 0, 1, \dots, n).$$

Тогда последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$  будет асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$ , и при  $n \rightarrow \infty$  будет выполняться асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \inf_{\Delta_n} \{\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n))\} &= \mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n^*)) (1 + O(1/n)) = \\ &= \frac{1}{72\sqrt{3}n^3} \left( \int_0^T \Phi(t) dt \right)^3 + o(n^{-3}). \end{aligned}$$

На тех участках кривой, где  $\Phi(t) \neq 0$  справедливо более сильное, чем эта теорема утверждение.

**Теорема 3.12.2** Пусть кривая  $\Gamma(t)$ , заданная в естественной параметризации такова, что  $x, y \in C^5_{[0,T]}$ ,  $k(t) \neq 0$  и  $\Phi(t) \neq 0$  для  $t \in [0, T]$ , а узлы  $\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$  выбраны из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}^*} \Phi(t) dt = \frac{i}{n} \int_0^T \Phi(t) dt$$

$$(i = 0, 1, \dots, n).$$

Тогда

$$\inf_{\Delta_n} \{\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n))\} = \mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n^*)) + O(1/n^5) =$$

$$= \frac{1}{72\sqrt{3}n^3} \left( \int_0^T \Phi(t) dt \right)^3 + O(n^{-5}).$$

Таким образом, на этих участках кривой погрешности при оптимальных и асимптотически оптимальных разбиениях совпадают с точностью до  $O(n^{-5})!$

Доказательство этих теорем легко получается из леммы 3.8.2 и теоремы 3.2.1, а также следствия 3.2.3 и 3.2.4 соответственно.

Сформулируем более важную для нас двойственную задачу – задачу построения кусочно – окружностной кривой с минимальным количеством звеньев, интерполирующую заданную кривую  $\Gamma$  с заданной точностью  $\varepsilon$ .

**Теорема 3.12.3** Пусть выполнены условия теоремы 3.12.1 и при любом положительном  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$n = n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\sqrt[3]{72\sqrt{3}\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt \right\rceil + 1$$

(как и ранее,  $[\alpha]$  – целая часть числа  $\alpha$ ), и узлы  $t_{i,n}^*$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) выбраны исходя из равенств

$$\int_0^{t_{i,n}^*} (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt = \frac{i}{n} \int_0^T (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt.$$

Тогда последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$  ( $\Delta_n^* = \{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будет асимптотически  $\varepsilon$ -оптимальной для кривой  $\Gamma$  при приближении ее кусочно – окружностными линиями.

Заметим, что представленные этими теоремами результаты более важные, ибо, как показывает следующее утверждение, последовательности, определенные в этих теоремах, асимптотически наилучшие не только среди интерполяционных кусочно – окружностных кривых, но и вообще, среди всех кривых из  $n$  дуг.

**Теорема 3.12.4** Пусть кривая  $\Gamma(t)$ , заданная в естественной параметризации такова, что  $x, y \in C_{[0,T]}^3$ , тогда

$$\inf_{\gamma \in \mathfrak{R}_n} \mathcal{R}(\Gamma, \gamma) \geq \frac{1}{72\sqrt{3}n^3} \left( \int_0^T \Phi(t) dt \right)^3 (1 + o(1)).$$

В результате наших исследований мы установили, что при приближении с точностью  $\varepsilon$  количество звеньев интерполяционной ломаной больше соответствующего количества дуг  $\gamma(\Gamma, \Delta_n^*)$  примерно в  $\varepsilon^{-1/6}$  раз. Интересно сверить насколько более "гладкая" склейка дуг  $\gamma(\Gamma, \Delta_n^*)$ , чем стыковка звеньев интерполяционной ломаной. Понятно, что в этом случае мы можем сверять только величину степени негладкости того и иного аппарата приближения. Для асимптотически оптимальной интерполяционной ломаной величина степени негладкости определена в теореме 3.4.5. Определим эту величину для кусочно -окружностной кривой.

**Теорема 3.12.5** Пусть выполнены условия теоремы 3.12.1, тогда

$$\alpha(\gamma(\Gamma, \Delta_n^*), t_{i,n}^*) = o(n^{-2}),$$

если же выполнены условия теоремы 3.12.2, то

$$\alpha(\gamma(\Gamma, \Delta_n^*), t_{i,n}^*) = \left| \frac{\mathcal{A} k_{i,n}}{2n F_{i,n}} \right|^3 + O(n^{-4}),$$

где  $\mathcal{A} = \int_0^T \Phi(t) dt$ ,  $k_{i,n} = k(\Gamma, t_{i,n}^*)$  – значение кривизны кривой  $\Gamma$  в точке  $\Gamma(t_{i,n}^*)$  и  $F_{i,n} = k'(t_{i,n}^*)$ .

**Доказательство.** Для рассматриваемого случая при произвольном разбиении  $\Delta_n$  (см. рис.3.23)

$$\sin \alpha(\gamma(\Gamma, \Delta_n), t_i) = \frac{|\Gamma_i O_{i-1/2} \times \Gamma_i O_{i+1/2}|}{R_{i-1/2} R_{i+1/2}}.$$

Если центр окружности на промежутке изменения параметра  $[t_i, t_{i+1}]$  имеет координаты  $O_{i+1/2} (X_{i+1/2}, Y_{i+1/2})$ , то

$$|\Gamma_i O_{i-1/2} \times \Gamma_i O_{i+1/2}| =$$

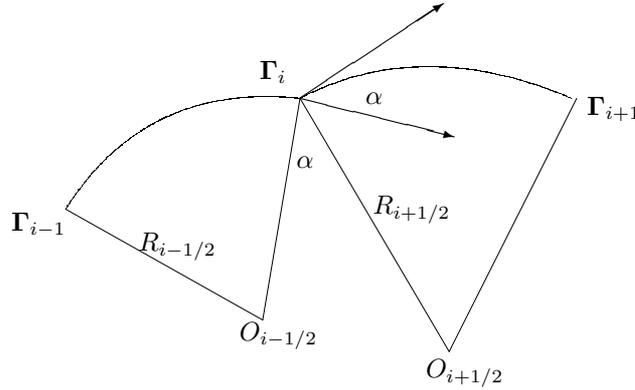


Рис. 3.23:

$$\begin{aligned}
 &= |(X_{i-1/2} - x_i)(Y_{i+1/2} - y_i) - (Y_{i-1/2} - y_i)(X_{i+1/2} - x_i)| = \\
 &= \frac{1}{16} h_{i+1/2} h_{i-1/2} (h_{i+1/2} + h_{i-1/2}) |x'_i y''_i - y'_i x''_i| + C_i(\Gamma) |h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2| + \\
 &\quad + O((h_{i+1/2} + h_{i-1/2})^4),
 \end{aligned}$$

где  $C_i(\Gamma)$  – постоянная зависящая только от кривой  $\Gamma$ .

Как известно (см. (3.96))

$$R_{i+1/2} = \frac{1}{k_{i+1/2}} \left( 1 + O(h_{i+1/2}^2) \right) = \frac{1}{k_i} \left( 1 + O(h_{i+1/2}) \right),$$

то для любого разбиения  $\Delta_n$  будет

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha(\gamma(\Gamma, \Delta_n), t_i) &= \left( \frac{1}{16} h_{i+1/2} h_{i-1/2} (h_{i+1/2} + h_{i-1/2}) |k_i^3| + \right. \\
 &\quad \left. + C_i^*(\Gamma) |h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2| \right) (1 + O(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})).
 \end{aligned}$$

Пусть узлы  $\{t_{i,n}^*\}_{i=1}^n$  выбраны из условия теоремы 3.12.1, то есть

$$\int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt = \frac{1}{n} \int_0^T (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt.$$

Из выбора  $\Phi_n$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} (\Phi(t) + M_1 n^{-\alpha}) dt &= \frac{1}{n} \int_0^T (\Phi(t) + M_2 n^{-\alpha}) dt = \\ &= \frac{1}{n} \left( \int_0^T \Phi(t) t + M_2 T n^{-\alpha} \right) = \frac{1}{n} \mathcal{A} + M_3 n^{-1-\alpha}, \end{aligned}$$

где  $M_\nu = M_\nu(\Gamma)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – некоторые постоянные.

По теореме о среднем для интегралов найдется такая точка  $\xi_{i+1/2} \in [t_{i,n}^*, t_{i+1,n}^*]$ , что

$$(\Phi(\xi_{i+1/2}) + M_1 n^{-\alpha}) h_{i+1/2,n}^* = \frac{1}{n} (\mathcal{A} + M_3 n^{-\alpha}),$$

т.е.

$$h_{i+1/2}^* = \frac{\mathcal{A} + M_3 n^{-\alpha}}{n (\Phi(\xi_{i+1/2}) + M_1 n^{-\alpha})}$$

и

$$h_{i-1/2}^* = \frac{\mathcal{A} + M_3 n^{-\alpha}}{n (\Phi(\xi_{i-1/2}) + M_4 n^{-\alpha})}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_{i-1/2,n}^* - h_{i+1/2,n}^* &= \\ &= \frac{(\mathcal{A} + M_3 n^{-\alpha}) (|\Phi(\xi_{i+1/2})| - |\Phi(\xi_{i-1/2})| + M_5 n^{-\alpha})}{n (\Phi(\xi_{i-1/2}) + M_4 n^{-\alpha}) (\Phi(\xi_{i+1/2}) + M_1 n^{-\alpha})} = \\ &= O\left(\frac{1}{n} \omega(|\Phi|, 2h_n^*)\right). \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует первое утверждение теоремы. Если выполняются условия теоремы 3.12.2, то доказательство проводится аналогично.

Для кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) заданной в естественной параметризации положим  $k(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$  и  $\Phi(t) = |k'(t)|^{1/3} = |x'(t)y'''(t) - y'(t)x'''(t)|^{1/3}$ .

Через  $\gamma(\Gamma, \Delta_n[0, T], t)$  обозначим кривую, которая для  $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$  совпадает с дугой окружности, проходящей через точки  $\Gamma_{i,n}$ ,  $\Gamma_{i+1/2,n}$ ,  $\Gamma_{i+1,n}$ . Введем в рассмотрения числа

$$X_{i+1/2,n} = x_{i+1/2,n} - \frac{1}{q_{i+1/2,n}} \left( y'_{i+1/2,n} + \frac{h_{i+1/2,n}^2}{12} (x'_{i+1/2,n} x'''_{i+1/2,n} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + y'_{i+1/2,n} y'''_{i+1/2,n} + \frac{1}{6} h_{i+1/2,n}^2 y'''_{i+1/2,n} \Big), \\
Y_{i+1/2,n} &= y_{i+1/2,n} + \frac{1}{q_{i+1/2,n}} \left( x'_{i+1/2,n} + \frac{h_{i+1/2,n}^2}{12} (x'_{i+1/2,n} x'''_{i+1/2,n} + \right. \\
& \left. + y'_{i+1/2,n} y'''_{i+1/2,n}) + \frac{1}{6} h_{i+1/2,n}^2 x'''_{i+1/2,n} \right),
\end{aligned}$$

и

$$R_{i+1/2,n} = \frac{1}{q_{i+1/2,n}} \sqrt{1 + \frac{h_{i+1/2,n}^2}{2} (x'_{i+1/2,n} x'''_{i+1/2,n} + y'_{i+1/2,n} y'''_{i+1/2,n})},$$

где

$$\begin{aligned}
q_{i+1/2,n} &= k_{i+1/2,n} + \frac{h_{i+1/2,n}^2}{12} \Phi_{i+1/2,n} - \\
& - \frac{h_{i+1/2,n}^2}{4} (x''_{i+1/2,n} y'''_{i+1/2,n} - x'''_{i+1/2,n} y''_{i+1/2,n}).
\end{aligned}$$

Можно показать, что с точностью до  $O(h_{i+1/2,n}^3)$  точка  $(X_{i+1/2,n}, Y_{i+1/2,n})$  совпадает с центром этой окружности, а  $R_{i+1/2,n}$  — с ее радиусом.

Определим числа

$$x_i^+ = X_{i+1/2,n} + (x_{i,n} - X_{i+1/2,n})(R_{i+1/2,n} \pm r \operatorname{sign} k_{i+1/2,n})/R_{i+1/2,n}, \quad (3.108)$$

$$x_i^- = X_{i-1/2,n} + (x_{i,n} - X_{i-1/2,n})(R_{i-1/2,n} \pm r \operatorname{sign} k_{i+1/2,n})/R_{i-1/2,n} \quad (3.109)$$

и

$$y_i^+ = Y_{i+1/2,n} + (y_{i,n} - Y_{i+1/2,n})(R_{i+1/2,n} \pm r \operatorname{sign} k_{i+1/2,n})/R_{i+1/2,n}, \quad (3.110)$$

$$y_i^- = Y_{i-1/2,n} + (y_{i,n} - Y_{i-1/2,n})(R_{i-1/2,n} \pm r \operatorname{sign} k_{i+1/2,n})/R_{i-1/2,n}. \quad (3.111)$$

Через  $\mathfrak{R}_n(\Gamma, \varepsilon)$  обозначим множество  $\varepsilon$ -допустимых (для кривой  $\Gamma$ ) линий состоящих из  $n$  дуг окружностей (не обязательно непрерывных).

**Теорема 3.12.6** Пусть  $M > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1/4)$ , функции  $x(t), y(t)$ , определяющие кривую  $\Gamma(t)$ , заданную в естественной параметризации, таковы, что  $x, y \in C_{[0,T]}^4$ , числа  $u$  при любом  $\varepsilon$  вычислим число

$$n = n(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{72\sqrt{3}\varepsilon}} \int_0^T |\Phi(t)| dt \right] + 1.$$

Узлы  $t_{i,n}^*$  выберем исходя из условия теоремы 3.12.1, где  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$  – произвольная последовательность кусочно – непрерывных функций таких, что

$$\|\Phi - \Phi_n\|_\infty \leq Mn^\alpha.$$

Для  $t \in [t_{i,n}^*, t_{i+1,n}^*]$  ( $i = 0, \dots, n(\varepsilon) - 1$ )  $\tilde{\gamma}(\Gamma, \Delta_n [0, T], t)$  есть окружность радиуса  $R_{i+1/2,n} \pm r \operatorname{sign} k_{i+1/2,n}$ , проходящая через точки

$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \left( \frac{1}{2}(x_i^+ + x_i^-), \frac{1}{2}(y_i^+ + y_i^-) \right),$$

$$(\tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) = \left( \frac{1}{2}(x_{i+1}^+ + x_{i+1}^-), \frac{1}{2}(y_{i+1}^+ + y_{i+1}^-) \right),$$

Тогда последовательность  $\{\tilde{\gamma}(\Gamma, \Delta_{n(\varepsilon)} [0, T], t)\}$  будет асимптотически оптимальным внутренним (внешним) режимом обработки кривой  $\Gamma$  среди всех  $\varepsilon$ - допустимых режимов из множества  $\mathfrak{R}_n(\Gamma, \varepsilon)$ .

### 3.13 Алгоритм оптимального кусочно – окружностного интерполятора

Бросая в воду камешки, смотри на круги  
расходящиеся от них, иначе твое бро-  
сание будет пустою забавою.

*Косьма Прутков*

Как и в случае кусочно – линейной аппроксимации, уделим внимание построению рабочего алгоритма определения асимптотически оптимальной кусочно – окружностной кривой. В этом параграфе мы будем опираться на результаты предыдущих параграфов.

Ход рассуждений существенно повторяет рассуждения при построении алгоритма оптимального кусочно – линейного интерполятора, но, естественно, будет опираться на теорему 3.12.1.

Опираясь на результаты первых двух глав, будем считать, что нам известны в естественной параметризации уравнения, достаточно точно описывающие гладкие участки кривой.

Дальнейшее содержание параграфа посвящено построению дискретных аналогов всех величин, входящих в формулировку теоремы 3.12.1.

Вначале опишем дискретный аналог самой кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ).

Из теоремы, о построении  $\varepsilon$ -оптимального алгоритма интерполирующей кусочно – окружностной кривой, требуется по порядку примерно  $\varepsilon^{-1/3}$  звеньев (и, соответственно, узлов интерполяции). Так что, первоначальная дискретизация должна опираться на большее число опорных точек, к примеру, около  $\varepsilon^{-1/2}$ .

Перейдем к детальному изложению алгоритма и его анализу.

Итак, пусть задана допустимая погрешность  $\varepsilon$  и параметрические уравнения  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) гладкого участка кривой.

Прежде всего найдем степень дискретизации кривой

$$N = [1/\sqrt{\varepsilon}] + 1$$

( $[\alpha]$  – целая часть числа  $\alpha$ ) и тогда определим набор опорных точек

$$x_i = x\left(\frac{iT}{N}\right), y_i = y\left(\frac{iT}{N}\right) \quad (i = 0, 1, \dots, N).$$

Дальнейшей нашей задачей является построение дискретного аналога функции – регулятора узлов для кусочно – окружностных линий.

В рассматриваемом нами случае это функция

$$\Phi(t) = \sqrt[3]{|x'''(t)y'(t) - x'(t)y'''(t)|}.$$

Использование в качестве теоретического задания кривой сплайна  $s_3^*(\Gamma, t)$ , что мы и будем предполагать в дальнейшем, позволяет использовать то, что его параметризация близка к естественной.

Дискретными аналогами производных  $x'_i$  и  $y'_i$  будут выступать разности

$$\Delta x_{i-1/2} = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

и

$$\Delta y_{i-1/2} = y_i - y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Соответственно вместо вторых производных  $x''_i$  и  $y''_i$  будут выступать вторые разности

$$\Delta^2 x_i = \Delta x_{i+1/2} - \Delta x_{i-1/2} \quad (i = 1, \dots, N-1),$$

и

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1/2} - \Delta y_{i-1/2} \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Недостающие разности доопределим следующим образом (см. параграф 1.1)

$$\Delta x_{-1/2} = 2\Delta x_{1/2} - \Delta x_{3/2}, \quad \Delta y_{-1/2} = 2\Delta y_{1/2} - \Delta y_{3/2}$$

и

$$\Delta^2 x_0 = 2\Delta^2 x_1 - \Delta^2 x_2, \quad \Delta^2 y_0 = 2\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_2,$$

а также определим

$$\Delta^3 x_{i-1/2} = \Delta^2 x_i - \Delta^2 x_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$\Delta^3 y_{i-1/2} = \Delta^2 y_i - \Delta^2 y_{i-1} \quad (i = 1, \dots, N).$$

Вычислим числа

$$\Phi_i = \sqrt[3]{|\Delta^3 x_{i-1/2} \Delta y_{i-1/2} - \Delta^3 y_{i-1/2} \Delta x_{i-1/2}|} + \frac{1}{N} \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

которые и дают нам дискретный аналог регулятора узлов.

Вычислим теперь дискретный аналог первообразной:

$$\Psi(t) = \int_0^t \Phi(t) dt.$$

Это будет система чисел

$$\Psi_i = \frac{T}{N} \sum_{\nu=0}^i \Phi_\nu, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\Psi_0 = 0.$$

Далее, вычислим число кадров (узлов) асимптотически оптимального алгоритма

$$n = \left\lceil \frac{\Psi_N}{\sqrt[3]{72\varepsilon\sqrt{3}}} \right\rceil + 1.$$

После этого определим узлы асимптотически оптимального разбиения  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) согласно алгоритму, указанному в теореме 3.12.1

$$t_j = (j-1)\Psi_N/n - \Psi_{k-1}/\Psi_k + (k-2)T/N$$

при

$$\frac{iT}{N} \leq t_j \leq \frac{(i+1)T}{N}$$

и

$$\Psi_k < \frac{(j-1)}{n} \Psi_N$$

для  $k = 2, 3, \dots$  и  $i \leq n$ .

Остается вычислить дискретные аналоги величин

$$(x(t_j), y(t_j)) \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Их легко вычислить, ибо, как мы уже отмечали, в качестве теоретического задания контура мы берем сплайн  $s_3^*(\Gamma, t) = (s_3^*(x, t), s_3^*(y, t))$ . Таким образом, можно считать, что

$$x(t_j) = s_3^*(x, t_j)$$

и

$$y(t_j) = s_3^*(y, t_j).$$

### 3.14 Гладкая аппроксимация кусочно – окружностными линиями

Обстоятельства переменчивы, принципы – никогда.

*О. Бальзак*

В параграфе 3.12 мы рассмотрели вопрос о восстановлении кривых кусочно – окружностными линиями и об определении асимптотически оптимального набора узлов при таком восстановлении. Мы убедились, что в результате такого восстановления (теорема 3.12.5) получается почти гладкая кривая, состоящая из дуг окружностей, т.е. углы между правыми и левыми касательными в точках стыковки окружностей при таком выборе узлов малы.

Для некоторых задач техники оказывается такое решение недостаточным. Например, при конструировании некоторых кулачковых механизмов, требуется идеально (или почти идеально) гладкое описание контура. Настоящий параграф посвящен одному из способов такого описания.

Как и в предыдущих параграфах, точное решение задачи о построении кусочно – окружностной линии с минимальным числом звеньев, описывающей данную кривую (контур) с заданной точностью, приводит к трудоемкой минимаксной задаче. Трудности при ее решении еще более возрастут, если мы будем искать решение задачи в виде гладкой линии. В качестве вспомогательной задачи, в данном параграфе нам потребуется решение ее для случая двух дуг окружностей. И уже на

этом примере (хотя мы будем решать не оптимизационную, а более легкую, интерполяционную задачу) мы будем иметь представление об этих трудностях.

Естественным (а в этой книге – традиционным) выходом из этого положения является использование асимптотического подхода.

Как и ранее, считаем, что кривая  $\Gamma$  задана в естественной параметризации.

Идейная сторона алгоритма, предложенного в настоящем параграфе, состоит в следующем. Кривую  $\Gamma$  мы разбиваем на маленькие участки (дуги) и каждую дугу  $M_{i-1}M_i$  восстанавливаем парой окружностей, которые обладают следующими свойствами:

1. окружности проходят через точки  $M_{i-1}$  и  $M_i$ , соответственно;
2. в точках  $M_{i-1}$  и  $M_i$  касательные к кривой и окружности совпадают;
3. в точке пересечения окружности склеиваются гладко (касательные к окружностям в точке пересечения совпадают).

Ясно, что в этом случае результирующая кривая, состоящая из дуг окружностей, будет гладкой.

Реализовать изложенный подход мы будем следующим образом.

Выберем параметры окружностей для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  исходя из следующих условий.

Пусть на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  (на дуге  $M_i, M_{i+1}$ ) –  $\gamma_i^+$  есть дуга окружности, проходящей через точку  $M_i$ , а  $\gamma_{i+1}^-$  есть дуга окружности, проходящей через точку  $M_{i+1}$ , и  $M_{i+1/2}^*$  – точка пересечения этих окружностей. Тогда:

1. вектор  $(x'_i, y'_i)$  будет направляющим вектором касательной в точке  $M_{i-1}$  к окружности  $\gamma_i^+$ , а вектор  $(x'_{i+1}, y'_{i+1})$  – касательный вектор к окружности  $\gamma_{i+1}^-$  в точке  $M_{i+1}$ ;
2. в точке пересечения  $M_{i+1/2}^*$  направления касательных к окружностям  $\gamma_{i+1}^-$  и  $\gamma_i^+$  совпадают (т.е. точка  $M_{i+1/2}^*$  и центры окружностей  $\gamma_i^+$  и  $\gamma_{i+1}^-$  лежат на одной прямой);
3. точка пересечения  $M_{i+1/2}^*$  лежит недалеко от  $M_{i+1/2}$ , т.е. почти равноудалена от точек  $M_i$  и  $M_{i+1}$ .

Формализация первого условия такова. Если  $(x_i^+, y_i^+)$  – центр окружности  $\gamma_i^+$ , а  $(x_{i+1}^-, y_{i+1}^-)$  – центр окружности  $\gamma_{i+1}^-$  (см. рис 3.24), то это

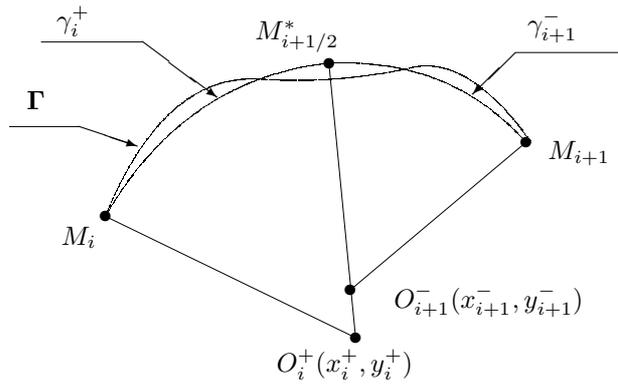


Рис. 3.24:

условие примет вид

$$x_i^+ = x_i - R_i^+ \frac{y_i'}{\sqrt{(x_i')^2 + (y_i')^2}}, \quad (3.112)$$

$$y_i^+ = y_i + R_i^+ \frac{x_i'}{\sqrt{(x_i')^2 + (y_i')^2}} \quad (3.113)$$

и

$$x_{i+1}^- = x_{i+1} - R_{i+1}^- \frac{y_{i+1}'}{\sqrt{(x_{i+1}')^2 + (y_{i+1}')^2}}, \quad (3.114)$$

$$y_{i+1}^- = y_{i+1} + R_{i+1}^- \frac{x_{i+1}'}{\sqrt{(x_{i+1}')^2 + (y_{i+1}')^2}} \quad (3.115)$$

(здесь  $R_i^+$  и  $R_{i+1}^-$  – радиусы окружностей  $\Gamma_i^+$  и  $\Gamma_{i+1}^-$ , соответственно).

Второе условие формализуется в виде

$$\frac{x_i^+ - x_{i+1/2}^*}{x_i^+ - x_{i+1}^-} = \frac{y_i^+ - y_{i+1/2}^*}{y_i^+ - y_{i+1}^-}. \quad (3.116)$$

Третье – в виде

$$x_{i+1/2}^* = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} - \frac{x_{i+1}' - x_i'}{4} h_{i+1/2} - \frac{y_{i+1} - y_i}{2} \vartheta, \quad (3.117)$$

$$y_{i+1/2}^* = \frac{y_{i+1} + y_i}{2} - \frac{y'_{i+1} - y'_i}{4} h_{i+1/2} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \vartheta, \quad (3.118)$$

где  $\vartheta$  – некоторый параметр, принимающий достаточно малые значения.

Кроме того, ясно, что

$$(x_i^+ - x_{i+1/2}^*)^2 + (y_i^+ - y_{i+1/2}^*)^2 = (R_i^+)^2, \quad (3.119)$$

$$(x_{i+1}^- - x_{i+1/2}^*)^2 + (y_{i+1}^- - y_{i+1/2}^*)^2 = (R_{i+1}^-)^2. \quad (3.120)$$

С целью упрощения записей, введем дополнительные обозначения

$$\tilde{x}_{i+1/2} = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} - \frac{x'_{i+1} - x'_i}{4} h_{i+1/2} \quad (3.121)$$

и

$$\tilde{y}_{i+1/2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{2} - \frac{y'_{i+1} - y'_i}{4} h_{i+1/2}. \quad (3.122)$$

Таким образом, для того, чтобы найти необходимые значения параметров окружностей  $\gamma_i^+$  и  $\gamma_{i+1}^-$ , необходимо решить систему девяти уравнений (3.112) – (3.120) с девятью неизвестными: координат центров окружностей  $\gamma_i^+$  и  $\gamma_{i+1}^-$ , радиусов их, координат точки пересечения окружностей и значения параметра  $\vartheta$ , характеризующего удаленность точки  $M_{i+1/2}^*$  от точки  $M_{i+1/2}$ .

Используя в (3.119) уравнения (3.117) – (3.118), получим

$$\left( x_i^+ - \tilde{x}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta \right)^2 + \left( y_i^+ - \tilde{y}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta \right)^2 = (R_i^+)^2$$

или

$$\begin{aligned} & \left( x_i - \tilde{x}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta - y'_i R_i^+ \right)^2 + \\ & + \left( y_i - \tilde{y}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta + x'_i R_i^+ \right)^2 = (R_i^+)^2 \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, и, учитывая тот факт, что кривая задана в естественной параметризации, пишем

$$R_i^+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_i}{B_i},$$

где

$$A_i = \left( x_i - \tilde{x}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta \right)^2 + \left( y_i - \tilde{y}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta \right)^2$$

и

$$B_i = y'_i \left( x_i - \tilde{x}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta \right) - x'_i \left( y_i - \tilde{y}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta \right).$$

Аналогично, из (3.120) получаем

$$R_{i+1}^- = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_i}{D_i},$$

где

$$C_i = \left( x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta \right)^2 + \left( y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta \right)^2$$

и

$$D_i = y'_{i+1} \left( x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta \right) - x'_{i+1} \left( y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta \right).$$

Раскрывая скобки и проводя преобразования, приходим к равенству

$$R_i^+ = \frac{E_i}{F_i},$$

где

$$E_i = \frac{1 + \vartheta^2}{4} (\Delta x_{i+1/2})^2 + (\Delta y_{i+1/2})^2 - \frac{h_{i+1/2}}{4} (\Delta x_{i+1/2} \Delta x'_{i+1/2} + \Delta y_{i+1/2} \Delta y'_{i+1/2}) + \frac{h_{i+1/2}}{16} ((\Delta x'_{i+1/2})^2 + (\Delta y'_{i+1/2})^2) + \frac{\vartheta h_{i+1/2}}{4} (\Delta y_{i+1/2} \Delta x'_{i+1/2} - \Delta x_{i+1/2} \Delta y'_{i+1/2})$$

и

$$F_i = (\Delta x_{i+1/2} y'_i - x_i \Delta y_{i+1/2}) + \frac{h_{i+1/2}}{2} (\Delta x'_{i+1/2} y'_i - x_i \Delta y'_{i+1/2}) + \vartheta (\Delta x_{i+1/2} x'_i - y_i \Delta y_{i+1/2}).$$

Аналогично получаем

$$R_{i+1}^- = \frac{G_i}{H_i},$$

где

$$G_i = \frac{1 + \vartheta^2}{4} (\Delta x_{i+1/2})^2 + (\Delta y_{i+1/2})^2 - \frac{h_{i+1/2}}{4} (\Delta x_{i+1/2} \Delta x'_{i+1/2} + \Delta y_{i+1/2} \Delta y'_{i+1/2}) + \frac{h_{i+1/2}}{16} ((\Delta x'_{i+1/2})^2 + (\Delta y'_{i+1/2})^2) + \frac{\vartheta h_{i+1/2}}{4} (\Delta y_{i+1/2} \Delta x'_{i+1/2} - \Delta x_{i+1/2} \Delta y'_{i+1/2})$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta y_{i+1/2} \Delta y'_{i+1/2} + \frac{h_{i+1/2}}{16} ((\Delta x'_{i+1/2})^2 + (\Delta y'_{i+1/2})^2) + \\
& + \frac{\vartheta h_{i+1/2}}{4} (\Delta y_{i+1/2} \Delta x'_{i+1/2} - \Delta x_{i+1/2} \Delta y'_{i+1/2})
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
H_i = & (\Delta x_{i+1/2} y'_{i+1} - x_{i+1} \Delta y_{i+1/2}) + \frac{h_{i+1/2}}{2} (\Delta x'_{i+1/2} y'_{i+1} - \\
& - x_{i+1} \Delta y'_{i+1/2}) + \vartheta (\Delta x_{i+1/2} x'_{i+1} - y_{i+1} \Delta y_{i+1/2}).
\end{aligned}$$

В приведенных выражениях значения радиусов  $R_i^+$  и  $R_{i+1}^-$  выражены через неизвестное значение параметра  $\vartheta$ . Чтобы определить его, используем равенство (3.116):

$$\frac{(x_i^+ - \tilde{x}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta)}{x_i^+ - x_{i+1}^-} = \frac{(y_i^+ - \tilde{y}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta)}{y_i^+ - y_{i+1}^-}$$

или, что то же,

$$\begin{aligned}
& \left( x_i^+ - \tilde{x}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta \right) (y_i^+ - y_{i+1}^-) = \\
& = \left( y_i^+ - \tilde{y}_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta \right) (x_i^+ - x_{i+1}^-).
\end{aligned}$$

Кроме того, из (3.112) – (3.115) следует равенство

$$\begin{aligned}
& (\Delta y_{i+1/2} + x'_{i+1} R_{i+1}^- - x'_i R_i^+) \left( x_i - y'_i R_i^+ - \tilde{x}'_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta y_{i+1/2} \vartheta \right) = \\
& = (\Delta x_{i+1/2} + y'_{i+1} R_{i+1}^- - y'_i R_i^+) (y_i - x'_i R_i^+ - \tilde{y}'_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1/2} \vartheta),
\end{aligned}$$

что вместе с уравнениями, определяющими значения  $R_i^+$  и  $R_{i+1}^-$ , приводит к уравнению четвертой степени относительно параметра  $\vartheta$ .

Точное решение этого уравнения приводит к громоздким формулам. Можно найти решение его с помощью последовательных приближений. Для выбора начального значения  $\vartheta_0$  учтем, что, если применить формулу Тейлора для  $x$  и  $y$ , то легко показать, что

$$R_i^+ = \frac{h_{i+1/2}^2 (1 + \vartheta^2) + \frac{1}{2} h_{i+1/2}^3 \vartheta (x'_i y''_i - y'_i x''_i) + O(h_{i+1/2}^4)}{h_{i+1/2}^2 (x'_i y''_i - y'_i x''_i) + 2\vartheta h_{i+1/2} + O(h_{i+1/2}^3)}. \quad (3.123)$$

Учитывая теперь, что  $\vartheta \ll h_{i+1/2}$ , получаем

$$R_i^+ = \frac{1}{|x'_i y''_i - y'_i x''_i|} (1 + O(h_{i+1/2})) = R_i^0 (1 + O(h_{i+1/2})), \quad (3.124)$$

здесь  $R_i^0 = |k_i|^{-1}$  – радиус кривизны кривой  $\Gamma$  в точке  $M_i$  (т.е.  $R_i^+$  отличается на  $O(h_{i+1/2})$  от радиуса кривизны кривой  $\Gamma$  в точке  $M_i$ ). Аналогично доказывается, что  $R_{i+1}^-$  на  $O(h_{i+1/2})$  отличается от радиуса кривизны кривой в точке  $M_{i+1}$ .

В качестве начального значения параметра возьмем

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \frac{A}{B}, \quad (3.125)$$

где

$$A = (\Delta y_{i+1/2} + x'_{i+1} R_{i+1}^- - x'_i R_i^+) (x_i - y'_i R_i^+ - \tilde{x}_{i+1/2}) - \\ - (\Delta x_{i+1/2} + y'_{i+1} R_{i+1}^- - y'_i R_i^+) (y_i - x'_i R_i^+ - \tilde{y}_{i+1/2})$$

и

$$B = (\Delta x_{i+1/2} + y'_{i+1} R_{i+1}^- - y'_i R_i^+) \Delta x_{i+1/2} - \\ - (\Delta y_{i+1/2} + x'_{i+1} R_{i+1}^- - x'_i R_i^+) \Delta y_{i+1/2},$$

а вместо  $R_i^+$  будет  $R_i^0$  – радиус кривизны кривой  $\Gamma$  в точке  $M_i$ , и вместо  $R_{i+1}^-$  – радиус кривизны кривой  $\Gamma$  в точке  $M_{i+1}$ . Определив таким образом значение параметра  $\vartheta_0$ , вычислим соответствующие ему значения радиусов  $R_i^+$  и  $R_{i+1}^-$  и подставив их в (3.125), получим новое значение параметра  $\vartheta = \vartheta_1$  и т.д., пока не получим это значение с нужной нам точностью.

После получения значения параметра  $\vartheta$  формулы (3.123) и (3.112) – (3.115) полностью определяют значения радиусов  $R_i^+$  и  $R_{i+1}^-$  и центров  $(x_i^+, y_i^+)$  и  $(x_{i+1}^-, y_{i+1}^-)$  окружностей.

Теперь, когда мы рассмотрели механизм построения гладкой кусочно – окружностной кривой, восстанавливающей исходную кривую  $\Gamma$ , перейдем к задаче отыскания асимптотически оптимального набора узлов для такого способа восстановления.

Пусть кривая  $\Gamma$  задана в естественной параметризации, и  $\Delta_n$  – произвольное разбиение отрезка  $[0, T]$ . Каждому разбиению  $\Delta_n$  поставим в соответствие кривую  $\gamma(\Gamma, \Delta_n, t)$ , определенную на каждом промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  по алгоритму, приведенному выше.

Кривую  $\gamma(\Gamma, \Delta_n, t)$  будем называть  $\varepsilon$ -допустимым решением для кривой  $\Gamma$ , если

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) \leq \varepsilon,$$

$\varepsilon$ -допустимое решение с минимальным числом звеньев (половиной числа дуг окружностей) (обозначим число звеньев через  $n_0(\varepsilon)$ ) будем называть  $\varepsilon$ -оптимальным решением задачи.

Последовательность  $\varepsilon$ -допустимых решений  $\{\gamma(\Gamma, \Delta_n^*)\}_{n=1}^\infty$  будем называть асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma$ , если при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выполняется асимптотическое равенство

$$n_*(\varepsilon) = n_0(\varepsilon) (1 + o(1)).$$

Следующее утверждение служит базой для построения алгоритма определения последовательности гладких кусочно – окружностных линий с асимптотически оптимальным числом звеньев, восстанавливающих исходную кривую  $\Gamma(t)$  с заданной точностью.

**Теорема 3.14.1** Пусть кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ), заданная в естественной параметризации, такова, что  $x, y \in C^4_{[0, T]}$  и числа  $M > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1/4)$  Если последовательность  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$  кусочно – непрерывных на отрезке  $[0, T]$  функций такова, что

$$\|\Phi_n - \Phi\|_\infty \leq \frac{M}{n^\alpha} \quad (M \equiv \text{const}),$$

здесь, как и ранее

$$\Phi(t) = |x'''(t)y'(t) - y'''(t)x'(t)|^{1/3},$$

а последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$  определена равенствами

$$\int_0^{t_{i,n}^*} (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt = \frac{i}{n} \int_0^T (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

то последовательность  $\gamma(\Gamma, \Delta_n^*)$  будет асимптотически оптимальной и при этом будет выполняться асимптотическое равенство

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n^*)) = \inf_{\Delta_n} \mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) (1 + o(1)) =$$

$$= \frac{8}{81n^3} \left( \int_0^T \Phi(t) dt \right)^3 + o(n^{-3}).$$

Двойственным к этому будет следующее утверждение

**Теорема 3.14.2** Пусть  $\varepsilon \rightarrow 0$ , выполнены условия теоремы 3.14.1,

$$n_* = \left[ \frac{2}{4^{4/3}(\varepsilon)^{1/3}} \int_0^T \Phi(t) dt \right] + 1,$$

а последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$  определена равенствами

$$\int_0^{t_{i,n_*}^*} (\Phi_n(t) + n_*^{-\alpha}) dt = \frac{i}{n_*} \int_0^T (\Phi_n(t) + n_*^{-\alpha}) dt$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_*).$$

Тогда последовательность  $\gamma(\Gamma, \Delta_n^*)$  будет асимптотически оптимальной для кривой  $\Gamma(t)$ .

**Доказательство** этих утверждений проводится по схеме, неоднократно изложенной в предыдущих параграфах этой главы. Необходимо лишь доказать, что для любой последовательности разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  такой, что  $h_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $t \in [t_i, t_{i+1/2}]$  выполняется асимптотическое равенство

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n), t) = \frac{h_{i+1/2}^3}{3} |F_i| \tau(\tau + 1)^2 + O(h_{i+1/2}^4),$$

где  $\tau = (t - t_i)/(2h_{i+1/2})$ , а  $F(t) = y'''(t)x'(t) - x'''(t)y'(t)$ .

Это равенство нетрудно получить с помощью рассуждений, подобных тем, которые были приведены в предыдущих параграфах.

### 3.15 Оптимальное восстановление плоских кривых сплайнами Безье

Хороший вкус позволяет оценить даже плохое.  
Ю. Скрыльев

Одним из наиболее распространенных методов описания гладких контуров в задачах инженерной геометрии являются функции Безье. Как правило, при этом используются квадратичные функции Безье, если между начальной и конечной точками интерполяции есть одна промежуточная точка, и кубические, если промежуточных точек две.

Если же точек больше, то для использования функций Безье, сводят задачу к двум предыдущим случаям.

Широкое использование функций Безье обусловлено конструктивным удобством их построения. С другой стороны, тот факт, что промежуточные точки лежат относительно далеко от линии Безье, часто не позволяет использовать этот аппарат достаточно точного восстановления контуров.

В данном параграфе предложен алгоритм построения параболической функции Безье наименее отклоняющейся (асимптотически) от аппроксимируемой кривой в хаусдорфовой (визуальной) метрике.

Пусть  $\Gamma(t)$  – гладкая плоская кривая, заданная в естественной параметризации  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, T]$ , т.е. в качестве параметра  $t$  используется длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки, что соответствует выполнению условия

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \equiv 1 \quad (t \in [0, T]).$$

Пусть

$$\Delta_{2n+1} = \{0 = t_{1,2n+1} < t_{2,2n+1} < \dots < t_{2n+1,2n+1} = T\}$$

– произвольное разбиение промежутка изменения параметра,

$$h_{i+1/2,2n+1} = t_{i+1,2n+1} - t_{i,2n+1} \quad (i = 0, 1, \dots, 2n)$$

и

$$x_{i,2n+1} = x(t_{i,2n+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, 2n+1),$$

$$y_{i,2n+1} = y(t_{i,2n+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, 2n+1).$$

Для  $t \in (t_{2i-1,2n+1}, t_{2i+1,2n+1})$  параболическая параметрически заданная функция Безье будет иметь вид (см. параграф 2.6)

$$B\Gamma(t) = (Bx(t), By(t)),$$

где

$$Bx(t) = (1 - \tau)^2 x_{2i-1,2n+1} + 2\tau(1 - \tau)x_{2i,2n+1} + \tau^2 x_{2i+1,2n+1},$$

$$By(t) = (1 - \tau)^2 y_{2i-1,2n+1} + 2\tau(1 - \tau)y_{2i,2n+1} + \tau^2 y_{2i+1,2n+1}$$

и

$$\tau = \frac{t - t_{2i-1,2n+1}}{h_{2i-1/2,2n+1} + h_{2i+1/2,2n+1}}.$$

Рассмотрим множество значений

$$\tilde{x}_{2i,2n+1} = x_{2i,2n+1} - \frac{1}{2}\Delta^2 x_{2i,2n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\Delta^2 x_{2i,2n+1} = x_{2i+1,2n+1} - 2x_{2i,2n+1} + x_{2i-1,2n+1},$$

и

$$\tilde{y}_{2i,2n+1} = y_{2i,2n+1} - \frac{1}{2}\Delta^2 y_{2i,2n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\Delta^2 y_{2i,2n+1} = y_{2i+1,2n+1} - 2y_{2i,2n+1} + y_{2i-1,2n+1}.$$

Обозначим

$$B\tilde{\Gamma}(t) = (Bx(t), By(t)),$$

где

$$\begin{aligned} B\tilde{x}(t) &= (1 - \tau)^2 x_{2i-1,2n+1} + 2\tau(1 - \tau)\tilde{x}_{2i,2n+1} + & (3.126) \\ &+ \tau^2 x_{2i+1,2n+1} = (1 - \tau)^2 x_{2i-1,2n+1} + \\ &2\tau(1 - \tau) \left( x_{2i,2n+1} - \frac{1}{2}\Delta^2 x_{2i,2n+1} \right) + \tau^2 x_{2i+1,2n+1}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} B\tilde{y}(t) &= (1 - \tau)^2 y_{2i-1,2n+1} + 2\tau(1 - \tau)\tilde{y}_{2i,2n+1} + & (3.127) \\ &+ \tau^2 y_{2i+1,2n+1} = (1 - \tau)^2 y_{2i-1,2n+1} + \\ &+ 2\tau(1 - \tau) \left( y_{2i,2n+1} - \frac{1}{2}\Delta^2 y_{2i,2n+1} \right) + \tau^2 y_{2i+1,2n+1}. \end{aligned}$$

Как и ранее, разбиение  $\Delta_{2n+1}^0$  будем называть оптимальным, если

$$\mathcal{R}(\Gamma, B\tilde{\Gamma}(\Delta_n^0)) = \inf_{\Delta_n} \mathcal{R}(\Gamma, B\tilde{\Gamma}(\Delta_n)).$$

Последовательность разбиений  $\{\Delta_{2n+1}^*\}_{n=1}^\infty$  будем называть асимптотически оптимальной, если при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{R}(\Gamma, B\tilde{\Gamma}(\Delta_{2n+1}^*)) = \inf_{\Delta_n} \mathcal{R}(\Gamma, B\tilde{\Gamma}(\Delta_{2n+1})) (1 + o(1))$$

Введем в рассмотрение функции

$$F(t) = x'(t)y'''(t) - x'''(t)y'(t),$$

и

$$\Phi(t) = |F(t)|^{1/3}.$$

Пусть  $\{\Phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  – произвольная последовательность функций таких, что

$$\|\Phi - \Phi_n\|_{\infty} \leq n^{-\alpha},$$

где  $\alpha \in (0, 1/4)$ .

**Теорема 3.15.1** Пусть параметрическая кривая  $\mathbf{\Gamma}(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) такова, что  $x, y \in C_{[0, T]}^4$ , число  $\alpha \in (0, 1/4)$  и последовательность разбиений  $\{\Delta_{2n+1}^*\}_{n=1}^{\infty}$  определяется из равенств

$$t_{2i+1, 2n+1}^* = \theta_{i, n}, \quad t_{2i, 2n+1}^* = (\theta_{i+1, n} + \theta_{i, n})/2, \quad (3.128)$$

где точки  $\theta_{i, n}$  однозначно определяются из условий

$$\int_0^{\theta_{i, n}} (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt = \frac{i}{n} \int_0^T (\Phi_n(t) + n^{-\alpha}) dt \quad (3.129)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n).$$

Тогда последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$  будет асимптотически оптимальной и при  $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}, B\tilde{\Gamma}(\Delta_{2n+1}^*)) = \frac{1}{9\sqrt{3}n^3} \left( \int_0^T \Phi(t) dt \right)^3 + o(n^{-3}).$$

Рассмотрим обратную задачу, когда по имеющейся погрешности описания кривой необходимо построить аппроксимативный аппарат с минимальным числом узлов.

Пусть  $\varepsilon$  – заданная ошибка описания контура. Линию Безье  $B\tilde{\Gamma}(t)$  назовем  $\varepsilon$ -допустимой для кривой  $\mathbf{\Gamma}(t)$ , если

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Gamma}, B\tilde{\Gamma}) \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon$ -допустимую кривую  $B\tilde{\Gamma}(\Delta_{2n_0+1}^0, t)$  назовем  $\varepsilon$ -оптимальной, если для всех  $\varepsilon$ -допустимых кривых  $B\tilde{\Gamma}(\Delta_n, t)$  будет выполняться неравенство

$$n_0 \leq n.$$

Последовательность  $\varepsilon$ -допустимых кривых  $\{B\tilde{\Gamma}(\Delta_{2n_*+1}^*, t)\}_{n=1}^{\infty}$  назовем асимптотически  $\varepsilon$ -оптимальной, если

$$n_* = n_0(1 + o(1)).$$

**Теорема 3.15.2** Пусть параметрическая кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) такова, что  $x, y \in C_{[0, T]}^4$ , и число  $n_*$  определяется равенством

$$n_* = \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{9\sqrt{3}\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt \right] + 1,$$

(здесь  $[a]$  – целая часть числа  $a$ ). Кроме того пусть последовательность разбиений  $\{\Delta_{2n_*+1}^*\}_{n=1}^\infty$  определяется из равенств (3.129).

Тогда последовательность  $\{B\tilde{\Gamma}(\Delta_{2n_*+1}^*, t)\}_{n=1}^\infty$  будет асимптотически  $\varepsilon$ -оптимальной.

В вопросах связанных с приближением гладких кривых, часто важно знать насколько гладким является аппарат восстановления кривой.

**Теорема 3.15.3** Пусть задана в параметрической форме кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [0, T]$ ) такая, что  $x, y \in C_{[0, T]}^4$ , последовательность разбиений  $\{\Delta_{2n_*+1}^*\}_{n=1}^\infty$  определяется из равенств (3.129). Тогда максимальное значение степени негладкости кривой Безье будет следующим

$$\max_t \alpha(B\tilde{\Gamma}(\Delta_{2n_*+1}^*), t) = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Если же кривая  $\Gamma$  такова, что  $F(t) > 0$  при всех  $t \in [0, T]$ , и последовательность разбиений  $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$  определяется из равенств

$$t_{2i+1, 2n+1}^* = \theta_{i, n}^*, \quad t_{2i, 2n+1}^* = (\theta_{i+1, n}^* + \theta_{i, n}^*)/2,$$

где точки  $\theta_{i, n}^*$  однозначно определены условиями

$$\int_0^{\theta_{i, n}^*} \Phi(t) dt = \frac{i}{n} \int_0^T \Phi(t) dt \quad (3.130)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n).$$

Тогда

$$\alpha(B\tilde{\Gamma}(\Delta_n^*), t_{2i+1, 2n+1}^*) = \frac{A_{2i+1, n}}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

где

$$A_{2i+1, n} = \mathcal{A}^3 \left( \frac{F'_{2i+1, 2n+1}}{36} + \frac{\phi_{2i+1, 2n+1}}{16F_{2i+1, 2n+1}} \right),$$

где

$$\mathcal{A} = \int_0^T \Phi(t) dt,$$

$$\phi(t) = x^{(4)}(t)y'(t) - y^{(4)}(t)x'(t).$$

**Доказательство** теоремы 3.15.1. Используя формулу Тейлора для функции  $x(t)$  в окрестности точки  $x_{2i,2n+1}$ , получаем

$$\begin{aligned}
B\tilde{x}(t) &= (1-\tau)^2 x_{2i-1,2n+1} + 2\tau(1-\tau)\tilde{x}_{2i,2n+1} + \tau^2 x_{2i+1,2n+1} = \\
&= (1-\tau)^2 x_{2i-1,2n+1} + 2\tau(1-\tau) \left( x_{2i,2n+1} - \frac{1}{2}\Delta^2 x_{2i,2n+1} \right) + \tau^2 x_{2i+1,2n+1} = \\
&= x_{2i,2n+1} + x'_{2i,2n+1} (-(1-\tau)^2 h_{2i-1/2,2n+1} - \tau(1-\tau)(h_{2i+1/2,2n+1} - \\
&\quad - h_{2i-1/2,2n+1}) + \tau^2 h_{2i+1/2,2n+1}) + \frac{1}{2} x''_{2i,2n+1} ((1-\tau)^2 h_{2i-1/2,2n+1}^2 - \\
&\quad - \tau(1-\tau)(h_{2i+1/2,2n+1}^2 + h_{2i-1/2,2n+1}^2) + \tau^2 h_{2i+1/2,2n+1}^2) + \\
&\quad + \frac{1}{3!} x'''_{2i,2n+1} (-(1-\tau)^2 h_{2i-1/2,2n+1}^3 - \tau(1-\tau)(h_{2i+1/2,2n+1}^3 - \\
&\quad - h_{2i-1/2,2n+1}^3) + \tau^2 h_{2i+1/2,2n+1}^3) + O((h_{2i+1/2,2n+1} + h_{2i-1/2,2n+1})^4).
\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что для  $t \in (t_{2i-1,2n+1}, t_{2i+1,2n+1})$

$$\begin{aligned}
x(t) - B\tilde{x}(t) &= \frac{3}{2} x'_{2i,2n+1} \tau(\tau-1)(h_{2i+1/2,2n+1} - h_{2i-1/2,2n+1}) - \\
&\quad - \frac{1}{2} x''_{2i,2n+1} \tau(1-\tau)(h_{2i+1/2,2n+1} - h_{2i-1/2,2n+1})^2 + \frac{1}{6} x'''_{2i,2n+1} \tau(1- \\
&\quad - \tau)(\tau(h_{2i+1/2,2n+1} + h_{2i-1/2,2n+1})^3 - (3h_{2i+1/2,2n+1} h_{2i-1/2,2n+1}^2 - \\
&\quad - h_{2i+1/2,2n+1}^3)) + O((h_{2i+1/2,2n+1} + h_{2i-1/2,2n+1})^4).
\end{aligned}$$

Если  $h_{2i-1/2,2n+1} = h_{2i+1/2,2n+1} := h_{i,n}$  (и в дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие разбиения), то первые слагаемые в правой части последнего соотношения обращаются в ноль, и при этом условии погрешность будет иметь вид

$$x(t) - B\tilde{x}(t) = \frac{4}{3} x'''_{2i,2n+1} \tau(1-\tau)(\tau-1/2) h_{i,n}^3 + O(h_{i,n}^4).$$

Так как

$$x(t) - x(\zeta) = x'(t)\xi + \frac{x''(t)}{2}\xi^2 + \frac{x'''(t)}{6}\xi^3 + O(\xi^4),$$

где  $\xi = t - \zeta$ , то равномерно по  $i$  выполняется асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} x(\zeta) - B\tilde{x}(t) &= x(t) - B\tilde{x}(t) + x(\zeta) - x(t) = \\ &= \frac{4}{3}x'''_{2i,2n+1}\tau(1-\tau)(\tau-1/2)h_{i,n}^3 - x'(t)\xi - \frac{x''(t)}{2}\xi^2 - \frac{x'''(t)}{6}\xi^3 + O(\xi^4 + h_{i,n}^4). \end{aligned}$$

Кроме того, для  $t \in (t_{2i-1,2n+1}, t_{2i+1,2n+1})$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Gamma, B\tilde{\Gamma}) &\leq \\ &\leq \sqrt{\|x(t) - B\tilde{x}(t)\|_{C[t_{2i-1,2n+1}, t_{2i+1,2n+1}]}^2 + \|y(t) - B\tilde{y}(t)\|_{C[t_{2i-1,2n+1}, t_{2i+1,2n+1}]}^2} = \\ &= O(h_{i,n}^3) \end{aligned}$$

равномерно по  $i$ . Поэтому, при определении хаусдорфового расстояния достаточно рассматривать лишь такие  $\xi$ , при которых равномерно по  $i$  будет выполняться условие  $\xi = O(h_{i,n}^3)$ . В этом случае будет

$$x(\zeta) - B\tilde{x}(t) = \frac{4}{3}x'''_{2i,2n+1}\tau(1-\tau)(\tau-1/2)h_{i,n}^3 - x'(t)\xi + O(h_{i,n}^4),$$

а также

$$y(\zeta) - B\tilde{y}(t) = \frac{4}{3}y'''_{2i,2n+1}\tau(1-\tau)(\tau-1/2)h_{i,n}^3 - y'(t)\xi + O(h_{i,n}^4).$$

Пусть

$$|\Gamma(\zeta) - B\tilde{\Gamma}(\Delta_n, t)|^2 = (x(\zeta) - B\tilde{x}(t))^2 + (y(\zeta) - B\tilde{y}(t))^2.$$

Тогда, если  $\max h_{i+1/2,n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то при достаточно больших  $n$  будет выполняться соотношение

$$\begin{aligned} &\max_{\zeta} \min_t |\Gamma(\zeta) - B\tilde{\Gamma}(\Delta_n, t)|^2 = \\ &= \max_i \max_{0 < \tau < 1} \left( \left( \frac{4}{3}F_{2i,2n+1}\tau(1-\tau)(\tau-1/2)h_{i,n}^3 \right)^2 + O(h_{i,n}^7) \right) = \\ &= \max_i \left( \left( \frac{1}{9\sqrt{3}}F_{2i,2n+1}h_{i,n}^3 \right)^2 + O(h_{i,n}^7) \right). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\max_t \min_{\zeta} |\Gamma(\zeta) - B\tilde{\Gamma}(\Delta_n, t)|^2 = \max_i \left( \left( \frac{1}{9\sqrt{3}} F_{2i,2n+1} h_{i,n}^3 \right)^2 + O(h_{i,n}^7) \right).$$

Таким образом, если  $\max h_{i+1/2,n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то при достаточно больших  $n$  равномерно по  $i$  будет выполняться соотношение

$$\mathcal{R}^2(\Gamma, B\tilde{\Gamma}(\Delta_n)) = \max_i \left( \left( \frac{1}{9\sqrt{3}} F_{2i,2n+1} h_{i,n}^3 \right)^2 + O(h_{i,n}^7) \right).$$

Отсюда, из теоремы 3.2.1 и следствия 3.2.3 немедленно следует требуемое утверждение.

Утверждение теоремы 3.15.2 легко получить из теоремы 3.15.1.

**Доказательство** теоремы 3.15.3. Из приведенных ранее соотношений легко вывести следующее асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} B\tilde{x}(t) &= x_{2i,2n+1} + x'_{2i,2n+1} h_{i+1/2,2n+1} (2\tau - 1) + \frac{1}{2} x''_{2i,2n+1} h_{i,n}^2 (2\tau - 1)^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} x'''_{2i,2n+1} h_{i,n}^3 (2\tau - 1) + \frac{1}{4!} x_{2i,2n+1}^{(4)} h_{i,n}^4 (2\tau - 1)^2 + O(h_{i,n}^5). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} B'\tilde{x}(t) &= x'_{2i,2n+1} + x''_{2i,2n+1} h_{i+1/2,n} (2\tau - 1) + \frac{1}{3!} x'''_{2i,2n+1} h_{i,n}^2 + \\ &+ \frac{1}{12} x_{2i,2n+1}^{(4)} h_{i,n}^3 (2\tau - 1) + O(h_{i,n}^4). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$B'\tilde{x}_{2i+1,2n+1} = x'_{2i+1,2n+1} - \frac{1}{3} x'''_{2i+1,2n+1} h_{i,n}^2 + \frac{1}{4} x_{2i+1,2n+1}^{(4)} h_{i,n}^3 + O(h_{i,n}^4)$$

и

$$B'\tilde{x}_{2i+1,2n+1} = x'_{2i+1,2n+1} - \frac{1}{3} x'''_{2i+1,2n+1} h_{i+1,n}^2 - \frac{1}{4} x_{2i+1,2n+1}^{(4)} h_{i+1,n}^3 + O(h_{i+1,n}^4),$$

а также аналогичные соотношения для  $B'\tilde{y}_{2i+1,2n+1}$ .

Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} &\sin \alpha(B\tilde{\Gamma}(\Delta_n), t_{2i+1,2n+1}) = \\ &= \left( \frac{1}{3} (x'''_{2i+1,2n+1} y'_{2i+1,2n+1} - x'_{2i+1,2n+1} y'''_{2i+1,2n+1}) (h_{i+1,n}^2 - h_{i,n}^2) + \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}(x_{2i+1,2n+1}^{(4)}y'_{2i+1,2n+1} - x'_{2i+1,2n+1}y_{2i+1,2n+1}^{(4)})(h_{i+1,n}^3 + h_{i,n}^3) + \\ + O((h_{i+1,n} + h_{i+1/2,n})^4).$$

Учитывая выбор узлов, указанный в условии теоремы 3.15.3, получаем

$$h_{i,n}^* = \frac{\mathcal{A}}{2n(F_{2i+1,2n+1})^{1/3}} + \frac{F'_{2i+1,2n+1}\mathcal{A}^2}{24n^2(F_{2i+1,2n+1})^{2/3}} + O(n^{-3})$$

и

$$h_{i+1,n}^* = \frac{\mathcal{A}}{2n(F_{2i+1,2n+1})^{1/3}} - \frac{F'_{2i+1,2n+1}\mathcal{A}^2}{24n^2(F_{2i+1,2n+1})^{2/3}} + O(n^{-3}).$$

Отсюда и из предыдущего вытекает, что для всех  $i$

$$\sin \alpha(B\tilde{\Gamma}(\Delta_n^*), t_{2i+1,2n+1}) = \frac{\mathcal{A}^3}{n^3} \left( \frac{F'_{2i+1,2n+1}}{36} + \frac{\phi_{2i+1,2n+1}}{16F_{2i+1,2n+1}} \right),$$

что и завершает доказательство теоремы 3.15.3.

Приведем один алгоритм, реализующий полученный результат. Будем считать, что кривая задана набором точек, достаточно точно описывающих данный контур. Это может быть набор значений, снятых копиром, сканером и пр. (сглаженных тем или иным методом) или набор, полученный пополнением с помощью аппроксимирующей линии по известным опорным точкам (например, сплайнов).

Итак, пусть известны точки гладкой кривой

$$M_{i,N} = (x_{i,N}, y_{i,N}) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

и величина погрешности (допуска)  $\varepsilon$ .

Вычислим величины

$$l_{i+1/2,N} = \sqrt{(x_{i+1,N} - x_{i,N})^2 + (y_{i+1,N} - y_{i,N})^2} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

и

$$\sigma_{i,N} = \sum_{\nu=1}^i l_{\nu+1/2,N}, \quad (i = 1, 2, \dots, N-1).$$

Дискретными аналогами производных  $x'_{i,N}$  и  $y'_{i,N}$  будут выступать раз-  
деленные разности

$$\Delta x_{i+1/2,N} = \frac{x_{i+1,N} - x_{i,N}}{l_{i+1/2,N}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1)$$

и

$$\Delta y_{i+1/2,N} = \frac{y_{i+1,N} - y_{i,N}}{l_{i+1/2,N}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1).$$

Соответственно, вместо вторых производных  $x''_{i,N}$  и  $y''_{i,N}$  будут выступать вторые разделенные разности

$$\Delta^2 x_{i,N} = \frac{\Delta x_{i+1/2,N} - \Delta x_{i-1/2,N}}{l_{i+1/2,N} + l_{i-1/2,N}} \quad (i = 2, \dots, N-1)$$

и

$$\Delta^2 y_{i,N} = \frac{\Delta y_{i+1/2,N} - \Delta y_{i-1/2,N}}{l_{i+1/2,N} + l_{i-1/2,N}} \quad (i = 2, \dots, N-1).$$

А также вместо третьих производных –

$$\Delta^3 x_{i+1/2,N} = \frac{\Delta^2 x_{i+1,N} - \Delta^2 x_{i,N}}{l_{i+3/2} + l_{i+1/2,N} + l_{i-1/2,n}} \quad (i = 2, \dots, N-2)$$

и

$$\Delta^3 y_{i+1/2,N} = \frac{\Delta^2 y_{i+1,N} - \Delta^2 y_{i,N}}{l_{i+3/2} + l_{i+1/2,N} + l_{i-1/2,n}} \quad (i = 2, \dots, N-2).$$

Вычислим числа

$$F_{i+1/2,N} = \Delta x_{i+1/2,N} \Delta^3 y_{i+1/2,N} - \Delta^3 x_{i+1/2,N} \Delta y_{i+1/2,N} \\ (i = 1, \dots, N-1),$$

здесь

$$F_{1/2} = F_{3/2}, \quad F_{N-1/2} = F_{N-3/2}.$$

Вычислим, теперь, дискретный аналог первообразной

$$\Psi(t) = \int_0^t \Phi(t) dt.$$

Это будет набор чисел

$$\Psi_{i,N} = \sum_{\nu=1}^i (|F_{\nu+1/2}|^{1/3} + N^{-1}) l_{\nu+1/2} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$\Psi_0 = 0.$$

Далее, вычислим число узлов асимптотически оптимального алгоритма

$$n = \left\lceil \frac{6}{\sqrt[3]{9\sqrt{3}\varepsilon}} \Psi_{N-1} \right\rceil + 1$$

и определим узлы асимптотически оптимального разбиения  $t_{i,n}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ ) согласно алгоритму, указанному в теореме 3.15.1

$$t_{j,n} = (j-1)\Psi_{N-1}/(2n+1) - \Psi_{k-1}/\Psi_k + (k-2)\sigma_{N-1}/N$$

при

$$\frac{i\sigma_{N-1}}{N} \leq t_{j,n} \leq \frac{(i+1)\sigma_{N-1}}{N}$$

и

$$\Psi_k < (j-1)\Psi_N/(2n+1) \quad (k = 2, 3, \dots, i \leq 2n+1).$$

Остается вычислить дискретные аналоги

$$(x(t_{j,n}), y(t_{j,n})) \quad (j = 1, \dots, 2n+1)$$

для  $t_{j,n} \in (\sigma_{i,n}, \sigma_{i+1,n})$ . В качестве эти точек можно взять значения парабол, проходящих через точки  $x_{i-1,N}, x_{i,N}, x_{i+1,N}$  и  $y_{i-1,N}, y_{i,N}, y_{i+1,N}$ , соответственно.

Функцию Безье с требуемыми свойствами построим по полученной информации используя формулы (3.126) – (3.127).

# Литература

- [1] *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М. Мир, 1972, 320 с.
- [2] *Базров Б.М.* Расчет точности машин на ЭВМ. Москва, Машиностроение, 1984, 256 с.
- [3] *Карл де Бор* Практическое руководство по сплайнам. М., Радио и связь, 1985, 303 с.
- [4] *Василенко В.А.* Сплайн функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск, Наука, 1983, 214 с.
- [5] *Вершинин В.В., Завьялов Ю.С., Павлов Н.Н.* Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск, Наука, 1988, 102 с.
- [6] *Гребенников А.И.* Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. Издательство Московского университета, 1983, 208 с.
- [7] *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. Москва, Наука, 1980, 350 с.
- [8] *Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скорospelов В.А.* Сплайны в инженерной геометрии. Москва, Наука, 1985, 224 с.
- [9] *Константинов М.Т.* Расчет программ фрезерования на станках с ЧПУ. Москва, Машиностроение, 1985, 165 с.
- [10] *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. М., Наука, 1984, 452 с.
- [11] *Косилова А.Г.* Точность обработки деталей на автоматических линиях. Москва, Машиностроение, 1976, 224 с.

- [12] Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М., Наука, 1986, 230 с.
- [13] Михайленко В.Е., Кислюцкий В.Н., Лященко А.А., Сазонов К.А., Цурин О.Ф. Геометрическое моделирование и машинная графика в САПР. Киев, Вища школа, 1991, 374 с.
- [14] Писаревский А.Н., Чернявский А.Ф. Системы технического зрения. Ленинград, Машиностроение, 1988, 424 с.
- [15] Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. Киев, Наукова думка, 1980, 350 с.
- [16] Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. Киев, Наукова думка, 1989, 270 с.
- [17] Рубашкин И.Б., Алешин А.А. Микропроцессорное управление режимом металлообработки. Ленинград, Машиностроение, 1989, 160 с.
- [18] Сафраган Р.Э., Евгеньев Г.Б. и др. Автоматизированная подготовка программ для станков с ЧПУ. Справочник. Киев, Техніка, 1986, 191 с.
- [19] Сендов Б.Х. Хаусдорфовы приближения.- София, 1979.
- [20] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., Наука, 1976, 248 с.
- [21] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. Издательство Московского университета, 1976, 304 с.
- [22] Фёрстер Э., Рёниц Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа. М., Финансы и кредит, 1983, 302 с.
- [23] Шенен П., Коснар М. и др. Математика и САПР. 1,2 т. Москва, Мир, 1988, 203 с.
- [24] Библиотека программ LIDA-3 по аппроксимации функций и цифровой фильтрации сигналов и изображений. Часть 2. Фильтрация. Новосибирск, 1987, 150 с.
- [25] Farin, G. Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A Practical Guide. Academic Press, 1990, 444 pp.

- [26] *Powell M.J.D.* Approximation theory and methods. Cambridge University Press, 1981, 339 p.
- [27] *Larry L. Schumaker* Spline functions: Basic theory. N.Y., John Wiley & Sons, Inc, 1981, 556 p.
- [28] *Азарин И.С., Бармин В.И.* Аппроксимация кусочно – линейными функциями. В кн.: Матем. сборник, Киев, 1976, с. 25–26.
- [29] *Базров Б.М., Вашкевич С.Н.* Решение задач интерполяции в системах ЧПУ. Станки и инструмент, 1981, N 6, с. 16 – 17.
- [30] *Вашкевич С.Н.* Алгоритмы для решения задач формообразования в микропроцессорных системах ЧПУ. Станки и инструмент, 1981, N 11, с. 29 – 30.
- [31] *Гребенников А.И.* О выборе узлов при аппроксимации функций сплайнами. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1976, 16, N 1, с. 219 – 223.
- [32] *Кармазина В.В.* Восстановление функции плотности и функции распределения сплайнами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук. Днепродзержинск, 1994.
- [33] *Коротков В.С., Завацкий В.Л., Лигун А.А., Шумейко А.А., Москаленко В.И.* Устройство для измерения диаметра цилиндрической детали. Авторское свидетельство N 1712768 от 15 октября 1991 г.
- [34] *Лигун А.А.* Приближение дифференцируемых периодических функций локальными сплайнами минимального дефекта. Украинский математический журнал, 1981, т.33, N 5, с. 691 – 693.
- [35] *Лигун А.А., Сторчай В.Ф.* О наилучшем выборе узлов при приближении сплайнами в метрике  $L_p$ . Матем. заметки, 1976, 20, N4, с. 611 – 618.
- [36] *Лигун А.А., Сторчай В.Ф.* О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами. Anal. math., 1976, 2, с. 267 – 275.
- [37] *Лигун А.А., Сторчай В.Ф.* О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами. Украинский математический журнал, 1980, т.32, N 6, с. 824 – 830.

- [38] *Лигун А.А., Сторчай В.Ф., Шумейко А.А.* Приближение функций с помощью сплайнов. Методичні вказівки до спецкурсу. Днепропетровск, ДГУ, 1984, 56 с.
- [39] *А.А.Лигун, А.А.Шумейко* Об оптимальном выборе узлов при приближении функций интерполяционными сплайнами. Журнал вычислительной математики и математической физики. Том 24, №9, 1984, с. 1283 – 1293.
- [40] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами.- Докл. АН УССР, сер.А, N 6, 1984, с. 18 – 22.
- [41] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* О выборе узлов при приближении функций сплайнами наилучшего приближения. В кн.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск, ДГУ, 1985, с. 31 – 39.
- [42] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Об одном свойстве сплайнов с асимптотически оптимальными узлами. Вопросы оптимальной аппроксимации функций и суммирования рядов, ДГУ, 1988, с. 41 – 48.
- [43] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Идентификация замкнутых кривых. Моделирование в механике, Новосибирск, 1991, с. 70 – 76.
- [44] *Лигун А.А., Шумейко А.А.* О программировании обработки поверхностей шаровыми фрезами. В юбилейном научно-техническом сборнике трудов, Днепродзержинск, ДГТУ, 1995, с. 305 – 312.
- [45] *Лигун А.А., Шумейко А.А., Коротков В.С.* Асимптотически оптимальные алгоритмы кусочно – линейной аппроксимации в решениях траекторных задач программирования обработки резанием. Металлорежущие станки, Киев, N 17, 1989, 5 с.
- [46] *Лигун А.А., Шумейко А.А., Коротков В.С.* Об асимптотически оптимальных режимах обработки плоских кривых. Теория приближения функций и суммирования рядов. Днепропетровск, ДГУ, 1989. с. 45 – 52.
- [47] *Лигун А.А., Шумейко А.А., Коротков В.С., Завацкий В.Л.* Асимптотически оптимальный алгоритм аппроксимации криволинейных контуров ортогональными звеньями в решениях траекторных задач фрезерной обработки. Известия вузов. Машиностроение. N 11, 1989, с. 135 – 138.

- [48] *Лигун А.А., Шумейко А.А., Коротков В.С.* Асимптотически оптимальный алгоритм кусочно – линейной аппроксимации в решениях траекторных задач фрезерной обработки. Известия вузов. Машиностроение. N 7, 1989, с. 147 – 151.
- [49] *Лигун А.А., Шумейко А.А., Коротков В.С.* Об оптимальном формообразовании выпуклых поверхностей при обработке торцевой фрезой. В кн.: "Наука – производству Киев, 1991, с. 172 – 177.
- [50] *Лигун А.А., Шумейко А.А., Коротков В.С.* Идентификация сложных плоских контуров деталей в условиях автоматизированного производства. В кн.: "Наука – производству Киев, 1991, с. 306 – 311.
- [51] *Лигун А.А., Шумейко А.А., Коротков В.С., Мирошниченко А.И.* Контроль геометрических параметров обечаек. Машиностроитель, М.-1991, N 5, с. 12 – 13.
- [52] *Лигун А.А., Шумейко А.А., Коротков В.С.* О контроле качества сложных изображений. В юбилейном научно-техническом сборнике трудов, Днепродзержинск, ДГТУ, 1995, с. 312 – 318.
- [53] *Шумейко А.А.* О выборе узлов для интерполяционных параболических сплайнов. Известия вузов. Математика, N 4, 1990, с. 67 – 71.
- [54] *Ligon A.A., Shumeiko A.A., Radzevitch S.P., Goodman E.D.* Asymptotically Optimal Disposition of Tangent Points for Approximation of Smooth Convex Surfaces by Polygonal Functions.- Computer Aided Geometric Design, USA, 14, 1997, p. 1-14.
- [55] *Ligon A.A., Shumeiko A.A., Radzevitch S.P., Goodman E.D.* Asymptotically Optimum Recovery of Smooth Contours by Bezier Curve.- Computer Aided Geometric Design, USA, 1998, 15, p. 495–506.
- [56] *Ahlberg, J.H., Nilson, E.N., Walsh, J.L.* Properties of analytic splines, I. complex polynomial splines, J. of Analysis an Appl.33, 1971, p. 234 – 257.
- [57] *Barry, P., Goldman, R.* De Casteljaeu-type subdivision in peculiar to Besier curves, Computer-Aided Design 20(3): 144 – 116,1988.
- [58] *Boehm, W.* Generating the Bezier points of B-Splines. Computer-Aided Design 13(6), 1981.

- [59] *Boehm, W., Farin, G.E., Kahman, J.* A survey of curve and surface methods, 1989, Computer-Aided Geometric Design, p. 1 – 60.
- [60] *Chiu Li Hu, Larry L. Schumaker* Complete Spline Smoothing. Numer. Math., 1986, v. 49, p. 1 – 10.
- [61] *Paolo Constantini* An algorithm of computing shape- preserving interpolating splines of arbitrary degree. Journal of Coputation and Applied Mathematics, 1988, p. 89 – 136.
- [62] *Kahmann, J.* Continuity of curvature between adjacent Besier patches. In R. Barnhill and W. Boehm, eds., Surfaces in Computer-Aided Geometric Design, pp.65-76. North-Holland, 1982.
- [63] *Thomas R. Lucas* Asymptotic expansions for interpolating periodic splines. SIAM J.Numer.Anal., 1982, v. 40, N 5, october, p. 1051 – 1066.
- [64] *Schoenberg, I.J.* Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A: On the problem of smoothing of graduation, a first class of analytic approximation formulae. Quart. Appl. Math., 1946, 4, p. 49 – 99.
- [65] *Schoenberg, I.J.* On polynomial spline functions on the circle I, II, in Proceedings of Conference on Constructive Theory of Functions, p. 403 – 433, Budapest, 1972.