УДК 629.7.016

Ю. К. Кисин

О применении алгоритмов на основе метода наименьших квадратов и конечных формул в задачах обработки траекторных измерений

Получена оценка среднеквадратических отклонений в задаче обработки траекторных измерений, когда оцениваемые параметры траектории определяются по конечным формулам по минимальному набору измеряемых параметров, при этом в явном виде нет функциональной связи данных параметров с вектором измерений. Для оценки среднеквадратических отклонений определения траектории по конечным формулам предложено осуществлять стохастическое моделирование. Получены конечные формулы для траекторных задач при угловых измерениях. Приведены результаты математического моделирования.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, конечные формулы, измеряемые и оцениваемые параметры, определение координат летательного аппарата, математическое моделирование.

Постановка задачи и общая схема ее решения

При использовании метода наименьших квадратов (МНК) в задачах навигации для определения параметров траектории летательных аппаратов и других подвижных объектов по результатам измерений итерационно решается соответствующая система нормальных уравнений.

Оценка среднеквадратических отклонений параметров траектории подвижных объектов проводится автоматически при обращении матрицы системы нормальных уравнений.

Определение опытной траектории МНК по измерениям осуществляется в соответствии с данными [1–5] по формуле:

$$\widehat{\mathbf{X}}_{(k+1)} = \widehat{\mathbf{X}}_{(k)} + \Delta\mathbf{X}_{(k+1)};$$

$$\Delta\mathbf{X}_{(k+1)} = (\mathbf{Z}^T_{(k)}\mathbf{W}\mathbf{Z}_{(k)})^{-1}\mathbf{Z}^T_{(k)}\mathbf{W}[\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{\text{рас}}(\widehat{\mathbf{X}}_{(k)})], \quad (1)$$

где $\widehat{\mathbf{X}}_{(k+1)}$, $\widehat{\mathbf{X}}_{(k)}$ – оценки параметров опытной траектории подвижного объекта на $(k+1)$-й и k-й итерациях;

$\Delta\mathbf{X}_{(k+1)}$ – поправка к параметрам опытной траектории подвижного объекта на $(k+1)$-й итерации;

$\mathbf{Z}_{(k)}$ – матрица частных производных от измеряемых параметров по оцениваемым с k-й итерации;

$\mathbf{Y}$ – вектор измерений;

$\mathbf{Y}_{\text{рас}}(\widehat{\mathbf{X}}_{(k)})$ – расчетный вектор измеряемых параметров, вычисленный по оценке на k-й итерации;

$\mathbf{W}$ – обратная матрица к ковариационной матрице ошибок измерений.

Точность опытной траектории определяется ковариационной матрицей:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{Z}^T_{(k)}\mathbf{W}\mathbf{Z}_{(k)})^{-1}, \quad (2)$$

где k соответствует номеру последней итерации в формуле (1).

Пусть случайный вектор $\mathbf{X}$ размерности n функционально связан со случайным вектором $\mathbf{Y}$ размерности m:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}). \quad (3)$$

В соответствии с данными работы [1]:

$$\mathbf{K}_\mathbf{X} \approx \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{Y}}\right)\mathbf{K}_\mathbf{Y}\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{Y}}\right)^T, \quad (4)$$

где $\mathbf{K}_\mathbf{X}$, $\mathbf{K}_\mathbf{Y}$ – соответствующие ковариационные матрицы;

$\dfrac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{Y}}$ – матрица частных производных от оцениваемых параметров по измеряемым параметрам.

Формула (4) является точной в случае линейной зависимости.

В задачах при определении параметров траектории вектора $\mathbf{X}$ размерности n по результатам измерений вектора $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ размерности m, как отмечено выше, универсальным подходом является применение МНК в соответствии с книгами [1–5].

В траекторной задаче [1], в которой измеряются дальность, азимут и угол места:

$$x = d\cos\gamma\cos\alpha, \quad y = d\sin\gamma, \quad z = d\cos\gamma\sin\alpha,$$

где x, y, z – координаты ЛА;

d, α, γ – дальность, азимут и угол места соответственно, оценка точности определяемых параметров может быть выполнена по формуле (4).

В работах [1–3] приведены примеры, когда оцениваемые параметры определяются по конечным формулам по минимальному набору измеряемых параметров, при этом в явном виде нет функциональной связи вектора **X** с вектором измерений **Y** по формуле вида (3) и в данном случае оценка точности опытной траектории по формуле вида (4) невозможна. В качестве примера таких задач навигации можно привести определение координат объекта по конечным формулам по трем дальностям от трех маяков [1–3], по трем разностям дальностей от четырех маяков [2, 3], по направляющим косинусам измеренных с двух фазовых пеленгаторов [1].

Пусть вектор $\widehat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \dots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$ – оценка опытной траектории алгоритмом по конечным формулам по измерениям вектора **Y** размерности *m* (например, *n* = 3 и *m* = 3), если определяются три координаты траектории по трем разностям дальностей от четырех маяков в соответствии с работами [2, 3].

Для оценки точности (среднеквадратических отклонений) определения опытной траектории предлагается осуществлять стохастическое моделирование следующим образом.

Вычислить расчетный вектор измерений $\mathbf{Y}_{\text{рас}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_{1\text{рас}} \\ \dots \\ \hat{y}_{m\text{рас}} \end{pmatrix}$, соответствующий оценке опытной траектории **X**.

Смоделировать серии измерений

$$\mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \dots \\ y_{im} \end{pmatrix}; \quad y_{ij} = \hat{y}_{im\,\text{рас}} + \varepsilon_{ij}, \tag{5}$$

где *m* – размерность вектора измерений;

$i = 1, \dots, N_{ser}$, N_{ser} – количество моделируемых серий измерений;

ε_{ij} – помеха в *i*-испытании по *j*-координате.

Моделирование измерений осуществляется путем добавления к расчетным значениям измеряемых параметров случайных помех датчиком псевдослучайных чисел с нормальным законом распределения.

Для каждой серии измерений $\mathbf{Y}_i$ определить по алгоритму конечных формул (оператор А) соответствующую опытную траекторию $\mathbf{X}_i$:

$$\text{A} : \mathbf{Y}_i \rightarrow \mathbf{X}_i.$$

По сериям смоделированных опытных траекторий осуществить статистическую обработку для оценки средних квадратичных отклонений (СКО) координат траектории:

$$\hat{\sigma}_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{ser}} \left(x_{ij} - \hat{x}_j\right)^2 \Big/ \left(N_{ser} - 1\right)}, \tag{6}$$

где $\hat{\sigma}_j$ – оценка СКО *j*-й координаты траектории (*j* = 1, ..., *n*).

Алгоритм определения координат по минимальному набору измерений может быть осуществлен и на основе минимизации методом случайного поиска суммы квадратов отклонений измеренных значений от пробных расчетных значений.

На рис. 1 представлены способы оценки точности навигации по минимальному набору измерений, в том числе и по конечным формулам.

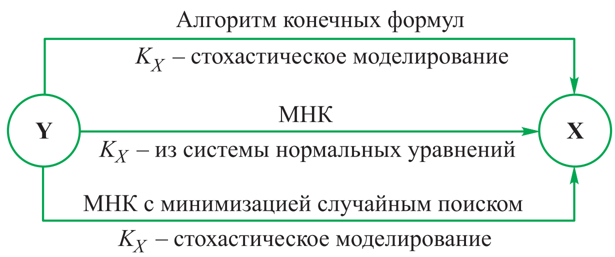

Рис. 1. Способы расчета точности определения траектории по минимальному набору измерений

Определение кинематических параметров траектории по угловым измерениям с двух измерительных средств

Рассмотрим задачу определения координат объекта по азимутам и углам места, измеренным с двух измерительных средств (ИС) $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2 \rightarrow x, y, z$. Данная задача эквивалентна задаче определения координат объекта для двух фазовых пеленгаторов, измеряющих направляющие косинусы, в соответствии с работой [1].

Связь измеряемых параметров направляющих косинусов $\cos\theta_x$, $\cos\theta_z$ с азимутом и углом места показана на рис. 2, определяем ее по формуле:

$$\cos\theta_x = \sin\gamma\cos\alpha,\quad \cos\theta_z = \sin\gamma\sin\alpha. \qquad (7)$$

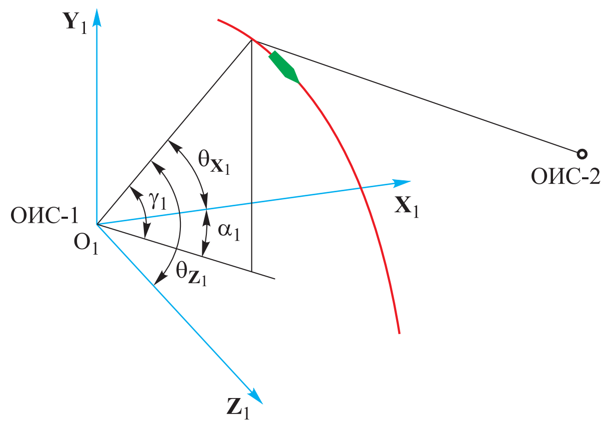

Рис. 2. Переход от азимута и угла места к измерениям в виде направляющих косинусов

Пусть имеются измерения двух пар направляющих косинусов $\cos\theta_{x_1}$, $\cos\theta_{z_1}$ и $\cos\theta_{x_2}$, $\cos\theta_{z_2}$.

Книга [1] содержит формулы определения координат объекта для двух фазовых пеленгаторов, измеряющих направляющие косинусы. Координаты ЛА в местной системе координат (МСК) первого ИС могут быть определены по формуле:

$$x_1 = D_1\cos\theta_{x_1},\quad y_1 = D_1\cos\theta_{y_1},\quad z_1 = D_1\cos\theta_{z_1}. \qquad (8)$$

Таким образом необходимо определить расстояние между ЛА и точкой стояния 1-го ИС D_1.

Способ решения задачи поясняет рис. 3 [1], на котором показаны углы δ, φ, Ψ, используемые в дальнейших расчетах.

Величина D_1 определяется следующим образом:

$$D_1 = \frac{b\sin\varphi}{\sin\psi}, \qquad (9)$$

где b – расстояние между двумя ИС;

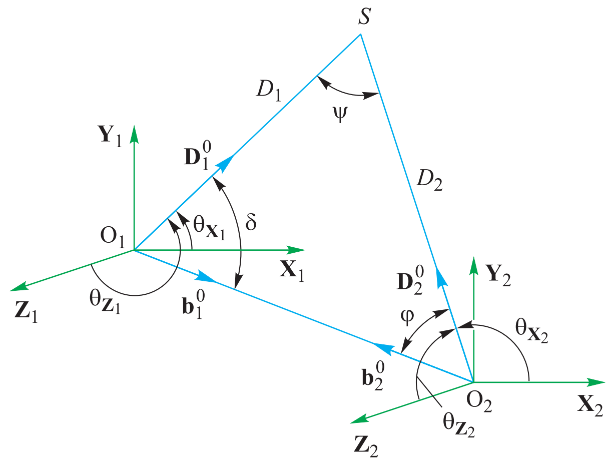

Рис. 3. Определение координат объекта на паре ИС

$\mathbf{b}_1^0$ – единичный вектор (показан на рис. 3 и вычисляется в соответствии с работой [1]):

$$\cos\delta = \mathbf{D}_1^0\mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{b}_1^0,\quad \cos\varphi = -\mathbf{D}_2^0\mathbf{\Phi}_2^T\mathbf{b}_1^0, \qquad (10)$$

где $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$ – матрицы направляющих косинусов связи МСК измерительных средств с гринвичской системой координат (ГСК);

$$\mathbf{D}_1^0 = \left(\cos\theta_{x_1}, \cos\theta_{y_1}, \cos\theta_{z_1}\right),$$

$$\mathbf{D}_2^0 = \left(\cos\theta_{x_2}, \cos\theta_{y_2}, \cos\theta_{z_2}\right);$$

$$\sin\delta = \sqrt{1-\cos^2\delta},\quad \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi},$$

$$\sin\psi = \sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi. \qquad (11)$$

На рис. 4 приведены СКО определения координаты x опытной траектории, полученной при обработке измерений МНК и по конечным формулам.

Данные рис. 4 показывают хорошее согласование двух способов оценки точности (СКО) на основе МНК и стохастического моделирования в задаче определения траектории по направляющим косинусам, измеренным с двух фазовых пеленгаторов.

Представляют математический интерес задачи определения параметров траектории по азимуту и углу места, измеренных с одного ИС и одного угла (азимута или угла места) со второго средства.

Как отмечено ранее, решение задачи $\cos\theta_{x_1}, \cos\theta_{z_1}, \cos\theta_{x_2}, \cos\theta_{z_2} \to x, y, z$ дано в книге [1].

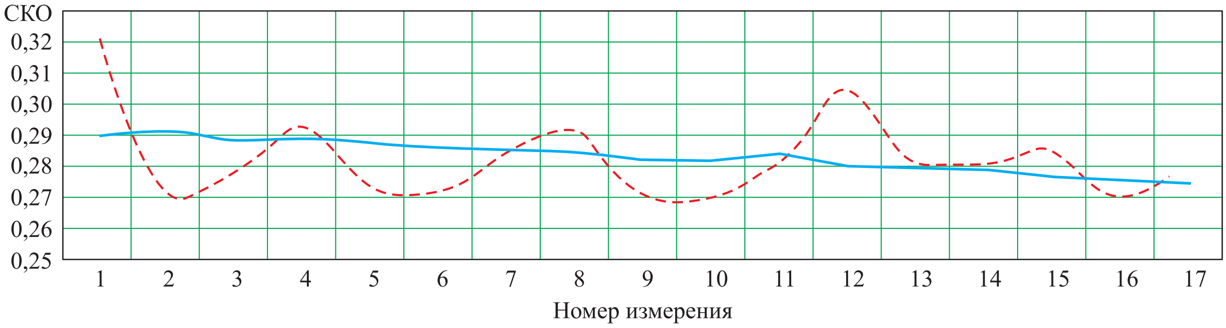

Рис. 4. СКО определения координаты *x*:
– СКО X (МНК); – – – – СКО X (конечные формулы)

Формулы связи направляющих косинусов с азимутом и углом места α_1, γ_1, α_2, $\gamma_2 \to \cos\theta_{x_1}, \cos\theta_{z_1}, \cos\theta_{x_2}, \cos\theta_{z_2}$ задаются соотношением (7). Таким образом, задача определения координат объекта по азимутам и углам места, измеренным с двух ИС α_1, γ_1, α_2, $\gamma_2 \to x, y, z$ решена.

Представляют интерес решения двух задач: $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2 \to x, y, z$ и $\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2 \to x, y, z$.

Рассмотрим решения этих задач с помощью трех методов:

– по конечным формулам;

– методом наименьших квадратов;

– алгоритмом случайного поиска минимизации суммы квадратов.

Конечные формулы решения задачи α_1, γ_1, $\alpha_2 \to x, y, z$ получим путем нахождения координат точки пересечения луча l_1, определяемого углами α_1, γ_1 и плоскостью Π_{α_2}, определяемой азимутом α_2 и вертикальной осью O_2Y_2 на основе [6–9]. Способ решения указанных двух задач поясняет рис. 5 и 6 соответственно.

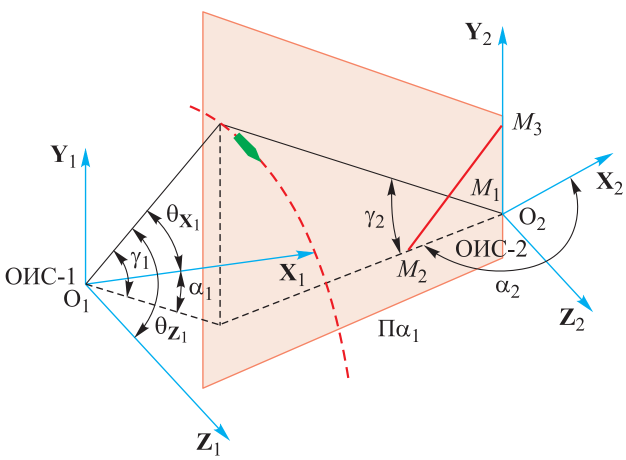

Рис. 5. Способ решения задачи $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2 \to x, y, z$

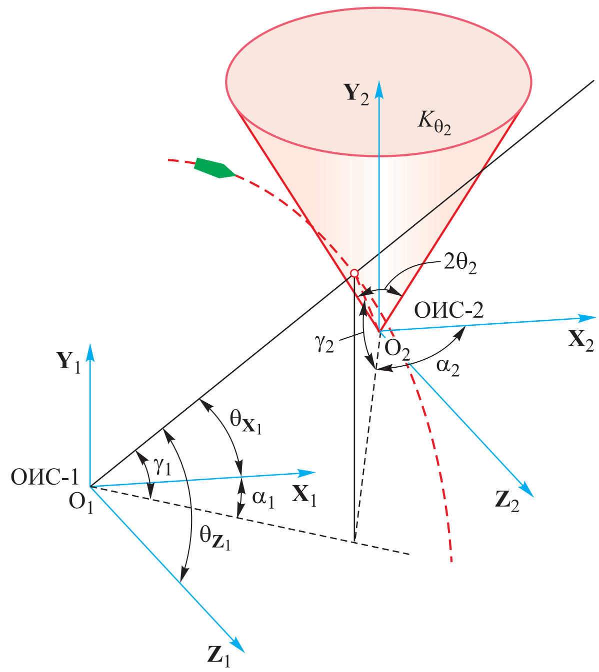

Рис. 6. Способ решения задачи $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2 \to x, y, z$

Плоскость Π_{α_2} может быть определена по трем точкам в МСК второго ИС:

$$M_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad M_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

$$M_3 = (x_3, y_3, z_3),$$

где $x_1 = y_1 = z_1 = 0$;

$$x_2 = \cos\alpha_2, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \sin\alpha_2;$$

$$x_3 = z_3 = 0, \quad y_3 = 1;$$

Плоскость Π_{α_2} задается уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

В соответствующем общем уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ для плоскости Π_{α_2}:

$$A = x_2,\ B = 0,\ C = z_2,\ D = 0.$$

В МСК первого ИС луч l_1 лежит на прямой, задаваемой уравнением в параметрической форме:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_1 t + \mathbf{r}_0, \tag{13}$$

где $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_{x_1} \\ \cos\theta_{y_1} \\ \cos\theta_{z_1} \end{pmatrix}$; $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В МСК второго ИС уравнение прямой, имеет вид:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}_2 t + \mathbf{r}_{02}. \tag{14}$$

где $\mathbf{a}_2 = \Phi_2^T \Phi_1 \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{x_2} \\ a_{y_2} \\ a_{z_2} \end{pmatrix}$; $\mathbf{r}_{02} = \Phi_2^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} x_{02} \\ y_{02} \\ z_{02} \end{pmatrix}$,

где $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ – векторы свободных членов для перехода из МСК измерительных средств в ГСК в соответствии с работой [1].

Пересечение луча l_1 с плоскостью Π_{α_2} соответствует параметру:

$$t_1 = \frac{-\left(Ax_{02} + By_{02} + Cz_{02} + D\right)}{Aa_{x_2} + Ba_{y_2} + Ca_{z_2}}. \tag{15}$$

Координаты объекта определяются по формуле:

$$\mathbf{r}_2(t_1) = \mathbf{a}_2 t_1 + \mathbf{r}_{02}. \tag{16}$$

Конечные формулы решения задачи α_1, γ_1, $\gamma_2 \rightarrow x, y, z$ будут получены путем нахождения координат точки пересечения луча l_1, определяемого углами α_1, γ_1, и круговым конусом K_{θ_2} вокруг оси O_2Y_2 с углом раствора $2\theta_2 = 2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right)$.

Конус K_{θ_2} задается уравнением:

$$\left(x_2^2 + z_2^2\right)\operatorname{ctg}^2\theta_2 = y_2^2. \tag{17}$$

Условие пересечения прямой линии (14) с конусом (17) определяется уравнением:

$$\begin{gathered}\left(\left(a_{x_2} t + x_{02}\right)^2 + \left(a_{z_2} t + z_{02}\right)^2\right)\operatorname{ctg}^2\theta_2 = \\ = \left(a_{y_2} t + y_{02}\right)^2.\end{gathered} \tag{18}$$

Далее параметр t определяется из квадратного уравнения:

$$At^2 + Bt + C = 0, \tag{19}$$

где $A = \left(a_{x_2}^2 + a_{z_2}^2\right)\operatorname{ctg}^2\theta_2 - a_{y_2}^2$;

$$B = 2\left(\left(a_{x_2} x_{02} + a_{z_2} z_{02}\right)\operatorname{ctg}^2\theta_2 - a_{y_2} y_{02}\right);$$

$$C = \left(x_{02}^2 + z_{02}^2\right)\operatorname{ctg}^2\theta_2 - y_{02}^2.$$

Координаты объекта определяются по формуле:

$$\mathbf{r}_2\left(t_{1,2}\right) = \mathbf{a}_2 t_{1,2} + \mathbf{r}_{02}, \tag{20}$$

Здесь $t_{1,2} = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ – корни уравнения (19).

По данным расчетной траектории ложное второе решение исключаем.

Таким образом, получены конечные формулы определения параметров траектории по азимуту и косинусу, измеренных с одного ИС и одного угла (азимута или угла места) со второго средства. Отметим, что эти формулы, по-видимому, приводятся впервые.

Определение параметров траектории по азимутам и углам места, измеренным с двух ИС, может осуществляться методом наименьших квадратов решением задачи минимизации:

$$\begin{gathered}\Phi(x,y,z) = \left(\alpha_1 - \alpha_{1\text{рас}}(x,y,z)\right)^2 + \\ + \left(\gamma_1 - \gamma_{1\text{рас}}(x,y,z)\right) + \left(\alpha_2 - \alpha_{2\text{рас}}(x,y,z)\right)^2 + \\ + \left(\gamma_2 - \gamma_{2\text{рас}}(x,y,z)\right)^2 \rightarrow \min,\end{gathered} \tag{21}$$

где $\alpha_{i\text{рас}}$, $\gamma_{i\text{рас}}$ – расчетные значения измеряемых углов ИС;

$i = 1, 2$ – номера ИС;

x, y, z – координаты объекта.

Определение параметров траектории по азимуту и углу места, измеренных с одного ИС, и одного угла (азимута или угла места) со второго средства осуществляется решением задачи минимизации (21), в которой отсутствует третье или четвертое слагаемое соответственно. Решение задачи (21) осуществляется двумя способами. При первом способе определение параметров траектории осуществляется итерационно, на каждом шаге решается система нормальных уравнений [1–6]. Второй способ решения задачи (21) заключается в применении метода случайного поиска для минимизации $\Phi(x, y, z)$ [10, 11].

В таблице приведены результаты моделирования. Результаты расчетов даны в виде отклонений Δx, Δy и Δz координат опытной траектории от их истинных значений для двух моментов измерений, соответствующих высоте объекта 50 и 2 км (номера измерений в таблице). Погрешность измерений принята с СКО $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma = 10$ угл. с. Обработка осуществлена по алгоритмам конечных формул (КФ); минимизацией в МНК суммы квадратов отклонений измеренных значений от их расчетных величин случайным поиском (СП); МНК.

Результаты моделирования

Измеряемые параметры	Метод	Номер измерения	Отклонения, км		
			Δx	Δy	Δz
$(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2)$	КФ	1	–0,013	0,008	–0,013
		2	–0,003	0,010	–0,006
$(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2)$	КФ	1	–0,015	0,009	–0,017
		2	–0,004	0,011	–0,007
$(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2)$	КФ	1	0,325	–0,133	0,618
		2	–0,002	–0,002	–0,002
$(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2)$	СП	1	–0,015	0,009	–0,017
		2	–0,004	0,012	–0,007
$(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2)$	СП	1	–0,008	0,007	–0,018
		2	–0,014	0,057	–0,032
$(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2)$	МНК	1	–0,008	0,007	–0,018
		2	–0,003	0,010	–0,007
$(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2)$	МНК	1	–0,015	0,009	–0,017
		2	–0,004	0,011	–0,007
$(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2)$	МНК	1	0,325	–0,133	0,618
		2	–0,002	–0,002	–0,002

Данные таблицы отражают приемлемое совпадение оценок в задачах, решаемых различными методами.

Выводы

1. Приведен способ оценки среднеквадратических отклонений при определении координат объекта по конечным формулам, по минимальному набору измеряемых параметров.

2. Получены конечные формулы для определения параметров траектории по азимуту и углу места, измеренных с одного ИС и одного угла (азимута или угла места) со второго средства.

3. Математическим моделированием подтверждена работоспособность предлагаемых алгоритмов.

Список литературы

1. *Жданюк Б. Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Советское радио, 1978. 384 с.

2. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / *В. С. Шебшаевич* и др. М.: Радио и связь, 1993. 408 с.

3. *Барабанов О. О., Барабанова Л. П.* Математические задачи дальномерной навигации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 272 с.

4. *Мудров В. И., Кушко В. Л.* Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки. Изд. 2-е. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.

5. *Тихонов А. Н., Уфимцев М. В.* Статистическая обработка результатов экспериментов. М.: Изд-во Московского университета, 1988. 174 с.

6. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. М.: Астрель: АСТ, 2006. 991 с.

7. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 240 с.

8. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979. 512 с.

9. *Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.* Геометрия: учебное пособие. М.: Наука, 1990. 672 с.

10. *Растригин Л. А.* Случайный поиск. М.: Знание, 1979. 64 с.

11. Справочник по теории автоматического управления / под ред. *А. А. Красовского*. М.: Наука, 1987. 712 с.

Поступила 23.11.16

Кисин Юрий Константинович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела войсковой части 09703, академический советник РАРАН, г. Северодвинск.
Область научных интересов: определение параметров движения летательных аппаратов по результатам измерений.

On application of algorithms on the basis of least-square and end formula methods in the trajectory measurement processing problems

In this research we obtained an estimate of mean-square deviations in the trajectory measurement processing problem when the estimated trajectory parameters were determined by the end formulas according to the minimum set of parameters measured, and in this case there was no explicit functional relationship between these parameters and the measurement vector. To estimate the mean-square deviations of determining the trajectory according to the end formulas, we proposed to implement the stochastic simulation. We obtained end formulas for the trajectory problems when making angular measurements. The work provides the results of mathematical simulation.

Keywords: least-square method, end formulas, measured and estimated parameters, determining the aircraft coordinates, mathematical simulation.

Kisin Yuriy Konstantinovich – Candidate of Engineering Sciences, Senior Research Scientist of the military unit 09703, academic adviser of Russian Academy of Rocket and Artillery Sciences, Severodvinsk.
Science research interests: determination of aircraft motion parameters according to measurements results.