А.И. Мазмишвили

ТЕОРИЯ ОШИБОК И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

А. И. Мазмишвили

ТЕОРИЯ ОШИБОК И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Маркшейдерское дело»

Москва «Недра» 1978

УДК [622.1:519.2] (075.8)

Мазмишвили А. И. Теория ошибок и метод наименьших квадратов. М., «Недра», 1978. с. 311.

В книге изложены математические методы обработки результатов геодезических измерений и статистических наблюдений. Рассмотрены элементы теории вероятностей, теории ошибок и математической статистики, изложены основы метода наименьших квадратов. Приведены метрические и статистические характеристики в одномерном и многомерном пространстве, дана оценка линейных функций по измеренным аргументам. Теория предмета изложена в векторно-геометрической интерпретации средствами линейной алгебры, что позволило исключить громоздкие алгебраические преобразования. Обработка геодезических построений параметрическим и коррелатным способами свободно моделируется в стройные математические схемы, каждая из которых описывает одну и ту же геометрическую модель.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности 0201 «Маркшейдерское дело» по программе курса «Теория ошибок и метод наименьших квадратов», а также может быть полезна инженерно-техническим работникам маркшейдерской службы горнорудных предприятий.

Табл. 26, ил. 24, список лит. — 42 назв.

Рецензенты: кафедра маркшейдерского дела ЛГИ и проф., д-р техн. наук М. М. МАШИМОВ.

М $\frac{30702-483}{043(01)-78}$ 281—78

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном плане Московского горного института курс «Теория ошибок и метод наименьших квадратов» и «Математическая статистика» объединены в один курс «Математическая обработка результатов измерений и наблюдений». В ряде горных вузов и факультетов страны учебные планы сохраняют эти курсы раздельно. Настоящее учебное пособие написано в соответствии с программами двух курсов. В нем изложены основы теории вероятностей, теории ошибок, метода наименьших квадратов и математической статистики, и, следовательно, оно может быть использовано студентами всех горных вузов, обучающихся по специальности «Маркшейдерское дело».

Стремление к общности, логической отчетливости предмета приводит к использованию средств линейной алгебры в векторно-геометрической интерпретации. Замена громоздких преобразований простейшими действиями в обобщенной форме, включение в метод наименьших квадратов теории ошибок и математической статистики позволили существенно сократить объем учебного пособия.

Применение средств линейной алгебры исключает необходимость обращаться к теории неопределенных коэффициентов для вычисления весов уравновешенных элементов и весов функций от этих элементов, вскрывает геометрический смысл определяемых параметров при косвенных и условных измерениях, позволяет облечь всю процедуру обработки экспериментальных данных в стройные математические схемы — параметрическую и коррелатную, практическим отражением которых является схема Гаусса решения линейных систем в традиционных символах, принятых в геодезической и маркшейдерской литературе.

Маркшейдерская служба горнодобывающих предприятий сталкивается с необходимостью обработки постоянно возрастающих объемов экспериментальных данных, что, в свою очередь, вызывает необходимость перехода от практики ручного счета к машинному. Осуществить такой переход возможно путем использования средств линейной алгебры, основой которой является теория матриц.

В связи с тем, что учебным планом 0201 курс линейной алгебры не предусмотрен, а переход на язык матричного исчисления в том плане, в каком он изложен в специальной литературе, методически сложен, в настоящем учебном пособии описан один из вариантов возможной схемы перехода к новой системе исчисления, в которой центральное место занимает метод наименьших квадратов. Механизм преобразований по этому методу приводит ко всем основным параметрам теории ошибок и математической статистики — мерам положения, рассеяния, связи и концентрации ошибок.

В соответствии с программой содержание учебного пособия в терминах теории матриц не выходит за пределы поля вещественных чисел и ограничено евклидовым пространством. Отправляясь от элементарных представлений в этом пространстве и пользуясь специальной литературой, в порядке самостоятельной работы можно перейти к аппарату исследования в унитарном пространстве. В свете указанных соображений учебное пособие построено с акцентом на теоретическую сторону предмета.

Данная рукопись была сдана в набор до получения издательством официального разъяснения Госстандарта СССР о распространении действия ГОСТа 16263—70 на литературу, выпускаемую изд-вом «Недра», а поэтому вместо термина «погрешность» в книге использован термин «ошибка».

Автор выражает благодарность д-ру техн. наук М. М. Машимову и доц., канд. техн. наук А. В. Хлебникову за ценные советы, замечания и предложения, существенно улучшившие содержание учебного пособия. Особую признательность автор выражает канд. техн. наук В. А. Федорченко за помощь, оказанную при подготовке рукописи учебного пособия к печати.

ВВЕДЕНИЕ

Основными задачами маркшейдерской службы на современном этапе научно-технического прогресса в горнодобывающей промышленности являются:

быстрое, точное и полное получение информации о положении и состоянии разведочных и горных выработок, о горно-геологических особенностях разрабатываемого полезного ископаемого и вмещающих горных пород, о процессах, возникающих в массиве горных пород и на земной поверхности при ведении горных работ;

своевременная обработка многочисленной исходной информации с применением современных способов и средств обработки, с оценкой точности получаемых результатов и отражением их в горной графической документации;

маркшейдерское, горно-геометрическое обеспечение работ при разведке, проектировании, строительстве горных предприятий, разработке месторождений полезных ископаемых;

составление прогнозов горно-геологических условий в процессе разработки месторождений на прилегающие или соседние участки, а также предрасчет сдвижений горных пород и земной поверхности, являющихся основой для планирования технико-экономического развития горных работ, рационального применения современных средств механизации и автоматизированной системы управления горнодобывающим предприятием.

В таком обширном и сложном плане производственной деятельности горного инженера-маркшейдера особо важное значение имеют результаты геодезических измерений и статистических наблюдений, доставляющие исходный информативный материал, который обрабатывается и анализируется лишь в среднем.

Практика определения средних известна с глубокой древности. В научном смысле проблема средних находится в центре внимания исследователей свыше 200 лет. В начальной стадии особый интерес к указанной проблеме проявили математики, занимающиеся астрономией и геодезией. В последующем число ученых, посвятивших свои труды этой проблеме, все более возрастало. Неуклонно возрастает объем исследований по общим и частным вопросам теории средних и оценок средних. В современных условиях производственной деятельности горного инженера-маркшейдера проблема средних перерастает в более сложную проблему.

При многократных геодезических измерениях и статистических наблюдениях в процессе поисков полезных ископаемых возникает система случайных ошибок, образуемая совокупностью или множеством элементарных ошибок, не устранимых во всех случаях и при всех обстоятельствах. Поэтому числовое представление любой геодезической системы выражает приближенную модель относительно системы, построенной на местности. Аналогично числовое представление любого явления, исследуемого по данным статистических наблюдений, выражает приближенную модель относительно явления, происходящего в реальной обстановке. Редукция измеренной модели к оригиналу, т. е. к точному его выражению в действительной форме, не представляется возможным ни при каких условиях. Однако средствами математической обработки результатов измерений и наблюдений можно построить приближенную модель с наименьшими искажениями и, следовательно, наиболее близкую к оригиналу. При этом следует различать приближенные модели относительно оригиналов, в которых между элементами точные соотношения теоретически известны, и относительно оригиналов, в которых связь между элементами неизвестна.

В маркшейдерской практике к первому случаю относятся приближенные модели геодезических систем, построенных на данной территории, а ко второму — приближенные модели, выражающие распределение полезных ископаемых на этой же территории. В обоих случаях математическая схема обработки экспериментальных моделей одна и та же, но окончательная оценка результатов обработки в первом случае проще, чем во втором, так как в геодезии практическая модель, как правило, сравнима с теоретической. Во втором случае момент сравнения отсутствует и, следовательно, возникает необходимость в установлении доверительных границ, в пределах которых статистическая модель распределения полезных ископаемых может быть принята за достоверную.

Практика показывает, что редукция измеренной модели к своему оригиналу наилучшим образом осуществляется по схеме Лежандра — Гаусса или Гаусса — Маркова, т. е. по методу наименьших квадратов. Теория этого метода приводит к наименьшей деформаций приближенной модели и наибольшему правдоподобию относительно оригинала лишь в среднем. Следовательно, если на базе этой теории построить математическую модель статистических операций, то такая модель будет наилучшей также в среднем.

Построение схемы математического моделирования статистических операций — задача инженерно-техническая. Однако разработка схемы, с помощью которой сводятся к минимуму ошибки и с достаточной точностью дается оценка результатов измерений и наблюдений, имеет не только практический, но и научный интерес. Построение схемы математического моделирования, по которой осуществляется планирование экспериментальных операций в пределах заданной точности, — проблема инженерно-экономическая, диктуемая условиями развития любого промышленного предприятия. Такая проблема связана с прогнозированием статистических операций в среднем.

Существуют различные способы решения этой проблемы. Многие из них построены на законах теории вероятности и в ряде случаев связаны с принципами минимума, минимакса или максимального правдоподобия. В геодезической практике пользуются средствами теории ошибок и метода наименьших квадратов. Одни и те же формулы приводят к оценкам линейно-угловых и высотных геодезических построений и служат основанием для прогнозирования (предрасчета) такого рода построений. В маркшейдерской практике обращаются к средствам математической статистики и в том случае, когда изменить что-либо в прошлом не представляется возможным. Формулы теории ошибок и математической статистики относятся к одному и тому же классу характеристик в области теории оценок и являются составной частью оценок по методу наименьших квадратов. Поэтому, объединив эти характеристики в последовательно связанную цепь формул, можно построить схему подходящей модели оценки и прогнозирования статистических операций по методу наименьших квадратов, имея при этом в виду, что статистические связи любого вида логически не влекут причинных связей, порождаемых технологическими, экономическими, природными и многими другими факторами.

ГЛАВА I

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ПРЕДМЕТА

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Геометрия в пространстве свыше трех измерений. Евклидова геометрия имеет три измерения, плоскость — два измерения, прямая — одно измерение. Наша, в обычном смысле понимаемая, пространственная интуиция ограничена тремя измерениями: Тем не менее во многих случаях вполне уместно пользоваться понятием многомерного или n-мерного пространства, выходящего за пределы трехмерного пространства. Терминологию n-мерного пространства позволительно рассматривать как образный язык для выражения математических идей, находящихся вне пределов обыкновенных геометрических представлений.

По Евклиду точки, прямые и кривые рассматривались как чисто геометрические объекты. В последующем Декарт интерпретировал геометрическую теорию алгебраическими методами. Затем возник новый подход: число x или пара чисел x, y или тройка чисел x, y, z стали рассматриваться как исходные, основные аналитические объекты, конкретизируемые в виде точек на прямой, на плоскости, в пространстве. В таком толковании геометрический язык служит для констатации соотношений между числами, лишая геометрические объекты их самостоятельного и независимого значения и полагая, что пара чисел x, y — точка на плоскости, совокупность пар чисел, удовлетворяющих линейному уравнению

$$(x, y) = ax + by + c = 0, \quad c\text{—const}$$

— прямая линия.

Три линейных уравнения

$$\begin{aligned} L_1(x_1, y_1, z_1) &= a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = 0, \\ L_2(x_2, y_2, z_2) &= a_2x_2 + b_2y_1 + c_1z_2 + d_2 = 0, \\ L_3(x_3, y_3) &= a, z_{33}x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 + d_3 = 0 \end{aligned}$$

с тремя неизвестными x, y, z выражают три плоскости. Решение этих уравнений сводится к определению точки пересечения трех плоскостей в трехмерном пространстве.

Система n линейных уравнений

$$\begin{aligned} L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ L_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ L_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

с n неизвестными образует n гиперплоскостей

$$L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0.$$

Пересечение n гиперплоскостей выражает решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в n-мерном пространстве.

Преимущество такого геометрического способа описания математических фактов заключается в том, что он подчеркивает некоторые обстоятельства алгебраического характера, не зависящие от числа измерений n или размерности пространства, и вместе с тем в случае $n \leqslant 3$ они могут быть редуцированы в представлениях обыкновенного пространства.

Современная литература свидетельствует, насколько полезными оказались обобщенные геометрические представления алгебраическими средствами. Примером служит теория относительности Эйнштейна, в которой пространственные координаты x, y, z и временная координата t события объединены в одно пространственно-временное четырехмерное многообразие x, y, z, t. Подчинив «пространство — время» этой аналитической схеме и наделив его свойствами неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского, можно довольно просто описать многие весьма сложные ситуации. Столь же полезными оказались n-мерные пространства в астрономии, геодезии, статистике, механике и в самой математике.

Формы выражения чисел. На простейшем примере можно показать, что маркшейдеры и геодезисты имеют дело с тремя числами различной природы.

Пусть положение точки O на плоскости безошибочно и пусть от точки O до точки M измерено расстояние и направление. Тогда положение точки M зависит от линейной и угловой ошибок измерений. Из элементарных соображений очевидно, что линейная ошибка приведет к растяжению или сжатию отрезка OM на величину Δs и, следовательно, к смещению точки M в продольном направлении. Угловая ошибка вызовет поворот этого отрезка при точке O на угол $\Delta\alpha$ и, стало быть, к смещению точки M в поперечном направлении. Совместное влияние этих ошибок приведет к смещению точки M в точку M' по направлению MM', не совпадающему ни с продольным, ни с поперечным смещением.

Пусть σ_s и σ_α — средние квадратические ошибки, вызванные линейным и угловым смещением. Допустим, что $\sigma_s = \sigma_\alpha$. В этом случае границу возможного перемещения точки M опишет окружность. Если же $\sigma_s \neq \sigma_\alpha$, то окружность перейдет в эллипс.

Положение точки M будет наилучшим, если ошибка определения этой точки наименьшая. Но наименьшая ошибка в скалярной форме выражается минимальными значениями средних квадратических ошибок σ_s и σ_α, в векторной форме — длиной и направлением наименьшего смещения MM', в тензорной форме — центральной кривой второго порядка (окружностью или эллипсом).

Система точек геодезического построения взаимосвязана, поэтому совокупность смещений всех точек приводит к общему искажению или деформации модели геодезического построения и, следовательно, к нарушению всех теоретических соотношений, обусловленных геометрическим содержанием геодезического построения.

Общая деформация измеренной модели есть функция частных искажений и выражается:

в скалярной форме, т. е. функцией точки M, которая каждой точке ставит в соответствие определенное число;

в векторной форме, т. е. функцией точки M, которая каждой точке ставит в соответствие определенное число и определенное направление;

в тензорной форме, т. е. функцией точки M, матрица которой квадратная порядка n

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{matrix}\right\}.$$

Пользуясь такого рода числовыми выражениями, всегда можно описать геодезические, статистические и любые другие количественные операции в арифметической, алгебраической и геометрической формах.

Скаляры и векторы

Скаляры. Результаты однократных измерений и наблюдений выражаются числами

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, \quad a_1, b_1, c_1, \ldots,$$

т. е. скалярами, сопровождаемыми одним индексом. Каждый скаляр отображается точкой.

Векторы. Результаты многократных измерений и наблюдений величины x или a выражаются последовательностью чисел

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad a = [a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

т. е. векторами. Каждый вектор отображает длину и направление отрезка или прямой.

Радиусы-векторы. Построим две системы координат (рис. 1) и в каждой из них проведем один и тот же радиус-вектор. На рис. 1, *а* показана косоугольная, или произвольная система, а на рис. 1, *б* — прямоугольная, или ортогональная система.

Выразив радиус-вектор a через проекции на оси координат, получим символ этого вектора в геометрической, алгебраической и арифметической формах

$$a = [a_1, a_2].$$

Такой символ обладает общностью в том смысле, что выражает один и тот же радиус-вектор на плоскости в косоугольной и прямоугольной системах координат. Между тем длина проекций в этих системах неодинакова:

$$a_1' \neq a_1; \quad a_2' \neq a_2.$$

Различны геометрические фигуры, образованные этими проекциями, параллелограмм и прямоугольник, в которых радиус-вектор a — диагональ.

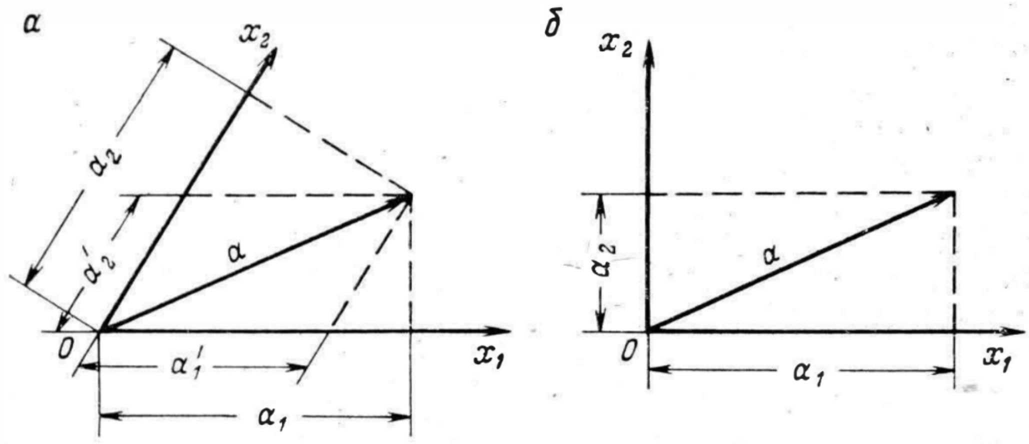

Рис. 1.

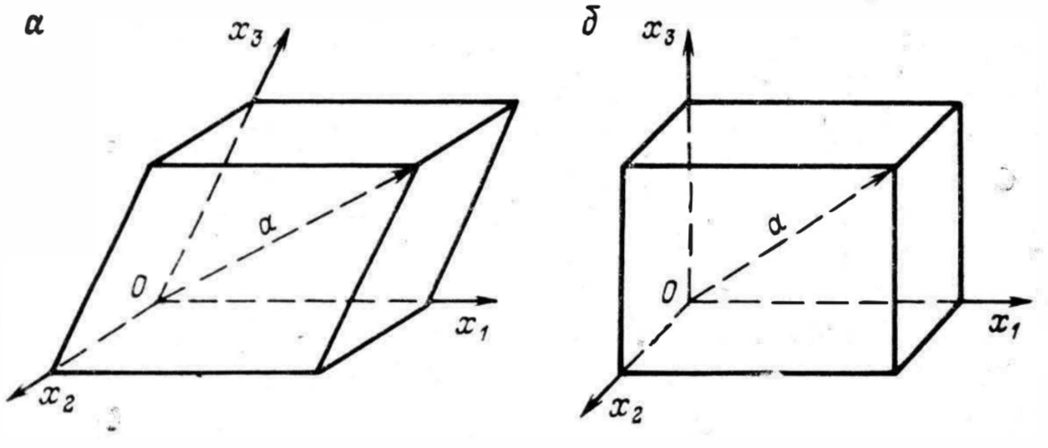

Рис. 2.

Равенство проекций

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = a_2$$

и тождество фигур имеют место лишь в том единственном случае, когда ось x_2 в косоугольной системе координат вращением вокруг начала займет перпендикулярное положение к оси x_1.

Отнесем радиус-вектор a к началу косоугольной (рис. 2, a) и прямоугольной (рис. 2, $б$) систем координат в обыкновенном пространстве. В этом пространстве один и тот же радиус-вектор a выразится тройкой чисел

$$a = [a_1, a_2, a_3].$$

Но длина проекций этого радиуса-вектора в косоугольной и прямоугольной системах координат различна, так что

$$a_1 \neq a'_1; \quad a_2 \neq a'_2; \quad a_3 \neq a'_3.$$

В метрическом смысле различны и геометрические фигуры, построенные на проекциях этих векторов как на ребрах (косоугольный и прямоугольный параллелепипеды). Однако в топологическом смысле, т. е. в смысле общего описания геометрического образа, в обеих системах координат имеем фигуру одного и того же вида — параллелепипед. Подобным образом можно рассматривать фигуры, показанные на рис. 1, и отнести их к одному виду — параллелограмму.

Перейдем теперь к некоторым более общим представлениям. Допустим, что необходимо выразить положение движущегося самолета в пространстве и во времени. Тогда от начала полета, т. е. начала системы отсчета, место самолета в воздухе в данный момент времени выразится радиусом-вектором

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4],$$

т. е. четверкой чисел, или в четырех проекциях.

Учитывая скорость самолета, получаем радиус-вектор

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5],$$

выраженный пятеркой чисел, т. е. пятью проекциями.

С учетом всех других факторов, влияющих на движение самолета, будем иметь радиус-вектор в n числах или проекциях

$$a = [a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

где n — натуральное число, равное числу всех факторов, определяющих положение самолета в полете.

Построить вектор в проекциях свыше трех нельзя, но представить себе его реальное содержание или значение вполне возможно.

Свободный вектор. Вне системы координат символ

$$a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

выражает свободный вектор, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — составляющие, или компоненты вектора.

Параллельный перенос вектора. Любой свободный вектор можно свести к началу заданной системы координат, воспользовавшись действием параллельного переноса, при котором длина и направление вектора неизменны. Тогда свободный вектор принимает положение радиуса-вектора.

Размерность векторов. По определению число составляющих вектора a выражает его размерность. Так, вектор

$a_{11} = [a_1]$ — одномерный;

$a_{12} = [a_1, a_2]$ — двухмерный;

$a_{13} = [a_1, a_2, a_3]$— трехмерный;

. . . .

$a_{1n} [a_1, a_2, \ldots, a_n]$— n-мерный, или многомерный.

Размерность этих векторов можно выразить двумя индексами a_{1n}, где первый индекс указывает строку, второй — число составляющих в строке.

Транспонирование векторов. Векторы в строчной форме можно выразить в столбцовой

$$a_{21} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad a_{31} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad a_{n1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

действием транспонирования.

Аналогичным действием столбцовые векторы переводятся в строчные. Здесь и в дальнейшем будем полагать, что в исходной форме векторы задаются в столбцовой форме

$$a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}.$$

Тогда эти векторы выразятся в строчной форме

$$a^*_{12}, a^*_{13}, \ldots, a^*_{1n},$$

где зведочка — знак транспонирования.

Матрицы

Определение. Таблицы чисел

$$\begin{bmatrix} x_{11}x_{12}\ldots x_{1k} \\ x_{21}x_{22}\ldots x_{2k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1}x_{n2}\ldots x_{nk} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_1 b_1 \ldots g_1 \\ a_2 b_2 \quad g_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n b_n \ldots g_n \end{bmatrix},$$

выраженные в индексной (слева) и словарной (справа) формах, суть матрицы; числа, составляющие эти таблицы, — элементы матриц. Каждый элемент в матрице занимает определенное место. Положение элемента в матрице, записанной слева, характеризуется двумя индексами: первый указывает номер строки, второй — номер столбца. Так что элемент a_{ij} расположен на пересечении i-й строки и j-го столбца. Матрица в индексах допускает сокращенную запись

$$[x_{ij}],$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, k$ — индексы, определяющие соответственно число строк и столбцов матрицы.

Матрица в словарных символах не выражается в краткой записи, но играет важную роль в гауссовых преобразованиях.

Формы матриц. В практике вычислений возникают квадратные прямоугольные матрицы. Частным выражением последних являются строчные или столбцовые матрицы.

Размерность и порядок матриц. Прямоугольная матрица характеризуется размерностью в любых символах вида $n \times k$, $k \times n$, $r \times n$, $n \times r$, $i \times j, \ldots$, где первый индекс — число строк, второй — число столбцов. Если число, выражающее первый индекс, больше второго, то прямоугольная матрица укороченная, или вертикально расположенная, в обратном случае прямоугольная матрица удлиненная, или горизонтально расположенная.

Если число строк равно числу столбцов, то матрица квадратная; один индекс или два одинаковых индекса определяют порядок квадратной матрицы.

Символы и знаки матриц. Матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита, сопровождаемыми индексами. Так, например, символы

$$A_{nk}, B_{rn}, C_{sp}, \ldots$$

выражают прямоугольные матрицы, а символы

$$N_{kk}, R_{nn}, M_{ss}, \ldots$$

— квадратные матрицы.

Матрицы обозначаются знаками вида

$$\| \; \|, \quad [\;], \quad (\;), \quad \{ \; \}.$$

Выбор символов и знаков произволен, но желательно сохранять типичность, общность и однообразие при изложении их в работе.

Разновидности квадратных матриц. Важную роль играют квадратные матрицы.

Нулевая 0, все элементы которой равны нулю. Существует множество различных нулевых матриц соответственно каждой паре значений nn.

Единичная EE, у которой все элементы по главной диагонали равны 1, а по обе стороны этой диагонали все элементы суть нули. Существует множество единичных матриц соответственно каждой паре значений nn.

Диагональная D, где $d_{ii} \neq 0$, $d_{ij} = 0$; числа d_{ii} — диагональные элементы матрицы D.

Скалярная cE, где c — скаляр; E — единичная матрица.

Треугольная A или B, где все элементы, расположенные под главной диагональю в A или над главной диагональю в B, равны нулю, соответственно A — верхняя треугольная матрица, B — нижняя треугольная матрица.

Симметричная S, если $S_{ij} = S_{ji}$ для всех i и j.

Алгебра матриц

Тождественные или равные матрицы. Матрицы A и B тождественны или равны, если содержат одно и то же число строк и столбцов и если $a_{rs}=b_{rs}$ при всех r и s.

Транспонирование матриц. Если в матрице A_{mn} поменять местами строки и столбцы, не изменяя в них расположения элементов, то получаем новую матрицу, имеющую n строк и m столбцов. По обозначению матрица A^{*}_{nm} транспонирована относительно матрицы A_{mn}.

Сложение матриц. Если матрицы A и B одного и того же порядка или размера, то

$$C_{mn}=A_{mn}+B_{mn}$$

— сумма матриц того же порядка с элементами

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}.$$

При этом сохраняются обычные свойства слагаемых: коммутативность, т. е. переместительность

$$A+B=B+A,$$

и ассоциативность, т. е сочетательность

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

полагая, что A, B, C — матрицы одного и того же порядка или размера.

При указанных ограничениях операция сложения матриц распространяется на любое число слагаемых.

Вычитание матриц. При тех же ограничениях разность двух матриц A и B определяется равенством

$$C=A-B=A+(-1)B,$$

где C содержит элементы

$$c_{ik}=a_{ik}-b_{ik}.$$

Произведение матрицы на число. Матрица

$$\alpha A=\alpha(a_{ik})=(\alpha a_{ik}),$$

полученная умножением всех элементов матрицы A на число α, называется произведением матрицы A на числа α или β. В этом случае сохраняются свойства:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,$$

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A).$$

Произведение матриц. Операция нахождения произведения матриц называется умножением матриц. Правило Кели умножения матриц *«строка на столбец»:* длина строки первого сомножителя должна равняться длине столбца второго сомножителя, порядок или размерность произведения определяется числом строк первого сомножителя и числом столбцов второго сомножителя.

Формула произведения по правилу «строка на столбец». Если

$$C_{mq}=A_{mn}B_{nq},$$

то

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

откуда следует, что элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов по строке i и столбцу j соответственно матриц A и B.

Произведения квадратных и прямоугольных матриц. Соблюдая указанное правило, находим, что произведение квадратных матриц одинакового порядка — квадратная матрица того же порядка

$$A_{nn}B_{nn}=C_{nn}.$$

В произведениях прямоугольных матриц:

$$1)\ A_{nk}B_{kn}=C_{nn};\quad 3)\ D_{ij}E_{jr}=F_{ir};$$
$$2)\ A_{kn}B_{nk}=C_{kk};\quad 4)\ K_{sn}M_{nr}=R_{sr}$$

средние индексы всюду совпадают. В первых двух выражениях крайние индексы показывают, что в результате умножения получены соответственно квадратные матрицы порядка n и k, в двух последних — прямоугольные матрицы размеров $i\times r$ и $s\times r$. Произведение прямоугольной матрицы на квадратную — прямоугольная матрица

$$A_{nk}B_{kk}=C_{nk}.$$

Произведение квадратной матрицы на прямоугольную — прямоугольная матрица

$$B_{kk}A_{kn}=C_{kn}.$$

Произведение любой матрицы на свою транспонированную — симметричная матрица.

Из равенства $AB=0$ не следует равенство нулю одной из матриц A или B. Например, каждая из матриц

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

не равна нулю, но произведение из них равно нулю.

Произведение двух нижних или двух верхних треугольных матриц — соответственно нижняя или верхняя треугольная матрица.

Произведение диагональных матриц — диагональная матрица.

При умножении прямоугольной матрицы A справа (слева) на диагональную матрицу $D=d_1, d_2, \ldots, d_n$ все столбцы (соответственно строки) матрицы A умножаются на числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Формула транспонирования произведения матриц

$$(A_{mn}B_{nq})^* = B_{qn}A_{nm}$$

распространяется на любое конечное число сомножителей.

Свойства произведения матриц. При соблюдении правила Кели сохраняется свойство ассоциативности, т. е. сочетательности,

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

и дистрибутивности, т. е. распределительности,

$$(A+B)\,C = AC + BC.$$

Коммутативность матриц. Матрицы A и B коммутативны, если

$$AB = BA,$$

и если произведения AB и BA имеют смысл.

Произведение квадратных матриц, вообще говоря, некоммутативно, так что

$$AB \neq BA.$$

К коммутативным матрицам относятся диагональные матрицы.

Степени матриц. По определению квадратная матрица в нулевой степени равна единичной матрице, так что

$$A^0 = E.$$

Если

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_p,$$

то

$$A^p = A_1A_2 \ldots A_p.$$

По свойству сочетательности умножения матриц имеет p раз место равенство

$$A^pA^q = A^{p+q},$$

где p и q — произвольные целые неотрицательные числа.

Производная суммы матриц A и B определяется по формуле

$$(A+B)' = A' + B'.$$

Производная суммы n матриц $A_1, A_2, \ldots, A_n$ находится по формуле

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)' = A_1' + A_2' + \cdots + A_n'.$$

Производная произведения матриц A и B определяется по формуле

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

Интегрирование матриц. Если элементы a_{ij} матрицы A — функции переменного x, то под интегралом

$$\int_{x_0}^{x_n} A(x)\,dx$$

понимают матрицу, производная которой совпадает с подынтегральным значением $A(x)$.

Основные правила образования произведений матриц:

1) Строка на столбец — скаляр, или число.

2) Столбец на строку — матрица с пропорциональными строками и пропорциональными столбцами.

3) Строка на матрицу — строка или вектор.

4) Матрица на строку — столбец или вектор.

5) Матрица на матрицу — матрица.

6) Треугольная матрица на треугольную одного и того же вида и порядка — треугольная того же вида и порядка.

7) Диагональная матрица на диагональную — диагональная.

8) Матрица на свою транспонированную слева — симметричная.

9) Единичная на матрицу и наоборот — матрица.

10) Единичная матрица на единичную — единичная.

11) Единичная матрица в нулевой степени — единичная.

Примеры

1) Сумма матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

2) Разность матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

3) Умножение матрицы на число

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},$$

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -31 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

4) Транспонирование матриц

$$A_{53} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_{35} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

5) Произведение прямоугольных матриц

$$A_{34}B_{42}=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1 & 2\\ 3 & -7 & 1 & -8\\ 2 & 4 & -3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 0\\ 1 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 9\\ 4 & 6\\ -8 & -8\end{bmatrix}=C_{32},$$

$$B_{24}A_{43}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1 & 3\\ 5 & 0 & 5 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 2 & -7 & 4\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & -8 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 4 & -8\\ 7 & 12 & -4\end{bmatrix}=C'_{23}.$$

6) Произведение квадратных матриц

$$A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 3\end{bmatrix}=C_{22}.$$

7) Произведение тех же матриц в обратном порядке

$$B_{22}A_{22}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 26\\ -4 & -9\end{bmatrix}=C'_{22},$$

$$C_{22}\neq C'_{22}.$$

8) Произведение коммутативных матриц

$$\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=0,$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$

9) Произведение диагональных матриц

$$\begin{bmatrix}2 & \\ & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & \\ & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & \\ & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & \\ & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & \\ & 15\end{bmatrix}.$$

10) Строка на столбец

$$ab=[1\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=9,\qquad ba=[0\ \ 1\ \ 2\ \ 0\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=9.$$

11) Строка на матрицу

$$[1\ \ 2\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}=[8\ \ 7\ \ 9].$$

12) Матрица на столбец

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

13) Симметризация матриц:
прямоугольной

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 15 \\ 15 & 59 \end{bmatrix},$$

квадратной

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 31 \\ 31 & 58 \end{bmatrix}.$$

14) Степени матриц

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad A^6 = (A^3)^2 = \begin{bmatrix} 13 & -24 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}.$$

Матрицы и векторы

Системы векторов, порождаемые матрицей. Напишем матрицу в словарной форме

$$A_{nk} = \begin{bmatrix} a_1 \; b_1 \ldots g_1 \\ a_2 \; b_2 \ldots g_2 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_n \; b_n \ldots g_n \end{bmatrix}.$$

Индексы при A показывают, что матрица A содержит две системы векторов; по числу строк — n векторов вида

$$[a_i b_i \ldots g_i]$$

и по числу столбцов — k векторов вида

$$a_{1n} = [a_1, a_2, \ldots, a_n],$$
$$b_{1n} = [b_1, b_2, \ldots, b_n],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{1n} = [g_1, g_2, \ldots, g_n].$$

Векторы второй системы расположены в пространстве n, а первой — в подпространстве k. Так как $n > k$, то за основу системы счета естественно принять вторую систему векторов в пространстве n.

Схема расположения векторов. Любое геодезическое построение выражает систему известным образом связанных векторов. Но, пользуясь действием параллельного переноса, каждый отдельный вектор можно свести к одному началу, выбор которого произволен (условное начало). Тогда получим расположение векторов

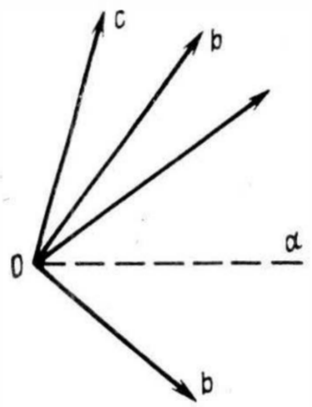

Рис. 3.

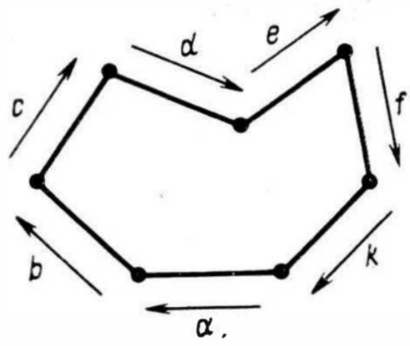

Рис. 4.

второй системы по схеме, показанной на рис. 3. К подобной схеме сводится замкнутый геодезический полигон (рис. 4) при неизменных длине и направлении каждой стороны.

Матрицы и координатные системы

Косоугольная, или произвольная система координат. Схема, образующая связку k векторов, выражает аффинную, или косоугольную систему координат в пространстве n измерений. В такой системе координат по элементам матрицы A можно вычислить скалярное произведение векторов, длину каждого вектора, углы между векторами, площади и объемы геометрических образов, построенных на векторах, и др., т. е. все, что является предметом исследования в теории и практике математической обработки результатов измерений и наблюдений.

Ортонормированный базис в евклидовом пространстве. В аффинном пространстве все базисы равноправны. В пространстве Евклида наиболее удобны ортогональные базисы. Они играют ту же роль, что и прямоугольные системы координат в аналитической геометрии, геодезии и маркшейдерии.

Ортогональный базис в n-мерном пространстве E_n образует векторы:

$$e_1 =]1, 0, \ldots, 0],$$
$$e_2 = [0, 1, \ldots, 0],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n = [0, 0, \ldots, 1].$$

Такая система векторов образует ортогональный и нормированный, или ортонормированный базис на том основании, что векторы e_i и e_j взаимно ортогональны и длина каждого из них равна единице. Подобное свойство векторов выражается формулой

$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

согласно которой определяются условия ортонормированной системы векторов.

Матричным выражением ортонормированной системы является единичная матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 0 & 0 \quad 1 \end{bmatrix}$$

порядка n, так как строки и столбцы этой матрицы суть единичные векторы, и совокупность из них удовлетворяет условиям ортогональности в нормированной форме.

Определители матриц

Символ определителя квадратной матрицы. Число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

— определитель матрицы A порядка n.

Формулы определителей треугольной и диагональной матриц имеют вид

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}; \qquad |D| = \prod_{i=1}^{n} d_i,$$

где a_{ii} и d_{ii} — диагональные элементы матриц.

Формула определителя произведения C матриц A и B

$$|C| = |AB| = |A| \, |B|.$$

Ранг матрицы r — наибольший из порядков отличных от нуля миноров, порождаемых матрицей, т. е. число линейно независимых столбцов или строк матрицы.

Если r — ранг прямоугольной матрицы A размера $m \times n$, то $r \leqslant (m, n)$.

Если все миноры матрицы A равны нулю, то ранг этой матрицы равен нулю.

Неизменность ранга матрицы. Ранг матрицы не меняется в результате элементарных преобразований матриц, а именно, если

все строки заменить столбцами;

две строки и два столбца поменять местами;

каждый элемент строки или столбца умножить на одно и то же число, отличное от нуля;

элементы одной строки или одного столбца сложить с соответствующими элементами другой строки или другого столбца, умноженными на один и тот же произвольный множитель.

Вычисление ранга матрицы. Известно правило, согласно которому вычисление ранга матрицы осуществляется последовательным переходом от миноров меньших порядков к минорам бо́льших порядков. Если найдем минор M_{ij} r-го порядка, отличный от нуля, то необходимо вычислить миноры $r+1$-го порядка, окаймляющие минор $M_{ij}\neq 0$. При нулевых значениях этих миноров ранг матрицы равен r, но если хотя бы один из них отличен от нуля, то ранг матрицы заведомо больше r и тогда операция поиска ранга матрицы с помощью процесса окаймления продолжается.

Согласно этому правилу способ определения ранга матрицы высокого порядка приводит к вычислению большого числа миноров и практически является громоздким и весьма утомительным. Так, например, в квадратной матрице 5-го порядка можно выделить один минор 5-го порядка, 25 миноров 4-го порядка, 100 миноров 3-го порядка и 100 миноров 2-го порядка. Установление ранга такой матрицы вычислением всех ее миноров сопряжено с огромным числом арифметических операций. В целях сокращения вычислений рекомендуется пользоваться элементарными операциями только со столбцами. К этим операциям относятся:

перестановка столбцов;

отбрасывание нулевого общего множителя элементов данного столбца;

прибавление к одному столбцу другого столбца с произвольным множителем:

зачеркивание столбца, состоящего из одних нулей;

зачеркивание столбца, являющегося линейной комбинацией других столбцов.

Все эти операции и совокупность из них совершенно бесконтрольны и с возрастанием порядка матрицы приводят к нарастающим громоздким вычислениям.

Свойства определителя матрицы. Определитель матрицы равен нулю, если все элементы одной строки или одного столбца равны нулю; содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца; строки (столбцы) пропорциональны; одна из строк — сумма других строк или сумма произведений других строк на число.

Транспонирование матрицы оставляет определитель неизменным.

Перестановка строк (столбцов) изменяет знак определителя.

Если строки (столбцы) матрицы увеличить в c раз, то определитель увеличится во столько же раз.

Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Если определитель матрицы отличен от нуля, то такая матрица неособенная, если же равен нулю, то она особенная, вырожденная, пустая.

Способы вычисления определителя матрицы

Определитель 2-го порядка. Если матрица

$$A_{22}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

неособенная, то

$$|A_{22}|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

и если вместе с тем симметричная, то

$$|A_{22}|=a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$$

Определитель матрицы 3-го порядка. Если матрица

$$A_{33}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

неособенная, то по правилу Саррюса

$$|A_{33}|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

$$|A_{33}|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Если матрица 4-го порядка и выше, то рекомендуется использовать способ треугольного преобразования, согласно которому определитель равен произведению диагональных элементов.

След матрицы. Сумма диагональных элементов квадратной матрицы A выражает след матрицы. Символ следа матриц

$$Sp^{*}A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

---

* Sp — сокращенно с немецкого спур (шпур).

Свойства следа матриц:

$$Sp(A+B)=SpA+SpB, \qquad Sp(\alpha A)=\alpha SpA,$$
$$Sp(BA)=Sp(AB), \qquad Sp(AB-BA)=0.$$

Обращение квадратных матриц

Обратная матрица. Если $|A|\neq 0$, т. е. если матрица A неособенная, то существует однозначно определенная обратная матрица со свойствами

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E, \qquad (A^{-1})^{-1}=A,$$
$$|A^{-1}|=|A|^{-1}.$$

Особенная матрица обратной матрицы не имеет. Если A^{-1} существует, то матрица A *обратимая*.

Формула определения элементов обратной матрицы:

$$a_{ik}^{-1}=\frac{A_{ki}}{|A|},$$

где в числителе — алгебраическое дополнение элемента a_{ki} в определителе матрицы A, т. е. минор M, умноженный на $(-1)^{ik}$, полученный из $|A|$ вычеркиванием k-й строки и i-го столбца.

Обратная матрица симметричной матрицы. Если матрица A симметричная, то обратная матрица A^{-1} также симметричная.

Формула транспонирования произведения обратных матриц. Если матрицы A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} существуют, то

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

формула распространяется на любое число сомножителей.

Ортогональная матрица. Квадратная матрица A, для которой

$$AA^{*}=A^{*}A=E; \qquad A^{*}=A^{-1},$$

— ортогональная матрица

Примеры построения обратных матриц 2-го порядка:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}, \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}, \qquad AA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

3-го порядка (исходная матрица — симметричная):

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы 3-го порядка:

$$|A|=3\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=16.$$

Алгебраические дополнения:

$$\begin{matrix}A_{11}=8, & A_{12}=-4, & A_{13}=0,\\ & A_{22}=8, & A_{23}=-4;\\ & & A_{33}=8.\end{matrix}$$

Союзная матрица — матрица алгебраических дополнений:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}8 & -4 & 0\\ -4 & 8 & -4\\ 0 & -4 & 8\end{bmatrix}.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1}=16^{-1}\begin{bmatrix}8 & -4 & 0\\ -4 & 8 & -4\\ 0 & -4 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & -0,25 & 0\\ -0,25 & 0,5 & -0,25\\ 0 & 0 & 0,5\end{bmatrix},$$

полученная делением элементов союзной матрицы на значение определителя матрицы A. Так как исходная матрица A симметричная, то обратная матрица A^{-1} также симметричная.

Контроль построения обратной матрицы:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,5 & -0,25 & 0\\ 0,25 & 0,5 & -0,25\\ 0 & -0,25 & 0,5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Определитель Грама*

Если

$$|A|=|a\,b\ldots g|$$

— определитель прямоугольной матрицы A, то квадрат косого произведения

$$|A|^2=|a\,b\ldots g|^2$$

— определитель Грама

$$\Gamma=\begin{vmatrix}aa & ab\ldots ag\\ ab & bb\ldots bg\\ \cdots & \cdots\\ ag & bg\ldots gg\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}[aa] & [ab]\ldots[ag]\\ [ab] & [bb]\ldots[bg]\\ \cdots & \cdots\\ [ag] & [bg]\,[gg]\end{vmatrix}.$$

* Грам—математик (Дания).

Определитель Грама положителен, если векторы $a, b, \ldots, g$ линейно независимы. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости этих векторов является обращение в нуль определителя Грама. Определитель Грама не может иметь отрицательного значения.

Геометрический смысл определителя Грама. Последовательно находим, что:

$\Gamma_1 = [aa]$ — квадрат вектора a, т. е. скаляр;

$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix}$ — квадрат площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, в силу того что

$$[aa] = |a|^2; \qquad [bb] = |b|^2; \qquad [ab] = |a|\,|b| \cos\alpha;$$

$$\Gamma_2 = |a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2\alpha = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2\alpha) = \\ = |a|^2 |b|^2 \sin^2\alpha = (|a|\,|b| \sin\alpha)^2;$$

$\Gamma_3 = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix}$ — квадрат объема трехмерного параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c;

Γ_k — квадрат объема k-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $a, b, \ldots, g$.

Формула Адамара оценки определителя. По теореме Адамара для любого определителя $|A|$ с вещественными элементами справедлива оценка

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum a_{ik}^2.$$

Геометрически формула Адамара означает, что объем параллелепипеда, построенного в n-мерном пространстве на n векторах данной длины, будет наибольшим, если

$$|A|^2_{\max} = \prod_{i=1}^{n} c_i^2,$$

т. е. если векторы взаимно перпендикулярны.

Общность и различие законов элементарной и матричной алгебры

Законы элементарной алгебры. В этой алгебре всегда сохраняются законы, положения, или свойства:

1) перестановочности, или коммутативности сложения

$$a + b = b + a;$$

2) сочетательности, или ассоциативности сложения

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

3) перестановочности, или коммутативности умножения

$$ab = ba;$$

4) сочетательности, или ассоциативности умножения

$$(ab)\,c = a\,(bc);$$

5) распределительности, или дистрибутивности умножения

$$c\,(a + b) = ca + cb;$$

6) неразложимости нуля на множители, отличные от нуля, т. е. если $ab = 0$, то или $a = 0$, или $b = 0$, или $a = b = 0$.

Законы матричной алгебры. В этой алгебре законы элементарной алгебры 1, 2, 4, 5 выполняются, законы 3 и 6 нарушаются. Нарушение закона 3 состоит в том, что

$$AB \neq BA.$$

Нарушение же закона 6 приводит к произведению

$$AB = 0,$$

где ни A, ни B не равны нулю.

С точки зрения элементарной алгебры самое существенное различие состоит в том, что в матричной алгебре действие деления в обычном понимании не имеет места и взамен этого действия пользуются построением обратной матрицы A^{-1} относительно матрицы A, произведение которых равно

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

т. е. равно единичной матрице.

Числовые поля

Числовые поля — любая совокупность чисел, в пределах которой всегда выполнимы и однозначны четыре операции: сложение, вычитание, умножение и деление на числа, отличные от нуля.

Примеры числовых полей: совокупность всех рациональных чисел, т. е. отношение p/q, где p и $q \neq 0$ — обычные целые числа с обычными арифметическими правилами действий; совокупность всех вещественных (действительных) чисел, геометрический образ которых — совокупность всех точек прямой; совокупность всех комплексных чисел $a + ib$, где a и b — вещественные числа.

В частности, совокупность натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ образует подполе числового поля.

Кольцо — совокупность всех элементов, в которой определены и всегда однозначно выполнимы две операции: «сложение» двух элементов (с переместительным и сочетательным свойствами) и «умножение» двух элементов (с сочетательным и распределительным относительно сложения свойствами), причем сложение обратимо.

Все матрицы n-го порядка образуют кольцо с единичным элементом E.

Числовое поле K. В линейной алгебре любое числовое поле обозначают символом K, вещественное поле — R, поле комплексных чисел — символом C. Если некоторое предположение верно для поля K, то оно автоматически верно для полей R и C, которые являются частными случаями поля K.

Изоморфизм числовых полей. Два поля K и K' изоморфны, если между ними можно установить взаимнооднозначное соответствие, при котором сумма и произведение чисел поля K соответствуют сумме и произведению соответствующих чисел поля K'. В этом случае результаты остальных операций — разности и частного также будут соответствовать друг другу ([8], [12], [22], [41]).

§ 2. АФФИННОЕ И ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВА

Аффинное пространство

Определение. Множество элементов произвольной природы, именуемых векторами, называется линейным аффинным пространством, если это множество удовлетворяет трем группам аксиом:

Аксиома сложения. Каждым двум векторам a и b ставится в соответствие определенный вектор

$$c = a + b,$$

называемой *суммой векторов*.

Сложение векторов коммутативно

$$a + b = b + a$$

и ассоциативно

$$(a + b)\, c = a + (b + c).$$

Существует нулевой вектор 0 такой, что для всякого вектора a имеет место равенство

$$a + 0 = a.$$

Относительно всякого вектора a существует противоположный вектор $-a$, для которого

$$a + (-a) = 0.$$

Сумма

$$a + (-b)$$

приводит к разности векторов

$$d = a - b.$$

Аксиома умножения на число. Каждому вектору a и каждому вещественному числу α (скаляру) ставится в соответствие определенный вектор

$$b=\alpha a,$$

называемый произведением вектора a на число α.

Умножение вектора a на число 1 не изменяет вектора, так что

$$1a=a1=a.$$

Умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел

$$(\alpha+\beta)\,a=\alpha a+\beta a$$

и сложения векторов

$$\alpha\,(a+b)=\alpha a+\alpha b,$$

ассоциативно относительно произведения чисел на вектор

$$\alpha\,(\beta a)=\alpha\beta\,(a).$$

Аксиома размерности. Эта аксиома связана с понятием линейной зависимости и линейной независимости векторов. Напишем векторное равенство

$$\alpha a+\beta b+\ldots+\omega g=0.$$

Векторы $a, b,\ldots,g$ линейно независимы, если это равенство возможно только при $\alpha=\beta=\ldots=\omega=0$; в противном случае векторы линейно зависимы.

Вектор

$$r=\alpha a+\beta b+\ldots+\omega g$$

— линейная комбинация векторов $a, b,\ldots,g$. Если векторы $a, b,\ldots, r,\ldots,g$ линейно зависимы, то хотя бы один из них — линейная комбинация остальных. Верно и обратное: векторы, один из которых — линейная комбинация остальных, линейно зависимы.

Если среди векторов $a, b,\ldots,g$ содержится нулевой вектор 0, то эти векторы обязательно линейно зависимы. В частности, один вектор $a\neq 0$ следует полагать линейно независимым, так как $\alpha a=0$ только при $\alpha=0$. Напротив, вектор $a=0$ линейно зависим, так как $\alpha a=0$ при любых значениях α.

Если к линейно зависимым векторам $a, b,\ldots,g$ присоединить произвольные векторы $u, v, t,\ldots$, то эти векторы вместе также будут линейно зависимы.

Опираясь на понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов, так формулируют третью группу аксиом: существует n линейно независимых векторов; всякая совокупность $n+1$ векторов линейно зависима.

Четвертая аксиома. Скалярное произведение вектора с самим собой неотрицательно: $(x, x)\geqslant 0$ обращается в нуль лишь если $x=0$.

Число измерений и размерность пространства. Система векторов, удовлетворяющая этим аксиомам, образует n-мерное линейное пространство, а число n выражает размерность пространства.

Здесь и в дальнейшем линейное аффинное n-мерное пространство выражается символом R_n.

Конкретные пространства. В пространстве R_3 можно построить три линейно независимых вектора, но всякие четыре вектора линейно зависимы. В пространстве R_2, т. е. на плоскости, можно найти два линейно независимых вектора, но всякие три вектора линейно зависимы. В пространстве R_1, т. е. на прямой, всякие два вектора пропорциональны и, следовательно, линейно зависимы.

Подпространства линейного пространства. Если в пространстве R_n задано множество векторов $a, b, c, \ldots, g$, то совокупность всех комбинаций выбранных векторов a, b, c образует подпространство R_3 пространства R_n.

Изоморфизм n-мерных пространств. Линейные пространства R_n и R'_n изоморфны, если между векторами x и x' из этих пространств можно установить взаимнооднозначное соответствие: так что если вектору x соответствует вектор x', то вектору $x+y$ соответствует вектор $x'+y'$, а вектору λx — вектор $\lambda x'$ (λ — число).

Два пространства различной размерности заведомо неизоморфны. Все пространства одной и той же размерности изоморфны. Поэтому говорят, что единственной характеристикой конечномерного линейного пространства является его размерность.

Точечная интерпретация линейного пространства. Каждый вектор, закрепленный одним концом в начале координат, другим концом ассоциируется с некоторой точкой пространства, и, наоборот, каждая точка пространства может быть определена соответствующим вектором, т. е. радиусом-вектором этой точки. Такая замена позволяет называть элементы линейного пространства не векторами, а точками, что не сопровождается никакими изменениями в определениях, связанных с понятием линейного пространства, и аппелирует лишь к геометрическим представлениям, удобным в аналитической геометрии и, следовательно, при обработке результатов измерений и наблюдений. Точечная интерпретация наряду с векторной интерпретацией линейного пространства позволяет геометрически описывать полную картину линейных преобразований.

Евклидово пространство

Многомерная геометрия Евклида. Замена аксиомы Евклида, согласно которой обыкновенное пространство обладает тремя измерениями, аксиомой, в силу которой пространство характеризуется n измерениями, где n — произвольное натуральное число, приводит к обобщенному понятию пространства и соответственно к многомерной геометрии Евклида.

Исходное положение. В одних понятиях сложения векторов и умножения векторов на число, т. е. в понятиях аффинного линейного пространства, нельзя дать правила для измерения длин векторов и углов между ними. Но если в систему этих понятий ввести аксиоматическое определение скалярного произведения, то в терминах сложения векторов, умножения векторов на число и скалярного произведения векторов можно развить всю геометрию Евклида.

Определение евклидова пространства. Линейное пространство E евклидово, если, во-первых, существует правило, по которому для каждых двух векторов a и b из этого пространства поставлено в соответствие вещественное число k, именуемое скалярным произведением векторов, и, во-вторых, это правило удовлетворяет условиям:

1) $ab = ba$,

2) $a(b+c) = ab + ac$,

3) $(ka)b = kab$,

4) $a^2 > 0$ при $a \neq 0$,
$a^2 = 0$ при $a = 0$.

Обозначения. Скалярные произведения векторов a и b, x и y выражают так:

$$ab,\ (ab),\ (a, b); \qquad xy,\ (xy),\ (x, y).$$

Здесь и в дальнейшем использованы гауссовы символы вида

$$[aa],\ [ab],\ [ac],\ldots; \qquad [xx],\ [xy],\ [xz]\ldots$$

Примеры. В пространстве E_3 условия 1—4 выражают основные свойства скалярного произведения, рассматриваемые в векторной алгебре.

В пространстве E_n, элементами которого являются системы чисел, скалярное произведение векторов

$$a = [a_1, a_2, \ldots, a_n], \qquad b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

определяется формулой

$$[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Аналогично, если

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]; \qquad y = [y_1, y_2, \ldots, y_n],$$

то

$$[xy] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

В пространстве $E_{\alpha,\beta}$ непрерывных функций, заданных на интервале (α, β), скалярным произведением функций $x(t)$ и $y(t)$ называют выражение

$$(x, y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y(t).$$

Скалярное произведение двух многочленов от t степени не выше $n-1$ определяется формулой

$$(P, Q)=\int_{\alpha}^{\beta} P(t) Q(t).$$

Основные метрические понятия. Число

$$|a|=\sqrt{[aa]}$$

выражает длину вектора.

Из четвертой аксиомы следует, что у каждого вектора евклидова пространства ε существует длина вектора. У всякого вектора $a \neq 0$ длина положительна, у нуль-вектора длина равна нулю.

Нормированный, или единичный вектор. Такой вектор находится по формуле

$$a^0=\frac{a}{|a|}.$$

Формула

$$x=\sqrt{(x, x)}=\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, dt}$$

выражает норму функции* $x(t)$ в пространстве E_n.

Неравенство Коши—Буняковского. Скалярное произведение ab векторов

$$a=[a_1, a_2, \ldots, a_n]; \qquad b=[b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

удовлетворяет неравенству Коши — Буняковского

$$[ab]^2 \leqslant [aa]\,[bb].$$

Знак равенства имеет место, если числа a_i пропорциональны числам b_i.

В пространстве $E_{\alpha, \beta}$ неравенство Коши — Буняковского принимает вид

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y(t)\, dt\right| \leqslant \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)\, dt} \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\, dt}.$$

Угол между векторами. Из неравенства Коши — Буняковского следует

$$-1 \leqslant \frac{ab}{|a|\,|b|} \leqslant +1; \qquad -1 \leqslant \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}\,\sqrt{[bb]}} \leqslant +1.$$

---

* Вместо термина «длина функции».

Число

$$\alpha=\arccos\frac{ab}{|a|\,|b|},$$

с которым связано равенство

$$\cos\alpha=\frac{ab}{|a|\,|b|},$$

выражает угол между векторами.

Векторы a и b, для которых $ab=0$, т. е. для которых $\alpha=\frac{\pi}{2}$, взаимно перпендикулярны, или ортогональны; при $ab\neq0$ векторы взаимно наклонны.

Если в формуле Коши — Буняковского знак неравенства переходит в равенство, то

$$|a|\,|b|=|ab|.$$

Тогда $\cos\alpha=\pm1$, т. е. α равняется 0 или π. В этом случае векторы коллинеарны, т. е. $b=ka$, где k — скаляр.

Причем при $\cos\alpha=1$ $k>1$, а при $\cos\alpha=-1$ $k<0$.

Теорема Пифагора. Если векторы a и b взаимно ортогональны, то сумма векторов $a+b$ — диагональ прямоугольника со сторонами a и b. Поэтому квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его непараллельных сторон, т. е.

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2.$$

Обобщенная теорема Пифагора. Если векторы $a, b, c,\ldots$ попарно ортогональны, то

$$|a+b+c+\cdots|^2=|a|^2+|b|^2+|c|^2.$$

Неравенство треугольника. Если a и b — произвольные векторы, то вектор $a+b$ — третья сторона треугольника, построенного на векторах a и b. В силу неравенства Коши — Буняковского

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|;$$
$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

Отсюда следует, что длина любой стороны всякого треугольника не больше, чем сумма длин двух других сторон, и не меньше, чем разность длин этих сторон

Векторное произведение двух векторов — вектор, перпендикулярный к векторам a и b, модуль которого равен

$$|a\times b|=|a|\,|b|\sin\alpha.$$

Скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе. В таком базисе скалярное произведение векторов

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots\alpha_ne_n,$$
$$y=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n$$

равно сумме произведений

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

их соответствующих координат. В частности, при $x=y$ сумма $[\alpha\beta]$ произведений α и β переходит в сумму квадратов

$$(x, x) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = [\alpha\alpha].$$

Проекция вектора x на вектор e. Скалярное произведение вектора x на единичный вектор e выражает проекцию вектора x на вектор e. Такое определение означает, что, как и в аналитической геометрии, координаты вектора в ортогональном базисе суть проекции этого вектора на базисные векторы, т. е. на оси координат.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Неоднородная линейная форма. Уравнение вида

$$Ax = b,$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1k} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2k} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

выражает линейную форму системы неоднородных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n \end{gathered}$$

с заданными коэффициентами a_{ik}, образующими матрицу A.

Однородная линейная форма. Уравнение вида

$$Ax = 0$$

выражает линейную форму системы однородных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = 0. \end{gathered}$$

О решении линейных систем. Система m линейных уравнений

$$\sum a_{ik}x_k = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет решение в том и только в том случае, если матрицы

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}b_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}b_n \end{bmatrix},$$

первая из которых основная, или исходная матрица системы, вторая — та же матрица, но расширенная свободными членами, имеют один и тот же ранг (теорема Кронекера — Капелли).

Единственное решение существует при $r=m=n$.

Если обе матрицы имеют ранг $r \leqslant m$, то при $r=m$ уравнения *линейно независимы*, а при $r<m$ — *линейно зависимы*.

Крамера

Решения системы линейных уравнений. Система, определитель матрицы которой отличен от нуля, совместна и определенна. Такая система имеет единственное решение. Формула решения:

$$x_j = \frac{|A|_j}{|A|}.$$

Правило. Если определитель матрицы заданной системы отличен от нуля, то такая система имеет одно и только одно решение: значение неизвестного x_j равно дроби, знаменатель которой — определитель системы $|A|$, а числитель—определитель $|A|_j$, в котором j-й столбец заменен столбцом свободных членов.

Линейные преобразования в конечномерном пространстве

Определение. Если каждому вектору x n-мерного пространства поставлен в соответствие вектор y этого же пространства, то функцию

$$y = A(x)$$

называют преобразованием пространства R.

Условия линейного преобразования. Если

1) $A(x_1+x_2) = A(x_1) + A(x_2)$;

2) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$,

то преобразование A — линейное.

Условие 1 означает, что векторы x_1 и x_2 сначала суммируются, а затем полученный вектор поворачивается.

$A(x_1)+A(x_2)$ означает, что векторы x_1 и x_2 сперва поворачиваются, а затем суммируются. Согласно условию 1 в обоих случаях результат один и тот же.

Примеры. 1) Пусть R' — плоскость, проходящая в R_3 через нуль, и каждому вектору x поставлена в соответствие его проекция $x'=Ax$ на эту плоскость. В этом случае условие 1 означает, что проекция суммы равна сумме проекций. Соблюдается также условие 2.

2) Условия 1 и 2 сохраняются, если каждому вектору

$$x=[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

сопоставляется вектор

$$y=Ax=[y_1, y_2, \dots, y_n].$$

Значения y_i вычисляются по формуле

$$y_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k,$$

в которой a_{ik} — элементы матрицы $[a_{ik}]$.

3) Единичное преобразование

$$Ex=x$$

ставит в соответствие каждому вектору x тот же вектор x.

4) Нулевое преобразование

$$Ox=0$$

ставит каждому вектору x нулевой вектор.

5) Линейное преобразование

$$y=Ax$$

выражает равенство двух векторов y и Ax. Размерность этих векторов одна и та же $(n\times 1)$ и пространство, в котором они расположены, одно и то же, т. е. n.

Рассматривая матрицу A как оператор, а x и y как векторы, можно сказать, что оператор A переводит вектор x в вектор y. Такая операция осуществляется вращением одного вектора в другой оператором A вокруг некоторого начала координат O.

Преобразование λA означает, что каждому вектору x ставится в соответствие вектор $\lambda(Ax)$. Если линейному преобразованию A, т. е. оператору A, отвечает матрица $[a_{ik}]$, то преобразованию λA отвечает матрица $[\lambda a_{ik}]$.

Преобразование $Ax=0$ означает, что каждому вектору x ставится в соответствие нулевой вектор. Так что если оператору A отвечает матрица

$$A=\{a\,b\dots g\},$$

то вектор x перпендикулярен ко всем векторам $a, b, \dots, g$ этой матрицы.

Связь между матрицами и линейными преобразованиями. Если

$$g_k = Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i$$

— координаты вектора g в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и совокупность чисел a_{ik} при $k = 1, 2, \ldots, n$ образует матрицу

$$A = [a_{ik}]$$

линейного преобразования A в этом базисе, то при заданном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ каждому линейному преобразованию A однозначно соответствует матрица $[a_{ik}]$ и, обратно, каждой матрице $[a_{ik}]$ однозначно отвечает линейное преобразование Ae. При изменении базиса матрица, соответствующая данному линейному преобразованию, изменится.

Примеры. 1. Пусть R — трехмерное пространство, A — линейное преобразование, состоящее в проектировании каждого вектора на плоскость, и пусть единичные векторы e_1, e_2, e_3 направлены по осям координат. Тогда

$$Ae_1 = e_1; \quad Ae_2 = e_2; \quad Ae_3 = 0,$$

т. е. матрица преобразования в этом базисе имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Пусть E — единичное преобразование и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в R. Тогда

$$Ae = e_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. матрица единичного преобразования в любом базисе имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Матрица нулевого преобразования в любом базисе состоит сплошь из нулей.

Действия над линейными операторами

1. Сложение операторов

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C),$$
$$A + 0 = A,$$
$$A + (-A) = 0.$$

2. Умножение оператора на число

$$\lambda_1 (\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2) A;$$
$$1 \times A = A,$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2) A = \lambda_1 A + \lambda_2 A;$$
$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

3. Умножение операторов

$$A (BC) = (AB) C,$$
$$(A + B) C = AC + BC,$$
$$C (A + B) = CA + CB.$$

Эти формулы автоматически переносятся на линейные преобразования.

§ 4. КВАДРАТИЧНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Квадратичная форма. Функция

$$F = A (x, x) = x^* Ax,$$

где A — симметричная матрица; x^* — транспонированный вектор относительно вектора переменных $x = [x_{11}, x_2, \dots, x_n]$ выражает квадратичную форму от этих переменных. Если A — вещественная матрица, то форма F вещественная.

Определитель $|A| = 0$ матрицы A — дискриминант квадратичной формы. Если $|A| = 0$, то форма F особенная, вырожденная, сингулярная, в противном случае — неособенная, невырожденная, регулярная.

Из произведения в правой части следует, что F — скалярный квадрат вектора x.

Положительные (отрицательные) квадратичные формы. Форма неотрицательная (неположительная), если

$$A (x, x) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

при любых значениях вещественных переменных. В этом случае матрица A положительно полуопределенная (отрицательно полуопределенная).

Форма F положительно определенная (отрицательно определенная), если

$$A (x, x) > 0 \quad (< 0)$$

при любых не равных одновременно нулю вещественных значениях переменных $x \neq 0$. В этом случае матрица A также положительно определенная (отрицательно определенная).

Критерий положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы. Если главные миноры матрицы A удовлетворяют условиям:

$$1) \; M_{11} > 0, \quad M_{22} > 0, \dots, M_{nn} > 0;$$
$$2) \; M_{11} < 0, \quad M_{22} < 0, \dots, M_{nn} < 0,$$

то в первом случае форма F положительно определенная, а во втором — отрицательно определенная.

Обратная форма F^{-1}. Подстановка

$$x = A^{-1}y$$

преобразует квадратичную форму

$$F = x^*Ax$$

в форму

$$F^{-1} = y^*A^{-1}y.$$

Таким образом, если F — положительно определенная форма, то F^{-1} — также положительно определенная и наоборот.

Билинейная форма. Форма

$$\Phi = A(x, y) = x^*Ay$$

билинейная, если:

1) при фиксированном y форма $A(x, y)$ — линейная функция от x;

2) при фиксированном x форма $A(x, y)$ — линейная функция от y.

Билинейная форма симметрична, если для любых векторов x и y имеет место равенство

$$A(x, y) = A(y, x).$$

Примером симметричной билинейной формы в евклидовом пространстве служит скалярное произведение векторов x и y.

Если $x = y$, то билинейная форма $\Phi = A(x, y)$ переходит в квадратичную $F = A(x, x)$. В этом случае билинейная форма полярна к квадратичной.

Полярная форма $A(x, y)$ однозначно определяется своей квадратичной формой.

Теория квадратичных форм и метод наименьших квадратов. Вся классическая теория метода наименьших квадратов, т. е. теория Лежандра — Гаусса, связана с линейными преобразованиями и преобразованиями квадратичных форм к сумме квадратов. Аналитическое содержание этой теории состоит в исследовании центральных линий и поверхностей 2-го порядка в координатной форме. Теория преобразования квадратичных форм к сумме квадратов, или каноническому виду, есть теория преобразования центральных линий и поверхностей 2-го порядка к главным осям. Так как главные оси взаимно перпендикулярны, то совокупность главных осей принимается за оси прямоугольной системы координат.

Уравнение центральной поверхности в канонической форме. Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в обозначениях

$$x=x_1, \quad y=x_2, \quad z=x_3;$$

$$\lambda_1=\frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2=\frac{1}{b^2}, \quad \lambda_3=\frac{1}{c^2}$$

принимает вид

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2=1; \qquad \lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2=1.$$

Обобщение этих уравнений на пространство n измерений приводит к уравнению n-мерного эллипсоида

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\ldots+\lambda_n x_n^2=1$$

в канонической форме, т. е. в той специальной системе отсчета, где координатные оси выражают оси симметрии, или главные оси эллипсоида.

Выразим уравнение n-мерного эллипсоида в матричной форме:

$$x^*\lambda x=1.$$

В такой форме уравнение содержит диагональную матрицу

$$\Lambda=\{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\}=\left\{\frac{1}{a^2}\ \frac{1}{b^2}\cdots\frac{1}{g^2}\right\},$$

где λ_j — собственные значения, или характеристические числа матрицы квадратичной формы; числа

$$a^2,\ b^2,\ldots,\ g^2,$$

обратные характеристическим числам, или собственным значениям, — квадраты дли полуосей n-мерного эллипсоида.

Таким образом, уравнение в канонической форме есть уравнение центральной поверхности 2-го порядка, главные оси которого совпадают с осями прямоугольной системы координат.

Квадратичная форма

$$F=A(x, x)=x^*Ax$$

— общая форма центральной поверхности 2-го порядка. Преобразование этой формы к каноническому виду

$$x^*\Lambda x=1$$

означает преобразование к главным осям поверхности 2-го порядка.

Переход от общей формы к каноническому виду связан с преобразованием квадратной матрицы A к диагональному виду Λ.

Симметричная матрица квадратичной формы A и центральная поверхность 2-го порядка. Известно, что векторы относятся к узкому классу нескалярных величин, так называемых тензоров, и могут быть охарактеризованы системой чисел a_i с одним индексом. В общем случае индексов может быть два, три и более: a_{ik}, a_{ikj} и т. д. Среди этих тензоров особенно важную роль играют тензоры 2-го ранга, или 2-й валентности, обозначаемые индексами a_{ik}. Координаты такого тензора могут быть расположены так же, как элементы в квадратной симметричной матрице A. Ни одна из этих координат не имеет самостоятельного значения. Только совокупность всех координат определяет тензор, подобно тому как вся совокупность составляющих образует вектор. Таким образом, квадратная симметричная матрица A есть матрица тензора 2-го ранга. Но тензор 2-го ранга описывает центральные линии и поверхность 2-го порядка. Стало быть, матрица A — координатная характеристика центральных линий и поверхностей 2-го порядка, т. е. линий и поверхностей, имеющих центр (окружность, сфера, эллипс, эллипсоиды).

Главные оси поверхности 2-го порядка. Центральная поверхность 2-го порядка имеет, вообще говоря, n и только n главных осей. Так как главные оси взаимно перпендикулярны, то всю совокупность из них естественно принять за оси прямоугольной системы координат с началом, совпадающим с центром поверхности 2-го порядка. Тогда возникает основание, с которым связано аналитическое исследование в теории и практике метода наименьших квадратов.

Взаимное положение главных осей и базисных векторов матрицы A. Если координатная система, к которой относится уравнение центральной поверхности 2-го порядка, задана векторами

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

и если эти векторы обладают свойствами

$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

то они образуют ортонормированную базисную систему. Если же эти векторы имеют произвольные длину и направление, удовлетворяющие лишь одному условию, а именно, что они линейно независимы, то образуется косоугольная базисная система.

Возможны два положения базисных векторов по отношению к главным осям:

1) векторы ортонормированного базиса не совпадают с главными осями поверхности 2-го порядка;

2) главные оси поверхности 2-го порядка расположены произвольно относительно векторов косоугольного базиса.

В первом случае приведение к главным осям осуществляется ортогональным преобразованием, т. е. простым вращением ортонормированной базисной системы до совпадения с главными осями. Во втором случае приведение к главным осям производится построением сопряженной системы относительно косоугольной базисной системы.

Каждый из этих случаев приводит к одной и той же формуле

$$x^* \Lambda x = 1,$$

согласно которой центральная поверхность выражается в канонической форме.

Геометрическое содержание этой формулы связано со следующими представлениями.

Уравнение собственных значений и собственных векторов. Напишем уравнение

$$Ax = b,$$

где A — квадратная матрица порядка n; x и b — векторы.

Перепишем это уравнение в обратном порядке:

$$b = Ax.$$

Рассматривая x как заданный вектор, можно сказать, что матрица A ставит в соответствие данному вектору x вектор b. Если вектор b имеет такое же направление, что и первоначальный вектор x, то составляющие вектора b должны быть пропорциональны составляющим вектора x. Тогда будем иметь условие

$$Ax = \lambda x.$$

Выразим это условие в координатной форме:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1;\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n
\end{aligned}$$

и построим однородную систему:

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_n x_n &= 0,\\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n &= 0
\end{aligned}$$

относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Однородная система имеет ненулевое решение, если

$$\begin{vmatrix}
(a_{11} - \lambda)\, a_{12} \ldots a_{1n} \\
a_{21}\, (a_{22} - \lambda) \ldots a_{2n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} \quad a_{n2} \quad (a_{nn} - \lambda)
\end{vmatrix} = |A - \lambda x| = 0,$$

т. е., если определитель этой системы равен нулю.

Умножив определитель на $(-1)^n$, получим характеристический полином

$$(-1)^n A - \lambda x = \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n.$$

Приравнивая полином нулю, будем иметь характеристическое уравнение

$$\lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \cdots (-1)\, s_n = 0$$

степени n. Это уравнение всегда имеет n и только n комплексных корней. Некоторые из этих корней могут совпасть, тогда их называют к р а т н ы м и, или повторяющимися.

Числа $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, при которых уравнение

$$Ax = \lambda x$$

может иметь ненулевое решение, суть характеристические числа, или собственные значения матрицы A.

Если все собственные значения λ_i различны, то матрица A п о л н о о с н а я. Для каждого возможного значения λ_i может быть найдено решение

$$u_1 = [x_1^1 \;\; x_2^1 \ldots x_n^1],$$
$$u_2 = [x_1^2 \;\; x_2^2 \ldots x_n^2],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n = [x_1^n \;\; x_2^n \ldots x_n^n]$$

однородной системы, где u_1 — собственные векторы матрицы A.

Каждое решение u_i определяется лишь с точностью до произвольного (ненулевого) множителя. Следовательно, каждый из векторов u_i, умноженный на произвольный ненулевой множитель, останется собственным вектором. Это означает, что собственные векторы u_i определяются однозначно лишь по н а п р а в л е н и ю, но длина каждого из них остается произвольной.

Инварианты характеристического уравнения. Связь корней характеристического уравнения с его коэффициентами определяется по теореме Виета, согласно которой сумма корней этого уравнения равна сумме диагональных элементов матрицы A, т. е.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

и выражает след

$$SpA = [a_{ii}],$$

или характер матрицы A.

Произведение корней равно определителю матрицы A.

Коэффициенты s_k выражают суммы всех миноров определителя матрицы A порядка n, опирающихся на главную диагональ и взятых со знаком $(-1)^n$. Число таких миноров равно C_n^k.

Совокупность всех корней λ_i, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность, образует с п е к т р матрицы A.

Ранг матрицы A равен числу отличных от нуля собственных значений. Матрица A является вырожденной в том и только в том случае, когда по крайней мере одно из собственных значений равно нулю.

Частный случай определения корней характеристического полинома. Если матрица преобразования A треугольная

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ & a_{22} \ldots a_{2n} \\ & a_{nn} \end{bmatrix},$$

то

$$P(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$$

— характеристический полином. Следовательно, числа a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} — собственные значения, или корни полинома; сумма диагональных элементов

$$SpA = [a_{11}]$$

— след, или характер матрицы A; произведение корней

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

— определитель матрицы A.

Описанный случай частного характера занимает в методе наименьших квадратов центральное место.

Главные оси и главные направления. Соединив произвольную точку P поверхности 2-го порядка с началом координат, получим радиус-вектор

$$x = [x_1,\ x_2, \ldots, x_n]$$

точки P поверхности в случае n измерений.

В каждой точке поверхности можно построить нормаль, т. е. вектор, перпендикулярный к касательной плоскости поверхности в данной точке P. Радиусы-векторы и нормали в общем случае не параллельны друг другу. Но в направлениях, задаваемых координатными осями ортогональной системы, радиусы-векторы и нормали оказываются параллельными. Эта особая совокупность направлений образует главные направления, или главные оси поверхности 2-го порядка.

Уравнение главных осей. Параллельность радиуса-вектора x и нормали Ax выражается формулой

$$Ax = \lambda x,$$

т. е. уравнением собственных значений и собственных векторов матрицы A. Поэтому формула указанного вида выражает уравнение главных осей, или главных направлений.

Геометрический смысл собственных значений. Найдем точку с радиусом-вектором x, в которой главная ось пересекает поверхность 2-го порядка. Умножив обе части уравнения главных осей скалярно на вектор x, получим соотношение

$$xAx=\lambda x^2.$$

Так как

$$xAx=1,$$

то

$$x^2=\frac{1}{\lambda},$$

где

$$x^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$$

— квадрат радиуса-вектора, или квадрат расстояния от начала координат до точки, в которой главная ось пересекает поверхность 2-го порядка в точке P.

Таким образом, собственное число λ_i — величина, обратная квадрату расстояния от центральной поверхности до точки ее пересечения с главной осью.

Если собственное число λ_i велико, то в направлении главной оси поверхность 2-го порядка расположена близко к центру, если же оно мало, то далеко от центра.

Взаимное расположение главных осей коммутативных и некоммутативных матриц

Главные оси диагональных матриц. Произведение диагональных матриц

$$DD'=D'D$$

коммутативно и главные оси этих матриц параллельны.

Главные оси коммутативных матриц. Если

$$AB=BA,$$

то главные оси также параллельны.

Главные оси некоммутативных матриц. Если

$$AB\neq BA,$$

то главные оси различны.

Главные оси единичной матрицы. Единичная матрица порядка n перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка

$$AE=EA.$$

Матрица E соответствует сфере. Поэтому любая ось этой матрицы может быть выбрана в качестве главной оси.

Главные оси матриц A и A^{-1} одни и те же.

Главные оси в случае кратных корней. В уравнении эллипса равенство чисел λ_1, λ_2 приводит к уравнению окружности

$$\lambda(x_1^2+x_2^2)=1.$$

При равенстве тех же собственных чисел уравнение эллипсоида переходит в уравнение эллипсоида вращения

$$\lambda(x_1^2+x_2^2)+\lambda_3 x_3^2=1.$$

Равенство всех трех значений λ приводит к уравнению трехмерной сферы

$$\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=1.$$

Если

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n,$$

то сфера

$$\lambda(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=1$$

n-мерная.

Случай совпадения чисел λ_1 и λ_2 можно рассматривать как предельный, когда эти числа стремятся к сближению. В таком случае эллипс преобразуется в окружность, а эллипсоид — в сферу. Соответственно главные оси переходят в два и три взаимно перпендикулярных диаметра. Окружность (сфера) служит предельным положением бесконечного числа эллипсов (эллипсоидов), так что любая пара (тройка) диаметров выражает главные оси окружности (сферы). Если в n-мерном пространстве k собственных значений сливаются в одно, то это означает, что в n-мерном подпространстве проявляются сферические условия. Тогда любые k взаимно перпендикулярных осей могут быть выбраны в качестве главных осей поверхности 2-го порядка. Наличие кратных корней не исключает существования n различных взаимно перпендикулярных осей. При этом имеет место тот факт, что некоторые из них не определяются однозначно и могут быть заменены другими равноправными им осями. Совпадение некоторых собственных значений в случае симметричной матрицы не связано с совпадением соответствующих главных осей. Взаимная перпендикулярность осей исключает возможность совпадения соответствующих собственных значений.

Блочные (клеточные) матрицы

Построение блочных матриц. Пусть дана прямоугольная матрица

$$A=]a_{ik}]$$

размера $m \times n$. При помощи горизонтальных и вертикальных линий рассечем матрицу A на прямоугольные блоки, или клетки

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} n_1 & n_2 \ldots & n_t \end{array} & \\ A= & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} \ldots A_{2t} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{s1} & A_{s2} \ldots A_{st} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \\ m_s. \end{array} \end{array}$$

Такую матрицу называют блочной, или клеточной размера $m_\alpha \times n_\beta$ ($\alpha=1, 2,\ldots,s;\ \beta=1, 2,\ldots,t$).

Действия над блочными матрицами производятся по тем же формальным правилам, когда вместо блоков матрица A содержит числовые элементы.

Сумма и разность блочных матриц. Если

$$A=[A_{ik}]; \qquad B=[B_{ik}]$$

— блочные матрицы одинаковых размеров и элементы их составляющих также одинаковых размеров, то

$$A \pm B=[A_{ik} \pm B_{ik}]=C$$

— сумма или разность блочных матриц A и B.

Умножение блочной матрицы на число. Если все блоки матрицы A умножить на число α, то получим результат, выражающий произведение блочной матрицы на число.

Умножение блочных матриц. Такое действие осуществимо, если длина строки первого сомножителя равна длине столбца второго сомножителя и вместе с тем если все горизонтальные размеры блоков в первом сомножителе совпадают с вертикальными размерами блоков второго сомножителя. Тогда произведение блочных матриц A_{nm} и B_{pm} выразится блочной матрицей

$$C_{np}=A_{nm}B_{mp}$$

размера $n \times p$.

Квазитреугольные матрицы. Матрицы вида

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots A_{1s} \\ & A_{22} \ldots A_{2s} \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & A_{ss} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & & \\ A_{21} & A_{22} & \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots A_{ss} \end{bmatrix}$$

называются квазитреугольными. Подобного вида матрицы являются обобщением обыкновенных матриц треугольной формы — в е р х н е й и н и ж н е й.

Квазидиагональная матрица. Матрица вида

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} & \\ & & A_{ss} \end{bmatrix}$$

с блочными подматрицами по главной диагонали — квазидиагональная. Такая матрица является частным выражением квазитреугольной матрицы.

Умножение блочной матрицы слева или справа на квазидиагональную. В первом случае все строки блочной матрицы умножаются на соответствующие диагональные блоки квазидиагональной матрицы, во втором случае все столбцы умножаются на те же блоки той же матрицы.

Произведение двух верхних (нижних) квазитреугольных матриц. При блочном умножении такое произведение снова приводит к верхней (нижней) квазитреугольной матрице. При этом диагональные блоки произведения получаются перемножением соответствующих диагональных блоков сомножителей.

Определитель квазитреугольной матрицы. Если A — квазитреугольная (в частности, квазидиагональная) матрица с квадратными диагональными блоками, то в соответствии с разложением Лапласа определитель этой матрицы равен произведению

$$|A|=|A_{11}||A_{22}|\ldots|A_{ss}|$$

определителей диагональных блоков.

Преобразование блочной матрицы в квазитреугольную. Теорема, на основании которой возможно такое преобразование, имеет следующее содержание.

Если в блочной матрице A к α-й блочной строке (столбцу) прибавить β-ю блочную строку (столбец), предварительно умноженную слева (справа) на прямоугольную матрицу X соответствующих размеров, то при этом преобразовании ранг матрицы A не изменится. В случае когда A — квадратная матрица, определитель этой матрицы также не изменится.

Частный случай. Если в матрице A диагональный блок A_{11} — квадратная и притом неособенная подматрица и если к α-й строке матрицы A прибавить первую строку, умноженную слева на

$$-A_{\alpha 1}A_{11}^{-1},$$

то при $\alpha=2, \ldots, s$; $\beta=2, \ldots, t$ получим блочную матрицу

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\ldots A_{1t} \\ 0 & A_{22}^{(1)}\ldots A_{2t}^{(1)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & A_{s2}^{(1)}\ldots A_{st}^{(1)} \end{bmatrix},$$

где

$$A_{\alpha\beta}^{(1)}=-A_{\alpha 1}A_{11}^{-1}A_{1\beta}+A_{\alpha\beta}.$$

Если $A_{22}^{(1)}$ — квадратная неособенная матрица, то этот процесс можно продолжить и, таким образом, построить обобщенный алгоритм Гаусса.

Пусть определитель

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

содержит квадратные матрицы A и D, определители которых отличны от нуля. Вычтем из второй строки первую, предварительно умноженную слева на $-CA^{-1}$. Тогда получим результат

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\,|D-CA^{-1}B|.$$

Если же из первой строки того же определителя вычесть вторую строку, умноженную слева на $-BD^{-1}$, то будем иметь результат

$$\begin{vmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{vmatrix} = |A-BD^{-1}C|\,|D|,$$

такой же, как и в первом случае.

Описанные правила преобразований блочных матриц к квазитреугольной форме служат основой преобразований квадратичных форм к сумме квадратов, или каноническому виду в алгоритмах Гаусса ([8], [12], [22], [23], [25], [41]).

ГЛАВА II
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 5. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Фундаментальным основанием математической обработки результатов измерений и наблюдений служит теория вероятностей — научная дисциплина, изучающая закономерности случайных явлений. Возникновение теории вероятностей относится к середине XVII столетия и связано с трудами Гюйгенса, Паскаля, Ферма и Бернулли. Последующее развитие теории вероятностей отражено в исследованиях Муавра, Лапласа, Гаусса и Пуассона в области теории ошибок и статистики. С формально-аналитической стороны к аналогичному направлению относится работа основоположника неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского, посвященная теории ошибок на сфере с целью установления геометрической системы, господствующей во Вселенной.

С середины XIX столетия и до 20-х годов нашего века развитие теории вероятностей связано с именами русских ученых: П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова. Первый в России курс теории вероятностей написан В. Я. Буняковским, оказавшим большое влияние на развитие этой науки.

Основное значение работ П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова в области теории вероятности состоит в том, что ими было введено и широко использовано понятие случайной величины.

Современное развитие теории вероятностей характеризуется расширением круга ее практических приложений. Ученые США, Великобритании, Франции, Италии, Швеции, Польши, Венгрии, Японии и других стран обогатили теорию вероятностей многими важными результатами. В системе исследований советская школа занимает ведущее положение. Представителями этой школы являются С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко и др.

В первом десятилетии нашего века Э. Борель указал на идеи, связывающие теорию вероятностей с метрической теорией функций действительного переменного. Эти идеи широко развиты А. Н. Колмогоровым, Е. Е. Слуцким, П. Леви, А. Леминуком и др. Благодаря им оказалось возможным решение классических задач, поставленных П. Л. Чебышевым. Идеи метрической теории функций и функционального анализа значительно расширили содержание теории вероятностей.

К тридцатым годам нашего столетия относится создание основ теории стохастических процессов. Построение математически законченных основ теории стохастических процессов принадлежит А. Н. Колмогорову и А. Я. Хинчину.

За последнее двадцатилетие неизмеримо возросла роль теории вероятностей в современном естествознании. Всеобщее признание молекулярных представлений о строении вещества привело к использованию теории вероятностей в физике и химии. При этом основной принцип, которым руководствуются в теории вероятностей, состоит в том, что вместо учета свойств отдельной молекулы занимаются исследованием молекулярных явлений в их массовой совокупности.

На этот принцип опираются там, где предметом исследования является множество или совокупность большого числа равноправных или почти равноправных объектов. Оставляя в стороне рассмотрение всех деталей и отвлекаясь от учета всех несущественных особенностей, теория вероятностей обращается к исследованию закономерностей случайных явлений в их массовом проявлении. В такой теории отказываются от тривиального представления случайного события, идущего вразрез с установившимся порядком вещей.

Случайные события

Случайное событие — всякий факт, который в результате опыта (эксперимента) в природных условиях может произойти или не произойти. События различают элементарные и сложные.

Элементарные события (не разлагаемые на более простые) — множество всех исходов эксперимента, выражаемое совокупностью точек в пространстве различного числа испытаний, измерений, наблюдений.

Пространство элементарных событий — совокупность всех элементарных событий или выборочное пространство, в котором элементарные события — точки этого пространства.

Сложные события — подмножество пространства элементарных событий, из которых составлены те или иные сложные события.

Символы элементарных событий E, ω, e; пространство из них R. В дальнейшем ограничимся соответственно символами ω и R.

Примеры элементарных и сложных событий

1. На гранях игральной кости (кубика) нанесено число очков от 1 до 6. Элементарные события определяются числами 1, 2,...,6. Шесть точек $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ образуют пространство элементарных событий R_6.

2. Из 10 жетонов, занумерованных числами от 1 до 10, один извлекается наудачу. При этом может появиться любое из этих чисел, так что элементарные события определяются числами 1, 2,..., 10. Десять точек образуют пространство элементарных событий R_{10}.

Виды случайных событий

События различают:

Достоверные U, если в результате опыта события непременно должны произойти.

Невозможные V, противоположные достоверным, т. е. события, которые в данном опыте не могут произойти.

Совместимые, если среди составляющих их элементарных событий имеются одинаковые. Так, например, события

$$A(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \quad \text{и} \quad B(\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6),$$

содержащие по два элементарных события ω_3 и ω_4, — совместимые.

Несовместимые (непересекающиеся), если они не имеют в своем составе одних и тех же элементарных событий. Например, события

$$A(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \text{и} \quad B(\omega_4, \omega_5, \omega_6)$$

несовместимы. Все элементарные события несовместимы.

Независимые, если наступление одного не зависит от того, произошло или не произошло другое событие.

Равновозможные, если по условиям симметрии имеются основания полагать, что ни одно из событий не является объективно более возможным, чем другое.

Полная группа событий — совокупность событий, в которых в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них.

Противоположные $A+\overline{A}=U$ — несовместимые события, в сумме составляющие достоверное событие.

Случаи (шансы) — несовместимые и равновозможные события, образующие полную группу.

Благоприятный (благоприятствующий) случай — такой случай, возникновение которого влечет за собой появление данного события.

Схема случаев (схема урн) — классическая схема, когда исчерпывается система равновозможных и исключающих друг друга исходов опыта.

Символы сложных случайных событий обозначаются большими буквами латинского алфавита в словарной A, B, C, D,... или в индексной A_1, A_2, A_3,...., B_1, B_2, B_3,... и т. д. формах.

Соотношения между случайными событиями. Пусть A, B, C,... — случайные события. Тогда равенство

$$A=B$$

означает, что появление одного из этих событий влечет появление другого. В этом случае множества элементарных событий, отвечающих наступлению A и B, совпадают.

С у м м а — объединение

$$C=A+B$$

—событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B. Так, например, сумма событий $A(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ и $B(\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6)$ равна

$$A+B=C(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6).$$

Наступление хотя бы одного из событий A_1, $A_2, \ldots, A_n$ равно сумме

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Р а з н о с т ь

$$C=A-B$$

—событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит.

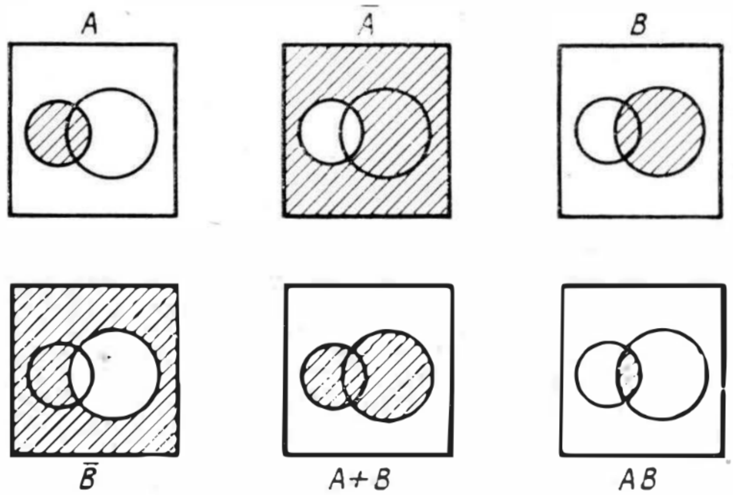

Рис. 5.

С у м м а п р о т и в о п о л о ж н ы х с о б ы т и й. Пусть $A(\omega_1, \ldots \omega_k)$ и $\overline{A}(\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n)$. Тогда $A+\overline{A}=U(\omega_1, \ldots, \omega_k, \quad \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n)$.

П р о и з в е д е н и е — пересечение

$$C=AB$$

—событие, состоящее в совместном наступлении событий A и B.

Пусть $A(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ и $B(\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6)$, тогда $AB=C(\omega_3, \omega_4)$—произведение, или пересечение событий A и B.

Имеют место законы:

к о м м у т а т и в н ы й — перестановочный

$$A+B=B+A, \qquad AB=BA;$$

а с с о ц и а т и в н ы й — сочетания

$$A+(B+C)=(A+B)+C, \quad A(BC)=(AB)C;$$

д и с т р и б у т и в н ы й — распределения

$$A(B+C)=AB+AC, \quad A+(BC)=(A+B)(A+C);$$

т о ж д е с т в а

$$A+A=A, \qquad AA=A.$$

Диаграмма Вьенна соотношений случайных событий. Внутри квадрата (рис. 5) наудачу выбирается точка. Пусть A — событие «выбранная точка лежит внутри малой окружности», а событие B — «выбранная точка лежит внутри большой окружности». Тогда события A, $\overline{A}$; B, $\overline{B}$; $A+B$; AB состоят в попадании выбранной точки внутрь заштрихованных областей.

Случайные величины

Современная теория вероятностей оперирует главным образом по «схеме случайных величин» в отличие от классической теории вероятностей, где господствует преимущественно «схема случаев, или событий».

Переход от схемы случаев к схеме случайных величин связан с заменой понятия числа понятием множества. При такой замене измеримое множество в данном опыте рассматривается как событие в расширенном смысле, совокупность исходов, благоприятствующих наступлению ожидаемого события, — как подмножества этого множества, а отношение подмножества к множеству — как среднее значение во всем множестве.

Случайная величина — любая (не обязательно числовая) переменная x, значения которой образуют множество элементарных событий, или множество точек в пространстве n измерений.

Виды случайных величин. По видам переменных случайные величины различают:

д и с к р е т н ы е или п р е р ы в н ы е, частные значения которых можно перенумеровать;

н е п р е р ы в н ы е, если возможные значения случайных величин непрерывно (сплошь) заполняют некоторый интервал;

с м е ш а н н ы е — комбинации из дискретных и непрерывных случайных величин.

Распределение случайных величин — описание возможных значений случайной величины и соответствующих вероятностей.

Закон распределения — всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

Таблица распределения — простейшая форма закона распределения прерывной случайной величины

$$x\left\{\frac{x_1 \mid x_2 \mid \cdots \mid x_n}{p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n}\right\},$$

где вероятности удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Ряд распределения — совокупность всех значений случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_6$ и соответствующих им вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_6$ выражается таблицей распределения.

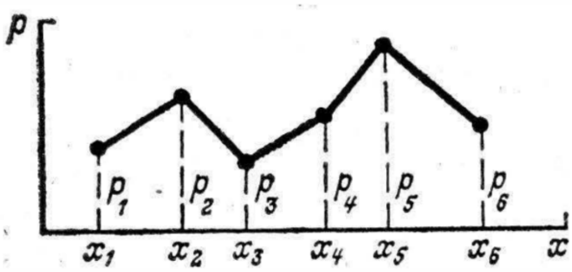

Рис. 6.

Многоугольник распределения — графическое представление ряда распределения значений случайной величины (рис. 6).

Механическая интерпретация ряда распределения — система материальных точек с массами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, расположенных по оси абсцисс.

Интегральный закон распределения — функция $F(x)$, равная вероятности $P(X<x)$ того, что случайная величина X будет меньше произвольно выбранного значения x; это неубывающая функция, всюду непрерывная слева и такая, что

$$F(-\infty)=0, \qquad F(+\infty)=1.$$

Дифференциальный закон распределения — плотность вероятности

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x \leqslant x < x+\Delta x)}{\Delta x}=F'(x),$$

обладающая свойствами:

$$f(x) \geqslant 0; \quad f(x)=\frac{dF(x)}{dx}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,dx=1;$$

$$P(a \leqslant x < b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Кривая распределения — линия, изображающая плотность вероятности (плотность распределения) случайной величины.

Вероятность

К вопросу определения вероятности. Число различных определений понятия вероятности велико. Большинство определений сводится к трем группам, в которых под вероятностью понимают:

1) количественную меру «степени уверенности» исследователя;

2) числовую меру степени объективной возможности наступления события по классической схеме (схеме урн);

3) устойчивую частоту появления события при большом количестве испытаний (статистическое толкование).

Первая группа определений субъективного характера и лишена математического смысла, вторая — связана с классической формулой подсчета вероятностей, третья — отражает простейшую форму закона больших чисел.

Классическая формула. Вероятность по схеме случаев. Если события составляют полную группу, попарно несовместимы и одинаково возможны, т. е. соответствуют схеме случаев (схеме урн), то

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где $P(A)$ — вероятность события A;

n — общее число случаев;

m — число случаев, благоприятствующих событию A.

Вероятность априорная — вероятность, известная до опыта.

Вероятность апостериорная — вероятность, найденная в результате опыта.

В любом случае вероятность события — всегда рациональная правильная дробь $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Невозможному событию соответствует вероятность 0, достоверному — вероятность 1.

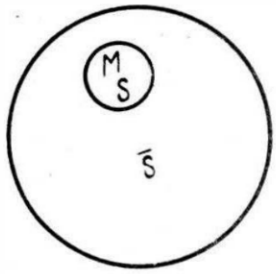

Рис. 7.

Принцип практической уверенности. Указанное выше соответствие следует понимать не в обычном, а в стохастическом смысле. Если в опыте вероятность некоторого события весьма мала, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном выполнении опыта события не произойдет. Если же в данном опыте вероятность близка к единице, то можно быть практически уверенным в том, что при однократном выполнении опыта событие произойдет.

Геометрические вероятности. Пусть в результате опыта в некоторую область S попадает точка M. Требуется найти вероятность того, что точка окажется в области S, являющейся частью всей области $\bar{S}$ (рис. 7).

Геометрическое определение вероятности может быть использовано в том случае, если вероятность попадания в любую часть области пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему и т. д.) и не зависит от ее расположения и формы.

По определению вероятность попадания в область S при бросании наудачу точки в область $\bar{S}$ равна

$$P=\frac{S}{\bar{S}}.$$

Области могут иметь любое число измерений.

Частота и вероятность

Понятие частоты. Частота — статистическое (опытное, экспериментальное) определение вероятности.

Абсолютная частота — число опытов m, относящихся к испытанию некоторого события A.

Относительная частота — правильная дробь

$$P' = \frac{m}{n},$$

где m — число опытов, при которых возникло событие A;

n — общее число произведенных опытов.

Устойчивость частот. При неограниченном увеличении числа однородных независимых опытов с практической достоверностью можно утверждать, что частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности в отдельном опыте (теорема Бернулли).

С увеличением числа опытов характер приближения частоты к вероятности отличен от стремления к пределу в математическом смысле, когда переменная x с возрастанием n стремится к постоянному пределу a, если разность $x_n - a$ становится меньше любого малого положительного числа ε для всех значений n, начиная с некоторого достаточно большого числа.

Свойства частот сводятся к трем формулам:

1) частота достоверного события равна единице;

2) частота невозможного события равна нулю;

3) если случайное событие C является суммой несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то частота C равна сумме частот, с которыми возникают слагаемые события.

Соответственно в случае статистического определения от вероятности необходимо требовать выполнения аналогичных свойств:

1) вероятность достоверного события равна единице;

2) вероятность невозможного события равна нулю;

3) если случайное событие C является суммой конечного числа несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, имеющих вероятность, то вероятность C существует и равна сумме вероятностей слагаемых

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Соотношения, установленные для частот, служат прообразом основных соотношений, которым удовлетворяют вероятности соответствующих событий. По этим соображениям теорию вероятностей определяют как область математики, занимающуюся исследованием математических моделей случайных явлений, обладающих свойством устойчивости частот.

§ 6. АКСИОМАТИКА А. Н. КОЛМОГОРОВА. ТЕОРЕМЫ

Идея А. Н. Колмогорова. Впервые аксиоматическое построение теории вероятностей осуществил в 1917 г. С. Н. Бернштейн, исходя из качественного сравнения случайных событий по их вероятностям.

Иной подход предложен А. Н. Колмогоровым. Идея включения математических основ теории вероятностей в ряд общих понятий математики привела А. Н. Колмогорова к построению «Основных положений теории вероятностей» (1933 г.) на *множестве элементарных событий.* Что представляют собой элементы такого множества для логического развития теории вероятностей совершенно безразлично. Поэтому теория вероятностей допускает большое число различных интерпретаций, в том числе и такие, которые к понятию «случайное» никакого отношения не имеют.

В этой теории понятие «случайное событие» строится исходя из элементарных событий — множества подмножеств из элементарных событий. В связи с таким толкованием вскрыты аналогии между мерой множества и вероятностью событий (геометрическими вероятностями), интегралом и математическим ожиданием, ортогональностью функций и независимостью случайных величин*.

В интерпретации А. Н. Колмогорова определение вероятности включает как частные случаи классическое и статистическое определения и устраняет недостаточность каждого из них.

Борелевское поле событий (σ — алгебра событий). Пусть U — множество, или пространство элементарных событий; F — система подмножеств случайных событий множества U. Предполагается, что:

1) система F в качестве элемента содержит множество U;

2) если A и B — подмножества множества U входят в F в качестве элементов, то F в качестве элементов содержит также множества $A+B$, AB, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. При этом под $A+B$ подразумевают множество, составленное из элементов U, входящих или в A, или в B, или в A и в B; под AB понимают множество, состоящее из элементов U, входящих в A и в B; под $\overline{A}(\overline{B})$ подразумевают множество элементов U, не входящих в A и в (B).

Так как в F в качестве элемента входит все множество U, то согласно пункту 2 F содержит также $\overline{U}$, т. е. F в качестве элемента содержит *пустое множество.*

Второй пункт влечет за собой принадлежность к множеству сумм, произведений и дополнений конечного числа событий, принадлежащих F, что не выводит за пределы множества случайных событий, в силу чего систему событий F называют ***полем событий.***

Пусть в таком поле подмножества A_1, $A_2, \dots, A_n$ множества U

---

* Гнеденко Б. Ф. Очерки по истории математики в России. М.—Л., ОГИЗ ГИТТЛ, 1946.

суть элементы множества F. Тогда сумма $A_1+A_2+...+A_n$ и произведение $A_1, A_2, ..., A_n$ также являются элементами F. Множество F, образованное описанным способом, называют *борелевским полем событий.*

Пример поля событий

Прямоугольник (рис. 8) содержит девять элементарных событий, образующих множество точек 1, 2,...,9, в котором событие A — подмножество из трех точек 1, 4, 7; событие B — подмножество из четырех точек 4, 5, 7, 8; событие C — подмножество из одной точки 3; событие D — подмножество из одной точки 8; событие $\overline{A}$ — дополнительное подмножество из точек 2, 3, 5, 6, 8, 9, не входящих в подмножество A; событие $\overline{D}$ влечет за собой событие B, так как множество D составляет часть подмножества B; события A и B — сумма $A+B$, объединяющая подмножество точек 1, 4, 5, 7, 8; событие AB — произведение, или пересечение этих двух подмножеств, состоящее из точек 4 и 7, принадлежащих одновременно A и B.

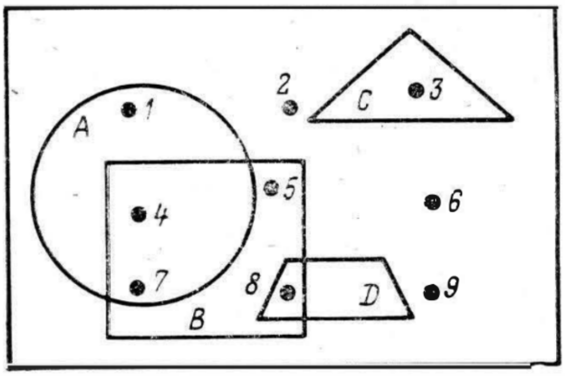

Рис. 8.

Свойства поля событий

Поле событий содержит достоверное событие U (1, 2,...,9); каждое событие A, B, C, D имеет соответственно противоположное $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$; относительно событий A и B есть события $A+B$ и AB.

Число различных событий в поле. Пусть основное множество состоит из трех элементарных событий. Тогда число различных событий равно:

1) одноточечных — трем (1), (2), (3), т. е. C_3^1;
2) двухточечных — трем (1, 2), (1, 3), (2, 3), т. е. C_3^2;
3) трехточечных — одному (1, 2, 3), т. е. C_3^3;
4) невозможное — одному, т. е. C_3^0. Всего восемь событий. В общем случае, т. е. если основное множество состоит из n элементарных событий, число различных событий равно

$$1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^k+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n,$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k элементам ($k=1, 2,...,n$).

Аксиомы и теоремы в поле событий. Определения. Если два случайных события A и B не имеют в своем составе одних и тех же элементов множества U, то события A и B *несовместимы.* Событие U — достоверное, событие $\overline{U}$ — *невозможное* (пустое множество), события A и $\overline{A}$ — *противоположные*.

Аксиома 1. Каждому случайному событию A из поля событий F поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое его вероятностью.

Аксиома 2. $P(U)=1$.

Аксиома 3 (аксиома сложения). Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместимы, то

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

Элементарные следствия. Из равенства

$$U=V+U$$

и аксиомы 3 следует, что

$$P(U)=P(V)+P(U).$$

Таким образом, вероятность невозможного события равна нулю;

для любого события A

$$P(\overline{A})=1-P(A),$$

каково бы ни было случайное событие A,

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

Пусть A и B — два произвольных события; поскольку в суммах

$$A+B=A+(B-AB) \quad \text{и} \quad B=AB+(B-AB)$$

слагаемые — несовместимые события, то в соответствии с аксиомой 3

$$P(A+B)=P(A)+P(B-AB); \quad P(B)=P(AB)+P(B-AB).$$

Отсюда следует *теорема сложения*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

для произвольных событий A и B. В силу неотрицательности $P(AB)$

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B).$$

Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные события, то по методу индукции имеет место неравенство

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Система Колмогорова *непротиворечива* и *неполна*. Непротиворечива потому, что существуют реальные объекты, которые всем этим аксиомам удовлетворяют. Неполна потому, что для одного и того же множества U вероятности во множестве F можно выбрать различными способами.

Неполнота системы аксиом вызвана существом дела — в различных задачах могут иметь место явления, при изучении которых требуется рассматривать одинаковые множества случайных событий, но с различными вероятностями.

Расширенная аксиома сложения. Если событие A равносильно наступлению хотя бы одного из попарно несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Эта аксиома равносильна следующей.

Аксиома непрерывности. Если последовательность событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ такова, что каждое последующее влечет за собой предыдущее и произведение всех событий B_n есть невозможное событие, то $P(B_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Условная и безусловная вероятность. Символ $P(B/A)$ выражает условную вероятность и означает, что событие B имеет место при условии, если событие A уже наступило. Символ $P(A/B)$ определяется соответствующим образом. В отличие от символа условной вероятности $P(B/A)$ символ $P(B)$ выражает безусловную вероятность события B.

Общее решение для классического способа. Пусть из n единственно возможных, несовместимых и равновозможных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

событию A благоприятствует	m событий		
» B »	k	$r \leqslant k$,	
» AB »	r	$r \leqslant m$.	

Если событие B произошло, то это означает, что наступило одно из событий A_j, благоприятствующих B. При этом условии событию A благоприятствует r и только r событий A_j, благоприятствующих AB. Таким образом

$$P(A/B)=\frac{r}{k}=\frac{r/n}{k/n}=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Каждое из вышеприведенных равенств эквивалентно теореме умножения

$$P(AB)=P(A)\,P(B/A)=P(B)\,P(A/B),$$

согласно которой вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при предположении, что первое произошло.

Независимые случайные события. Событие A независимо от события B, если

$$P(A/B)=P(A),$$

т. е. если наступление события B не изменяет вероятности события A. Тогда в силу теоремы умножения

$$P(A)\,P(B/A)=P(B)\,P(A).$$

Откуда

$$P(B/A)=P(B),$$

т. е. событие B также независимо от A. Стало быть, *свойство независимости событий* взаимно.

Пусть события A и B независимы, тогда события A и $\overline{B}$ также независимы. Так как

$$P(B/A)+P(\overline{B}/A)=1$$

и по предположению

$$P(B/A)=P(B),$$

$$P(\overline{B}/A)=1-P(B)=P(\overline{B}).$$

Следовательно, если события A и B независимы, то независимы события $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, \overline{B})$.

Теорема умножения независимых событий. Если события A и B независимы, то

$$P(AB)=P(A)\,P(B).$$

Примечание. Для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно их попарной независимости.

Формула полной вероятности. Пусть

$$B=\sum_{i=1}^{n} BA_i,$$

т. е. предположим, что событие B может осуществляться с одним и только с одним из n несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда по теореме сложения вероятностей имеем

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(BA_i),$$

а по теореме умножения получим

$$P(B)=\sum P(A_i)\,P(B/A).$$

Формула Бейеса — формула вероятностей гипотез после испытания. Пусть

$$B=\sum_{i=1}^{n} BA_i.$$

Требуется найти вероятность события A_i, если известно, что событие B произошло. Согласно теореме умножения

$$P(A_iB)=P(B)\,P(A_i/B)=P(A_i)\,P(B/A_i)$$

и следствию

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(B)}$$

по формуле полной вероятности находим

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_j)\,P(B/A_j)}.$$

Свод аксиом и теорем:

Первая — аксиома значения вероятности

$$0\leqslant P\leqslant 1.$$

Вторая — аксиома вероятности достоверного события

$$P(U)=1.$$

Третья — аксиома вероятности невозможного события

$$P(\overline{U})=0.$$

Четвертая — аксиома сложения вероятностей

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

согласно которой вероятность наступления, по крайней мере, одного из двух событий равна сумме вероятностей каждого события минус вероятность одновременного наступления обоих событий.

Пятая — аксиома умножения вероятностей

$$P(AB)=P(A)\,P(B/A)=P(B)\,P(A/B),$$

согласно которой вероятность одновременного наступления двух событий равна произведению абсолютной вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого.

Шестая — аксиома полной аддитивности, или последовательности попарно несовместимых событий. При $A_jA_k=0$, $i\neq k$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Теорема сложения вероятностей. При $AB=0$ в силу третьей аксиомы $P(AB)=0$ четвертая аксиома приводит к формуле

$$P(A+B)=P(A)+P(B),$$

согласно которой вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместимых событий равна сумме вероятностей каждого события в отдельности.

Теорема умножения вероятностей. Если $P(B/A)=P(B)$ или $P(A/B)=P(A)$, то события A и B стохастически независимы. В этом случае пятая аксиома приводит к формуле

$$P(AB)=P(A)\,P(B),$$

согласно которой вероятность одновременного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей каждого события в отдельности.

Полная группа событий. Если равенство

$$A_1+A_2+\ldots+A_k=U$$

выражает несомненность наступления, по крайней мере, одного из k событий A_j, то в силу второй аксиомы имеет место формула

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_k)=1.$$

Если $A_iA_k=0$ $(i\neq k)$, то следует формула

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)=1$$

вероятности полной группы событий — контрольная при вычислениях.

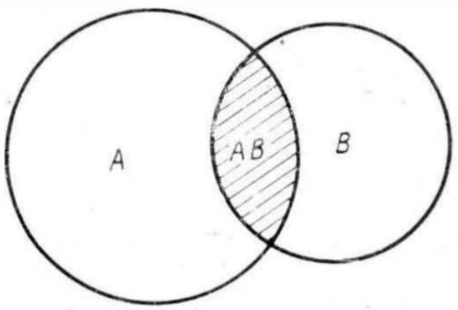

Рис. 9.

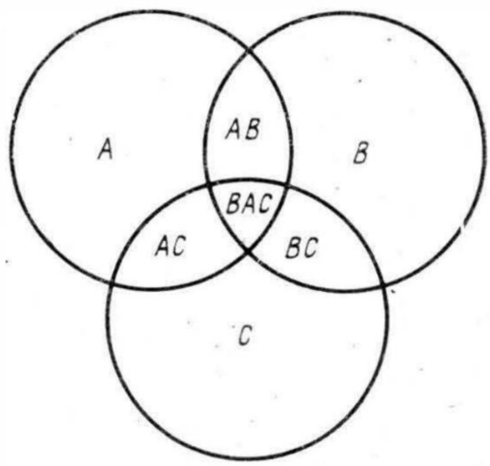

Рис. 10.

Вероятность противоположных событий. Если $\overline{A}$ — противоположное, или дополнительное событие к событию A, то

$$A+\overline{A}=V \quad \text{и} \quad A\overline{A}=0.$$

Тогда

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

— сумма вероятностей противоположных событий, образующая полную группу,

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

— вероятность прямого события, выраженная через вероятность противоположного события.

Иллюстрация вероятностей сумм двух событий показана на рис. 9

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

трех событий — на рис. 10

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-$$
$$-P(AC)-P(BC)+P(BAC).$$

§ 7. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание. Пусть

$$X\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ p(x_1) & p(x_2) \ldots p(x_n) \end{Bmatrix}$$

— дискретное распределение случайной величины X. Полагая, что в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сосредоточены массы вероятностей $p(x_1)$, $p(x_2), \ldots, p(x_n)$, за центр группирования принимают центр тяжести масс, абсцисса которого определяется по формуле средней взвешенной

$$MX=\frac{x_1p(x_1)+x_2p(x_2)+\ldots+x_np(x_n)}{p(x_1)+p(x_2)+\ldots+p(x_n)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}p(x_i)}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n}p(x_i)=1,$$

то

$$MX=\sum_{i=1}^{n}x_ip(x_i)=[xp(x)]=\overline{x},$$

где квадратные скобки обозначают знак гауссовой суммы, равносильный знаку $\sum\limits_{i-1}^{n}$, MX — символ математического ожидания, равносильный символу среднего x.

Из приведенной формулы следует, что математическое ожидание—число, равное сумме произведений дискретных значений случайной величины X на соответствующие вероятности. Оно же является средним значением, характеризующим центры группирования, распределения или рассеивания величины X при конечном числе ее возможных значений.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X выражается формулой

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx,$$

т. е. определенным интегралом от произведения действительного переменного x на плотность вероятности $p(x)$ в пределах от минус бесконечности до плюс бесконечности при предположении, что такой интеграл абсолютно сходится.

Понятие математического ожидания введено П. Л. Чебышевым.

Мода теоретического распределения непрерывной случайной величины X — значение, при котором $p(x)$ достигает максимума. При одном, двух, трех и более максимумах распределения соответственно будут одномодальное (унимодальное), двухмодальное, трехмодальное, n-модальное значения. Символ моды — MX.

Мода эмпирического распределения — случайная величина, имеющая наибольшую частость.

Квантиль — при данном уровне вероятности p такое значение $x = x_p$, при котором функция распределения принимает значение, равное p, т. е.

$$P(x_p) = p.$$

Медиана теоретического распределения MeX — квантиль, отвечающий значению

$$P(x_p) = p = \frac{1}{2}.$$

По определению медианы

$$\int_{-\infty}^{MeX} p(x)\,dx = \int_{MeX}^{+\infty} p(x)\,dx = \frac{1}{2},$$

т. е. вероятность случайной величины X принять значение меньше, чем MeX, равна вероятности принять значение больше, чем MeX.

Геометрический смысл медианы — абсцисса точки кривой плотности вероятности $y = p(x)$, ордината которой делит площадь под кривой $y = p(x)$ на две равновеликие части.

Нижний и верхний квантили — квантили, отвечающие значениям вероятностей

$$p = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad p = \frac{3}{4}.$$

Децили — квантили, отвечающие значениям вероятностей в процентах 10, 20,...,90.

Генеральная совокупность — множество значений случайной величины X.

Случайная выборка — совокупность значений x_1, x_2,...,x_n случайной величины X, полученных в процессе наблюдений.

Эмпирические характеристики — выборочные характеристики из генеральной совокупности.

Вариационный ряд — упорядоченный ряд n независимых результатов наблюдений, расположенных в порядке возрастающей последовательности. Медиана вариационного ряда

$$MeX = x_{\frac{(n+1)}{2}} \text{ при нечетном } n;$$

$$MeX = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\left[\left(\frac{n}{2}\right)+1\right]}\right) \text{ при четном } n.$$

Свойства математического ожидания

В случае дискретного распределения. Пусть C — постоянная величина, X — случайная величина, тогда

$$1)\ M(C) = C \cdot 1 = C,$$

где $1 = p(C)$. Следовательно, математическое ожидание постоянной равно этой же постоянной.

$$2)\ M(CX) = CM(X),$$

так как

$$M(CX) = [xCp(x)] = C[xp(x)] = CMX.$$

Поэтому математическое ожидание произведения постоянной величины на случайную величину равно произведению постоянной на математическое ожидание случайной величины.

$$3)\ M(C + X) = C + MX$$

в силу того, что

$$M(C + X) = [(C + X)\,p(x)] = [Cp(x)] + [xp(x)] =$$
$$= C[p(x)] + [xp(x)] = C \cdot 1 + MX = C + MX.$$

Таким образом, математическое ожидание суммы постоянной и случайной величин равно сумме постоянной величины и математического ожидания случайной величины.

$$4)\ M(Y = CX + b) = MY = CMX + b,$$

что следует из второго и третьего свойств. Поэтому математическое ожидание линейной функции случайной функции равно той же линейной функции от математического ожидания X.

В случае непрерывного распределения — соответственно **случаям** 2 и 3 дискретного распределения

1) $M(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty} Cxp(x)\,dx=C\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx=CMX,$

2) $M(C+X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(C+x)\,p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Cp(x)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx=$

$$=C\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx+MX=C1+MX=C+MX.$$

В частности, математическое ожидание случайной величины равно нулю, если функция плотности $p(x)$ — четная, т. е. если

$$p(x)=-p(-x).$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{0}xp(x)\,dx=-\int_{0}^{+\infty}xp(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx=0.$$

Моменты

В системе числовых характеристик распределения случайной величины существенно важную роль играют начальные и центральные моменты.

Начальный момент s-го порядка — математическое ожидание случайной величины в степени s, выражаемое формулой

$$\nu_s=MX^s=[xp(x)]$$

или формулой

$$\nu_s=MX_s=\int_{-\infty}^{+\infty}x^sp(x)\,dx.$$

В частности,

$$\nu_0=MX^0=M1=1$$

— начальный момент нулевого порядка,

$$\nu_1=MX=\bar{x}$$

— начальный момент 1-го порядка, т. е. средняя основная характеристика положения центра группирования случайной величины.

Центральный момент s-го порядка — математическое ожидание центрированной случайной величины степени s, т. е.

$$\mu_s = M(X - \nu)^s = M\overset{0}{X}{}^s,$$

где

$$\overset{0}{X} = X - MX$$

— центрированная случайная величина, таблица распределения которой

$$\overset{0}{X} \begin{Bmatrix} x_1 - \nu & x_2 - \nu \ldots x_n - \nu \\ p(x_1) & p(x_2) \ldots p(x_n) \end{Bmatrix},$$

и соответственно

$$\mu_s = [(x - \overline{x})^s\, p(x)],$$

$$\mu_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^s\, p(x)\, dx$$

— моменты, выраженные относительно центра распределения ν.

Математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю, так как

$$M\overset{0}{X} = M(X - MX) = M(X - \nu) = MX - MX = 0.$$

Дисперсия — мера рассеяния случайной величины относительно центра группирования, выражаемая формулой

$$\sigma^2 = DX = \mu_2 = M(X - \nu)^2,$$

и соответственно таблице распределения центрированной случайной величины формулой

$$\sigma^2 = DX\, [(x - \nu)^2\, p(x)],$$

или

$$\sigma^2 = DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \nu)^2\, p(x)\, dx.$$

Из соотношения

$$\sigma^2 = DX = [(x - \nu_1)^2\, p(x)] = [(x^2 - 2\nu_1 x + \nu_1^2)\, p(x)] =$$
$$= [x^2 p(x)] - 2\nu_1 [xp(x)] + \nu_1^2 [p(x)],$$

где

$$[x^2 p(x)] = \nu_2, \quad [xp(x)] = \nu_1, \quad [p(x)] = 1,$$

следует формула

$$\sigma^2 = DX = \nu_2 - 2\nu_1^2 + \nu_1^2 = \nu_2 - \nu_1,$$

верная и для непрерывной величины

$$\sigma^2 = DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \nu_1^2)\, p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - 2\nu_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\, dx +$$

$$+ \nu_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = \nu_2 - 2\nu_1^2 + \nu_1^2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

согласно которой дисперсия случайной величины равна начальному моменту 2-го порядка минус квадрат начального момента 1-го порядка этой величины.

Из формулы

$$\sigma^2 = DX = \mu^2 = \nu_2 - \nu_1^2$$

следует

$$\sigma^2 = DX = \mu_2 \leqslant \nu_2.$$

При $\nu_1 = 0$ имеет место знак равенства, когда начало отсчета значений случайной величины X совпадает с математическим ожиданием. В этом случае второй центральный момент принимает наименьшее значение.

Поэтому дисперсия служит мерой или критерием рассеяния случайной величины относительно центра распределения, когда последним служит математическое ожидание.

Формула дисперсии, удобная для вычислений. Из соотношения

$$\sigma^2 = D(X) = M(X - x)^2$$

следует

$$\sigma^2 = D(X) = M(X^2 - 2X\bar{x} + \bar{x}^2) = MX^2 - 2\bar{x}M(X) + M(\bar{x})^2 =$$

$$= M(X^2) - 2\bar{x}\,\bar{x} + \bar{x}^2 = \underline{M(X^2) - \bar{x}^2}.$$

Свойства дисперсии ($C = \text{const}$, X, Y — независимые случайные величины):

1) Дисперсия постоянного равна нулю, т. е.

$$\sigma^2 = DC = 0.$$

2) Дисперсия X и $Y = X + C$ выражается одной и той же величиной

$$\sigma^2 = DX = D(X + C).$$

3) Дисперсия произведения постоянного на случайную величину равна квадрату постоянного на дисперсию случайной величины:

$$\sigma^2 = D(CX) = M(C^2X^2) - C^2\overline{x^2} = C^2(MX^2 - \overline{x^2}) = C^2DX.$$

4) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

$$\sigma^2 = D(X+Y) = M\{(X+Y)^2\} - \{M(X+Y)\}^2 =$$
$$= M(X^2+2XY+Y^2) = \{M(X)+M(Y)\}^2 =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)\,M(Y) + M(Y^2) - M^2X - 2MXMY - M^2Y =$$
$$= DX + DY.$$

Формула распространяется и на случай нескольких независимых случайных величин.

5) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий, что видно из соотношений

$$D(X-Y) = DX + D(-Y) = DX + (-1)^2\,DY = DX + DY.$$

Дисперсия и среднее квадратическое уклонение. Положительное значение квадратного корня из дисперсии, т. е. число

$$\sigma_x = \sqrt{DX} = \sqrt{M(X-\bar{x})^2}$$

выражает среднее квадратическое отклонение от своего среднего и служит характеристикой рассеяния той же размерности, какую имеют случайная величина X и ее математическое ожидание.

При любом постоянном C

$$\sigma_{CX} = \sqrt{D(CX)} = \sqrt{C^2DX} = C\sqrt{DX} = C\sigma_X.$$

Нормированная случайная величина — переменная

$$t = \frac{X-\bar{x}}{\sigma} = \frac{\bar{X}-x}{\sqrt{DX}},$$

которая по отношению к X характеризуется математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице

$$D\left(\frac{X-\bar{x}}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{1}{\sqrt{DX}}\,D(X-\bar{x}) = \frac{DX+D\bar{x}}{\sqrt{DX}} = 1,$$

$$M\left(\frac{X-\bar{x}}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{1}{\sqrt{DX}}\,(MX-M\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{DX}}\,(\bar{x}-\bar{x}) = 0.$$

Связь центральных моментов с математическими ожиданиями и начальными моментами

$$\mu_2 = M(X-\bar{x})^2 = M(X^2-2X\bar{x}+\bar{x}^2) =$$
$$= MX^2 - 2MX\bar{x} + M\bar{x}^2 = M_2 - M_1^2 = \nu_2 - \nu_1,$$
$$\mu_3 = M(X-\bar{x})^3 = M(X^3 - 3X^2\bar{x} + 3X\bar{x}^2 - x^3) =$$
$$= MX^3 - 3\bar{x}MX^2 + 3MX\bar{x}^2 - \bar{x}^3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3 =$$
$$= \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = M(X-\overline{x})^4 = M(X^4 - 4X^3\overline{x} + 6X^2\overline{x}^2 - 4X\overline{x}^3 + \overline{x}^4) =$$
$$= M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Формулы получены разложением $\mu_s = M(x-x)^s$ по биному Ньютона.

Коэффициент вариации — относительная характеристика рассеяния случайной величины, определяемая по формуле

$$\gamma_x = \frac{\sigma_x}{MX},$$

при предположении, что $MX \neq 0$ и σ_x по сравнению с MX — число малое.

Среднее абсолютное уклонение. По определению

$$\mu_{\text{абс}} = M(|X-\overline{x}|) = [|x-\nu|\, p(x)],$$

$$\mu_{\text{абс}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\nu|\, p(x)\, dx.$$

Коэффициент асимметрии выражает скошенность распределения и определяется по формуле

$$s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Коэффициент крутости, или **эксцесс случайной величины**

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Числовые характеристики взаимных связей случайных величин

Корреляционный момент (момент связи) K_{XY}. Пусть случайные величины X и Y зависимы между собой. Тогда корреляционный момент, или момент связи между этими величинами, выражается формулами:

в случае дискретного распределения

$$K_{X,Y} = \sum_i \sum_j (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})\, p_{ij},$$

где x_i и y_j — всевозможные значения случайных величин X и Y,

p_{ij} — вероятность того, что система (X, Y) примет значения (x_i, y_j);

в случае непрерывного распределения

$$K_{x,y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})(y-\overline{y})\,(x, y)\, dx dy,$$

где (x, y) — плотность распределения системы (X, Y).

Если случайные величины X и Y не коррелированы, то

$$K_{x,y}=0,$$

если коррелированы, то

$$K_{x,y}\neq 0.$$

Ковариация (корреляционный момент) — момент связи, или второй смешанный центральный момент — числовая характеристика совместного варьирования случайных величин, выражаемая формулой

$$\operatorname{cov}(X, Y)=K_{X,Y}=\mu_{X,Y}=M\{(X-\overline{x})(Y-\overline{y})\}=$$
$$=M(X,Y)-M(X)M(Y).$$

Если X и Y независимы, то

$$\operatorname{cov}(X, Y)=K_{X,Y}=\mu_{X,Y}=0.$$

Коэффициент корреляции — число

$$\rho_{X,Y}=\operatorname{cov}(\overset{0}{X}, \overset{0}{Y})=M\left(\frac{X-\overline{x}}{\sigma_x}\ \frac{Y-\overline{y}}{\sigma_y}\right)=\frac{M\{(X-\overline{x})(Y-\overline{y})\}}{\sigma_X\sigma_Y}=$$
$$=\frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{K_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y},$$

определяющее момент связи в безразмерной форме через нормированные отклонения t_X и t_Y, при которых центр группирования есть нуль и дисперсия равна единице.

Случайные величины не коррелированы, если

$$\rho_{X,Y}=0,$$

и коррелированы, если

$$\rho_{X,Y}\neq 0.$$

Из независимости случайных величин X и Y следует их некоррелированность. Но из некоррелированности этих величин не следует их независимость. Условие независимости более жесткое, чем условие некоррелированности, так что равенство коэффициента корреляции нулю — необходимое, но недостаточное условие независимости случайных величин. Однако при нормальном распределении случайных величин понятия взаимнонезависимые и попарно некоррелированные эквивалентны.

Коэффициент корреляции характеризует линейную зависимость — при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию возрастать или убывать по линейному закону.

Эта тенденция к линейной зависимости может более или менее приближаться к функциональной, т. е. к самой тесной зависимости, оставаясь по существу статистической характеристикой. Так что коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами. Если эти величины связаны точной линейной зависимостью

$$Y = aX + b,$$

то $\rho_{X,Y} = \pm 1$. Причем знак плюс или минус берется в зависимости от того, положителен или отрицателен коэффициент a при X.

В общем случае, когда случайные величины X и Y связаны произвольной вероятностной зависимостью, коэффициент корреляции может иметь значения в пределах

$$-1 < \rho_{X,Y} < 1.$$

При $\rho_{X,Y} \geqslant 0$ корреляция положительная, при $\rho_{X,Y} < 0$ — отрицательная. В первом случае при возрастании одной из случайных величин другая имеет тенденцию в среднем возрастать. Во втором случае при возрастании одной из случайных величин другая имеет тенденцию в среднем убывать.

Основные числовые характеристики системы случайных величин

Интеграл плотности вероятности. Вероятность попадания случайной точки в область S равна интегралу от плотности вероятности по этой области.

В пространстве R_2 система непрерывных случайных величин интерпретируется как случайная точка на плоскости; в R_3 — как случайная точка в трехмерном, или обыкновенном пространстве; в R_n — как случайная точка в многомерном пространстве, или в пространстве n измерений.

Числовые характеристики в R_n. В свете такого геометрического толкования основными числовыми характеристиками системы n случайных величин являются:

математические ожидания —

$$\bar{x}_i = MX_i = \int\int \ldots \int x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

дисперсии —

$$\sigma_i^2 = K_{ii} = DX_i = \int\int \ldots \int (x_i - \bar{x}^2) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

корреляционные моменты —

$$K_{ij} = M\left\{(X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j) = \int\int \ldots \int (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) f \times \right.$$
$$\times (x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Замена интегрирования суммированием по всем возможным значениям случайных величин приводит к моментам для дискретного распределения.

Матричная форма моментов связи системы случайных величин

Основания перехода к матричной форме. Левые части интегральных и соответственно дискретных формул моментов связи суть элементы матриц:

вторых центральных и смешанных моментов —

$$K=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12}\ldots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22}\ldots K_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ K_{n1} & K_{n2}\ldots K_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12}\ldots\mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22}\ldots\mu_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \mu_{n1} & \mu_{n2}\ldots\mu_{nn} \end{bmatrix},$$

$$K_{ij}=\mu_{ij}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j; \qquad K_{ii}=\mu_{ii}=\sigma_{ii}^2,$$

корреляционных коэффициентов —

$$P=\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}\ldots\rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22}\ldots\rho_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \rho_{n1} & \rho_{n2}\ldots\rho_{nn} \end{bmatrix},$$

где

$$\rho_{ij}=\frac{K_{ij}}{\sigma_i\sigma_j},$$

нормированнных коэффициентов корреляции —

$$C=\begin{bmatrix} 1 & r_{12}\ldots r_{1n} \\ r_{21} & 1\ \ldots r_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ r_{n1} & r_{n2}\ldots 1 \end{bmatrix}.$$

дисперсионной —

$$D=\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_1\sigma_2 r_{12}\ldots\sigma_1\sigma_n r_{1n} \\ \sigma_2\sigma_1 r_{21} & \sigma_{22}^2\ \ldots\sigma_2\sigma_n r_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \sigma_n\sigma_1 r_{n1} & \sigma_n\sigma_2 r_{n2}\ldots\sigma_{nn}^2 \end{bmatrix},$$

тождественной матрице вторых моментов и равносильной матрице квадратов средних квадратических ошибок.

§ 8. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Схема Бернулли — простейшая теоретическая схема независимых испытаний при постоянных условиях. В этой схеме в качестве элементарных исходов каждого отдельного испытания различают два исхода: появление события A и появление события A, противоположного A, так что

$$A+\bar{A}=U.$$

Вероятность появления события для каждого испытания постоянна и равна

$$P(A)=p; \qquad 0<p<1.$$

Для каждого события A существуют соотношения

$$P(A)=1-P(A)=1-p=q; \qquad p+q=1.$$

Пусть одно сложное событие состоит из n испытаний (измерений). Тогда возникают следующие комбинации элементарных событий;

при двух испытаниях четыре исхода

$$2^2=4; \quad \bar{A}\bar{A},\ \bar{A}A,\ A\bar{A},\ AA$$

с вероятностями

$$qq \ \ qp \ \ pq \ \ pp,$$

по теореме умножения и сложения равными

$$q^2 \ \ 2pq \ \ p^2$$

и образующими полную группу

$$q^2+2pq+p^2=1;$$

при трех испытаниях восемь исходов соответственно

$$\begin{array}{cccccccccc} 2^3=8; & \bar{A}\bar{A}\bar{A}, & \bar{A}\bar{A}A, & \bar{A}A\bar{A}, & A\bar{A}\bar{A}, & A\bar{A}A, & \bar{A}AA, & AA\bar{A}, & AAA; \\ & qqq & qqp & qpq & pqq & pqp & qpp & ppq & ppp; \\ & q^3 & q^2p & q^2p & q^2p & p^2q & p^2q & p^2q & p^3; \end{array}$$

$$q^3+3q^2p+3p^2q+p^3=1.$$

Пусть символы

$$P_3(0),\ P_3(1),\ P_3(2),\ P_3(3)$$

означают появление события 0, 1, 2, 3 раза при трех испытаниях, на что показывает индекс при P. Тогда вероятность

$$P_3(0)=q^3$$

отвечает одному исходу AAA непоявления события A во всех трех испытаниях.

Вероятности

$$P_3(1)=P(\bar{A}\bar{A}A)+P(A\bar{A}\bar{A})+P(\bar{A}A\bar{A})=3q^2p;$$

$$P_3(2)=P(\bar{A}AA)+P(A\bar{A}A)+P(AA\bar{A})=3qp^2;$$

$$P_3(3)=P(AAA)=p^3$$

выражают появление события A соответственно 1, 2, 3 раза при трех испытаниях.

Сумма

$$P_3(0)+P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)=q^3+3q^2p+3qp^2+p^3=(p+q)^3$$

равна единице, так как

$$p+q=1,$$

т. е. образует полную группу; следовательно, событие A при трех испытаниях произойдет либо 0 раз, либо 1 раз, либо 2 раза, либо 3 раза.

В общем случае вероятность появления события A при n испытаниях x раз выражается формулой

$$P(x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x q^{n-x}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\,p^x q^{n-x},$$

согласно которой совокупность вероятностей $P_n(x)$ при $x=0,1,\ldots,n$, т. е. $P_n(0),\ldots,P_n(n)$, отвечает биноминальному распределению, образующему полную группу,

$$\sum_{x=0}^{n} P_n(x)=1.$$

Из этой формулы, в частности, следует

$$P_3(0)=C_3^0 q^3,$$
$$P_3(1)=C_3^1 pq^2,$$
$$P_3(2)=C_3^2 p^2 q,$$
$$P_5(3)=C_5^3 p^3 q.$$

Кумулятивная (накопленная) вероятность биноминального распределения. Пусть требуется вычислить вероятность того, что событие A возникает не более x раз. Тогда по правилу сложения искомая вероятность выразится по формуле

$$P_n(x)=P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(x)=\sum_{k=0}^{k} P_n(k).$$

При небольшом n вычисление вероятностей по этой формуле можно производить, пользуясь соотношением

$$\frac{P_n(x+1)}{P_n(x)}=\frac{(n-x)\,p}{(x+1)\,q}.$$

Если найдено $P_n(x)$, то легко рассчитывать $P_n(x+1)$. При n большом вычисление вероятностей производится по асимптотическим формулам.

Числовые характеристики биноминального распределения

Математическое ожидание. Пусть случайная величина X принимает целые значения k с вероятностью

$$C_n^k p^k q^{n-k},$$

причем k может иметь значения от 0 до n. Тогда по определению математического ожидания

$$MX = \sum_{0}^{k} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

вычисление суммы сводится к дифференцированию формулы бинома Ньютона

$$(p+q)^n = \sum C_n^k p^k q^{n-k}$$

по p и умножению полученного результата на p.

Указанные действия приводят к соотношению

$$np\,(p+q)^{n-1} = \sum C_n^k k p^k q^{n-k}.$$

Так как $q=1-p$, то $MX=np$. Этот результат формулируют и так: математическое ожидание частоты k/n события равно постоянной вероятности p этого события при отдельном испытании.

Заметим, что при целом k математическое ожидание совпадает с модой.

Дисперсия. Формула дисперсии

$$DX = MX^2 - \overline{x}^2,$$

в которой

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$\overline{x}^2 = n^2 p^2,$$

приводит к соотношению

$$DX = MX^2 - \overline{x}^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k p^k q^{n-k} - p^2.$$

При определении суммы правой части обращаются к тождеству

$$\sum C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n.$$

Дифференцирование по p и умножение результата на p приводит к равенству

$$\sum C_n^k k p^k q^{n-k} = np\,(p+q)^{n-1}.$$

Точно также

$$\sum k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = np^2(n-1)(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1}.$$

Левая часть выражает MX^2. Поэтому

$$MX^2 = np^2(n-1)(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1}.$$

Так как

$$p+q=1,$$

то

$$MX^2 = np^2(n-1)+np.$$

Следовательно,

$$\sigma^2 = DX = np^2(n-1)+np-n^2p^2 = np\{p(n-1)+1-np\} =$$
$$= np(1-p) = npq; \quad \sigma = \sqrt{npq}.$$

Заметим, что σ^2 растет с увеличением n. Если вводится переменная x/n, то

$$M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{np}{n} = p;$$

$$\sigma^2 = D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}DX = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n};$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Такова оценка частости наступления события, если вероятность этого события равна p.

Асимметрия. Можно показать, что

$$\mu_3 = M(X-x)^3 = npq(q-p),$$

поэтому

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma_3} = \frac{npq(q-p)}{(npq)^{3/2}} = \frac{1-2p}{(npq)^{1/2}}.$$

Из этой формулы следует, что:

$$\text{если } p > \frac{1}{2}, \quad \text{то} \quad \gamma < 0;$$

$$\text{»} \quad p = \frac{1}{2} \quad \text{»} \quad \gamma = 0;$$

$$\text{»} \quad p < \frac{1}{2} \quad \text{«} \quad \gamma > 0.$$

В первом случае имеет место распределение с отрицательной асимметрией, во втором — одномодальное, симметричное относительно центра группирования и моды, в третьем — с положительной асимметрией.

Эксцесс. Можно также показать, что

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1 - 6p + 6p^n}{npq}.$$

Заметим, что с возрастанием n величины γ и ε стремятся к нулю.

Нормальное распределение

Теорема Лапласа. Для схемы Бернулли французский математик Лаплас дал формулу распределения вероятностей, получившую название закона распределения вероятностей.

Теорема Лапласа гласит: вероятность того, что частость m/n появления какого-либо события в n испытаниях будет заключаться в границах

$$\text{от} \quad p + a\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \text{до} \quad p + b\sqrt{\frac{pq}{n}},$$

где a и b — числа, определяющие границы колебаний частоты, оценивается интегралом функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-{}^1\!/_2 x^2}\, dx,$$

где x взято в пределах от a до b.

Интеграл вероятностей. Положив $a = -t$ и $b = +t$, теорему Лапласа можно выразить формулой

$$p\left(-t\sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{m}{n} - p < +t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t e^{-{}^1\!/_2 x^2}\, dx.$$

При выборочных испытаниях (наблюдениях) теорему Лапласа формулируют так: вероятность того, что доля объектов определенного вида в выборочной совокупности (m/n) будет отличаться от доли таких же объектов в генеральной совокупности (p) не больше чем на величину t_p, и равна интегралу от функции

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-{}^1\!/_2 x^2},$$

взятому для x в пределах от 0 до t.

Такой интеграл называют интегралом вероятностей. Существуют таблицы его значений при различных t.

Распределение Гаусса. Почти одновременно с Лапласом и независимо от него Гаусс исследовал распределение случайных ошибок измерений. Но Лаплас оперировал величинами p и σ_p, а Гаусс имел дело с обычной средней $\bar{x}$ и со средней квадратической ошибкой σ_x.

В теории вероятностей и математической статистике распределение одномерной случайной величины, именуемое законом Гаусса (Лапласа — Гаусса), имеет фундаментальное значение и распространяется на многомерные случайные величины.

Закон Лапласа — Гаусса в одномерном пространстве. Плотность вероятности определяется по формулам

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\,(x-\bar{x})^2},$$

$$f(x)=\frac{1}{E\sqrt{\pi}}\,e^{-\rho^2\frac{(x-\bar{x})^2}{E^2}}.$$

Кривая плотности

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\bar{x})}{2\sigma^2}}$$

симметрична и унимодальна (одновершинная — колоколообразная). Она достигает максимума в точке $x=\bar{x}$ (величина $\bar{x}$ одновременно средняя, медиана и мода).

При $x=\bar{x}\pm\sigma$ кривая содержит две точки перегиба. Изменение $\bar{x}$ вызывает смещение кривой без изменения ее формы. Изменение σ приводит к изменению масштаба на обеих координатных осях. Площадь, заключенная между кривой и осью абсцисс, равна единице. Чем меньше σ, тем бо́льшая часть массы сосредоточена в окрестности точки $x=\bar{x}$. В предельном случае, т. е. при $\sigma=0$, вся масса сосредоточена в точке $x=\bar{x}$. Следовательно, функция распределения сводится к вырожденному или несобственному распределению

$$F\left(\frac{x-\bar{x}}{0}\right).$$

Таким образом, кривая плотности вероятности нормально распределенной случайной величины содержит параметры:

σ_x — среднее квадратическое отклонение (характеризует форму кривой);

$\bar{x}$ — математическое ожидание (выражает центр рассеивания, или центр группирования),

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ — ординату кривой в точке $x=\bar{x}$ (отражает меру точности Гаусса);

$E=\rho\sigma\sqrt{2}$ — срединное (вероятное) отклонение;

$\rho\sqrt{2}\approx 0{,}675\approx {}^2/_3$ — число, связывающее вероятное отклонение со средним квадратическим и обратно;

$$\rho=\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}.$$

Размерности центра рассеивания, среднего квадратического отклонения и случайной величины совпадают.

Центральные моменты нормального распределения s-го порядка определяются рекуррентным соотношением

$$\mu_s = (\sigma - 1)\,\sigma^2 \mu_{s-2},$$

из которого можно определить моменты высших порядков через моменты низших порядков.

Нечетные моменты равны нулю. Последовательность четных моментов

$$\mu_2 = \sigma^2; \quad \mu_4 = 3\sigma^4; \quad \mu_6 = 15\sigma^6.$$

Моменты s-го порядка при любом четном s

$$\mu_s = (s-1)!!\,\sigma^s,$$

где $(s-1)!!$ — произведение всех нечетных чисел от 1 до $s-1$.

Асимметрия

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Эксцесс

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (x_1, x_2):

1) $P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}\right)\right\}$,

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

— функция Лапласа (интеграл вероятности);

2) $P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{x_2 - \bar{x}}{E}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{E}\right)\right\}$,

где

$$\Phi(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\rho^2 t^2}\, dt$$

— приведенная функция Лапласа.

Закон Лапласа — Гаусса в многомерном пространстве. Плотность вероятности для системы n нормальных случайных величин, зависимых между собой, выражается формулой

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\Delta}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{ij=1}^{n} K_{ij}^{(-1)} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)},$$

обобщенной относительно плотности вероятности в одномерном пространстве, в которой

$$\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \ldots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} \ldots K_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} \ldots K_{nn} \end{vmatrix}$$

— определитель, составленный из элементов корреляционной матрицы;

$K_{ij}^{(-1)}$ — элементы обратной матрицы, равные

$$K_{ij}^{(-1)} = \frac{A_{ji}}{\Delta} = \frac{A_{ij}}{\Delta}$$

(A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента K_{ij}).

В случае независимых нормальных случайных величин корреляционная матрица K_{ij} переходит в диагональную

$$\begin{bmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_n \end{bmatrix},$$

определитель которой

$$\Delta = K_1 K_2 \ldots K_n = \sigma_1^{-1}\,\sigma_2^{-1} \ldots \sigma_n^{-1},$$

и соответственно исходная формула принимает вид

$$f(x_1 x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x_1-\overline{x}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\overline{x}_2)^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{(x_n-\overline{x}_n)^2}{\sigma_n^2}\right\}}.$$

Главные оси эллипсоида рассеяния (концентрации). В случае зависимых случайных величин корреляционная матрица косоугольная и, следовательно, главные оси эллипсоида рассеяния наклонны к осям ортогональной системы координат. Угол наклона i-й главной оси к i-й оси координат определяется из формулы

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2K_{ij}}{K_{ii} - K_{jj}}.$$

В случае независимых случайных величин корреляционная матрица диагональная и, следовательно, главные оси эллипсоида рассеяния параллельны осям ортогональной системы координат.

В обоих случаях число главных осей (осей симметрии) эллипсоида рассеяния равно числу размерности пространства, в котором рассматривается плотность вероятности нормального распределения случайных величин.

Частные случаи. Плотность вероятности нормального распределения независимых случайных величин:

1. В пространстве R_3 —

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_1\sigma_2\sigma_3} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x_1-\overline{x}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\overline{x}_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(x_3-\overline{x}_3)^2}{\sigma_3^2}\right\}}$$

или

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\rho^3}{\pi^{3/2}E_1E_2E_3} e^{-\rho^2\left\{\frac{(x_1-\overline{x}_1)^2}{E_1^2} + \frac{(x_2-\overline{x}_2)^2}{E_3^2} + \frac{(x_3-\overline{x}_3)^2}{E_3^2}\right\}}.$$

Главные оси эллипсоида рассеяния параллельны координатным осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 ортогональной системы в обычном пространстве всех измерений.

2. В пространстве R_2 —

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(x_1-\overline{x}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\overline{x}_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}},$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{\rho^2}{\pi E_1E_2} e^{-\rho^2\left\{\frac{(x_1-\overline{x}_1)^2}{E_1^2} + \frac{(x_2-\overline{x}_2)^2}{E_2^2}\right\}}.$$

Главные оси эллипсоида рассеяния параллельны прямоугольным осям координат на плоскости.

3. В пространстве R_1 —

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma^2}},$$

$$f(x) = \frac{\rho^2}{\sqrt{\pi}\,E} e^{-\rho^2\frac{(x-\overline{x})^2}{E^2}}$$

— отрезок рассеяния на числовой оси.

Распределение Пуассона — распределение вида

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где

$$a = M[x].$$

Если вероятность P появления события A в каждом отдельном опыте мала, а число проводимых опытов n велико, то в этом случае распределение Пуассона близко к биноминальному распределению. В таком случае имеет место приближенное равенство

$$P_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a = np$.

Равномерное распределение в интервале (a, b). Плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a<x<b, \\ 0 & \text{при } x<a \text{ или } x>b. \end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x)=\begin{cases} a & \text{при } x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x<b, \\ 1 & \text{при } x>b \end{cases}$$

Математическое ожидание и медиана

$$x=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}.$$

Равномерное распределение моды не имеет.

Дисперсия распределения

$$D_x=\mu_2=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Асимметрия

$$S_k=\frac{\mu_3}{\sigma_x^2}=0.$$

Центральный момент 4-го порядка

$$\mu_4=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx=\frac{(b-a)^4}{80}.$$

Эксцесс

$$Ex=\frac{\mu_4}{\sigma_4^4}-3=-1,2.$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β)

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-a}{b-a}.$$

Вероятность распределения в интервале имеет вид

$$(x_1=a-\alpha;\quad x_2=a+\alpha).$$

Плотность распределения

$$f(x)=\frac{1}{x_2-x_1}=\begin{cases}\frac{1}{2\alpha}\text{ при } x_2<x<x_1,\\ 0 \text{ вне интервала.}\end{cases}$$

Функция распределения

$$F(x)=\int_{a-\alpha}^{a+\alpha}\frac{dx}{2\alpha}=1;$$

$$\bar{x}=a;\qquad Dx=\frac{\alpha^2}{3};\qquad \sigma=\frac{\alpha}{\sqrt{3}},$$

где a — абсцисса центра интервала.

Распределение Стьюдента*. При небольшом числе наблюдений закон распределения Гаусса приводит к очень большой и практически весьма ощутимой переоценке точности результатов этих наблюдений.

Госсет эмпирическим путем нашел, что при ограниченном числе наблюдений имеет место распределение по формуле**

$$S(t)=C\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{x}_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

причем C зависит от числа наблюдений n.

Такое распределение получило название з а к о н а м а л ы х в ы б о р о к. Существуют таблицы распределения Стьюдента, облегчающие пользование законом во всевозможных практических случаях.

Особенность формулы Стьюдента состоит в том, что в нее входит в качестве аргумента лишь одна характеристика из генеральной совокупности $\bar{x}_0$. Эта формула верна для любого числа наблюдений n. При n, равном 20 и больше, формула Стьюдента приводит к нормальному распределению Гаусса.

Гамма-распределение. Формула при $0\leqslant x\leqslant\infty$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\alpha!\beta^{\alpha+1}}x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}=\varphi(x,\alpha,\beta)$$

выражает п л о т н о с т ь гамма-распределения. Параметры α и β имеют допустимые области

$$\alpha>-1;\qquad \beta>0,$$

* Стьюдент — псевдоним Госсета (Англия).

** Строгий вывод формулы Стьюдента дан Фишером.

причем α определяет форму распределения, β играет роль масштабного множителя, Если $\alpha=0$, то

$$\varphi(x)=\frac{1}{\beta}\,e^{-\frac{x}{\beta}},$$

следовательно, $\varphi(x)$ подчиняется экспоненциальному распределению.

Интегральная функция гамма-распределения имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\,\beta^{\alpha+1}}\int_0^x x^{\alpha}\,e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx.$$

Между параметрами и основными характеристиками гамма-распределения имеет место зависимость

$$x_0=\beta(\alpha+1); \qquad \sigma_x=\beta\sqrt{\alpha+1}.$$

В практических приложениях пользуются неполной *интегральной функцией*

$$\gamma(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x z^{\alpha}e^{-z}\,dz,$$

полученной путем замены x/β на z.

Распределение χ^2 (Пирсона) — частный случай гамма-распределения, полагая, что

$$\alpha=\frac{k}{2}-1, \qquad \beta=2.$$

Это означает, что величина

$$u=\sum_{i=1}^{R} x_i^2$$

(где x_i — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону) имеет гамма-распределение

$$\varphi(u)=\frac{1}{\left(\frac{R}{2}-1\right)!\,2^{\frac{k}{2}}}\,u^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-\frac{u}{2}}, \quad 0\leqslant u\leqslant\infty,$$

где R — число степеней свободы.

Характеристические функции

Определение. Соотношение

$$\varphi(t)=M\,|\,e^{itX}\,|=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX}\,dF(x),$$

т. е. математическое ожидание функции e^{itX}, — характеристическая функция величины X.

Основанием теории характеристических функций служит формула

$$e^{itX} = \cos tX + i \sin tX,$$

где X — случайная величина, t — действительное число, $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица, интегрируемая в пределах $(-\infty, +\infty)$ относительно функции распределения $F(x)$, $|e^{itX}|=1$.

К этой формуле приводит соотношение Эйлера

$$\cos x + i \sin x = e^{ix},$$

полученное преобразованием тождества Муавра

$$(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$$

к виду

$$e^z = \lim \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

предельным переходом при $n \longrightarrow \infty$. Следовательно, существует взаимнооднозначное соответствие между распределениями и характеристическими функциями, а именно: если два распределения совпадают, то их характеристические функции также совпадают и наоборот.

Поэтому там, где необходимо найти распределение случайной величины, сначала находят ее характеристическую функцию. Если окажется, что эта функция совпадает с характеристической функцией некоторого известного распределения, то искомое распределение должно совпадать с последним.

Характеристические функции введены А. М. Ляпуновым в 1900 г. для доказательства центральной предельной теоремы.

Характеристическая функция биноминального распределения. Биноминальный закон характеризует распределение массы, равной единице, при котором масса q находится в точке 0, а масса p — в точке 1. Следовательно,

$$P(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ q \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 \text{ при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Так что плотность вероятности $P(x)$ равна нулю во всех точках, кроме точек $x=0$, $x=1$, где она принимает значения q и p. В случае одного испытания и n испытаний характеристическая функция соответственно имеет вид

$$\varphi(t) = q + p\,e^{it},$$

$$\varphi(t) = (q + p\,e^{it})^n = q^n + \ldots + C_n^k q^{n-k} p^k e^{ikt} + \ldots + p^n e^{ikt}.$$

При n испытаниях переменная k может принимать $n+1$ возможных значений

$$0, 1, 2, \ldots, n,$$

вероятность которых

$$P_n(0),\quad P_n(1),\quad P_n(2),\ ..,\ P_n(n).$$

Поэтому

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itx}dP(x)=P_n(0)+\ldots+P_n(k)\,\mathrm{e}^{i\kappa t}+\ldots+P_n(n)\,\mathrm{e}^{ikt}.$$

Из сравнения общих элементов в правых частях разложений $\varphi(t)$ следует

$$P_n(k)\,\mathrm{e}^{ikt}=C_n^k q^{n-\kappa}p^k\,\mathrm{e}^{ikt}$$

или

$$P_n(k)=C_n^k q^{n-k}p^k,$$

что выражает биномиальное распределение.

Характеристическая функция нормального распределения. По определению

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Вычисление $\varphi(t)$ сводится к вычислению интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a(x-iy)^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

При $a={}^1/_2$, $y=t$ выражение

$$\varphi(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$$

имеет ту же аналитическую форму, что и плотность распределения вероятности. Производные от $\varphi(t)$ приводят к моментам:

$$\mu^{2r}=(-1)^r\varphi^{(2r)}(0)=1,3,\ldots,(2r-1)\,\sigma^2;$$

$$\mu^{2r+1}=0.$$

Характеристическая функция распределения Пуассона. По определению

$$\varphi(t)=\sum_{x=0}^{\infty}\mathrm{e}^{itx}\frac{e^{-x}(x)^x}{x!}=\mathrm{e}^{-x}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(xe^{it})^x}{x!}=\mathrm{e}^{x(e^{it}-1)};$$

$$\varphi(0)=1.$$

Из первой производной

$$\varphi'(x)=\bar{x}i\,\mathrm{e}^{it}\,\varphi(t)$$

следует, что

$$\varphi'(0)=i\bar{x}.$$

Из второй производной

$$\varphi''(t) = -\bar{x}\, e^{it}\, \varphi(t) + \bar{x} i\, e^{it}\, \varphi'(t)$$

находим, что

$$\varphi''(0) = \bar{x} - (\bar{x})^2$$

или

$$\overline{x^2} = (\bar{x})^2 + \bar{x}.$$

Так как

$$D = \sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \bar{x}$$

— дисперсия, то

$$\sigma = \sqrt{\bar{x}}.$$

Предельные теоремы

Закон больших чисел Бернулли. При неограниченном возрастании числа n независимых испытаний, в каждом из которых наступление события имеет одну и ту же вероятность p, частота m/n события A сходится к вероятности p, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1.$$

Неравенство Чебышева. Если случайная величина X имеет конечную дисперсию, то при любом $\varepsilon > 0$ существует неравенство

$$P\{|X - \bar{x}| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, то при любом сколь угодно малом постоянном $\varepsilon < 0$ существует равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum \bar{x}_k\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема Хинчина. Если независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями $\bar{x}$ распределены нормально, то при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ существует равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum X_k - \frac{1}{n}\sum \bar{x}_k\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема Маркова. Для последовательности зависимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = 0,$$

при любом постоянном $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{x}_k\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

О применении закона больших чисел. Для того чтобы к последовательности как угодно зависимых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ был применим закон больших чисел, т. е. чтобы при любом постоянном $\varepsilon > 0$ была справедлива теорема Маркова, необходимо и достаточно соблюдение равенства

$$\lim_{n\to\infty} M \frac{\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{x}_k)\right\}^2}{1 + \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{x}_k)\right\}^2} = 1.$$

Центральная предельная теорема

Теорема Муавра — Лапласа. Если производится серия n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью P, то имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \leqslant \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[\Phi(b) - \Phi(a)\right],$$

где m — число появления события A в результате n опытов,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

— функция Лапласа, или интеграл вероятностей.

Теорема Ляпунова. Если последовательность взаимонезависимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при некотором значении $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum M\{|X_k - \bar{x}_k|^{2+\delta}\} = 0,$$

то выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a < \frac{1}{B_n}\sum (X_k - \bar{x}_k) < b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi(b) - \Phi(a)\right],$$

где $\bar{x} = M[X_k]$ — математическое ожидание X_k,

$\sigma^2 = D \mid X_k \mid$ — дисперсия,

$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma^2$ — сумма дисперсий.

Для применения теоремы Ляпунова в случае одинаково распределенных случайных величин достаточно убедиться в том, что дисперсии слагаемых конечны и отличны от нуля.

Информация и энтропия

Теория информации — раздел теории вероятностей о количественных закономерностях, связанных со сбором, передачей, обработкой и хранением совокупности различного рода научно-технических, физических и экономических сведений, необходимых для деятельности любой современной системы управления предприятиями, организациями и учреждениями, осуществляемой в порядке взаимного обмена информациями между ними.

Формы обмена информациями весьма разнообразны: устные и письменные, непосредственные и косвенные, физические и механические, односторонние и двусторонние, прямые и обратные, однородные и комбинированные и др.

Способы обмена информациями. Там, где возникает массовый обмен информациями во времени и пространстве, обращаются к использованию быстрых и мгновенных способов связи в форме электрических импульсов, звуковых сигналов, световых колебаний, механических перемещений и разного рода приспособлений современной техники.

Средства обмена информациями. Любая информация должна быть соответственным образом закодирована, т. е. переведена на язык специальных символов или сигналов при минимальном количестве знаков и максимальном извлечении статистических сведений по составленному коду. Эти сведения обрабатываются в количественной форме вероятностными методами, разработанными в теории информации.

Основные задачи теории информации — отыскание наиболее экономных способов кодирования, передача заданной информации с помощью минимального числа символов, расчет пропускной способности каналов связи между передатчиком и приемником, установление объема запоминающих устройств для хранения информации, определение чувствительности каналов связи к помехам (искажениям), разработка способов ввода информации в запоминающие устройства и вывода ее для непосредственного использования. Центральной задачей при этом является количественное описание процессов передачи статистических сведений и соответственно математическое обоснование закономерностей, относящихся к этим процессам.

Отыскание меры количественного выражения передаваемой информации привело к следующим понятиям и представлениям.

Энтропия дискретных случайных величин. В теории информации любое сообщение рассматривается как совокупность сведений о некоторой физической системе X. Там, где состояние системы X известно, нет смысла передавать сообщение и оно имеет смысл только тогда, когда состояние X заранее неизвестно, случайно. Поэтому в качестве передаваемой информации рассматривается физическая система X, которая случайным образом может оказаться в том или ином состоянии, т. е. система, которая заведомо характеризуется некоторой неопределенностью.

Сведения о системе X тем ценнее, чем больше неопределенность X до получения сведений. Система X не представляет интереса, если она достоверна или невозможна. Но в этих пределах система X может быть измерена числом состояний и вероятностями этих состояний. В таком случае количественное выражение системы X определяется следующей мерой.

Энтропия — мера неопределенности системы X, количественное значение которой выражается суммой произведений вероятностей различных состояний системы на логарифмы этих вероятностей, взятых с обратным знаком:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

В этой формуле при малых вероятностях p_i увеличивают масштаб изображения энтропии, знак же минус перед суммой сохраняет ее положительное значение, имея в виду, что числа p_i меньше единицы и логарифмы этих чисел отрицательны. Логарифм p_i можно взять при любом основании $a > 1$.

Перемена основания равносильна умножению энтропии на постоянное число. Выбор основания отвечает определению единицы измерения энтропии. Если за основание взять число 10 или 2, то соответственно получим десятичную и двоичную единицы энтропии.

Практически удобно пользоваться логарифмами при основании 2, что согласуется с двоичной системой исчисления*, применяемой в электронных цифровых вычислительных машинах.

Свойства энтропии. Энтропия обращается в нуль, если одно из состояний системы достоверно, а другое — невозможно; достигает максимума, когда состояния равновозможны; увеличивается при увеличении числа состояний; обладает аддитивностью, так что при объединении нескольких независимых систем в одну их энтропии складываются.

Энтропия системы X с равновозможными состояниями равна логарифму числа состояний

$$H(X) = \log n.$$

* Обозначается символом bit, что в переводе с английского binary diyit означает двоичный знак.

В общем случае, когда вероятности p_i различных состояний системы X неодинаковы, энтропия определяется формулой

$$H(X) = \sum \eta(p_i),$$

где

$$\eta(p) = -p \log p.$$

Энтропия сложной системы

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \eta(p_{ij}).$$

Энтропия той же системы в форме математического ожидания

$$H(X, Y) = M[-\log P(X, Y)],$$

где $P(X, Y)$ — функция состояния.

Теорема сложения энтропий. При объединении независимых систем их энтропии складываются

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y).$$

Теорема обобщается на произвольное число независимых систем

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i).$$

Если объединяемые системы зависимы, то вводится понятие условной энтропии.

Условная энтропия системы X при предположении, что система X находится в состоянии X_i,

$$H(Y/x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(y/x_i) \log P(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} \eta(P(y_j/x_i)$$

или

$$H(Y/x_i) = M_{x_i}[-\log P(y_j/x_i)].$$

Условная энтропия зависит от того, какое состояние X_i приняла система X: для одних состояний она будет больше, для других — меньше. В этом случае определяют среднюю, или полную энтропию системы Y по X:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \log P(y_j/x_i)$$

или

$$H(Y/X) = M[-\log P(Y/X).$$

Если две системы X и Y объединяются в одну, то

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y/X).$$

В сложном случае

$$H(X_1, X_2, \ldots, X_s) = H(X_1) + H(X_2/X_1) + \ldots + H(X_s/X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}),$$

где энтропия каждой последующей системы вычисляется при условии, что состояние всех предыдущих известно.

Энтропия непрерывных случайных величин. Энтропия величины X, заданной плотностью вероятности $f(x)$, равна

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log f(x)\, dx + c,$$

где c — начало отсчета энтропии.

Условная энтропия X относительно Y

$$H(X/y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x/y) \log f(x/y)\, dx.$$

Средняя условная энтропия

$$H_y[X] = M[H|X/y] =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y) f(x/y) \log f(x/y)\, dx dy.$$

Энтропия системы n случайных величин

$$H(X_1, \ldots, X_n) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n) \log f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Средняя условная энтропия подсистемы случайных величин (X, Y) относительно z

$$H_z[X, Y] = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_z(z) f(x, y)/z) \log f(x, y/z)\, dx dy dz.$$

Средняя условная энтропия z относительно X, Y

$$H_{x,y}[z] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) f(z/x, y) \log f(z/x, y)\, dx dy dz.$$

Количество информации при полном выяснении состояния системы

$$J_X = H(X).$$

Формула средней (полной) информации

$$J_X = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i - M[-\log P(X)],$$

получаемой из частных информаций

$$J_{X_i} = -\log p_i.$$

Ни частная, ни полная информации не могут быть отрицательными. Если

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n},$$

то

$$J_{X_i} = \log p = \log n,$$

$$J_X = -n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n.$$

Но если $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_n$, то наибольшую информацию несут сообщения о тех событиях, которые *априори* были наименее вероятны.

Полная, или средняя информация о системе X, содержащейся в системе Y, измеряется разностью

$$J_{Y \to X} = H(X) - H(X/Y).$$

Следовательно, полная взаимная информация, содержащаяся в системах, из которых одна является подчиненной, равна энтропии подчиненной системы.

Полная взаимная информация, содержащаяся в двух системах, равна сумме энтропий состоящих систем без энтропии объединенной системы, т. е.

$$J_{Y \longleftrightarrow X} = H(X) + H(Y) - H(X, Y).$$

Общее выражение для полной взаимной информации в форме математического ожидания

$$J_{Y \longleftrightarrow X} = M\left[\log \frac{P(X, Y)}{P(X)\,P(Y)}\right].$$

Формула для непосредственного вычисления полной информации

$$J_{Y \longleftrightarrow X} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i r_j},$$

где

$$p_{ij} = P(X \sim x_i)(Y \sim y_i);$$

$$p_i = P(X \sim x_i); \qquad r_j = P(Y \sim y_j).$$

Частная информация выражается так:

$$J_{y_j \to X} = \sum_{i=1}^{n} P(x_i/y_i) \log \frac{p(x_i/y_i)}{p_i}$$

или

$$J_{y_j \to X} = M\left[\log \frac{P(X/y_j)}{P(X)}\right].$$

Символическое равенство

$$J_{Y \to X} = J_{X \to Y}$$

означает, что из двух систем каждая содержит относительно другой одну и ту же полную информацию.

Равенство вида

$$J_{Y \leftrightarrow X} = J_{Y \leftrightarrow X} = J_{X \leftrightarrow Y}$$

выражает полную взаимную информацию, содержащуюся в системах X, Y.

Если системы X и Y независимы, то полная взаимная информация равна нулю, так что

$$H(Y/X) = H(Y), \qquad J_{Y \leftrightarrow X} = 0.$$

Если системы X и Y эквивалентны, то состояние системы X полностью определяет состояние системы Y и наоборот, так как

$$H(X) = H(Y); \qquad H(X/Y) = H(Y/X) = 0;$$

$$J_{Y \leftrightarrow X} = J_X = J_Y = H(X) = H(Y).$$

При наличии между системами X и Y жесткой и односторонней зависимости, когда состояние одной из них полностью определяет состояние другой, но не наоборот, первая из них называется подчиненной системой.

По состоянию подчиненной системы нельзя однозначно определить состояние другой.

Если из двух систем X и Y подчиненной является X, то

$$H(X/Y) = 0 \quad \text{и} \quad J_{Y \leftrightarrow X} = H(X).$$

Формула непосредственного вычисления частной информации:

$$J_{y_j \to X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{ij}}{r_j} \log \frac{P_{ij}}{p_i r_j}.$$

Формула информации «от события к событию»:

$$J_{y_j \to x_i} = \log \frac{P(x_i/y_j)}{p_i}$$

или

$$J_{y_j \to x_i} = \log \frac{P(x_i/y_j)}{p_i} = \log \frac{P_{ij}}{p_i r_j},$$

симметричная

$$J_{y_j \to x_i} = J_{x_i \to y_j} = J_{y_j \leftrightarrow x_i}$$

относительно x_i и y_i.

Таким образом, формулы информации сводятся к трем видам: полная информация о системе X, содержащаяся в системе Y:

$$J_{Y\to X} = J_{Y\leftarrow\rightarrow X};$$

частная информация о системе X, содержащаяся в событии (сообщении) $Y \sim y_i$:

$$J_{y_j\to X};$$

частная информация о событии $X \sim x_i$, содержащаяся в событии (сообщении) $Y \sim y_i$:

$$J_{y_j\to x_i} = J_{y_j\leftarrow\rightarrow x_j}.$$

Первые два вида информации неотрицательны. Последняя может быть положительной и отрицательной [7], [13], [34].

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ОШИБОК И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§ 9. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Теория ошибок возникла в связи с исследованиями точности астрономо-геодезических и физических измерений и наблюдений. Начало этой теории заложено в трудах Котса, Лапласа, Лежандра и др.

Основоположником классической теории ошибок является Гаусс. Теория ошибок Гаусса содержит рациональные средства математической обработки результатов измерений, успешно применяемые в современном естествознании. Исходными в этой теории являются два положения Гаусса.

Положение первое. Гаусс показал, что если принять принцип арифметической средины, то ошибка измерения подчиняется нормальному закону. В последующем Гаусс этому положению предпочел второе.

Положение второе. Из двух рядов измерений, не обладающих одинаковой точностью, нужно отдать предпочтение тому, который дает интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$$

наименьшее значение.

Согласно этому положению сформулирована задача, в силу которой каждый ряд измерений и каждое измерение в отдельности могут быть в отношении точности охарактеризованы по сравнению с другими рядами измерений его относительным весом $p_i = \frac{c}{\sigma_i^2}$.

Математическая статистика — дисциплина, занимающаяся описанием, анализом и предсказанием явлений по данным экспериментальных исследований. Опорой современной математической статистики служат законы теории вероятностей в частотной интерпретации. В такой интерпретации вероятность является абстрактной копией эмпирической частоты, а дисциплина в целом — эмпирической моделью теории вероятностей.

В математической статистике центральное место занимает теория оценок и теория проверки гипотез. Отправным пунктом теории оценок служит метод наименьших квадратов, развитый Гауссом.

Фишер распространил положения Гаусса на значительно более общие проблемы отыскания оценок. По Фишеру условие наибольшей вероятности наблюдаемого события приводит к оценкам максимального правдоподобия, а требование наименьшей средней ошибки — к понятию эффектных оценок.

Исходным пунктом теории проверки гипотез послужили критерии Пирсона и Стьюдента. Фишер расширил область применения этих критериев, ввел понятие «степеней свободы» и вскрыл взаимосвязь с теорией оценок, указав на то, что в критерии Пирсона следует пользоваться только эффективными оценками.

Теория ошибок и математическая статистика. В труде [2] теория ошибок рассматривается как специальная часть математической статистики, посвященная числовому определению физических величин. В труде [37] теория ошибок включается в математическую статистику на базе теории вероятностей в рамках одной и той же дисциплины, не делая различия между проблемами теории ошибок и математической статистики.

В труде [6] математическая статистика опирается на исходные положения теории ошибок и в последующем развивается как самостоятельная дисциплина, в которой в общем плане обсуждаются вопросы теории ошибок.

Непосредственные измерения. Любая операция измерения содержит в себе сравнение эталона, принятого для измерения, с измеренным объектом. Это и должно быть основным определением непосредственных измерений в общепринятом смысле.

Такое определение однозначно при любом эталоне измерения, т. е. результат измерения является непосредственным независимо от того, каким прибором или инструментом произведено измерение.

При сравнении важен эталон, которым снабжен данный прибор или инструмент; как построен эталон — безразлично. Так что с точки зрения математической обработки результатов измерений определение расстояния по дальномеру — действие в таком же смысле непосредственное, как и определение расстояний обыкновенной рулеткой, стальной лентой, инварной проволокой, светодальномером, радиодальномером и т. п.

Однократные и многократные измерения. Измерения различают двоякого рода: многократные измерения одного и того же объекта и однократные измерения множества однородных объектов. Совокупность измерений первого рода отлична по своему внутреннему смыслу от совокупности измерений второго рода.

Пример. *Чтобы как можно точнее определить высоту какого*-либо здания, много раз измеряют высоту этого здания. С другой стороны, чтобы сравнить среднюю высоту зданий на двух различных улицах, измеряют высоты зданий всех домов каждой улицы.

В первом случае будем иметь многократные измерения одного и того же объекта, во втором — однократное измерение множества объектов.

Виды измерений. В классических руководствах [39, 42] геодезические задачи рассматриваются в следующем плане:

1) непосредственные измерения;
2) косвенные, или посредственные измерения;
3) непосредственные измерения, связанные условиями;
4) косвенные измерения, связанные условиями;
5) условия измерения с дополнительными неизвестными.

Последовательность по видам измерений 1—5 сложилась исторически по методу индукции и рассматривается раздельно: вид измерения 1 — в теории ошибок, виды измерений 2—5 — в методе наименьших квадратов. Соответственно возникло наименование предмета: «Теория ошибок и метод наименьших квадратов». В таком наименовании одна проблема рассматривается в пяти частных вариантах.

Между тем классификация измерений по тому или иному виду зависит от исследователя, так как один и тот же вид по схеме 1—5 можно отнести либо к непосредственным, либо к косвенным измерениям, либо с наложением математических условий, либо без таковых, смотря по тому, в каком отношении его интересуют результаты измерений или наблюдений.

Косвенные измерения, т. е. вид измерения 2, представляют собой самый многочисленный класс измерений. Такого рода измерения производятся потому, что искомые величины невозможно или весьма сложно измерить непосредственно, либо потому, что способом косвенных измерений можно получить более точные результаты, чем при непосредственных измерениях.

В метрологии различают еще два вида измерений [26]: *лабораторные*, при выполнении которых производится исследование точности измерений, и *технические*, для которых задается определенная точность, достаточная для данной практической цели.

В современной интерпретации геодезистов взамен схемы по видам измерений 1—5 предусматривается схема по способу определения неизвестных:

1) *параметрическая* — вместо вида измерения 2;
2) *коррелатная* — вместо вида измерения 3;
3) *комбинированная* — вместо видов измерения 4—5.

Последовательность по схеме 1—3 также, как по схеме 1—5, относит вид измерения 1 к разделу теории ошибок.

Условия измерений. Совокупность факторов, сопровождающих измерения, выражает условия измерений. К таким факторам относятся характер местности, где производятся измерения; инструменты и приборы, при помощи которых осуществляются измерения; внешняя обстановка, в которой организованы измерения; методы или способы, принятые при измерениях; теоретические и практические положения, лежащие в основе измерений, и др.

Равноточные и неравноточные измерения. Соответственно условиям измерений возникают представления о равноточных и неравноточных измерениях. Если результаты измерений получены в одинаковых условиях, то такие результаты называют равноточными.

Результаты измерений, полученные в разных условиях, в общем случае относят к неравноточным.

Непосредственные наблюдения. Эмпирическое описание массовых явлений в словарной, табличной, регистрационной, инструктивной, калькулятивной, графической и во многих других подходящих изобразительных формах суть совокупность непосредственных наблюдений, доставляющих информацию статистического характера о состоянии (статике, динамике) изучаемого явления на данном (фиксированном) отрезке времени и в данных территориальных (пространственных) условиях.

Косвенные наблюдения. Там, где познание природы вещей, явлений, событий невозможно сформулировать средствами непосредственных наблюдений, вступает в силу способ косвенных наблюдений. При этом предполагается, что форма функциональной зависимости между искомыми величинами известна. Если она неизвестна, то ее отыскание составляет задачу научно-исследовательского характера.

Результаты измерений и вычислений. Итоги непосредственных измерений связываются с искомыми элементами математическими соотношениями или уравнениями; они могут быть точными и приближенными, линейными и нелинейными.

Вычислительные операции по результатам непосредственных измерений всегда приводят к приближенным значениям искомых элементов даже в том случае, когда вычисления производятся по совершенно точным формулам.

Приближенные числа возникают также в процессе вычислений: при выборке значений по таблицам логарифмов и натуральных значений тригонометрических функций, по графикам и номограммам, при определении корней уравнений и т. п. При самых тщательных измерениях и вычислениях результаты измерений и вычислений всегда выражаются приближенными числами.

Случайные ошибки

Вероятностная модель распределения случайных ошибок. Если исходить из предположения, что ошибки измерений являются результатом действия большого числа независимых причин и случайную ошибку можно представить как сумму элементарных ошибок, то в силу центральной предельной теоремы ошибку измерения с высокой степенью приближения можно считать нормально распределенной.

Практика показывает, что большинство количественных показателей подчиняется нормальному распределению. При достаточно большом числе независимых наблюдений над этими показателями относительная частота их попадания в заданный интервал приближенно равна вероятности попадания значений нормальной случайной величины X в тот же интервал при надлежащем образом подобранных параметрах a и σ. Поэтому при построении теории ошибок исходят из нормального распределения

$$dF = \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx,$$

непрерывной величины X, хотя, строго говоря, все случайные величины дискретны, так как в результате измерения можно получить значения, только кратные той наименьшей единице, которую показывает измерительный прибор. Если эта единица мала по сравнению со статистическими колебаниями (флуктуациями) случайной величины, то функция распределения будет иметь большое число малых скачков и поэтому достаточно точно может быть аппроксимирована непрерывным распределением.

О роли нормального распределения в теории ошибок и статистике. Под влиянием трудов Гаусса и Лапласа долгое время считалось едва ли не аксиомой, что практически все статистические распределения должны приближаться к нормальному распределению как к идеальной форме, полагая при этом, что число наблюдений достаточно велико.

Такая точка зрения преувеличивала роль нормального распределения. Однако несомненно, что во многих случаях возникают распределения, приблизительно нормальные (при физических, астрономических и геодезических измерениях, в области демографических и биологических исследований и т. д.). Теоретическое объяснение этих эмпирических фактов дает центральная предельная теорема.

Согласно «гипотезе элементарных ошибок» Хагена и Бесселя суммарная ошибка физического или астрономического измерения рассматривается как сумма большого числа взаимнонезависимых случайных ошибок. Тогда по центральной предельной теореме суммарная ошибка должна быть распределена приблизительно нормально. Такая точка зрения распространяется на случайные величины, возникающие в технике и экономике. В силу центральной предельной теоремы среднее арифметическое большого числа независимых величин распределено приблизительно нормально и во многих случаях отмечается для некоторых функций более общего характера. Эти свойства имеют фундаментальное значение для многих методов, используемых в статистической практике.

Французский математик Пуанкаре выразил по поводу нормального распределения следующее замечание: «Каждый уверен в справедливости закона ошибок, экспериментаторы — потому, что они думают, что это математическая теорема, математики — потому, что они думают, что это экспериментальный факт». В этой связи известный статистик Крамер полагает, что «обе стороны совершенно правы, если только это их убеждение не слишком безусловно; математическое доказательство говорит нам, что при некоторых ограничительных условиях мы вправе ожидать нормального распределения, а статистический опыт показывает, что в действительности распределения являются часто приближенно нормальными» [19].

Случайная ошибка есть разность

$$\Delta = x - X,$$

где x — результат измерения; X — истинное, или точное значение измеренной величины.

Случайная ошибка возникает во всех случаях и при всех обстоятельствах, несмотря на меры предосторожности, принятые при измерениях и наблюдениях. Так что случайная ошибка — неизбежная ошибка, возникающая при любых измерениях и наблюдениях.

Статистическая закономерность случайных ошибок. Неизбежные ошибки, последовательность из которых не обладает видимой закономерностью, т. е. каждая из которых не обнаруживает каких-либо регулярностей, называют случайными. В такой последовательности случайными являются величина и направление ошибки. По предыдущей случайной ошибке нельзя установить ни абсолютное значение, ни знак следующей ошибки. Множество подобного рода ошибок рассматривают как статистическую совокупность, обладающую определенными свойствами.

Выразим вероятностную модель через случайные ошибки Δ_i. Тогда будем иметь плотность распределения

$$f(\Delta) = \frac{h}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-H^2\Delta^2}$$

и кривую распределения

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

случайных ошибок в обозначениях теории ошибок.

Мера точности Гаусса h — ордината кривой, или частость распределения случайных ошибок. Так как показатель кривой распределения в экспоненте e содержит случайную ошибку Δ во второй степени, то для значений Δ, одинаковых по абсолютной величине, но различных по знаку, частота y имеет одинаковое значение. Следовательно, случайные ошибки, равные по абсолютной величине, но различные по знаку, встречаются одинаково часто. Так как показатель экспоненты при всех значениях Δ отрицателен, а $e > 1$, то частота y убывает с увеличением Δ и наибольшее значение принимает при $\Delta = 0$. Это означает, что малые по абсолютному значению случайные ошибки возникают чаще, чем большие.

С возрастанием Δ частота y уменьшается весьма быстро. Так, если $\Delta = 5\sigma$, то отношение частоты y_5 к частоте y_0 равно

$$\frac{y_5}{y_0} = \frac{e^{-\frac{25}{2}}}{e^0} = 3{,}7 \cdot 10^{-6},$$

т. е. равно практически ничтожной величине. Это означает, что появление больших ошибок исключено.

Если совокупность ошибок обнаруживает заметные уклонения от закона распределения Гаусса, то следует полагать, что данный ряд результатов измерений содержит или промахи, или систематические ошибки, совокупность которых находится вне предела данного распределения случайных ошибок.

В соответствии с указанными соображениями можно сформулировать особенности распределения случайных ошибок.

Свойства случайных ошибок. Статистические свойства случайных ошибок отчетливо проявляются при большом числе измерений. Главнейшие свойства случайных ошибок:

1) положительные ошибки появляются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки; так что положительные ошибки так же вероятны, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки;

2) для данных условий измерений случайные ошибки не могут превосходить по абсолютной величине известного предела; вероятность случайной ошибки, превосходящей этот предел, равна нулю;

3) между крайними пределами случайные ошибки могут принимать все промежуточные значения, причем малые по абсолютной величине ошибки появляются чаще, чем большие.

Предельная ошибка. В курсах теории вероятностей составлена таблица для функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

при различных значениях аргумента $z > 0$.

Приняв во внимание, что кривая распределения y симметрична по отношению к оси ординат, напишем формулу

$$\frac{m}{n} = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

и приведем ее к виду

$$\frac{m}{n} = 2\Phi(z).$$

Воспользовавшись этой формулой и таблицей значений интеграла $\Phi(z)$, обратимся к табл. 1. В этой таблице приведены:

— значения Δ, выраженные в долях σ;

$$\frac{m_i}{n} = 2\Phi(z)$$

— относительное число ошибок, не превышающих по абсолютной величине заданного значения Δ;

$$\frac{m}{n} = 1 - 2\Phi(z)$$

Таблица 1

Δ	$\frac{m_i}{n}$	$\frac{m}{n}$	n_s
0,56	38%	62%	—
0,67	50	50	2
16	68	32	3
2	95	5	22
3	99,7	0,3	370
4	99,99	0,01	15 625

— относительное число ошибок, превышающих по абсолютной величине заданное значение Δ;

— n_s — число ошибок, среди которых только одна ошибка при заданном значении Δ может превысить по абсолютной величине это значение.

Из этой таблицы видно, как быстро уменьшается число ошибок, превышающих по абсолютной величине заданные пределы. Из 370 случайных ошибок только одна ошибка по абсолютной величине больше 3σ, и только одна ошибка из 15 625 больше 4σ. На практике число отдельных измерений редко превышает несколько десятков, поэтому появление даже одной случайной ошибки, большей чем 3σ,— событие маловероятное; наличие же двух подобных ошибок почти невозможно.

На этом основании полагают, что все возможные случайные ошибки данного ряда измерений практически не превышают по абсолютной величине 3σ. Так что ошибка, удовлетворяющая условию

$$\Delta_{\text{пред}} = 3\sigma,$$

— предельная ошибка распределения случайных ошибок.

Таблица 2

№ треугольника	Невязки w	w^2	№ треугольника	Невязки w	w^2	№ треугольника	Невязки w	w^2
1	—0,34	0,12	12	—0,40	0,16	22	—1,44	2,07
2	0,74	0,55	13	0,08	0,01	23	1,76	3,10
3	—0,29	0,08	14	0,82	0,67	24	0,47	0,22
4	0,69	0,48	15	—1,18	1,39	25	1,21	1,46
5	0,90	0,81	16	2,15	4,62	26	—0,11	0,01
6	—1,99	3,96	17	—0,67	0,45	27	1,89	3,57
7	2,53	6,40	18	—0,20	0,04	28	—1,37	1,88
8	—1,97	3,88	19	1,00	1,00	29	0,90	0,81
9	—1,99	3,96	20	—1,46	2,13	30	0,23	0,05
10	0,88	0,77	21	—0,35	0,12	31	—0,70	0,49
11	—0,66	0,44						

Пример. Распределение невязок в триангуляционном ряде, построенном на одном из участков территории СССР, приведено в табл. 2.

Треугольники ряда плоские, так что невязки суть истинные, или случайные ошибки. Поэтому в соответствии со свойствами случайных ошибок ряд содержит:

положительных невязок 15, сумму из них $+16''.25$;

отрицательных невязок 16, сумму из них $-15''.12$;

общую сумму $+1''.13$.

Таким образом, число невязок по абсолютной величине меньше σ составляет 20, между σ и 2σ равно 10, а между 2σ и 3σ содержится одна невязка; невязки же сверх 3σ отсутствуют.

Систематические ошибки

Особенности систематических ошибок. Такого рода ошибки возникают под действием определенных причин и, как правило, распределяются по какому-либо определенному закону. В рядах, образованных из систематических ошибок, непосредственно обнаруживается регулярность или в чередовании знаков, или в последовательном расположении абсолютных значений, или в том или ином определенном сочетании этих признаков.

Классификация систематических ошибок по источникам возникновения.

Инструментальные — порождаемые конструктивными особенностями измерительной аппаратуры.

Монтажные — определяемые в силу неправильной или небрежной установки измерительной аппаратуры.

Теоретические — вызываемые недостаточной разработкой метода измерения или наблюдения.

Личные — присущие индивидуальным особенностям наблюдателя.

Разновидности систематических ошибок по характеру проявления.

Постоянные — сохраняющие неизмененными свой знак и величину.

Прогрессивные — возрастающие или убывающие в процессе измерения.

Периодические — закономерно изменяющиеся по величине и знаку.

Сложные — порождаемые структурой теоретических и эмпирических формул.

Влияние систематических ошибок на результаты измерений. Пусть l' — измеренный вектор, l — исправленный вектор, θ — вектор систематических ошибок, $\overline{l'}$ и $\overline{l}$ — соответственно неисправленный и исправленный векторы в среднем из n измерений. Тогда из соотношения

$$l' = l + \theta$$

в среднем

$$\overline{l'}=\overline{l}+\theta$$

следует

$$\overline{l}=\overline{l'}+\theta$$

или

$$\overline{l}=\overline{l'}+c,$$

где $c=-\theta$ — вектор поправок, т. е. вектор систематических ошибок с обратным знаком.

Если θ — вектор постоянных ошибок, то

$$v=l-l=l'-\theta-(\overline{l'}-\theta)=l'-\overline{l'}$$

— вектор остаточных поправок.

Отсюда следует, что вектор v останется неизменным, если формулу

$$v=l-\overline{l}$$

заменить формулой

$$v=l'-\overline{l'}.$$

Поэтому при обработке результатов измерений вектор постоянных ошибок θ не может быть обнаружен.

Если θ — вектор переменных систематических ошибок, то

$$v=l-\overline{l}=l'-\overline{l'}+(\overline{\theta}-\theta)$$

или

$$v=v'+(\overline{\theta}-\theta),$$

где

$v'=l'-\overline{l'}$ — исправленный вектор остаточных ошибок.

Следовательно, если для вычисления вектора остаточных ошибок взять неисправленный вектор из этих ошибок, то значения параметров точности не будут соответствовать действительным их значениям. Вместе с тем при обработке результатов измерений возникает возможность обнаружить влияние вектора переменных ошибок.

Признаки переменных и постоянных систематических ошибок. Пользуясь формулой

$$\overline{v}=v'+(\overline{\theta}-\theta),$$

найдем соотношение

$$v_i'=v_i+(\theta_i-\theta).$$

Из этого соотношения следует, что второй член его правой части (при расположении остаточных ошибок в той последовательности, в которой произведены измерения) приведет к правильному чередованию знаков. Если при этом случайные ошибки по сравнению с систематическими ошибками малы, то знаки второго члена будут определять знаки соответствующих неисправленных ошибок или во всяком случае будут преобладать над знаками первого члена v_i. По этим соображениям можно установить признаки наличия в результатах измерений переменных ошибок систематического характера.

Если в ряде измерений соответственно их выполнению ошибки сопровождаются правильным чередованием знаков, то данный ряд содержит прогрессивную или периодическую ошибку, смотря по тому, как распределяются положительные и отрицательные ошибки. Но если в ряде измерений остаточные ошибки сохраняют один знак при наличии определенных условий наблюдений и меняют его на обратный при отсутствии этих условий или при появлении новых условий, то данный ряд содержит постоянную ошибку, исчезающую или возникающую с изменением условий измерений. Такой случай часто имеет место при замене одних приборов другими, если их поверка произведена недостаточно тщательно.

Указанные признаки обнаруживают систематические ошибки только в том случае, если последние по сравнению со случайными ошибками достаточно велики. Там, где абсолютные значения систематических ошибок не превышают значений случайных ошибок, правильное чередование знаков остаточных ошибок нарушается и в разных местах ряда можно заметить неравномерное их распределение.

В таком случае рекомендуется следующий критерий прогрессивной систематической ошибки.

Если разность сумм остаточных ошибок для первой и второй половины ряда, состоящего из не очень малого числа измерений, заметно отличается от нуля, то данный ряд содержит прогрессивную систематическую ошибку [26].

Способы исключения систематических ошибок

Исследование средств измерений и наблюдений в лабораторной или полевой обстановке.

Проверка установки измерительной аппаратуры, а также показаний всех вспомогательных приборов.

Замещение измеряемой величины равновеликой известной величиной.

Компенсация ошибки по знаку полуприемами слева и справа по системе счета.

Противопоставление в постановке наблюдений так, чтобы причины, вызывающие постоянные ошибки, оказали на результаты наблюдений противоположное действие.

Симметризация наблюдений пропорционально времени четное число раз через полуприемы.

Учет систематических ошибок. Величина влияния систематических ошибок имеет функциональный характер. Поэтому она может быть выражена определенным эмпирическим уравнением. Такие уравнения строятся на базе специальных исследований. Во всяком случае предполагается, что систематические ошибки предварительно учитываются, а затем из всех результатов измерений исключаются.

Остаточное влияние систематических ошибок. Достигнуть полного устранения систематических ошибок практически невозможно, но во всех случаях стремятся к определению основной части влияния такой ошибки.

Различие между случайными и систематическими ошибками. Между описанными видами ошибок различие не является абсолютным: постоянная ошибка может перейти в случайную, а случайная — в систематическую. Обращение одного вида ошибок в другой зависит от постановки задачи, от условий и методов измерений.

Промахи, грубые результаты

Промах — просчет, искажающий результат измерения или наблюдения и нарушающий схему запланированного эксперимента.

Причины, порождающие промахи,— неправильные действия наблюдателя, его неопытность, небрежность, невнимательность, переутомленность, произвольное обращение с измерительной аппаратурой (нарушение правил установки приборов, несоблюдение схемы расположения агрегатов).

Промахи часто возникают у начинающих исполнителей, но могут возникать и у опытных работников.

Разновидности промахов — неправильный отсчет по шкале прибора; неверный отсчет, записанный с неисправного прибора; ошибочная запись результата измерения (описка); пропуск в наблюдениях и др.

Устранение промахов осуществляется контрольными измерениями и наблюдениями прямо или косвенно, приближенно или строго, действующей или другой аппаратурой.

Грубый результат — аномальное числовое значение объекта, не соответствующее условиям измерения и наблюдений. Внешним признаком такого результата является его резкое отличие по величине от остальных результатов.

Нередко грубый результат трудно отличить от промаха. Наблюдатель, случайно облокотившийся на подставку оптического прибора, может изменить ее положение так, что полученное показание по этому прибору будет заметно уклоняться от ряда несколько отличных друг от друга предшествующих результатов. Весьма существенные отклонения в ряде остальных нормально допустимых отклонений вызывают резкие колебания внешних условий; задержка в действии прибора; скачки при работе счетного механизма; чувствительность средств измерения к погодным условиям и ряд других причин, нарушающих случайный характер распределения получаемых результатов.

О возможности и необходимости исключения грубых результатов. Если наблюдатель обнаружит, что некоторый результат резко отличен от других, и находит основание предполагать, что такой результат возник в силу особых причин, то он вправе исключить полученный результат из данного ряда измерений или наблюдений. Там, где наблюдатель имеет дело с физическими измерениями, и, следовательно, в каждом отдельном случае результаты многократных измерений одной величины контролируются точностью средств измерений, самым надежным и эффективным способом определения неверных результатов является способ повторных измерений.

Между тем при однократных измерениях множества однородных величин наличие лишь одного факта резкого отличия результата измерения от остальных еще недостаточно для того, чтобы такой результат был забракован. В общем случае стремление к сглаживанию ряда результатов измерений свойственно наблюдателям, не опытным в производстве измерений. Начинающий наблюдатель должен выработать у себя навыки беспристрастного отношения к результатам измерений, полной уверенности в том, что все наблюдения, произведенные с одинаковой тщательностью и добросовестностью, заслуживают одинакового доверия. В сомнительном случае целесообразнее выполнить контрольное наблюдение, но не взамен сомнительного, а в дополнение к нему.

Критерии грубых результатов. При многократных измерениях постоянных величин предел числового значения, за которым возникает грубый результат, ограничен, во-первых, приближенным представлением о значении постоянного, во-вторых, показателем точности счетного механизма, которым снабжено средство измерения. При однократных измерениях множества однородных величин решение вопроса о грубых результатах требует особой осмотрительности. Когда измерения закончены и экспериментальные данные поступают в обработку, возникает общий вопрос о допустимости браковки наблюдений на основании только расхождения их числовых значений без учета обстоятельств наблюдений. Когда число наблюдений велико, то одно измерение, резко отличающееся от остальных, мало влияет на значение арифметического среднего; но если число наблюдений мало, то влияние этого измерения может оказаться несоразмеримо бо́льшим по сравнению с другими измерениями. В последнем случае возникает вопрос о правомерности браковки грубых результатов. В подобного рода неопределенных ситуациях, возникающих в статистических исследованиях, вместо критерия грубых результатов пользуются критериями грубых ошибок, полагая, что значения последних характеризуют результаты наблюдений.

Грубые ошибки

Предельная и грубая ошибки. Наибольшая ошибка, численно равная трем средним квадратическим ошибкам, выражает параметр точности нормального распределения. Такую ошибку не следует смешивать с грубой ошибкой, числовое значение которой не может иметь места при нормальном распределении. Всякая ошибка, абсолютное значение которой превышает утроенную среднюю квадратическую ошибку, относится к грубой. Вес такой ошибки равен нулю.

Критерии грубых ошибок

Критерий Райта. Если $v > 3\sigma$, т. е. если остаточная ошибка больше утроенной средней квадратической, то имеется основание предполагать, что данный ряд результатов измерений содержит промах, значение которого можно исключить после обсуждения причины возникновения этого промаха.

Если $v > 4\sigma$, то следует полагать, что соответствующее наблюдение содержит несомненный промах.

Критерий Шовене. Сущность этого критерия состоит в следующем. Пользуясь формулой

$$\frac{m}{n} = 1 - 2\Phi(z),$$

находят значение интеграла $\Phi(z)$ для случая $m = 1/2$. Тогда из соотношения

$$\frac{1}{2n} = 1 - 2\Phi(z)$$

следует

$$\Phi(z) = \frac{2n-1}{4n}.$$

Определив по табл. 1 значение аргумента z, можно найти соответственно этому случаю остаточную ошибку $v = z\sigma$.

Если при этом окажется, что соответствующая сомнительному наблюдению остаточная ошибка превышает v, то такую ошибку, как грубую, следует исключить.

При небольшом числе наблюдений критерий Шовене сильнее отсеивает грубые ошибки, чем критерий Райта, но расхождение между ними сглаживается по мере увеличения числа наблюдений.

Так как при малом числе наблюдений средняя квадратическая ошибка — величина неопределенная, то едва ли целесообразно пользоваться критерием Шовене в тех случаях, когда число наблюдений меньше десяти.

Критерий Н. В. Смирнова. Пусть

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

— результаты независимых наблюдений случайной величины X распределены нормально и допустим, что

$$r = \frac{x_э - \bar{x}}{\sigma}$$

— максимальное по абсолютной величине нормированное отклонение резко выделяющегося наблюдения, где $x_э$ — экстремальное значение (x_{max} или x_{min}) случайной величины X, $\bar{x}$ — среднее значение распределения, σ — среднее квадратическое отклонение.

Зная объем выборки n и задаваясь доверительной вероятностью $1-q$, находят такое число z_q, при котором

$$P\left(\frac{x_э - x}{\sigma} \geqslant z_q\right) \approx 2q.$$

Если $r > z_q$, то экстремальное значение $x_э$ не принадлежит к генеральной совокупности значений наблюдаемой случайной величины X и такое значение из данного ряда x_i необходимо исключить [37].

Абсолютные и относительные ошибки

Абсолютные ошибки. Любая оценка вида

$$\sigma^2,\ \sigma,\ \theta,\ r,\ \Delta_{пред},$$

характеризующая данное распределение

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n,$$

выражает абсолютную ошибку.

В случае линейных измерений одного объекта каждая из ошибок указанного вида выражает продольное смещение конца измеренного объекта от начальной точки этого объекта.

Так, если длина линии $s = 256{,}12$ м измерена с ошибкой ± 2 см, то продольное смещение σ_s равно ± 2 см.

В случае линейных измерений нескольких объектов продольные смещения концов этих объектов от начальных точек также выражаются ошибками указанного вида.

Следовательно, если

$$s_1,\ s_2, \ldots, s_n$$

— результаты измерений линейных отрезков — характеризуются соответственно только в форме абсолютных ошибок

$$\sigma_{s_1},\ \sigma_{s_2}, \ldots, \sigma_{s_n}$$

или дисперсий

$$\sigma^2_{s_1},\ \sigma^2_{s_2}, \ldots, \sigma^2_{s_n},$$

то оценка точности результатов измерений s_i в такой форме ограничивается констатацией того факта, что каждая ошибка σs_i или дисперсия σ^2_{si} выражает продольное смещение конца отрезка s_i от начальной точки этого отрезка. В такой форме меры оценок σ_s или σ^2_s результатов s_i не дают представления о сравнительной точности измерений между всеми отрезками $s_1, s_2, \ldots, s_n$ или каждой парой из них. Для сравнения точности измерений линейных величин необходима мера оценки в следующей форме.

Относительные ошибки. Любая оценка вида

$$\frac{\sigma^2}{x},\ \frac{\sigma}{x},\ \frac{\theta}{x},\ \frac{r}{x}$$

или соответственно вида

$$\frac{1}{\left(\dfrac{x}{\sigma^2}\right)} = \frac{1}{N_{\sigma^2}}, \qquad \frac{1}{\left(\dfrac{x}{\sigma}\right)} = \frac{1}{N_\sigma}$$

характеризует данное распределение

$$x_1, \ldots, x_n$$

в относительной форме.

Так, если длина линии $s_1 = 350$ м измерена с ошибкой $\sigma = 0{,}5$ м, то относительная ошибка этой линии равна

$$\frac{1}{N_\sigma} = \frac{1}{700}.$$

Точность измерения расстояний

$$s_1 = 600 \pm 0{,}6 \text{ м}; \qquad s_2 = 200 \pm 0{,}2 \text{ м}$$

одна и та же, так как относительные ошибки одинаковы:

$$\frac{0{,}6}{600} = \frac{1}{1000}; \qquad \frac{0{,}2}{200} = \frac{1}{1000}.$$

Точность измерения расстояний

$$s_1 = 600 \pm 0{,}6 \text{ м}; \qquad s_2 = 200 \pm 0{,}4 \text{ м}$$

различна, так как относительные ошибки не равны:

$$\frac{0{,}6}{600} = \frac{1}{1000}; \qquad \frac{0{,}4}{200} = \frac{1}{500}.$$

Причем точность измерения расстояния s_1 вдвое выше точности измерения расстояния s_2.

Точность угловых измерений. Ошибка измерения σ_α угла α не зависит от величины угла α. Следовательно, точность измерения углов

$$\alpha_1 = 25°12'10'',0; \qquad \alpha_2 = 36°15'24'',0$$

сопоставима, если известны ошибки

$$\sigma_{\alpha_1} \quad \text{и} \quad \sigma_{\alpha_2}$$

в абсолютной форме.

Точность линейно-угловых измерений. При построении геодезических систем всегда предполагается, что точность линейных измерений согласована с точностью угловых измерений. Сопоставление линейной ошибки σ_s с угловой ошибкой σ_α в абсолютной форме невозможно. Но если абсолютную ошибку угла σ_α выразить в радианной мере σ_α/ρ, а линейную ошибку σ_s представить в относительной форме σ_s/s, то сопоставление ошибок

$$\frac{\sigma_\alpha}{\rho}, \qquad \frac{\sigma_s}{s}$$

покажет числовое соответствие точности линейного и углового измерений.

Пусть $\sigma_\alpha = 0{,}5$ — абсолютная ошибка направления AB, $\frac{\sigma_s}{s} = \frac{1}{2300}$ — относительная ошибка измерения длины линии $AB = 350$ м.

Тогда из сравнения чисел

$$\frac{\sigma_s}{s} = \frac{1}{2300}; \qquad \frac{\sigma_\alpha}{\rho} = \frac{0{,}5}{3438} = \frac{1}{6900}$$

следует, что точность измерения направления втрое выше точности измерения длины линии s.

Формулы продольно-поперечных смещений измеренной или проектируемой линии

Пусть s — длина линии, Δs — линейное смещение, $\Delta \nu$ — угловое смещение, Δq — поперечное смещение. Тогда формулы смещений примут следующий вид (табл. 3).

Таблица 3

Смещение	Заданные величины	Величина смещения	
		при однократном измерении	при многократном измерении
Продольное абсолютное	$s,\ \Delta s$	Δs	σ_s
Продольное относительное	$s,\ \Delta s$	$\frac{1}{s:\Delta s}$	$\frac{\sigma_s}{s}$
Поперечное	$s,\ \Delta \nu$	$\Delta q = s\,\frac{\Delta \nu}{\rho}$	$\sigma_q = s\,\frac{\sigma_\nu}{\rho}$
Угловое	$s,\ \Delta q$	$\Delta \nu = \frac{\Delta q}{s}\,\rho$	$\sigma_\nu = \frac{\sigma_q}{s}\,\rho$

Формулы смещений при однократном измерении равносильны формулам, полученным из многократных измерений в среднем.

Примеры

1. Расхождение конечных точек двух равных линий $s = 568{,}45$ м, сведенных к одному началу под углом $\Delta \nu = 24',6$, равно

$$\Delta q = s\,\frac{\Delta \nu}{\rho} = \frac{568{,}45 \cdot 24{,}6}{3438} = 4{,}07 \text{ м.}$$

2. Поперечное смещение конечной точки линии $s=15$ км при $\Delta\nu=20''$ равно

$$\Delta q = s\,\frac{\Delta\nu}{\rho} = 15\,000 \cdot \frac{20}{200\,000} = 1{,}5 \text{ м.}$$

3. В прямоугольном треугольнике с острым углом $\Delta\nu=4\,°С$, где гипотенуза $c=860{,}00$ м, малый катет равен

$$b = c\sin\beta = c\,\frac{\beta}{\rho} = 860 \cdot \frac{4}{60} = 57{,}3 \text{ м.}$$

4. Наибольшая длина перпендикуляра s, построенного в данной точке при заданных $\Delta\nu=20''$, $\Delta q=5$ см, равна

$$s = \Delta q\,\frac{\rho}{\Delta\nu} = \frac{0{,}05 \cdot 200\,000}{20} = 500 \text{ м.}$$

Ошибки вычислений

Ошибки округлений приближенных чисел. В геодезической практике приближенные числа округляют согласно правилам:

если отбрасываемая часть больше 0,5 единицы предшествующего разряда, то округляемый разряд соответственно увеличивается на единицу, если меньше 0,5 единицы, то оставляют без изменения. Если же отбрасываемая часть равна 0,5 единицы предшествующего разряда, то округление производят до ближайшего четного числа.

Таким образом, ошибки округления приближенного числа заключена в пределах $0 \div 0{,}5$ единицы округляемого разряда.

Средняя квадратическая ошибки округления приближенного числа. Пусть

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$$

— неограниченно большой ряд ошибок округлений в интервале от $-0{,}5$ до $+0{,}5$. Полагая, что все ошибки округления в этом интервале равновозможны, по формуле Гаусса получим дисперсию

$$\sigma_0^2 = \frac{\int\limits_{-0,5}^{+0,5} \varepsilon^2 d\varepsilon}{\int\limits_{-0,5}^{+0,5} d\varepsilon} = \frac{(0,5)^3 - (-0,5)^3}{3} = 0{,}083$$

и среднюю квадратическую ошибки округления приближенного числа

$$\sigma_0 \approx \sqrt{0{,}09} \approx \pm 0{,}3$$

в единицах округляемого разряда.

Зависимость между предельной ошибкой округления и средней квадратической ошибкой определяется по формуле

$$\sigma_0=\frac{\alpha}{\sqrt{3}},$$

где $\alpha=\pm 0{,}5$ — предельная ошибка округления.

Формулы ошибок арифметических действий. Ошибки сложения, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня следуют из формулы ошибки среднего геометрического как частные случаи, полагая, что приближенные числа заданы с одинаковой точностью.

С особой осторожностью надо относиться к действию вычитания приближенных чисел. При этом рекомендуется пользоваться следующим правилом.

Правило акад. А. Н. Крылова записи приближенного числа. Приближенное число следует писать так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна, но не более чем на одну единицу.

Указание. Значащими цифрами называются все верные цифры числа, кроме нулей, стоящих впереди числа. Так, например, число 0,00385 содержит три значащие цифры, числа 0,03085 и 2500 — по четыре, а число $2{,}5\cdot10^3$ — две значащие цифры.

По правилу Крылова абсолютная погрешность приближенного числа выражается одной единицей отбрасываемого разряда. Относительная же ошибка может быть записана сразу в форме дроби $1:N$, где N — приближенное число без запятой.

С помощью правила Крылова обратимся к примерам сложения и вычитания приближенных чисел.

1. Пусть два близких числа

$$x_1=101{,}01 \quad \text{и} \quad x_2=102{,}52$$

получены в результате измерений. Тогда относительные ошибки этих чисел соответственно равны

$$\frac{1}{10\,101},\ \frac{1}{10\,252}$$

и порядок их один и тот же.

Сумма чисел x_1+x_2 равна 203,53 и характеризуется относительной ошибкой

$$\frac{1}{20\,353}\approx\frac{1}{20\,000}.$$

Разность x_2-x_1 этих чисел равна 1,51 и характеризуется относительной ошибкой

$$\frac{1}{151}\approx\frac{1}{150},$$

в 130 раз большей относительной ошибки суммы этих чисел.

2. Два уравнения

$$x_1 + x_2 = 2{,}00001;$$
$$x_1 + 1{,}00001 \cdot x_2 = 2{,}00002$$

приводят к точному решению при

$$x_1 = 1{,}00001, \qquad x_2 = 1.$$

С физической точки зрения дело обстоит иначе. Правые части уравнений возникают в результате непосредственных измерений, но такие измерения имеют ограниченную точность. Поэтому правые части этих уравнений могли быть заданы не до пяти, а только до двух десятичных знаков. Но тогда уравнения не могут быть решены относительно x_1 и x_2. Причина состоит в том, что неизвестные x_1 и x_2 входят в уравнения практически лишь суммой из них. Но для раздельного решения относительно x_1 и x_2 необходима также разность между ними. Если положить

$$0{,}5\,(x_1 + x_2) = z_1; \qquad 0{,}5\,(x_1 - x_2) = z_2;$$

тогда уравнения преобразуются к виду

$$2z_1 = 2{,}00001;$$
$$2{,}00001 z_1 - 0{,}00001 z_2 = 2{,}00002,$$

где величина z_2 представлена весьма слабо.

Следовательно, для вычисления величины z_1 требуется исключительно высокая точность, невозможная при массовых измерениях и наблюдениях по физическим причинам.

Пусть физические причины вызвали во втором уравнении ошибку на 0,001, тогда z_1 останется практически равным 1, но z_2 станет равным 1000, что привело бы к совершенно ошибочному решению

$$x_1 = 101, \qquad x_2 = -99.$$

Таким образом, при данных физических условиях с достаточной точностью можно найти сумму $x_1 + x_2$, но о раздельном определении x_1 и x_2 не может быть и речи.

В более сложных случаях часто принимают за истинные результаты, полученные при решении весьма косоугольных систем, не учитывая того обстоятельства, что в силу физических помех математическое решение может оказаться весьма далеким от истинного.

Проблема «помех». Всякая система линейных уравнений, построенная по экспериментальным данным, выражает приближенные соотношения между исходными значениями и определяемыми величинами. Приближенными остаются и результаты обращения (решения) совместной системы относительно неизвестных. Ясно, что стремление к точному решению подобного рода систем не имеет никакого смысла. Однако следует иметь в виду физический смысл математически верного решения в связи с влиянием «помех», возникающих при численном решении систем линейных уравнений, а именно — «арифметических помех», порождаемых погрешностями округлений приближенных чисел, и «физических помех», обусловленных неточностью результатов измерений и наблюдений.

§ 10. МЕРЫ ПОЛОЖЕНИЯ И РАССЕЯНИЯ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Меры положения

Определение. Мера положения — характеристика в координатной форме распределения

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

результатов n-кратных измерений или наблюдений величины X в среднем.

Разновидности средних. Пусть x_1 и x_2 положительные числа, причем $x_1 \leqslant x$. Тогда

$$1)\ x_A = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

— средняя арифметическая;

$$2)\ x_G = \sqrt{x_1 x_2}$$

— средняя геометрическая;

$$3)\ x_H = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

— средняя гармоническая.

Все три вида средних заключены между x_1 и x_2, причем равенство возможно только при $x_1 = x_2$. Этим свойством оправдывается наименование средних.

Понятие средней обобщается на случай n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и приводит к формулам:

$$4)\ x_A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n};$$

$$5)\ x_G = \sqrt{x_1 x_2, \ldots, x_n};$$

$$6)\ \bar{x}_H = \frac{n}{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots x_n^{-1}},$$

частным выражением которых являются формулы 1, 2, 3.

Центральное место в теории оценок занимают:

простая средняя

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n}$$

и взвешенная средняя

$$\bar{x}=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{[px]}{[p]},$$

где p_i — веса непосредственных измерений $(i=1, 2, ..., n)$.

Средние 1-го рода

Простая средняя. Пусть распределение

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

результатов n-кратных измерений величины X получено в одних и тех же условиях.

Если $x_ix_j=0$, т. е. если элементы распределения $x_1...x_n$ взаимно независимы, то такое распределение характеризуется диагональной матрицей

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{bmatrix}$$

порядка n и соответственно матрицей единичного веса

$$E=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

того же порядка n.

Тогда из соотношения

$$\frac{SpX}{SpE}=\frac{[x]}{n}=\bar{x}$$

следует, что

1) распределение значений x_1, x_2, ..., x_n величины X, измеренной при одинаковых условиях, выражается простой средней;

2) простая средняя — центр распределения результатов n-кратных измерений $x_1, ..., x_n$ величины X в прямоугольной системе координат;

3) число $\bar{x}$ — проекция конца радиуса-вектора

$$x=[x_1,\ x_2, \ldots, x_n]$$

на координатную ось OX.

Свойства простой средней. Число $\bar{x}$

1) лежит в пределах

$$x_{\max}>\bar{x}>x_{\min};$$

2) изменяется монотонно, так как с возрастанием любого из значений x_i возрастает и средняя;

3) однозначно, так как при условии

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$$

приводит к значению

$$\bar{x} = a;$$

4) ассоциативно, так как по распределению $x_1, x_2, \ldots, x_n$ допускает определение $\bar{x}$ по закону сочетания;

5) однородно, так как не сопровождается свободным членом;

6) транслятивно в силу тождества

$$f(x_1 + a,\ x_2 + a, \ldots x_n + a) = f(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) + a.$$

Если a — постоянная, то

$$a = \frac{[a]}{a} = \frac{na}{n} = a.$$

Следовательно, средняя постоянная равна самой постоянной.

Если $\overline{ax}$ — произведение в среднем, где a — постоянная, то

$$\overline{ax} = \frac{[ax]}{n} = a\,\frac{[x]}{n} = a\bar{x}$$

и постоянная выносится за знак средней.

Если $\overline{x+y}$ — средняя суммы или разности, то

$$\overline{x \pm y} = \frac{[(x+y)]}{n} = \frac{[(x+y)]}{n} = \frac{[x]}{n} \pm \frac{[y]}{n}.$$

Поэтому средняя суммы или разности равна сумме или разности средних.

Если $[(x_i - \bar{x})]$ — сумма отклонений x_i от средней $\bar{x}$, то

$$[(x_i - \bar{x})] = [x] - n\bar{x} = [x] - n\,\frac{[x]}{n} = 0.$$

Следовательно, сумма отклонений от средней равна нулю.

Взвешенная средняя. Пусть распределение

$$x_1\, x_2, \ldots, x_n$$

результатов n-кратных измерений величины X получено в различных условиях.

Если $x_i \cdot x_j = 0$, т. е. если элементы распределения $x_1, \ldots, x_n$ взаимнонезависимы, то такое распределение характеризуется диагональной матрицей

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{bmatrix}$$

порядка n и соответственно условиям измерений весовой матрицей

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix}$$

того же порядка n. Тогда из соотношения

$$\frac{SpPX}{SpP}=\frac{[px]}{[p]}=\bar{x}$$

следует, что

1) распределение значений $x_1, ..., x_n$ величины X, измеренной n-кратно при различных условиях, выражается взвешенной средней;

2) взвешенная средняя — центр распределения результатов n-кратных измерений $x_1, ..., x_n$ величины X в прямоугольной системе координат;

3) число $\bar{x}$ — проекция конца радиуса-вектора

$$x=[p_1x_1,\ p_2x_2, \ldots\ p_nx_n]$$

на координатную ось Ox;

4) в механической интерпретации число x — центр тяжести системы материальных точек

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_n$$

в n-мерном пространстве.

Свойства взвешенной средней. Если все веса измерений изменить в одно и то же число раз, то значение средней останется неизменным, так что

$$\bar{x}=\frac{[apx]}{[ap]}=\frac{a\,[px]}{a\,[p]}=\frac{[px]}{[p]}.$$

При $p_1=p_2= \ldots =p_n=1$ взвешенная средняя перейдет в простую среднюю, так что последняя является частным выражением первой.

Если

$$n=[n]$$

— число всех измерений, то числа

$$p'=\frac{n_i}{n}$$

— относительные частости. Тогда средняя выразится по формуле

$$\bar{x}=[p'x],$$

аналогичной формуле математического ожидания

$$\bar{x}=[px],$$

где p — вероятности.

Если

$$[p(x_i-\bar{x})]=[pv]$$

— сумма произведений весов на отклонения x_i от средней x, то

$$[p(x_i-\bar{x}]=[px]-\bar{x}[p]=[pv]=0.$$

Так как

$$\frac{[px]}{[p]}-\bar{x}=\frac{[pv]}{[p]},$$

то

$$[pv]=0.$$

Следовательно, сумма произведений весов на соответствующие отклонения от средней равна нулю.

Если

$$]p(x_i-x)^2]=[pv^2],$$

то

$$[pv^2]=\min.$$

Действительно, сравнение отклонений от средней

$$x_i-\bar{x}=v_i$$

и от любого произвольного числа

$$x_i=x=\delta_i$$

приводит к равенству

$$\bar{x}-x=v_i-\delta_i$$

или

$$\delta_i=v_i+\omega,$$

где

$$\omega=\bar{x}-x=\text{const}.$$

Возведем значения δ_i в квадрат

$$\delta_i^2=v_i^2+2v_i\omega+\omega^2,$$

умножим обе части на веса p_i

$$p_i\delta_i^2=p_iv_i^2+2p_iv_i\omega+p_i\omega^2$$

и найдем сумму

$$[p\delta^2]=[pv^2]+2[pv]\omega+[p]\omega^2.$$

Так как

$$[pv]=0,$$

то

$$[p\delta^2]=[pv^2]+[p]\,\omega^2.$$

Следовательно,

$$[p\delta^2] > [pv^2]$$

или

$$[pv^2] < [p\delta^2],$$

где правая часть всегда положительна.

Если

$$p_1=p_2=\ldots=p_n=1,$$

то

$$[v^2]=[\delta^2].$$

Таким образом, независимо от условий измерений сумма квадратов отклонений от среднего всегда меньше, чем сумма квадратов отклонений от любого числа, не равного среднему.

Практика вычисления средних. Вычисление средних значительно упрощается, если формулы

$$\bar{x}=\frac{[x]}{n}, \qquad \bar{x}=\frac{[px]}{[p]}$$

заменить соотношениями

$$\bar{x}=x'+\frac{[\delta]}{n}, \qquad \bar{x}=x'+\frac{[p\delta]}{[p]}$$

или

$$\bar{x}=x'+\overline{\delta x},$$

где x' — приближенное значение средних, т. е. произвольный, или условный центр распределения («ложный нуль»).

По формулам

$$\overline{\delta x}=\frac{[\delta]}{n}; \qquad \overline{\delta x}=\frac{[p\delta]}{[p]}$$

можно вычислить средние значения, выраженные через возможно малые остатки или поправки

$$\delta=x-x'.$$

Контроль вычисления средних. Если результаты вычислений удовлетворяют условиям

$$[v]=0, \qquad [pv]=0,$$

то средние найдены безошибочно.

Если

$$[v] \neq 0, \qquad [pv] \neq 0,$$

то в вычислениях допущены либо промахи, либо арифметические помехи, возникающие за счет ошибок округлений.

Учет ошибок округлений. Вернемся к соотношениям

$$\delta_i = v_i + \omega,$$
$$[p\delta] = [pv] + [p]\,\omega.$$

Так как

$$[pv] = 0,$$

то

$$[p\delta] = [p]\,\omega.$$

Следовательно, ошибки вычисления средних будут равны

$$\omega = \frac{[\delta]}{n}; \qquad \omega = \frac{[p\delta]}{[p]}.$$

Средние 2-го рода

Исходные данные для определения средних 2-го рода — дискретное распределение

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

десятков и сотен значений количественных признаков, записанных в ведомостях или журналах в той последовательности, в какой они наблюдались в действительности.

Таблица распределения — отражение дискретного распределения в табличной форме.

Вариационный ряд — распределение результатов наблюдений в упорядоченной форме. Такой ряд составляется по данным распределения количественных признаков.

Вариационная (исходная) таблица составляется по данным вариационного ряда.

Вариационная таблица в интервальной форме строится по данным исходной таблицы.

Оптимальную величину интервала определяют по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - m_{\min}}{1 + 3,2 \log n},$$

где n — число единиц в совокупности.

Вариационная таблица накопленных частот получается обобщением таблицы, составленной в интервальной форме.

Графические представления вариационного ряда

1. Гистограмма — по оси абсцисс откладываются отрезки, пропорциональные интервалам вариационного ряда, по оси ординат — высоты прямоугольников, пропорциональные частостям интервалов (рис. 11).

2. Полигон — по оси абсцисс откладываются значения середин интервалов, по оси ординат — отрезки, пропорциональные частостям интервалов.

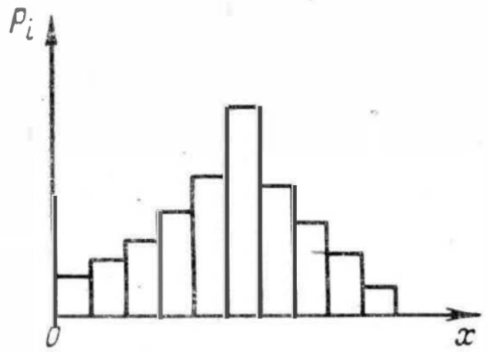

Рис. 11.

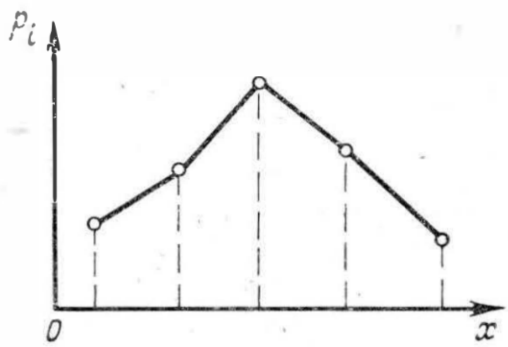

Рис. 12.

3. Кумулята — по оси абсцисс откладываются значения вариантов, по оси ординат — отрезки, пропорциональные накопленным частостям соответствующих вариантов (рис. 13).

Среднее значение вариационного ряда. Средняя арифметическая генеральной совокупности признаков всегда равна средней арифметической стохастической совокупности их. На этом основании, если вариационный ряд

$$x_1, \ x_2, \ldots, x_n$$

заменить средним значением $\bar{x}$, то должно сохраняться равенство

$$\varphi(x) = \Phi(\bar{x}).$$

В этом равенстве $\varphi(x)$ — аналитическое выражение кривой распределения признака, $\Phi(x)$ — отметка $\bar{x}$ на горизонтальной прямой.

Следовательно, для определения среднего значения вариационного ряда необходимо найти вид функции $\varphi(x)$ или графическое изображение этой функции: заменить все x_i средней $\bar{x}$, т. е. сгладить кривую до горизонтальной прямой с отметкой, равной $\bar{x}$; определить отметку $\bar{x}$.

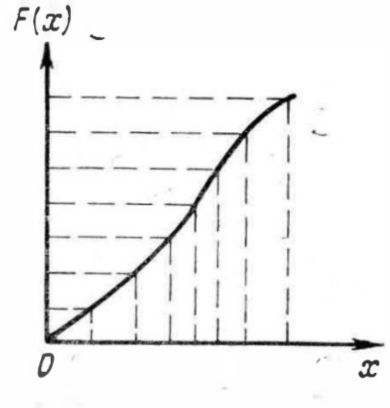

Рис. 13.

Средняя взвешенная вариационного ряда выражается формулой

$$\bar{x} = \frac{[xm]}{[m]},$$

где x_i — значения середин интервалов;

m — частости, т. е. статистические веса признаков.

Медиана и мода

Медиана — важная средняя после простой и взвешенной средней. Если распределение S из $2m+1$ величин расположить в возрастающем порядке

$$x_1, \; x_2, \ldots, x_m, \quad x_{m+1}, \quad x_{m+2}, \ldots, x_{2m+1},$$

то значение

$$\bar{x}_{\text{med}} = x_{m+1}$$

— медиана распределения при нечетном числе элементов в S.

Если распределение S из $2m$ величин расположить в аналогичном порядке

$$x_1, \; x_2, \ldots, x_m, \quad x_{m+1}, \ldots, x_{2m},$$

то значение

$$\bar{x}_{\text{med}} = \frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$$

— медиана распределения при четном числе элементов в S.

Если плотность внутри интервалов (классов) постоянна, то значение медианы определяется по формуле

$$\bar{x}_{\text{med}} = \bar{x}_{\text{med (min)}} + h \frac{1/2\,[m] - \bar{x}_{\text{med}-1}}{P_{\text{med}}},$$

где $\bar{x}_{\text{med (min)}}$ — нижняя граница медианного ряда;

h — интервальная разность;

$x_{\text{med}-1}$ — накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

P_{med} — частота медианного интервала.

Мода — максимальное значение x_{med} в распределении $x_1, \ldots, x_n$ (в дискретном вариационном ряде — это вариант с наибольшей частотой).

Модальный интервал — наибольшая частота, если интервалы равны, или наибольшая плотность, когда интервалы не равны.

Плотность интервала — отношение частоты интервала к величине его.

Формула определения моды

$$\bar{x}_{mod}=\bar{x}_{mod\,(min)}+h\frac{P_{mod}-P_{mod-1}}{(P_{mod}-P_{mod-1})+(P_{mod}-P_{mod+1})}.$$

Мода — характеристика асимметричности вариационного ряда.

Если $\bar{x}=\bar{x}_{med}=\bar{x}_{mod}$,

то ряд симметричный.

Если

$$K_A=\frac{\bar{x}-\bar{x}_{mod}}{\sigma},$$

то ряд асимметричный, или скошенный. При $K_A>0$ — скошенность слева (левосторонняя асимметрия), при $K_A<0$ — скошенность справа (правосторонняя асимметрия).

Меры рассеяния

Меры рассеяния по данному ряду случайных ошибок. В соответствии с законом Лапласа — Гаусса, т. е. законом нормального распределения случайных величин, к мерам рассеяния относятся:

Дисперсия

$$\sigma^2=\frac{[\Delta^2]}{n}=\frac{[\Delta\Delta]}{n},$$

где $[\Delta^2]=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2=[\Delta\Delta]$ — гауссова сумма квадратов случайных ошибок, n — число измерений.

Средняя квадратическая ошибка

$$\sigma=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}=\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}.$$

Средняя ошибка

$$\theta=\frac{[|\Delta|]}{n},$$

где $[|\Delta|]=|\Delta_1|+|\Delta_2|+\ldots|\Delta_n|$ — сумма абсолютных значений случайных ошибок, n — число измерений.

Вероятная, или серединная ошибка

$$r=\rho\sqrt{\sigma},$$

т. е. случайная ошибка, расположенная в середине упорядоченного ряда, образованного из данного ряда абсолютных значений случайных ошибок, если число их нечетное. Если число ошибок четное, то вероятная ошибка равна среднему значению из абсолютных ошибок, находящихся в центре ряда.

Предельная ошибка

$$\Delta_{пред}=3\sigma,$$

т. е. утроенная средняя квадратическая ошибка.

Из закона нормального распределения случайных величин также следует:

связь между средней и средней квадратической ошибками

$$\theta=0{,}7979\sigma=4/5\sigma$$

и соответственно обратная связь

$$\sigma\approx 1{,}25\theta;$$

связь между вероятной и средней квадратической ошибками

$$r=0{,}6745\sigma\approx 2/3\sigma$$

и соответственно обратная связь

$$\sigma\approx 3/2r.$$

Примеры. Меры рассеяния ряда невязок, приведенных в табл. 2.

1. Дисперсия

$$\sigma^2=\frac{[\omega^2]}{n}=\frac{45{,}''7}{31}=1{,}''47.$$

2. Средняя квадратическая ошибка —

$$\sigma=\sqrt{\frac{[\omega^2]}{n}}=\sqrt{\frac{45{,}''7}{n}}=\pm 1{,}''2.$$

3. Средняя ошибка —

$$\theta=\frac{[|\omega|]}{n}=\frac{31{,}''37}{31}=\pm 1{,}''0$$

или $\theta=4/5\sigma\approx\pm 0{,}''90$.

4. Вероятная (серединная) ошибка —

$$r\approx 2/3\sigma\approx\pm 0{,}''80$$

или 16-я в порядке возрастания абсолютных значений ошибок, т. е.

$$r\approx\pm 0{,}''90.$$

5. Предельная ошибка —

$$\Delta_{пред}=3\sigma=\pm 3{,}''6.$$

Вес, дисперсия и средняя квадратическая ошибка единицы веса. Если результаты измерений

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

сопровождаются весами

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_n,$$

то вместо простой средней

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}$$

находят взвешенную среднюю

$$\bar{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = [px],$$

полагая, что

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = [p] = 1.$$

Дисперсия взвешенной средней равна

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = p_1^2 \sigma_1^2 + p_2^2 \sigma_2^2 + \ldots + p_n^2 \sigma_n^2 = [p^2 \sigma^2].$$

Значение $\sigma_{\bar{x}}^2$ будет наименьшим, если квадратичный многочлен относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ достигает в некоторой точке минимума, т. е. если

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = p_1^2 \sigma_1^2 + p_2^2 \sigma_2^2 + \ldots + p_{n-1}^2 \sigma_{n-1}^2 + (1 - p_1 - \ldots - p_{n-1})^2 \sigma_n^2 = \min.$$

Продифференцировав по p_i, найдем

$$2 p_i \sigma_i^2 - 2 (1 - p_1 - \cdots - p_{n-1}) \sigma_2^2 = 0$$

или

$$p_i \sigma_i^2 = p_n \sigma_n^2.$$

Это означает, что веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$ должны быть обратно пропорциональны дисперсиям отдельных измерений $\sigma^2{}_i$. При вычислениях дополнительное условие $[p] = 1$, как правило, не соблюдают и заменяют p величинами, пропорциональными весам. Тогда вместо формулы $\bar{x} = [px]$ получим формулу

$$\bar{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[px]}{[p]},$$

где p_i — положительные числа, обратно пропорциональные дисперсиям

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \sigma_1^{-2} : \sigma_2^{-2} : \ldots : \sigma_n^{-2}.$$

Откуда следует, что формула

$$p_i = \frac{c}{\sigma_i^2}$$

выражает связь между весом и дисперсией отдельного измерения, где c — коэффициент пропорциональности.

Положив $c=\sigma^2$, получим

$$p_i=\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}.$$

Если $p=1$, то $\sigma^2=\sigma_i^2$, $\sigma=\sigma_i$.

Следовательно, σ — средняя квадратическая ошибка отдельного измерения, вес которого равен единице, или ошибка единицы веса.

Формулы Бесселя. Распределение

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

n-кратных измерений, сопровождаемое весами

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_n,$$

характеризуется мерой положения

$$\bar{x}=\frac{[px]}{[p]},$$

т. е. взвешенной средней.

Соответственно n-кратным измерениям возникает n соотношений вида

$$x_i-\bar{x}=v_i,$$

где v_i — отклонения от средней.

При однократном измерении одной величины x отклонение x от $\bar{x}$ равно нулю. Следовательно, из общего числа n измерений к отклонениям v_i приводят

$$d=n-1$$

измерений.

По свойству отклонений v_i от взвешенной средней имеем

$$[pv^2]=\min.$$

На этом основании находим наименьшую дисперсию

$$\sigma^2=\frac{[pv^2]}{n-1}$$

и соответственно наименьшую среднюю квадратическую ошибку

$$\sigma=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$$

распределения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при неравноточных измерениях.

Если $n=1$, т. е. в случае однократного измерения одной величины, то формула дисперсии и, следовательно, формула ошибки сводится к неопределенности

$$\sigma=\sqrt{\frac{0}{0}}.$$

Это означает, что вопрос оценки точности одной величины x при однократном измерении остается открытым.

Если

$$p_1 p_2, \ldots, p_n = 1,$$

т. е. если распределение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получено при равноточных измерениях, то

$$\sigma^2 = \frac{[v^2]}{n-1}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

Таковы в общем и частном случаях формулы Бесселя.

Формула Петерса. Полагая, что отклонения

$$v_1, \; v_2, \ldots, v_n$$

от средней $\bar{x}$ и случайные ошибки

$$\Delta_1, \; \Delta_2, \ldots, \Delta_n$$

подчиняются одному и тому же гауссовому закону распределения, напишем два соотношения:

$$\frac{[|\Delta|]}{n} \approx 4/5 \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}},$$

$$\frac{[|v|]}{n} \approx 4/5 \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}.$$

Разделив первое соотношение на второе, получим

$$\frac{[|\Delta|]}{[|v|]} \approx \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Откуда следует формула Петерса

$$\theta \approx \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \approx \frac{[|v|]^*}{n-0{,}5},$$

где $[|v|]$ — сумма абсолютных отклонений от средней $\bar{x}$; n—0,5 — число измерений.

Дисперсии и ошибки средних. Диагональные матрицы

$$\sigma^2 P, \qquad \sigma^2 E$$

порядка n выражают дисперсии распределения

$$x_1, \; x_2, \ldots, x_n$$

случайной величины x при неравноточных и равноточных измерениях в n-мерном пространстве. Следовательно, отношения

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2 SpP}{(SpP)^2} = \frac{\sigma^2 [p]}{[p]^2} = \frac{\sigma^2}{[p]},$$

* При достаточно большом n можно принять: $n(n-1) \approx n^2 - n + {}^1/_4 \approx (n-0{,}5)^2$.

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2 SpE}{(SpE)^1} = \frac{\sigma^2 n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n};$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{[p]}; \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

приводят к дисперсиям и ошибкам средних

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]}; \qquad \bar{x} = \frac{[x]}{n}$$

в одномерном пространстве.

Так как

$$\sigma = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}},$$

то

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}, \qquad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}$$

— ошибки средних, выраженные через ошибки непосредственных измерений.

Зависимость ошибок от числа измерений или наблюдений. Знаменатели формул

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{[p]}}, \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

показывают, что повышение точности результатов возрастает значительно медленнее, чем увеличение числа измерений. Так, например, чтобы увеличить точность результатов в 10 раз, т. е. чтобы получить еще одну верную значащую цифру в числовом значении измеренной величины, необходимо число отдельных измерений увеличить в 100 раз и во столько же раз больше затратить труда, средств и времени.

С другой стороны, повышение точности результатов имеет место только при отсутствии систематических ошибок. В действительности же совершенно исключить из наблюдений систематические ошибки невозможно, так как, во-первых, от внимания наблюдателя ускользают ошибки, величина которых одного порядка с величиной случайных ошибок, во-вторых, исключение систематических ошибок не может быть произведено без остатка.

Допустим, что в данных измерениях содержится несколько постоянно действующих систематических ошибок, алгебраическая сумма которых выражает малую величину Θ, так что

$$x_i = X + \Theta + v_i.$$

Тогда среднее значение выразится по формуле

$$\lambda = \frac{[x]}{n} - \bar{x} - \frac{[X + \Theta + v]}{n} - X$$

или

$$\lambda=\Theta+\frac{[v]}{n}.$$

Следовательно, как бы ни было велико число повторных измерений, ошибка λ не может стать численно меньше Θ.

Таким образом, если

$$\left|\frac{[v]}{n}\right|\leqslant|\Theta|,$$

то повышение точности среднего увеличением числа измерений оказывается невозможным.

Из сказанного следует, что увеличение кратности измерений имеет смысл, когда предусмотрено возможно полное исключение систематических ошибок и если наблюдения производятся весьма тщательно.

Во многих случаях, и конечно там, где возможно, для повышения точности измерений выгоднее изменить условия наблюдений, заменить менее точную аппаратуру более точной и соответственно перейти на более тонкий и чувствительный способ измерений или наблюдений.

О двойных измерениях

Практика двойных измерений. К такого рода измерениям относятся линейные — в прямом и обратном направлениях, угловые — из полуприемов или полных приемов, высотные — по превышениям при двух горизонтах инструмента или по двум сторонам реек. К подобным измерениям обращаются при исследовании точности счетных частей инструментов и приборов (цены деления уровней, лимбов, различных шкал, хода винтов и пр.). В частности, по способу двойных измерений производится обработка свободных (висячих) наземных и подземных теодолитных и нивелирных ходов.

Исходные данные при двойных измерениях. Многократная взаимнонезависимая последовательность результатов двукратных непосредственных измерений одной величины приводит к двум диагональным матрицам

$$x'=\{x'_1,\ x'_2,\dots,x'_n\},\qquad x''=\{x''_1,\ x''_2,\dots,x''_n\}$$

порядка n, элементы которых различны:

$$x'_i\neq x''_i.$$

Совокупность результатов множества однородных величин, измеренных в прямом и обратном направлениях, приводит также к диагональным матрицам порядка n, где элементы x'_i не равны элементам x''_i. Соответственно условиям измерений возникают диагональные матрицы весов

$$P'=\{p'_1,\ p'_2,\dots,p'_n\},\qquad P''=\{p''_1,\ p''_2,\dots,p''_n\}$$

порядка n в случае неравноточных измерений и матрица единичного веса E того же порядка, если измерения равноточны.

Матрица ошибок двойных измерений. Разность диагональных матриц x' и x'' приводит к диагональной матрице

$$d=\{d_1,\ d_2,\dots,d_n\},$$

порядка n, элементы которой — разности двойных измерений

$$d_i=x_i'-x_i'',$$

т. е. ошибки, порождаемые такого рода измерениями.

Распределение ошибок двойных измерений. Если элементы d_i матрицы d удовлетворяют условию

$$Spd=[d]=0,$$

то d_i — случайные ошибки. Если же

$$Spd=[d]\neq 0,$$

то случайные ошибки сопровождаются систематическими ошибками, влияние которых должно быть устранено.

Оценки по двойным измерениям. Опишем три случая оценок по двойным измерениям.

Случай первый. Пусть все парные измерения равноточны и выражаются матрицей единичного веса E порядка n. Тогда наилучший результат по двойным измерениям выразится диагональной матрицей средних

$$\bar{x}=\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n\}$$

порядка n, элементы которой — средние

$$\bar{x}_i=\frac{x_i'+x_i''}{2}$$

из элементов матриц x' и x''.

Если распределение элементов d_i диагональной матрицы d удовлетворяет условию $[d]=0$, то

$$\sigma_d^2=\frac{[d^2]}{n};\qquad \sigma_d=\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}$$

— дисперсия и ошибка любой разности, где $[d^2]$ — сумма квадратов случайных ошибок, n — число разностей d.

Так как

$$\sigma_d^2=2\sigma_\Delta^2;\qquad \sigma_d=\sigma_\Delta\sqrt{2}$$

— дисперсия и ошибка парного измерения, то

$$\sigma_\Delta^2=\frac{[d^2]}{2n},\qquad \sigma_\Delta=\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}$$

— соответственно дисперсия и ошибка отдельного измерения.

Если распределение ошибок d_i не удовлетворяет условию $[d]=0$, то предварительно необходимо освободиться от систематических ошибок. При наличии таких ошибок из диагональной матрицы d следует, что

$$Spd=[d]\neq 0.$$

Поэтому

$$1)\ \bar{\delta}=\frac{[d]}{n}$$

— систематическая ошибка в среднем;

$$2)\ \varepsilon_i=d_i-\bar{\delta}$$

— отклонения от средней $\bar{\delta}$;

$$3)\ [\varepsilon]=0$$

— контрольная формула по свойству суммы отклонений от средней $\bar{\delta}$;

$$4)\ [\varepsilon^2]=[d]-\frac{[d]^2}{n}$$

$\bar{\delta}$— наименьшая сумма квадратов отклонений от средней $\bar{\delta}$.

Таким образом, необходимое условие $[d]=0$ сведено к условию $[\varepsilon]=0$, обладающему свойством $[\varepsilon^2]=\min$. Но тогда

$$5)\ \sigma_d^2=\frac{[\varepsilon^2]}{n-1}; \qquad \sigma_d=\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n-1}}$$

— дисперсия и ошибка разности d_i;

$$6)\ \sigma_\Delta^2=\frac{\sigma_d^2}{2}=\frac{[\varepsilon^2]}{2(n-1)}, \qquad \sigma_\Delta=\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{2(n-1)}}$$

— дисперсия и ошибка отдельного измерения.

С л у ч а й в т о р о й. Пусть в каждой паре измерения равноточны, а пары между собой неравноточны, т. е. $p'_i=p''_i=p_i$, $Spd=[d]=0$. Тогда

$$1)\ \bar{x}_i=\frac{x'_i+x''_i}{2}$$

— среднее значение из i-й пары;

$$2)\ \bar{x}=\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n\}$$

— диагональная матрица средних порядка n;

$$3)\ \bar{p}_i=\frac{p_i}{2}$$

— вес i-й пары;

$$4)\ p_{\bar{x}_i}=2p_i$$

— вес i-й средней x_i;

$$5)\ \sigma_d^2=\frac{[pd^2]}{2n}; \qquad \sigma_d=\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}$$

— дисперсия и ошибка измерения любой пары;

$$6)\ \sigma_{\bar{x}_i}^2=\frac{\sigma^2}{2p_i}, \qquad \sigma_{\bar{x}_i}=\frac{\sigma}{\sqrt{2p_i}}$$

— дисперсия и ошибка i-й средней $\bar{x}_i$.

Если распределение ошибок d_i таково, что

$$Spd=[d]\neq 0,$$

то в этом случае вступают в силу формулы:

$$1)\ \bar{\delta}=\frac{[pd]}{[p]};$$

$$2)\ \varepsilon_i=d_i-\bar{\delta}; \qquad [\varepsilon]=0;$$

$$3)\ \sigma^2=\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}; \qquad \sigma=\sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}}.$$

Случай третий. Если измерения в парах неравноточны, т. е.

$$p'_{x'_i}\neq p''_{x''_i},$$

тогда

$$1)\ \frac{1}{p_i}=\frac{1}{p'_{x'_i}}+\frac{1}{p''_{x''_i}}=\frac{p'_{x'_i}+p''_{x''_i}}{p'_{x''_i}\cdot p''_{x''_i}}$$

— обратный вес измерения i-й пары;

$$2)\ p_i=\frac{p'_{x''_i}\cdot p''_{x''_i}}{p'_{x'_i}+p''_{x''_i}}$$

— вес измерения i-й пары;

$$3)\ \bar{x}_i=\frac{x'_i\,p'_{x'_i}+x''_i\,p''_{x''_i}}{p'_{x'_i}+p''_{x''_i}}$$

— среднее значение i-го измерения;

$$4)\ \bar{x}=\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\dots,\ \bar{x}_n\}$$

— диагональная матрица средних;

$$5)\ \sigma_{\bar{x}_i}^2=\frac{\sigma^2}{p'_{x'_i}+p''_{x''}}; \qquad \sigma_{\bar{x}_i}=\frac{\sigma}{\sqrt{p'_{x'_i}+p''_{x''_i}}}$$

— дисперсия и ошибка i-й средней $\bar{x}_i$, где

$$\sigma = \sqrt{\frac{[pd^2]}{n}}.$$

О точности оценок результатов двойных измерений при наличии неслучайных ошибок. В труде [39] приводятся следующие соображения. Пусть

$$d_i = \varepsilon_i + c,$$

где с — неслучайная ошибка. Так как

$$\sigma_d^2 = \sigma_\varepsilon^2 + c^2,$$

то

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_d^2 - c^2,$$

следовательно,

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_d \sqrt{1 - \left(\frac{c}{\sigma_d}\right)^2},$$

где

$$\left|\frac{c}{\sigma_d}\right| < 1.$$

Положим, что

$$\left|\frac{c}{\sigma_d}\right| = \frac{1}{e}.$$

Тогда

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_d \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$$

или

$$\sigma_\varepsilon \approx \sigma_d \left(1 - \frac{1}{2e^2}\right).$$

Если поставить условие, чтобы $\frac{1}{2e^2}$ было не больше 0,01, то

$$\frac{1}{e} \leqslant 0,14, \qquad e \geqslant 7.$$

При $\frac{1}{2\sigma^2}$ не более $\frac{1}{30}$ $e \geqslant 4$. Стало быть, если

$$|c| \leqslant \frac{1}{4} |\sigma_d|,$$

то нет необходимости принимать во внимание величину c.

По аналогичному вопросу приведем рекомендации авторов учебника [4]. На вопрос о том, при каком систематическом влиянии $\bar{\delta}$ следует пользоваться формулой

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}},$$

авторы, пользуясь неравенством

$$|\bar{\delta}| \leqslant \frac{1}{5}\sigma_d,$$

соотношение между средней и средней квадратической ошибками

$$|\bar{\delta}| = \frac{[|d|]}{n} \leqslant 1{,}25\,\frac{[|d|]}{5n}$$

сводят к условию

$$[|d|] \leqslant 0{,}25\,[|d|],$$

где $[|d|]$ — сумма абсолютных значений разностей d_i.

Если

$$[|d|] \geqslant 0{,}25\,[|d|],$$

то вопрос о влиянии систематических ошибок подлежит специальному исследованию.

О влиянии постоянных величин на результаты уравнительных операций. Для простоты числовых операций и сравнений обратимся к абстрактному примеру, в котором проще усмотреть действие постоянных величин на результаты вычислений по методу наименьших квадратов.

Построим табл. 4. В столбце первом этой таблицы расположены натуральные числа от 0 до 9, столбцы же пятый и девятый содержат числа первого столбца, увеличенные соответственно на постоянные величины $+1$ и $+0{,}5$.

Таблица 4

y_1	v	v^2	y_1^2	y_2	v	v^2	y_2^2	y_3	v	v^2	y_3^2
0	4,5	20,25	0	1	4,5	20,25	1	0,5	4,5	20,25	0,25
1	3,5	12,25	1	2	3,5	12,25	4	1,5	3,5	12,25	2,25
2	2,5	6,25	4	3	2,5	6,25	9	2,5	2,5	6,25	6,25
3	1,5	2,25	9	4	1,5	2,25	16	3,5	1,5	2,25	12,25
4	0,5	0,25	16	5	0,5	0,25	25	4,5	0,5	0,25	20,25
5	—0,5	0,25	25	6	—0,5	0,25	36	5,5	—0,5	0,25	30,25
6	—1,5	2,25	36	7	—1,5	2,25	49	6,5	—1,5	2,25	42,25
7	—2,5	6,26	49	8	—2,5	6,25	64	7,5	—2,5	6,25	56,25
8	—3,5	12,25	64	9	—3,5	12,25	81	8,5	—3,5	12,25	72,25
9	—4,5	20,25	81	10	—4,5	20,25	100	9,5	—4,5	20,25	90,25
Σ 45	0	82,5	285	55	0	82,5	385	50,0	0	82,5	332,5
$\bar{x}_1 = 4{,}5$			$\bar{x}_2 = 5{,}5$				$\bar{x}_3 = 5{,}0$				

По соответствующим элементам этой таблицы найдены средние, отклонения от средних, квадраты отклонений от средних и, таким образом, получены числа

$$\bar{x}_1 = 4{,}5; \qquad \bar{x}_2 = 5{,}5; \qquad \bar{x}_3 = 5{,}0,$$

сумма квадратов отклонений от которых одна и та же и равна 82,5.

Действительно, по формуле минимума

$$[v^2]_{\min} = [y^2] - \frac{[y]^2}{n}$$

имеем одну и ту же сумму квадратов отклонений

$$82{,}5 = 285 - 202{,}5;$$

$$82{,}5 = 385 - 302{,}5;$$

$$82{,}5 = 332{,}5 - 250.$$

В силу соотношения

$$y = \bar{x} + v$$

по теореме Пифагора

$$[y^2] = [\bar{x}^2] + [v^2]$$

находим

$$285 = [\bar{x}_1^2] + 82{,}5;$$

$$385 = [\bar{x}_2^2] + 82{,}5;$$

$$332{,}5 = [\bar{x}_3^2] + 82{,}5,$$

где $[\bar{x}_1^2] = 202{,}5$; $[\bar{x}_2^2] = 302{,}5$; $[\bar{x}_3^2] = 250$ — сумма квадратов средних в пространстве E_{10} и, следовательно, средние

$$\bar{x}_1 = 4{,}5; \quad \bar{x}_2 = 5{,}5; \quad \bar{x}_3 = 5{,}0$$

в одномерном пространстве E_1.

Так как значение $[v^2] = 82{,}5$ относительно трех средних неизменно, то остается неизменной дисперсия отдельного измерения

$$\sigma^2 = \frac{[v^2]}{n-1},$$

а также дисперсия среднего

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Последняя оценка относится к средней $\bar{x}_1 = 4{,}5$, а не к средним $\bar{x}_2 = 5{,}5$ и $\bar{x}_3 = 5{,}0$. Поэтому значения относительных ошибок средних $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$ будут меньше, чем значение относительной ошибки средней $\bar{x}_1$.

§ 11. МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА*

Существуют следующие моменты распределения вариационного ряда.

Эмпирические моменты порядка k

$$\alpha_k = \frac{[(x_i - c)\, m]}{[m]},$$

где m — частоты, c — const.

Начальные моменты порядка k при $c = 0$

$$\alpha_k = \frac{[x^k m]}{[m]}.$$

Начальные моменты:

нулевого порядка

$$\alpha_0 = \frac{[x^0 m]}{[m]} = 1;$$

1-го порядка

$$\alpha_1 = \frac{[xm]}{[m]} = \bar{x};$$

2-го порядка

$$\alpha_2 = \frac{[x^2 m]}{[m]} = \sigma^2$$

и т. д.

Условные моменты порядка k

$$\alpha'_k = \frac{[(x_i - c)^k\, m]}{[m]},$$

где c — число, близкое к среднему значению $\bar{x}$ («ложный нуль»), т. е. смещение центра тяжести в точку c.

Связи между центральными и условными моментами

$$\alpha_2^0 = h^2 \{\alpha'_2 - (\alpha'_1)^2\},$$
$$\alpha_3^0 = h^3 \{\alpha'_3 - 3\alpha'_1\alpha'_2 + 2(\alpha'_1)^3\},$$
$$\alpha_4^0 = h^4 \{\alpha'_4 - 4\alpha'_1\alpha'_3 + 6\alpha'_2(\alpha'_n)^2 - 3(\alpha'_n)^4\}.$$

Условные моменты в остатках порядка k

$$\alpha'_k = \frac{[m\varepsilon^k]}{[m]},$$

где $\varepsilon = x - c$.

Так что

$$\alpha'_1 = \frac{[m\varepsilon]}{[m]}$$

---

* В обозначениях, принятых в работе [33].

— условный момент 1-го порядка ($k=1$),

$$\alpha'_2=\frac{[m\varepsilon^2]}{[m]}$$

— условный момент 2-го порядка ($k=2$) и т. д.

Мера асимметрии — нормированный момент 3-го порядка

$$A=\frac{\alpha_3^0}{\sigma^3}.$$

При положительном значении A асимметрия — правосторонняя, при отрицательном — левосторонняя. Если $A=0$, то ряд симметричный.

Эксцесс

$$\varepsilon=\frac{\alpha_4^0}{\sigma^4}-3$$

характеризует сглаженность кривой, т. е. островершинность или плосковершинность распределения.

Точность числовых характеристик вариационного ряда

Случайная выборка — численность вариационного ряда в n единиц из генеральной статистической совокупности объемом N единиц, так что n — подмножество множества N.

Доверительная вероятность — вероятность, определяемая функцией Лапласа

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

значения которой приводятся во всех курсах теории вероятностей и математической статистики.

Надежность B ошибки выборки ε и объем выборки n при известном значении частости m/n связаны соотношением

$$B\left(\frac{m}{n}-\varepsilon\leqslant p\leqslant\frac{m}{n}+\varepsilon\right)=\Phi(t).$$

Надежность B и вероятность p для некоторых значений коэффициента t приведены в табл. 5.

Таблица 5

t	Значения B, %	Вероятность p	t	Значения B, %	Вероятность p
0,68	50	0,504	2,00	95	0,955
1,00	68	0,683	2,50	99	0,988
1,16	75	0,754	3,00	99,7	0,997
1,50	87	0,866	4,00	99,994	0,99994
1,65	90	0,901			

Доверительный интервал — значение X_0 в интервале

$$J_B=(\overline{x}-\varepsilon; \quad x+\varepsilon)$$

с надежностью B.

Доверительные границы — значения

$$x_1=\overline{x}-\varepsilon_1; \qquad x_2=\overline{x}+\varepsilon_x,$$

где

$$\varepsilon_x=\overline{x}-\overline{X}$$

— разность между выборочной и генеральной средней.

Ошибка выборочной дисперсии — определяется разностью

$$\sigma_0^2-\sigma^2=\varepsilon^2,$$

где

$$\sigma^2=\frac{[m(x_i-x)^2]}{n-1}$$

— выборочная дисперсия (σ_0^2 — генеральная дисперсия).

Так что для малых выборок выборочные дисперсии группируются около величины

$$\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n},$$

а не около генеральной дисперсии σ_0^2.

Систематическая ошибка выборочной дисперсии возникает при использовании приближенного равенства

$$\sigma^2\approx\sigma_0^2$$

на величину σ_0^2/n, которая при малых выборках существенно снижает значение σ_0^2.

Ошибка среднего значения признака X определяется по формуле

$$\varepsilon_x=\frac{t\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Необходимый объем выборки находится по формуле

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\varepsilon_x^2},$$

при котором значение $\overline{X}$ определяется с заданной ошибкой ε_x и с заданной надежностью B.

Доверительные интервалы для малых выборок. Если объем выборки n менее 30, то распределение выборочных средних отличается от симметричного и тем больше, чем меньше n (табл. 6).

Таблица 6

Доверительный интервал	Вероятность p для выборки из n наблюдений				
	$n=5$	$n=10$	$n=15$	$n=20$	$n=30$ и более
$\overline{X}\pm\sigma_x$	0,637	0,657	0,667	0,670	0,683
$\overline{X}\pm2\sigma_x$	0,898	0,923	0,936	0,940	0,954
$\overline{X}\pm3\sigma_x$	0,970	0,985	0,991	0,993	0,997
$\overline{X}\pm4\sigma_x$	0,990	0,997	0,999	0,999	0,9997

Меры связи. Линейная корреляция

Связь переменных в среднем — статистическая форма связи, в которой соотношения между x и y проявляются лишь в среднем или в целом для всей совокупности многократных измерений или наблюдений. Для отдельных измерений или наблюдений такая связь является неточной или неполной.

Нормированные отклонения в среднем. Исследование взаимных связей разноименных отклонений от средних в абсолютной форме не представляется возможным. Поэтому сопоставляют не сами индивидуальные отклонения, а их преобразованные значения, выраженные в отвлеченных числах

$$t_x=\frac{x-\overline{x}}{\sigma_x}=\frac{v_x}{\sigma_x}; \qquad t_y=\frac{y-\overline{y}}{\sigma_y}=\frac{v_y}{\sigma_y},$$

т. е. в форме безразмерных характеристик или нормированных отклонений от средних,

Свойства нормированных отклонений от средних.

1. Так как

$$[(x-\overline{x})^2]=n\sigma_x^2,$$

то

$$\left[\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma_x}\right)\right]=\frac{1}{\sigma_x^2}[(x-x)^2]=\frac{n\sigma_x^2}{\sigma_x^2}=n.$$

Следовательно, сумма квадратов нормированных отклонений от средней равна числу измерений или наблюдений n.

2. Из равенства

$$\frac{\left[\frac{t_y}{t_x}\,t_x^2\right]}{[t_x^2]}=\frac{[t_yt_x]}{n}=\overline{t_yt_x}$$

следует, что среднее из отношений нормированных отклонений равно их произведению в среднем.

3. Произведение в среднем, так же как и среднее отношение нормированных отклонений, колеблется от нуля до единицы.

4. При полном отсутствии связи между изучаемыми признаками среднее произведение нормированных отклонений равно нулю. При строгой линейной функциональной связи между признаками среднее произведение равно единице.

5. Среднее произведение нормированных отклонений имеет знак плюс, когда с увеличением данного признака увеличиваются значения результативного признака (прямая связь), и знак минус, когда с увеличением данного признака уменьшаются значения результативного признака (обратная связь).

Свойство среднего произведения нормированных отклонений изменяется от нуля (при отсутствии связи) до единицы (при полной функциональной связи) и выражает меру тесноты корреляционной связи распределения случайных величин x и y. Такая связь определяется формулой

$$\overline{t_x t_y} = r$$

или формулой

$$\left[\frac{t_y}{t_x}\right] = r$$

в среднем, что одно и то же.

Понятие корреляции введено в статистику Гальтоном в 1888 г. и развито его учеником Пирсоном (1895 г.).

Корреляционные уравнения. Если в среднем

$$r = \left[\frac{t_y}{t_x}\right],$$

то в среднем же можно положить

$$t_y = r t_x.$$

Такого вида формулу называют основным корреляционным уравнением. Первоначально по предложению Гальтона она названа уравнением регрессии.

Подставив вместо t_y и t_x их значения, получим в среднем

$$\frac{y - \overline{y}}{\sigma_y} = r \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x},$$

или

$$y - \overline{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \overline{x}).$$

Положив

$$r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = b,$$

получим корреляционное уравнение

$$y - \overline{y} = b (x - \overline{x})$$

в том случае, когда случайные величины x и y связаны линейно.

Коэффициент b выражает среднее отношение вида

$$b = \frac{\left[\frac{y-\overline{y}}{(x-\overline{x})}(x-\overline{x})^2\right]}{[(x-x)^2]} = \frac{[(y-\overline{y})(x-x)]}{[(x-\overline{x})^2]}.$$

Такого рода величины называют элиминационными средними, так как ими пользуются при элиминировании (исключении) тех или других признаков.

Разновидности формул коэффициента корреляции. Из корреляционного уравнения

$$t_y = rt_x$$

следует основная формула

$$r = \frac{[t_y t_x]}{n}$$

коэффициента корреляции.

Принимая во внимание значения t_y и t_x, будем иметь формулу

$$r = \frac{1}{n}\left[\frac{(y-\overline{y})(x-\overline{x})}{\sigma_y \sigma_x}\right] = \frac{[(y-\overline{y})(x-\overline{x})]}{\sigma_y \sigma_x},$$

выраженную через нормированные величины x и y.

Так как

$$[y] = n\overline{y}; \qquad [x] = n\overline{x},$$

$$[y\overline{x}] = [x\overline{y}] = n\overline{y}\,\overline{x},$$

$$[\overline{y}\overline{x}] = n\overline{y}\,\overline{x},$$

$$[(x-\overline{x})(y-\overline{y})] = [xy] - n\overline{x}\,\overline{y},$$

то взамен формулы

$$r_{yx} = \frac{[(x-\overline{x})(y-\overline{y})]}{n\sigma_x \sigma_y}$$

получим формулу

$$r_{yx} = \frac{[yx] - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x \sigma_y} = \frac{[yx] - \frac{[y]\,[x]}{n}}{n\sigma_x \sigma_y}.$$

Разделив числитель и знаменатель этой формулы на n, получим формулу из трех видов средних,

$$r_{yx} = \frac{\overline{yx} - \overline{y}\,\overline{x}}{\sigma_y \sigma_x},$$

где $\overline{yx}$ — произведение в среднем; $\overline{y}\overline{x}$ — произведение средних.

Число r_{yx} служит критерием линейной корреляционной связи, или *показателем тесноты связи.*

Критерии тесноты связи:

1) $\overline{yx}=\overline{y}\,\overline{x}$ — полное отсутствие линейной корреляционной связи;

2) $\overline{yx}>\overline{y}\,\overline{x}$ — прямая связь между x и y;

3) $\overline{yx}<\overline{y}\,\overline{x}$ — обратная связь между x и y;

4) $\overline{yx}-\overline{y}\,\overline{x}=\sigma_x\sigma_y$ — полная линейная функциональная связь.

Геометрическое содержание коэффициента корреляции. Пусть $(\overline{x}\overline{y})$ — центр распределения случайных величин x и y;

$$v_x=x-\overline{x}; \qquad v_y=y-\overline{y}$$

— отклонения от средних $\overline{x}$ и $\overline{y}$;

$$[v_xv_y]$$

— скалярное произведение векторов

$$v_x=[v_x^1\, v_x^2 \ldots v_x^n]; \qquad v_y=[v_y^1\, v_y^2 \ldots v_y^n],$$

т. е.

$$[v_xv_y]=|v_x|\cdot|v_y|\cos\alpha_{xy}=$$
$$=\sqrt{[v_xv_y]}\,\sqrt{[v_xv_y]}\cos\alpha_{xy}=n\sigma_x\sigma_y\cos\alpha_{xy}.$$

Следовательно, косинус угла между векторами v_x и v_y равен

$$\cos\alpha_{xy}=\frac{[v_xv_y]}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Поэтому угол между векторами v_x и v_y определяется по формуле

$$\alpha_{xy}=\arccos\frac{[v_xv_y]}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Свойство коэффициента корреляции. Так как $\cos\alpha_{xy}$ изменяется в пределах $0\div180°$, то коэффициент корреляции r_{xy} заключен в границах

$$-1\leqslant r_{xy}\leqslant 1.$$

Следовательно, значение r_{xy} по абсолютной величине не превосходит единицы.

Если $r_{xy}=0$, то x и y независимы; если $r_{xy}>0$, то между x и y существует положительная связь, если $r_{xy}<0$, то между x и y имеет место отрицательная связь.

Коэффициент r_{xy} — величина безразмерная, не зависящая ни от единиц, которыми измеряются исследуемые величины x и y, ни от начала отсчета, так как выражается через центральные моменты.

§ 12. СТАТИСТИКИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дисперсионная матрица. Если прямоугольная матрица

$$X=[x_{ij}]$$

размера $n\times k$ выражает распределение измеренных значений величины X, то матрица

$$\Delta=[\Delta_{ij}]$$

также прямоугольная и того же размера характеризует распределение случайных ошибок той же величины X.

Произведение матрицы Δ_{nk} слева на транспонированную Δ_{kn} приводит к матрице ковариаций

$$\operatorname{cov}\Delta^2=[[\Delta_i\Delta_j]]$$

порядка k, где элементы — скалярные произведения одноименных и разноименных векторов матрицы случайных ошибок Δ_{nk}.

Матрица $\operatorname{cov}\Delta^2$ квадратная, симметричная, положительно определенная, детерминант которой больше нуля.

В силу соотношений

$$\frac{[\Delta_j\Delta_j]}{n}=\sigma_j^2, \qquad [\Delta_j\Delta_j]=n\sigma_y^2,$$

$$[\Delta_i\Delta_j]=|\Delta_i||\Delta_j|\cos\alpha_{ij}=\sqrt{[\Delta_i\Delta_i]}\sqrt{[\Delta_j\Delta_j]}\,r_{ij},$$

$$r_{ij}=\frac{[\Delta_i\Delta_j]}{\sqrt{[\Delta_i\Delta_i]}\cdot\sqrt{[\Delta_j\Delta_j]}}=\frac{[\Delta_i\Delta_j]}{n\sigma_i\sigma_j},$$

$$[\Delta_i\Delta_j]=n\sigma_i\sigma_jr_{ij},$$

$$\frac{[\Delta_i\Delta_j]}{n}=\sigma_i\sigma_jr_{ij}$$

взамен матрицы $\operatorname{cov}\Delta_{kk}$ получим дисперсионную матрицу

$$D=\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2r_{12}\ldots\sigma_1\sigma_kr_{1k} \\ \sigma_2\sigma_1r_{21} & \sigma_2^2\ldots\sigma_2\sigma_kr_{2k} \\ \cdots & \cdots \\ \sigma_k\sigma_1r_{k1} & \sigma_k\sigma_2r_{k2}\ldots\sigma_k^2 \end{vmatrix}$$

порядка k.

Весовая матрица. Так как

$$p_j=\frac{1}{\sigma_j^2}; \quad \sigma_j^2=\frac{1}{p_j}; \quad \sigma_i\sigma_jr_{ij}=\frac{r_{ij}}{\sqrt{p_ip_j}},$$

то дисперсионная матрица сводится к весовой

$$\overline{P}^{-1}=\left\{\begin{matrix} \frac{1}{p_1} & \frac{r_{12}}{\sqrt{p_1p_2}} \ldots \frac{r_{1k}}{\sqrt{p_1p_k}} \\ \frac{r_{21}}{\sqrt{p_2p_1}} & \frac{1}{p_2} \ldots \frac{r_{2k}}{\sqrt{p_2p_k}} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{r_{k1}}{\sqrt{p_kp_1}} & \frac{r_{k2}}{\sqrt{p_kp_2}} \ldots \frac{1}{p_k} \end{matrix}\right\}$$

порядка k.

Корреляционная матрица. Полагая, что

$$p_1=p_2=\ldots=p_k=1,$$

взамен весовой матрицы получим корреляционную матрицу

$$C=\left\{\begin{matrix} 1 & r_{12} \ldots r_{1k} \\ r_{21} & 1 \ldots r_{2k} \\ \cdots & \cdots \\ r_{k1} & r_{k2} \ldots 1 \end{matrix}\right\}$$

порядка k.

Если взаимная связь между элементами x_{ij} матрицы x отсутствует, то матрица $\operatorname{cov} \Delta^2$ сводится к диагональной

$$\Delta^2=\{[\Delta_j\Delta_j]\}.$$

Тогда взамен матриц

$$\overline{D}, \quad \overline{P}^{-1}, \quad C$$

будем иметь матрицы:

дисперсионную

$$D=\left\{\begin{matrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k^2 \end{matrix}\right\}=\{\sigma_1^2\sigma_2^2\ldots\sigma_k^2\};$$

ошибок

$$\Sigma=\left\{\begin{matrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k \end{matrix}\right\}=\{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\};$$

обратных весов

$$P^{-1}=\left\{\begin{matrix} p_1^{-1} & & & \\ & p_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_k^{-1} \end{matrix}\right\}=\{p_1^{-1}p_2^{-1}\ldots p_k^{-1}\};$$

Коэффициент r_{xy} — величина безразмерная, не зависящая ни от единиц, которыми измеряются исследуемые величины x и y, ни от начала отсчета, так как выражается через центральные моменты.

§ 12. СТАТИСТИКИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дисперсионная матрица. Если прямоугольная матрица

$$X=[x_{ij}]$$

размера $n\times k$ выражает распределение измеренных значений величины X, то матрица

$$\Delta=[\Delta_{ij}]$$

также прямоугольная и того же размера характеризует распределение случайных ошибок той же величины X.

Произведение матрицы Δ_{nk} слева на транспонированную Δ_{kn} приводит к матрице ковариаций

$$\operatorname{cov}\Delta^2=[[\Delta_i\Delta_j]]$$

порядка k, где элементы — скалярные произведения одноименных и разноименных векторов матрицы случайных ошибок Δ_{nk}.

Матрица $\operatorname{cov}\Delta^2$ квадратная, симметричная, положительно определенная, детерминант которой больше нуля.

В силу соотношений

$$\frac{[\Delta_j\Delta_j]}{n}=\sigma_j^2, \qquad [\Delta_j\Delta_j]=n\sigma_y^2,$$

$$[\Delta_i\Delta_j]=|\Delta_i||\Delta_j|\cos\alpha_{ij}=\sqrt{[\Delta_i\Delta_i]}\sqrt{[\Delta_j\Delta_j]}\,r_{ij},$$

$$r_{ij}=\frac{[\Delta_i\Delta_j]}{\sqrt{[\Delta_i\Delta_i]}\cdot\sqrt{[\Delta_j\Delta_j]}}=\frac{[\Delta_i\Delta_j]}{n\sigma_i\sigma_j},$$

$$[\Delta_i\Delta_j]=n\sigma_i\sigma_j r_{ij},$$

$$\frac{[\Delta_i\Delta_j]}{n}=\sigma_i\sigma_j r_{ij}$$

взамен матрицы $\operatorname{cov}\Delta_{kk}$ получим дисперсионную матрицу

$$D=\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 r_{12}\ldots\sigma_1\sigma_k r_{1k} \\ \sigma_2\sigma_1 r_{21} & \sigma_2^2\ldots\sigma_2\sigma_k r_{2k} \\ \cdots & \cdots \\ \sigma_k\sigma_1 r_{k1} & \sigma_k\sigma_2 r_{k2}\ldots\sigma_k^2 \end{vmatrix}$$

порядка k.

Весовая матрица. Так как

$$p_j=\frac{1}{\sigma_j^2}; \quad \sigma_j^2=\frac{1}{p_j}; \quad \sigma_i\sigma_j r_{ij}=\frac{r_{ij}}{\sqrt{p_ip_j}},$$

то дисперсионная матрица сводится к весовой

$$\overline{P}^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{p_1} & \frac{r_{12}}{\sqrt{p_1p_2}} & \ldots & \frac{r_{1k}}{\sqrt{p_1p_k}} \\ \frac{r_{21}}{\sqrt{p_2p_1}} & \frac{1}{p_2} & \ldots & \frac{r_{2k}}{\sqrt{p_2p_k}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{r_{k1}}{\sqrt{p_kp_1}} & \frac{r_{k2}}{\sqrt{p_kp_2}} & \ldots & \frac{1}{p_k} \end{Vmatrix}$$

порядка k.

Корреляционная матрица. Полагая, что

$$p_1=p_2=\ldots=p_k=1,$$

взамен весовой матрицы получим корреляционную матрицу

$$C=\begin{Vmatrix} 1 & r_{12}\ldots r_{1k} \\ r_{21} & 1\ldots r_{2k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_{k1} & r_{k2}\ldots 1 \end{Vmatrix}$$

порядка k.

Если взаимная связь между элементами x_{ij} матрицы x отсутствует, то матрица cov Δ^2 сводится к диагональной

$$\Delta^2=\{[\Delta_j\Delta_j]\}.$$

Тогда взамен матриц

$$\overline{D},\quad \overline{P}^{-1},\quad C$$

будем иметь матрицы:

дисперсионную

$$D=\begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_k^2 \end{Vmatrix}=\{\sigma_1^2\sigma_2^2\ldots\sigma_k^2\};$$

ошибок

$$\Sigma=\begin{Vmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_k \end{Vmatrix}=\{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\};$$

обратных весов

$$P^{-1}=\begin{Vmatrix} p_1^{-1} & & \\ & p_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & p_k^{-1} \end{Vmatrix}=\{p_1^{-1}p_2^{-1}\ldots p_k^{-1}\};$$

в е с о в у ю

$$P=\begin{vmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_k \end{vmatrix}=\{p_1 p_2 \ldots p_k\};$$

е д и н и ч н о г о в е с а

$$E=\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix}=\{1\ 1 \ldots 1\}.$$

Статистические характеристики в операторной форме

Операторы. Символы

$$\overline{D},\quad \overline{P}^{-1},\quad C;$$
$$D,\ \Sigma,\ P^{-1},\ P,\ E$$

дисперсионных, весовых и корреляционных матриц можно использовать в качестве операторов преобразований, при помощи которых производится оценка линейных функций по измеренным аргументам.

Взаимные связи операторов. Легко проверить, что

$$1.\ \overline{D}=\Sigma C\Sigma;\qquad 2.\ \overline{P}^{-1}=P^{-1}CP^{-1};$$
$$3.\ C=\Sigma^{-1}\overline{D}\Sigma^{-1}$$

и что

$$P=P^{1/2}\cdot P^{1/2};\qquad P^{-1}=P^{-1/2}\cdot P^{-1/2};$$
$$P^{1/2}P^{1/2}P^{-1/2}P^{-1/2}=P^{-1/2}P^{-1/2}P^{1/2}P^{1/2}=E;$$
$$P^{1/2}P^{-1}P^{1/2}=E;\qquad P^{-1/2}PP^{-1/2}=E.$$

Преобразование

$$C=\Sigma^{-1}\overline{D}\Sigma^{-1}$$

означает, что дисперсионная матрица сводится к корреляционной.

Формула

$$\overline{P}^{-1}=P^{-1}CP^{-1}$$

переводит корреляционную матрицу в весовую.

Преобразование

$$\overline{D}=\Sigma C\Sigma$$

обращает корреляционную матрицу в дисперсионную.

Выражения

$$P = P\overline{P}^{-1}P; \qquad D = \Sigma^{-1}\overline{D}\Sigma^{-1}$$

при всех $r_{jj}=0$ переводят взаимнозависимые связи в свободные, в результате которых косоугольные матрицы сводятся к диагональным.

Инварианты матриц операторов

С л е д м а т р и ц

дисперсионных —

$$Sp\overline{D} = [\sigma^2]; \quad SpD = [\sigma^2]; \quad Sp\sigma^2 E = \sigma^2 n;$$

весовых —

$$Sp\overline{P}^{-1} = [p^{-1}]; \quad SpP^{-1} = [p^{-1}]; \quad SpP = [p];$$

единичного веса —

$$SpE = n.$$

Определители матриц

Косоугольной формы:

дисперсионной —

$$|\overline{D}| = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2 |C|;$$

весовой —

$$|\overline{P}^{-1}| = \prod_{i=1}^{n} p_i^{-1} |C|,$$

где $|C|$ — определитель корреляционной матрицы.

Диагональной формы:

дисперсионной —

$$|D| = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

весовой —

$$|P^{-1}| = \prod_{i=1}^{n} p_i^{-1} \, |P| = \prod_{i=1}^{n} p_i,$$

единичного веса —

$$|E| = 1.$$

Оценка линейных функций по измеренным значениям аргументов

Функции общего вида. Пусть математическая связь между переменными

$$x_1,\ x_2, \ldots x_k$$

и величиной y, от них зависящей, выражается уравнением общего вида

$$y = f(x_1,\ x_2, \ldots, x_k),$$

т. е. уравнением, в котором переменные x_j связаны нелинейно.

В теории ошибок нелинейные уравнения, или функции общего вида непосредственно не оцениваются, так как объектом оценки в этой теории является только класс линейных функций. К такому классу функции приводит метод линеаризации.

Метод линеаризации. Любая непрерывная дифференцируемая функция в достаточно узких пределах изменения аргументов может быть заменена линейной функцией. Ошибка, возникающая при этом, тем меньше, чем теснее границы изменения аргументов и чем ближе функция к линейной. Тогда, пользуясь числовыми характеристиками для линейных функций, можно решить задачу оценки нелинейной функции по непосредственно измеренным аргументам в границах, в которых функция остается линейной.

Пример. Кривую

$$y = f(x),$$

выражающую функцию

$$Y = f(X),$$

на участке (a, b) можно заменить касательной

$$y = f(x) + f'(\overline{x})(x - \overline{x})$$

к кривой в данной точке, если на этом участке различие между касательной и кривой пренебрегаемо мало, т. е. если функция $Y = f(X)$ почти линейная. Тогда естественно полагать, что случайные величины Y и X приближенно связаны линейной зависимостью

$$\overline{Y} = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(X - \overline{X}).$$

Оценивая эту зависимость, получим: математическое ожидание $\overline{Y} = f(\overline{x})$, дисперсию σ_y^2, обратный вес p_y^{-1}, среднюю квадратическую ошибку σ_y.

Линеаризация функции общего вида. Пусть нелинейная функция

$$Y = f(X_1,\ X_2, \ldots, X_k)$$

от k случайных аргументов X_j характеризуется математическими ожиданиями

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$$

и ковариационной матрицей X_{kk}.

Полагая, что в окрестности точки

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_k]$$

диапазон возможных измерений случайных аргументов X_j невелик, разложением в ряд Тейлора нелинейную функцию обращают в линейную:

$$Y = f(\bar{x}_1 \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k + \sum_{j=1}^{k} f'(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)(X_j \bar{x}_j),$$

в которой члены с разностью $X_j - \bar{x}_j$ выше первой степени опущены.

Полагая, что

$$f'_{x_j}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{\bar{x}},$$

и учитывая, что разности

$$X_j - \bar{x}_j = v_j$$

— центрированные аргументы, линейная функция принимает вид

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} v\right].$$

Не обращаясь к формуле Тейлора, оценку функции общего вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

можно осуществить, пользуясь полным дифференциалом этой функции,

$$dy \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

опуская остаточный член.

Заменив дифференциалы конечными приращениями, получим соотношение

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Физический смысл формулы в конечных приращениях. Если объем v известной массы газа изменяется под действием различных давления p и температуры t, то приращение объема (положительное или отрицательное) равно сумме приращений, которые получились бы одно при постоянном давлении, другое при постоянной температуре.

Аналогично, если в формуле тригонометрического нивелирования

$$h = s \operatorname{tg} \alpha$$

превышение h изменится под влиянием приращений расстояния s и угла наклонения α, то положительное или отрицательное приращение превышения h равно сумме приращений, которые получились бы одно при неизменном расстоянии, другое при постоянном угле. На языке анализа это означает, что полный дифференциал функции v или h равен сумме частных дифференциалов по p и t или по s и α.

Таким образом, соотношение

$$\Delta y = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right]$$

является **исходным** для вывода формулы дисперсии и, следовательно, ошибки функции общего вида.

Полагая в общем случае, что каждый аргумент x_i функции $y = f(x_i)$ измеряется n раз в результате n-кратных измерений n аргументов, получим n линейных соотношений вида

$$\Delta y_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

и, следовательно, билинейное выражение

$$\Delta y = f^* \Delta x,$$

где

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \cdots \\ \Delta y_n \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix};$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_{11} & \Delta x_{12} \ldots \Delta x_{1n} \\ \Delta x_{21} & \Delta x_{22} \ldots \Delta x_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ \Delta x_{n1} & \Delta x_{n2} \ldots \Delta x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Билинейному выражению отвечает квадратичная форма

$$\Delta y^2 = f^* \Delta x^2 f,$$

где

$$\Delta x^2 = \begin{bmatrix} [\Delta x_1^2] & [\Delta x_1 \Delta x_2] \ldots [\Delta x_1 \Delta x_n] \\ [\Delta x_2 \Delta x_1] & [\Delta x_2^2] \ldots [\Delta x_2 \Delta x_n] \\ \cdots & \cdots \\ [\Delta x_n \Delta x_1] & [\Delta x_n \Delta x_2] \ldots [\Delta x_n^2] \end{bmatrix}$$

— ковариационная матрица приращений, т. е. матрица случайных ошибок, порядка n.

В среднем ковариационная матрица сводится к дисперсионной $\overline{D}$.

Следовательно, квадратичная форма в среднем

$$\frac{\Delta y^2}{n} = f^* \frac{\Delta x^2}{n} f$$

выражает дисперсию

$$\sigma_y^2 = f^* \overline{D} f$$

функции общего вида $y = f(x_i)$.

Алгоритм оценки линейных функций по измеренным аргументам

Общий. Если

$$\overline{y} = f^* \overline{x}$$

— линейная функция взаимозависимых величин $\overline{x}_i$, то

$$\sigma_y^2 = f^* \overline{D} f; \quad \sigma_y = \sqrt{f^* \overline{D} f}; \quad P_y^{-1} = f^* \overline{P}^{-1} f$$

— соответственно дисперсия, ошибка и обратный вес функции таких величин.

Частный. Если

$$\overline{y} = f^* \overline{x}$$

— линейная функция взаимонезависимых величин $\overline{x}_j$, то

$$\sigma_y^2 = f^* D f; \quad \sigma_y = \sqrt{f^* D f}; \quad p_y^{-1} = f^* P^{-1} f$$

— соответственно дисперсия, ошибка и обратный вес функции таких величин.

Формулы дисперсий и весов линейных функций

Для линейной функции

$$\overline{y} = f_1 \overline{x}_1 + f_2 \overline{x}_2 + \cdots + f_k \overline{x}_k,$$

или

$$\overline{y} = f^* \overline{x},$$

где

$$f^* = [f_1, f_2, \ldots, f_k]$$

— вектор частных производных, или постоянных;

$$\bar{x}=[\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_k]$$

— вектор средних, имеем формулы:
дисперсии

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= f^*\bar{D}f = \\ &= f_1^2\sigma_1^2+2f_1f_2\sigma_1\sigma_2r_{12}+\ldots+2f_1f_k\sigma_1\sigma_kr_{1k}+ \\ &\qquad +f_2^2\sigma_2^2+\ldots+2f_2f_k\sigma_2\sigma_kr_{2k}+ \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad +f_k^2\sigma_k^2\end{aligned}$$

и обратного веса

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_y} &= f^*P^{-1}f = \\ &= \frac{f_1^2}{p_1}+2f_1f_2\frac{r_{12}}{\sqrt{p_1p_2}}+\ldots+2f_1f_k\frac{r_{1k}}{\sqrt{p_1p_k}}+ \\ &\qquad +\frac{f_2^2}{p_2}+\ldots+2f_2f_k\frac{r_{2k}}{\sqrt{p_2p_k}}+ \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad +\frac{f_k^2}{p_k}.\end{aligned}$$

Если средние x_j взаимно не связаны, то получим формулы:
дисперсии

$$\sigma_y^2=f^*Df=$$
$$=f_1^2\sigma_1^2+f_2^2\sigma_2^2+\ldots+f_k^2\sigma_k^2$$

и обратного веса

$$\frac{1}{p_y}=f^*P^{-1}f=$$
$$=\frac{f_1^2}{p_1}+\frac{f_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{f_k^2}{p_k}.$$

Примеры оценки линейных функций по измеренным аргументам

1) Пусть

$$\bar{y}=\bar{x}_1\pm\bar{x}_2\pm\cdots\pm\bar{x}_n,$$

где

$$f=[1,\ 1,\ldots,\ 1].$$

Тогда

$$\sigma_{\bar{y}}^2=f^*Df=\left[\sigma_{\bar{x}}^2\right];\qquad p_{\bar{y}}^{-1}=f^*P^{-1}f=[p^{-1}].$$

Если

$$D=\sigma^2 E,$$

то

$$\sigma^2_{\bar{y}}=\sigma^2_{\bar{x}}n; \qquad \sigma_{\bar{y}}=\sigma_{\bar{x}}\sqrt{n}.$$

2) Пусть

$$\bar{x}=\frac{[x]}{n}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

где

$$f=[n^{-1},\ n^{-1},\ldots,n^{-1}], \quad D=\sigma^2 E.$$

Тогда

$$\sigma^2_{\bar{x}}=\frac{\sigma^2_x}{n}; \qquad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

3) Если

$$\bar{x}=\frac{[px]}{[p]}=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n},$$

где

$$f=\left[\frac{p_1}{[p]},\ \frac{p_2}{[p]},\ldots,\ \frac{p_n}{[p]}\right],$$

то

$$\sigma^2_{\bar{x}}=\sigma^2 f^* P^{-1} f=\frac{\sigma^2_x[p]}{[p]^2}.$$

Следовательно,

$$\sigma^2_{\bar{x}}=\frac{\sigma^2_x}{[p]}; \qquad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{[p]}}.$$

4) Пусть

$$\bar{y}=k\bar{x}.$$

Тогда

$$\sigma^2_{\bar{y}}=k^2\sigma^2_{\bar{x}}; \qquad \sigma_{\bar{y}}=k\sigma_{\bar{x}}.$$

Если

$$\bar{y}=\bar{x}\sqrt{p_{\bar{x}}},$$

то

$$\sigma^2_y=\left(\sqrt{P_x}\right)^2\sigma^2_x; \qquad \frac{1}{P_y}=\frac{(\sqrt{P_x})^2}{P_x}=1.$$

5) Пусть распределение

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_n$$

сопровождается весами

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_n.$$

Тогда вес распределения

$$x_1 \sqrt{p_1}, \quad x_2 \sqrt{p_2}, \ldots, x_n \sqrt{p_n}$$

равен единице.

Ошибки арифметических действий. Если задано среднее геометрическое

$$\bar{y} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

то по логарифму

$$\lg \bar{y} = \frac{1}{n} (\lg x_1 + \lg x_2 + \ldots + \lg x_n)$$

и дифференциалу среднего

$$\frac{d\bar{y}}{y} = \frac{1}{n} \left(\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \ldots + \frac{dx_n}{x_n} \right)$$

найдем дисперсию среднего в относительной форме

$$\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sigma_{x_n}}{x_n} \right)^2.$$

6) Если

$$\frac{\sigma_1}{x_1} = \frac{\sigma_2}{x_2} = \cdots = \frac{\sigma_n}{x_n} = \frac{\sigma}{x},$$

то

$$\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} = \frac{\sigma_x}{x} \sqrt{n}$$

— относительная ошибка среднего геометрического из одинаково точных сомножителей.

7) Пусть

$$y = \frac{x_1}{x_2}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2} \right)^2$$

— дисперсия частного в относительной форме.

Если

$$\frac{\sigma_1}{x_1} = \frac{\sigma_2}{x_2} = \frac{\sigma_x}{x},$$

то

$$\frac{\sigma_y}{y} = \frac{\sigma_x}{x} \sqrt{2}$$

— погрешность частного в той же форме.

8) Сравнивая ошибки действий

$$y = x^n; \qquad y = \sqrt[n]{x},$$

находим, что

$$\frac{\sigma_y}{y} = n\,\frac{\sigma_x}{x}; \qquad \frac{\sigma y}{y} = \frac{1}{n}\,\frac{\sigma_x}{x}.$$

Следовательно, относительная ошибка при возведении числа x в степень n возрастает в n раз, а при извлечении корня степени n из числа x — уменьшеатся в n раз.

Дисперсия основных тригонометрических функций

1) $y = \sin x;\quad \sigma_y^2 = \cos^2 x\sigma_x^2;\quad \sigma_y^2 = \cos^2 x\left(\frac{\sigma_x}{\rho}\right)^2.$

2) $y = \cos x;\quad \sigma_y^2 = \sin^2 x\sigma_x^2;\quad \sigma_y^2 = \sin^2 x\left(\frac{\sigma_x}{\rho}\right)^2.$

3) $y = \operatorname{tg} x;\quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{\cos^2 x};\quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{\rho^2\cos^2 x}.$

4) $y = \operatorname{ctg} x;\quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{\sin^2 x};\quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{\rho^2 \sin x},$

где

$$\rho^\circ = 57^\circ{,}3; \qquad \rho' = 3438'; \qquad \rho'' = 206\,265''.$$

Эллипсоиды рассеяния

Матрица оператора $\overline{D}$ и поверхность 2-го порядка. Дисперсионная матрица

$$\overline{D} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^2 \ldots \sigma_1\sigma_n r_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_n\sigma_1 r_{n1} \ldots \sigma_n^2 \end{Bmatrix}$$

порядка n описывает эллипсоид рассеяния в окрестности точки математического ожидания $\overline{x}$ и, таким образом, выражает поверхность 2-го порядка, в которой сосредоточены массы распределений ошибок около начала координат.

Главные оси эллипсоида D наклонны к осям прямоугольной системы координат. Центр эллипсоида совпадает с началом координат. Весь эллипсоид вписан в n-мерный косоугольный параллелепипед, квадрат объема которого равен определителю $|\overline{D}|$ матрицы $\overline{D}$.

Объем эллипсоида пропорционален объему параллелепипеда и всегда меньше последнего, достигает своего максимума при $|C| = 1$, т. е. если величины распределения $x_1, \ldots, x_n$ не коррелированы, и стремится к нулю, если r_{ij} стремятся к коэффициентам корреляции некоторого несобственного распределения.

Отношение между объемом эллипсоида и его максимальным значением равно $\sqrt{|C|}$. Эта величина выражает коэффициент разброса данного распределения и может рассматриваться как мера «невырожденности» распределения.

В частности, при $n=2$ $\sqrt{|C|}=\sqrt{1-r^2}$

$$|\overline{D}|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2).$$

Следовательно, в этом случае возникает эллипс рассеяния в пространстве двух измерений.

Эллипсоид рассеяния D. Диагональная матрица

$$D=\{\sigma_1^2\sigma_2^2\ldots\sigma_n^2\}$$

оператора D порядка n описывает n-мерный эллипсоид в пространстве n измерений, центр которого расположен в точке математического ожидания $\overline{x}$ и главные оси которого совпадают с осями прямоугольной системы координат.

Весь эллипсоид вписан в n-мерный прямоугольный параллелепипед, квадрат объема которого равен определителю $|D|$ матрицы D. Объем эллипсоида пропорционален объему параллелепипеда, всегда меньше последнего и для данного распределения является максимальным.

Эллипс рассеяния возникает при $n=2$, т. е. когда

$$D=\{\sigma_1^2\sigma_2^2\}.$$

Сфера рассеяния возникает при $n=3$, когда

$$D=\sigma^2 E_{33}.$$

Если

$$D=\sigma^2 E_{22},$$

то мера рассеяния выражается **окружностью,** радиус которой равен σ^2.

Таким образом, операторы

$$\overline{D},\ D,\ \sigma^2 E$$

и соответственно матрицы этих операторов приводят к основным характеристикам мер рассеяния в геометрической форме в пространстве n измерений и в любом подпространстве этих измерений.

Теория ошибок в моделированной форме. Если

$$1)\ \overline{y}=f^*\overline{x}$$

— функция распределения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в среднем, то

$$2)\ \sigma_y^2=f^*\overline{D}f$$

— дисперсия этого распределения в самом общем случае.

Размерность матрицы оператора $\overline{D}$ зависит только от размерности вектора $\overline{x}$ функции 1). Матрица оператора $\overline{D}$ всегда может быть построена по данным результатов измерений, наблюдений или по заданному плану экспериментального исследования. В первом случае алгоритм 2 приводит к оценке распределения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в среднем, во втором случае — к прогнозированию ожидаемой дисперсии.

Особенности обработки ограниченного числа результатов измерений и наблюдений

О законах распределения случайных величин при ограниченном числе опытов. Установление законов распределения случайных величин по результатам опытов требует сбора обширного статистического материала, объем которого исчисляется сотнями результатов измерений и наблюдений. Между тем на практике часто имеют дело со статистическим материалом весьма ограниченного объема, определяемого 20—30 измерениями или наблюдениями и даже меньше. По такому материалу нельзя установить закон распределения случайных величин. Однако по этому же материалу можно получить, хотя бы ориентировочно, числовые характеристики распределения случайных величин. На практике часто имеет место иная ситуация — вид закона известен, и требуется найти только некоторые параметры, от которых этот закон зависит. Так, например, если известно, что закон распределения нормальный, то задача обработки сводится к определению параметров $\bar{x}$ и σ.

Со времени Гаусса полагают, что результаты линейных, линейно-угловых и высотных измерений подчиняются нормальному распределению, поэтому при обработке результатов геодезических измерений вся процедура вычислений сводится к уравнительным операциям (сглаживанию) и определению числовых характеристик нормального распределения $\bar{x}$ и σ.

Во многих случаях вид закона распределения вообще не представляет интереса и требуется знать только числовые характеристики. Но в таких случаях естественно возникает вопрос о «доброкачественности» оценок.

Требования к оценкам для неизвестных параметров. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — наблюденные значения случайной величины x и пусть $\tilde{a}$ — оценка параметра a. Тогда оценка

$$\tilde{a}=\tilde{a}\,(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$$

— функция случайных величин x_i и, следовательно, сама является случайной величиной. Закон распределения $\tilde{a}$ зависит от закона распределения X, в частности, от самого параметра a и от числа опытов n. Чтобы оценка была в некотором смысле доброкачественной, она должна быть:

состоятельной, т. е. с увеличением числа опытов n приближающейся (сходящейся по вероятности) к параметру a;

несмещенной, т. е. удовлетворяющей условию

$$M\,(\tilde{a})=a;$$

эффективной, т. е. обладающей наименьшей дисперсией

$$D(\tilde{a}) = \min.$$

Эффективная оценка всегда состоятельна. На практике не всегда возможно удовлетворить всем этим требованиям. Поэтому выбору оценки всегда должно предшествовать ее критическое рассмотрение в соответствии с указанными требованиями.

Оценка для математического ожидания. Оценка

$$\tilde{\bar{x}} = \frac{[x]}{n}$$

состоятельная, так как согласно закону больших чисел с увеличением n величина x сходится по вероятности к $\bar{x}$, и несмещенная в силу того, что

$$M(x) = \frac{[x]}{n} = \bar{x}.$$

Дисперсия этой оценки равна

$$D(\tilde{x}) = \frac{1}{n} D.$$

Такая оценка эффективна, если случайная величина X распределена по нормальному закону. Для других законов распределения подобная оценка может не иметь места.

Оценка для дисперсии. Оценка

$$D' = \frac{[(x - \bar{x})^2]}{n}$$

— состоятельная, но смещенная. Действительно, выразим эту оценку через второй центральный момент

$$D' = \frac{[x^2]}{n} - \bar{x}^2.$$

Здесь первый член правой части — средняя из n наблюденных значений случайной величины X^2, так что сходится по вероятности к $M(X^2) = \nu_2(X)$; второй член сходится по вероятности к x^2, следовательно, вся правая часть сходится по вероятности к величине

$$\nu_2(X) - \bar{x}^2 = D.$$

Это означает, что оценка D' состоятельная и смещенная. В самом деле, подстановка среднего $\bar{x} = \frac{1}{n}[x]$ в правую часть значения D' приводит к дисперсии

$$D' = \frac{[x^2]}{n} - \left(\frac{[x]}{n}\right)^2 = \frac{[x^2]}{n^2} - 2\,\frac{\sum\limits_{i<j} x_i x_j}{n^2} =$$

$$=\frac{n-1}{n^2}[x^2]-2\frac{\sum\limits_{i<j}x_ix_j}{n^2},$$

математическое ожидание которой:

$$1)\ M(D')=\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}M(X)-\frac{2}{n^2}\sum_{i<j}M(X_iX_j).$$

Выбор начала координат в точке $\overline{x}$ приводит к равенствам:

$$2)\ M(X_i^2)=M(\overset{0}{X}{}_i^2)=D;\quad \sum_{i=1}^{n}M(X_i^2)=nD;$$

$$3)\ M(X_iX_j)=M(\overset{0}{X}_i\overset{0}{X}_j)=K_{ij}=0,$$

где последнее имеет место в силу того, что опыты независимы.

Подстановка выражений из 2 и 3 в 1 приводит к соотношению

$$M(D')=\frac{n-1}{n}D,$$

из которого следует, что D' — смещенная оценка для D.

Если D' умножить на $\frac{n}{n-1}$, то получим исправленную дисперсию

$$\overline{D}=\sigma^2=\frac{[(x_i-\overline{x})^2]}{n-1},$$

которую и можно принять в качестве оценки для D.

Так как множитель $\frac{n}{n-1}$ стремится к единице при $n\longrightarrow\infty$ и оценка D' состоятельна, то оценка D также состоятельна.

ГЛАВА IV

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 13. ОСНОВАНИЯ МЕТОДА

Условие Лежандра. В 1806 г. Лежандр предложил тот способ комбинаций результатов измерений, который по существу и по наименованию (способ наименьших квадратов) без каких-либо изменений сохранился в классических курсах до наших дней.

По соображениям Лежандра из всех принципов, предлагаемых для ограничения крайних ошибок в наиболее узких пределах независимо от их знака, не существует более простого, чем тот, который обращает в минимум сумму квадратов ошибок. При помощи правила, вытекающего из этого принципа, между ошибками устанавливается как бы некоторое равенство, не позволяющее крайним из них по величине оказывать преобладающее влияние и вполне пригодное для того, чтобы раскрыть картину состояния всей системы, наиболее близкую к истине.

Условие, рекомендуемое Лежандром вне связи с теорией вероятностей, в алгебраической форме сводится к требованию

$$v^* v = [v^2] = [vv] = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = \min,$$

согласно которому сумма квадратов ошибок, порождаемая данной системой линейных уравнений, должна быть наименьшей.

Условие Гаусса. В 1809 г. Гаусс независимо от Лежандра нашел метод, с помощью которого при многократных измерениях одной или нескольких линейно связанных величин целесообразно использовать избыточное (добавочное) число измерений (число уравнений) для определения значений необходимых неизвестных.

Все существенное из того, что является содержанием способа наименьших квадратов, изложено Гауссом в шести работах, опубликованных им до 1826 г.

Положения Маркова. В связи с исследованиями Гаусса акад. А. А. Марков в статье «Закон больших чисел и способ наименьших квадратов»* изложил три положения принципиального характера.

«Не допуская определенного закона распределения погрешностей наблюдений, мы можем прийти к способу наименьших квадратов, исходя из следующих положений: 1) мы рассматриваем

* Известия физико-математического общества Казанского университета, 2-я серия, т. VIII, 1899 г.

только такие приближенные равенства, которые, по нашим предположениям, не заключают постоянной погрешности; 2) каждому приближенному равенству мы приписываем определенный вес, причем веса различных приближенных равенств мы считаем обратно пропорциональными математическим ожиданиям квадратов погрешностей; 3) достоинство каждого приближенного равенства мы оцениваем его весом и соответственно этому для каждого неизвестного отыскиваем такое приближенное равенство, вес которого наибольший. Только этот вывод способа наименьших квадратов я считаю рациональным; он указан Гауссом. Рациональным я считаю этот способ главным образом потому, что он не затемняет условности способа наименьших квадратов».

В более общей форме соображения Маркова отражены в теореме, доказанной им в 1912 г., известной в статистике как теорема Гаусса — Маркова; соответственно и условие $[pv^2]=\min$ называют условием Гаусса — Маркова. В геодезии такое условие называют условием Лежандра — Гаусса.

Метод наименьших квадратов и математическая статистика. Со времени Лежандра и Гаусса теория и практика метода наименьших квадратов является неотъемлемой частью геодезии и астрономии. Но с 20-х годов нашего столетия в связи с работами Маркова и результатами, полученными Нейманом и Девисом, Эйткеном и Рао, метод наименьших квадратов включен в математическую статистику как важная и естественная часть теории оценок результатов измерений и наблюдений, что показано в трудах Ю. В. Линника [23], Б. П. ван дер Вардена [6], Г. Крамера [19], М. Кендалла и А. Стьюарта [18] и др.

Принципы обработки результатов измерений или наблюдений

Принцип Лапласа. В своих исследованиях Лаплас в 1792 г. предложил условие

$$[|v|]=|v_1|+|v_2|+\ldots+|v_n|=\min,$$

т. е. условие минимума суммы абсолютных значений ошибок вместо суммы квадратов ошибок.

Принцип Коши. В 1831 г. Коши предложил принцип минимакса

$$\frac{1}{2}(x_{\max}+x_{\min})=x_{\text{ср}},$$

в соответствии с которым наибольшая сумма всех абсолютных ошибок достигает наименьшего значения.

Принцип Чебышева. В 1885 г. П. Л. Чебышев построил расширенную теорию метода наименьших квадратов, в котором объединяются принцип минимакса и принцип ортогональности полиномов, построенных им в целях наилучшего приближения измеренных функций. Соответственно «чебышевским приближением» называют такое, при котором стремятся свести к минимуму максимум ошибки, т. е. такое, при котором соблюдается принцип минимакса.

Приближение в смысле наименьших квадратов уменьшает среднюю квадратическую ошибку, но при этом допускает отдельные большие ошибки. Чебышевское приближение уменьшает экстремальную ошибку, допуская большую среднюю квадратическую ошибку.

Интерполяционный ряд Чебышева и его полиномы имеют широкое применение в статистике при корреляционном, дисперсионном и гармоническом анализе, а также при оценке статистических параметров с точки зрения теории ошибок.

В свете идей Чебышева уравнительные операции по методу наименьших квадратов являются дальнейшим углублением и развитием метода и оценки средних.

Принцип Колмогорова. Со второй половины текущего столетия внимание геодезистов и маркшейдеров привлекают идеи, изложенные советским акад. А. Н. Колмогоровым в статье [20]. В этой статье А. Н. Колмогоров утверждает, что, во-первых, закон распределения Гаусса для оценки надежности результатов измерений при небольшом числе измерений приводит к очень большой и практически ощутимой переоценке этой надежности; во-вторых, все основные результаты метода наименьших квадратов выводятся довольно громоздким, чисто вычислительным путем, тогда как использование общих понятий современной линейной алгебры (например, понятия ортогональности) позволяет получить те же результаты более выразительно и особенно наглядно в свете многомерной геометрии.

Принцип максимального правдоподобия Фишера. Если два эксперимента, каждый из которых содержит два неизвестных параметра, приводят к двум результатам, функции распределения которых подобны, то предполагается, что выводы из этих экспериментов должны быть одинаковыми.

На этом основании экспериментатор может заготовить математическую модель для решения широкого круга опытов. Тогда результаты всех последующих опытов остается преобразовать так, чтобы они стали эквивалентны первому, для которого ответ получен. В итоге все, что остается сделать — это преобразовать ответ к исходной шкале математической модели. В геометрическом смысле принцип Фишера сводится к определению максимального коэффициента пропорциональности между измеренной моделью и моделью, принятой за оптимальную.

Принцип наименьших квадратов и принцип максимального правдоподобия. Если случайный разброс $x_1, ... x_n$ относительно параметра x подчиняется нормальному распределению, то решение, основанное на методе наименьших квадратов, совпадает с решением, полученным методом максимального правдоподобия.

Там, где нормальное распределение не наблюдается, главная трудность, возникающая при использовании метода максимального правдоподобия в качестве критерия оценки, заключается в том, что приходится предполагать известным вид распределения вероятности, но необходимость в таком предположении налагает сильные ограничения. Между тем для определенного класса задач метод наименьших квадратов дает оценку в среднем, не зависящую от какого-либо распределения.

Переопределенность и принцип наименьших квадратов

Системы линейных уравнений, возникающие при обработке результатов измерений и наблюдений. Напишем три системы линейных уравнений:

$$1)\quad \begin{aligned} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3&=l_1,\\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3&=l_2; \end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3&=l_1,\\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3&=l_2,\\ a_3x_1+b_3x_3+c_3x_3&=l_3; \end{aligned}$$

$$3)\quad \begin{aligned} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3&=l_1,\\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3&=l_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3&=l_n. \end{aligned}$$

В первой системе число уравнений меньше, чем число неизвестных; во второй — число уравнений равно числу неизвестных; в третьей — число уравнений больше числа неизвестных. Так что **первая система** неопределенная, вторая — определенная, третья — переопределенная относительно числа неизвестных, входящих в каждую из них.

В процессе обработки опытных данных может возникнуть любая из указанных трех систем. Однако первая система без третьей не имеет смысла, вторая необходима, но недостаточна, и только третья система, т. е. переопределенная система уравнений, приводит к решению под условием Лежандра — Гаусса. Поясним алгебраический смысл решения переопределенной системы под этим условием.

Особенности решения систем линейных уравнений. Ошибки измерений влияют на точность результатов и нарушают уравнения, связывающие неизвестные. По этой причине при решении систем линейных уравнений возникают две трудности: 1) случайные ошибки результатов измерений нарушают равенства, в которые они входят; 2) информация, заданная системой уравнений, может оказаться недостаточной для определения всех неизвестных.

Если левые части уравнений находятся в какой-либо связи между собой, то правые части должны удовлетворять определенным условиям совместности. Но под влиянием ошибок измерений условия совместности могут не выполняться и, следовательно, в строго математическом смысле заданная система может оказаться несовместной. Несовместность можно устранить, опустив некоторые уравнения как избыточные. Но тогда может оказаться, что для определения неизвестных система не будет иметь достаточного числа уравнений.

Таким образом, вопросы недостаточной определенности и переопределенности тесно связаны между собой и являются предметом исследования. Метод наименьших квадратов дает возможность выправить любую переопределенную и несовместную систему уравнений.

Выразим переопределенную систему в матричной форме

$$Ax=b. \tag{13.1}$$

Такую систему характеризует прямоугольная матрица A, в которой число строк больше числа столбцов.

Вследствие ошибок измерений уравнение (13.1) математически несовместное, т. е. нельзя сделать все составляющие остаточного вектора

$$v=Ax-b \tag{13.2}$$

равными нулю.

Но тогда можно найти решение, которое при данных обстоятельствах будет наилучшим.

С этой целью достаточно квадрат длины остаточного вектора

$$v^2=(Ax-b)^2 \tag{13.3}$$

подчинить условию

$$v^2=(Ax-b)^2=\min \tag{13.4}$$

и при этом условии определить x.

Задача приведения к минимуму выражения (13.4) всегда имеет определенное решение независимо от того, совместна или несовместна заданная система уравнений. Если эта система совместна, то значение x, найденное из условия (13.4), при подстановке в уравнение (13.2) обратит остаточный вектор в нулевой. Если же система несовместна, то остаточный вектор не перейдет в нулевой вектор, но найденное значение x будет решением с меньшей ошибкой в том смысле, что квадрат длины остаточного вектора будет меньше, чем при любом другом выборе x.

Таким образом, решение задачи по методу наименьших квадратов полностью избавляет от исследования совместности заданной системы уравнений. Если система совместна, то остаточный вектор, полученный по методу наименьших квадратов, окажется равным нулю, подтверждая тем самым, что система совместна.

Решение уравнения (13.2) по методу наименьших квадратов сводится к определению вектора x, при котором скаляр

$$(Ax-B)^* (Ax-b)$$

принимает наименьшее значение. Определение экстремальных значений скалярной функции от многих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ приводит к уравнению

$$A^*Ax - A^*b = 0.$$

Особенность этого уравнения состоит в том, что оно всегда приводит к вполне определенной системе точно такого же числа уравнений, сколько имеется неизвестных, независимо от того, как сильно была переопределена первоначальная система (13.1).

Геометрическое содержание условий минимума

Исходное представление. В обыкновенном пространстве, т. е. в в трехмерном пространстве Евклида, кратчайшее расстояние от точки, взятой вне плоскости, до плоскости выражается длиной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Условие Лежандра. Формула $[v^2] = \min$ выражает скалярное произведение n-мерного вектора

$$v = [v_1,\ v_2, \ldots, v_n]$$

на самого себя. Оно неотрицательно, т. е. $v^*v \geqslant 0$, и обращается в нуль, если $v = 0$, т. е. если вектор v — перпендикуляр к гиперплоскости в пространстве Евклида.

В этом случае $[v] = 0$, т. е. сумма составляющих v_i вектора v также обращается в нуль.

При этих условиях длина

$$|v| = \sqrt{v^2}$$

вектора v выражает кратчайшее расстояние от точки в n-мерном пространстве до гиперплоскости.

Следовательно, число

$$\sigma = \sqrt{\frac{v^2}{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}$$

— наименьшее расстояние до гиперплоскости в среднем.

Условие Лежандра — Гаусса. Формула $[pv^2] = \min$ преобразованием $\sqrt{p_i}v_i = v$ сводится к формуле $[v'v'] = \min$. Так что условие Лежандра — Гаусса $[pv^2] = \min$ имеет тот же геометрический смысл, что и условие Лежандра $[v^2] = \min$.

Способ построения вектора v, перпендикулярного к гиперплоскости, описан в нижеследующей задаче.

Задача о перпендикуляре и наилучшем приближении

Ортогональное проектирование. Допустим, что x — произвольный вектор, заданный в евклидовом пространстве E_n, в котором содержится k-мерное подпространство S с базисом $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Тогда x можно представить единственным образом в форме разложения

$$x = x_S + x_V,$$

где x_S — ортогональная проекция вектора x на подпространство S, x_V — проектирующий вектор.

Пример. Если E_3 — трехмерное евклидово векторное пространство, $k=2$ расположено в E_3 и все векторы построены из фиксированной точки 0, то S—плоскость, проходящая через точку 0; x_S — ортогональная проекция вектора x на плоскость S, x_V — перпендикуляр, опущенный из конца вектора x на плоскость, $|x_V|$ — расстояние конца вектора x от плоскости S (рис. 14).

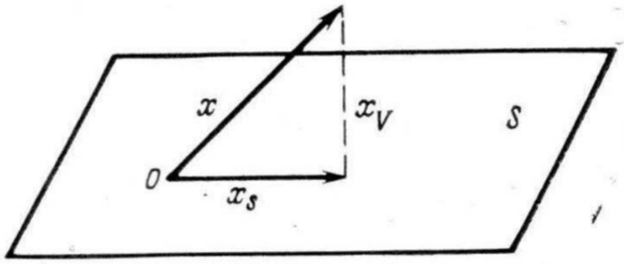

Рис. 14.

Квадратическая ошибка. Разложение

$$x = x_S + x_V$$

в ортогональном базисе влечет соотношения Пифагора

$$|x|^2 = |x_S|^2 + |x_V|^2,$$

где $|x_V|^2$ — квадрат длины перпендикуляра x_V.

Величина

$$|v| = \sqrt{x_V x_V}\,.$$

— квадратическая ошибка при приближении вектора x к вектору x_S в пространстве E_N.

Формула условия ортогональности. Перпендикулярность вектора

$$v = [v_1,\ v_2, \ldots, v_n]$$

ко всем векторам

$$a = [a_1,\ a_2, \ldots, a_n],$$
$$b = [b_1,\ b_2, \ldots, b_n],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$g = [g_1,\ g_2, \ldots, g_n]$$

матрицы

$$A^* = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, \ldots, a_n \\ b_1, & b_2, \ldots, b_n \\ \cdots & \cdots \\ g_1, & g_2, \ldots, g_n \end{bmatrix},$$

полученной транспонированием матрицы A, выражается формулой

$$A^* V = 0,$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} a_1a_2\ldots a_n \\ b_1b_2\ldots b_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_1g_2\ldots g_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [av] \\ [bv] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [gv] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из этой формулы следует, что

$$[av] = [bv] = \ldots = [gv] = 0,$$

т. е. что вектор V перпендикулярен ко всем векторам $a, b, \ldots, q$ матрицы A^* и соответственно угол между этими векторами один и тот же и равен 90°.

Такое положение вектора V в евклидовом пространстве имеет место, если условие Лежандра

$$V^*V = [v^2] = \min$$

выражает кратчайшее расстояние.

К аналогичному выводу приводят условия

$$A^*PV = 0; \qquad V^*PV = \min,$$

откуда следует

$$[pav] = [pbv] = \ldots = [pgv] = 0, \quad [pv^2] = \min.$$

Условия минимакса. Пусть рис. 15 изображает горный перевал, а рис. 16 — рельеф этого перевала в горизонталях. На рис. 15 вершина A — точка максимума, вершина B — точка минимума относительно точки A, седловина E — точка минимакса. В таком пред-

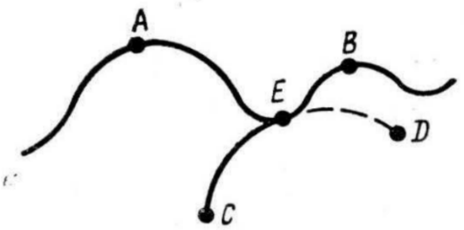

Рис. 15.

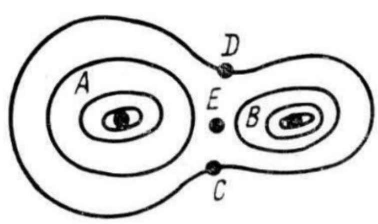

Рис. 16.

ставлении движение по пути от точки C до точки D через точку E — кратчайший путь, на котором наивысшая точка расположена наименее высоко.

§ 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И НАБЛЮДЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Решение под условием Лежандра — Гаусса. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты непосредственных измерений одной и той же величины x, точное значение которой не известно, и пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — веса этих измерений. Найдем значения параметров

$$\bar{x}, \quad \sigma_l^2, \quad \sigma_x^2, \quad p_x, \quad p_x^{-1}.$$

Начальные уравнения. Соответственно числу n-кратных измерений величины x возникает система из n начальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x=l_1 \\ x=l_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x=l_n \end{array}\right\} \tag{14.1}$$

относительно x.

Уравнения ошибок. Система (14.1) переопределена относительно одного неизвестного x на величину

$$d=n-1$$

и в силу влияния ошибок измерений выражает противоречивую и несовместную систему, т. е. такую, при которой система

$$x=l_i=0, \qquad i=1,\ 2, \ldots,\ n$$

не возникает и приводит к системе уравнений ошибок

$$x-l_i=v_i, \qquad i=1,\ 2, \ldots,\ n, \tag{14.2}$$

где v_i — отклонения от нуля.

Условие решения системы уравнений ошибок. Наилучшее решение системы (14.2) относительно x осуществимо под условием Лежандра — Гаусса

$$[pv^2]=\min$$

построением функции

$$2\Phi=[pv^2]=[p\,(x-l)^2]=\min,$$

т. е.

$$2\Phi=[pv^2]=[p]\,x^2-2\,[pl]\,x+[pl^2]=\min \tag{14.3}$$

и определением наименьшего значения этой функции.

Нормальные уравнения. К такому значению функции **2Ф** приводят экстремальные выражения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=[p]\,x-[pl]=0, \tag{14.4}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}=[pv]=0 \tag{14.5}$$

по переменным x и v, т. е. нормальные уравнения относительно x и v соответственно.

Взвешенная средняя. Из нормального уравнения **(14.4)** следует формула взвешенной средней

$$\bar{x}=\frac{[pl]}{[p]}. \tag{14.6}$$

Точка $\bar{x}$, определяемая формулой средней (14.6), — особая точка, в которой функция Лежандра — Гаусса (14.3) достигает наименьшего значения.

Действительно, вторая производная

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = [p]$$

по переменной x от этой функции больше нуля и не может иметь отрицательного значения.

Практическая формула вычисления взвешенной средней. Полагая, что

$$\bar{x} = x' + \overline{\delta x},$$

т. е. что среднее значение $\bar{x}$ равно приближенному x' плюс остаток $\overline{\delta x}$, ряд результатов измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$ сводят к ряду

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$$

в остатках

$$\varepsilon_i = l_i - x'.$$

Тогда среднее значение

$$\overline{\delta x} = \frac{[p\varepsilon]}{[p]}$$

в остатках совместно с приближенным значением x' выразит формулу

$$\bar{x} = x' + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}. \tag{14.7}$$

взвешенной средней.

Формулы минимума. Подстановка значения $\bar{x}$ в функцию (14.3) приводит к соотношению

$$[pv^2] = [p]\,\frac{[pl]^2}{[p]^2} - 2\,[pl]\,\frac{[pl]}{[p]} + [pl^2], \tag{14.8}$$

из которого следуют две формулы минимума:
первая —

$$[pv^2]_{\min} = [pl^2] - \frac{[pl]^2}{[p]}, \tag{14.9}$$

вторая —

$$[pv^2]_{\min} = [pl^2] - [pl]\,\bar{x}, \tag{14.10}$$

тождественные формулы

$$[pv^2]_{\min} = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]};$$

$$[pv^2]_{\min} = [p\varepsilon^2] - [p\varepsilon]\,\overline{\delta x}$$

в остатках.

Значение $[pv^2]_{min}$ можно получить непосредственно подстановкой в уравнение ошибок (14.2) вместо x значения $\bar{x}$. Тогда сумма квадратов произведений чисел ряда

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

на числа ряда

$$\sqrt{p_1},\quad \sqrt{p_2}, \ldots \sqrt{p_n}$$

выразит величину $[pv^2]_{min}$.

Дисперсия отдельного измерения определяется по формуле

$$\sigma_l^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}, \qquad (14.11)$$

где в знаменателе число $\alpha \doteq n-1$ выражает переопределенность начальной системы (14.1).

Следовательно,

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \qquad (14.12)$$

— ошибка отдельного измерения.

Дисперсия взвешенной средней определяется по формуле

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_l^2}{[p]} = \frac{[pv^2]}{[p](n-1)}. \qquad (14.13)$$

Следовательно,

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_l}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}} \qquad (14.14)$$

— ошибка взвешенной средней.

Вес взвешенной средней. Так как

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = p_{\bar{x}}^{-1},$$

то при

$$\sigma_l^2 = 1$$

имеем

$$p_{\bar{x}}^{-1} = [p]^{-1}.$$

Следовательно, $[p]$ — вес взвешенной средней.

Оценка в целом. Объединение параметров положения и рассеяния в символах

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \qquad (14.15)$$

выражает общую оценку результатов обработки в данной задаче.

Свод формул. В итоге всех преобразований имеем группу формул:

$$\bar{x}=\frac{[pl]}{[p]};\quad [pv]=0;\quad \overline{\delta x}=\frac{[p\varepsilon]}{[p]};\quad \bar{x}=x'+\overline{\delta x};$$

$$[pv^2]_{\min}=[pll]-[pl]\,\bar{x};\qquad [pv^2]_{\min}=[pll]-\frac{[pl]^2}{[p]};$$

$$[pv^2]_{\min}=[p\varepsilon^2]-[p\varepsilon]\,\bar{x};\qquad [pv^2]_{\min}[p\varepsilon^2]-\frac{[p\varepsilon]^2}{[p]};$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma_l^2}{[p]}=\frac{[pv^2]}{[p]\,(n-1)};\qquad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_l}{\sqrt{[p]}}=\sqrt{\frac{[pv^2]}{[p]\,(n-1)}}\tag{14.16}$$

при неравноточных измерениях.

Параметры распределения в случае равноточных измерений. В этом случае предполагается, что веса результатов измерений равны между собой и равны единице, т. е. что $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$ и, следовательно, $[p]=n$. Тогда группа формул при неравноточных измерениях перейдет в группу формул

$$\bar{x}=\frac{l}{n};\quad [v]=0;\quad \overline{\delta x}=\frac{[\varepsilon]}{n};\quad \bar{x}=x'+\overline{\delta x};$$

$$[v^2]_{\min}=[l^2]-[l]\,\bar{x};\qquad [v^2]_{\min}=[l^2]-\frac{[l]^2}{n};$$

$$[v^2]_{\min}=[\varepsilon^2]-[\varepsilon]\,\bar{x};\qquad [v^2]_{\min}=[\varepsilon^2]-\frac{[\varepsilon]^2}{n};$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma_l^2}{n}=\frac{[v^2]}{n\,(n-1)};\qquad \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_l}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}}\tag{14.17}$$

при равноточных измерениях.

Решение под условием ортогональности. Пусть задано начальное уравнение

$$A_{n1}x_{11}=l_{n1}\tag{14.18}$$

в переопределенной форме на величину

$$d=n-1,$$

полагая, что

$$A=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\tag{14.19}$$

— матрица коэффициентов размера $n\times 1$, x — число,

$$l=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{bmatrix}$$

— вектор результатов непосредственных измерений,

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & p_n \end{vmatrix} \tag{14.20}$$

— диагональная матрица весов этих измерений порядка n.

Определение $\bar{x}$. В силу переопределенности начальное уравнение (14.18) приводит к уравнению ошибок

$$Ax - l = v, \tag{14.21}$$

где

$$v = [v_1,\ v_2, \ldots, v_n]$$

— вектор отклонений от нулевого вектора

$$0 = [0,\ 0, \ldots, 0].$$

Нормальное уравнение. При условии ортогональности

$$A^*PV = [pv] = 0 \tag{14.22}$$

уравнение ошибок (14.21) перейдет в нормальное

$$A^*PAx - A^*Pl = 0, \tag{14.23}$$

где

$$A^*PA = [p], \qquad A^*Pl = [pl].$$

Решение нормального уравнения. Обращение уравнения (14.23) приводит к искомому значению

$$\bar{x} = QA^*Pl = \frac{[pl]}{[p]}, \tag{14.24}$$

наилучшему в смысле метода наименьших квадратов, т. е. к взвешенному среднему, где

$$Q = [p]^{-1}$$

— сумма обратных весов непосредственных измерений.

Формулы минимума

Первая формула минимума. Произведение всех членов уравнения ошибок (14.21) слева на вектор V^*P приводит к выражению

$$V^*PAx - v^*Pl = V^*PV$$

или

$$A^*PVx - l^*PV = V^*PV_{\min},$$

где согласно условию ортогональности (14.22) первый член обращается в нуль.

Поэтому

$$V^*PV_{\min} = -l^*PV, \tag{14.25}$$

т. е.

$$[pv^2]_{\min} = -[plv]$$

— первая формула минимума.

Вторая формула минимума. Произведение всех членов уравнения ошибок (14.21) слева на вектор l^*P приводит к соотношению

$$l^*PAx - l^*Pl = l^*PV,$$

где согласно (14.25) правая часть — наименьшая сумма квадратов отклонений. Следовательно,

$$v^*PV_{\min} = l^*Pl - l^*PA\bar{x}, \tag{14.26}$$

т. е.

$$[pv^2]_{\min} = [pll] - [pl]\bar{x} \tag{14.27}$$

— вторая формула минимума.

Третья формула минимума. Подстановка значений $\bar{x}$ из уравнения (14.24) соответственно в выражения (14.26) и (14.27) приводит к третьей формуле минимума

$$V^*PV_{\min} = l^*Pl - l^*PAQAPl, \tag{14.28}$$

т. е.

$$[pv^2]_{\min} = [pll] - \frac{[pl]^2}{[p]}. \tag{14.29}$$

Оценка отдельного измерения

Дисперсия и ошибка отдельного измерения. Матрица начального уравнения A переопределена на величину

$$\alpha = n - 1.$$

Поэтому

$$\sigma_l^2 = d^{-1}V^*PV = \frac{[pv^2]}{n-1}; \quad \sigma_l = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \tag{14.30}$$

— дисперсия и ошибка отдельного измерения.

Оценка $\bar{x}$. Так как

$$\bar{x} = QA^*Pl,$$

или

$$\bar{x} = C^*l, \qquad C^* = QA^*P,$$

то, пользуясь моделью

$$p_{\bar{x}}^{-1} = f^*P^{-1}f, \tag{14.31}$$

находим обратный вес среднего

$$p_{\bar{x}}^{-1}=C^*P^{-1}C=QA^*PP^{-1}PAQ=Q=[p]^{-1}.$$

Следовательно,

$$p_{\bar{x}}=[p]$$

— вес среднего;

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\sigma_l^2Q=\frac{\sigma_l^2}{[p]};\quad \sigma_{\bar{x}}=\sigma_l\sqrt{Q}=\frac{\sigma_l}{\sqrt{[p]}}=\sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}$$

— соответственно дисперсия и ошибка среднего.

Вычисление средних по формуле $\bar{x}=x'+\overline{\delta x}$. Разность уравнений

$$\begin{array}{r} Ax=l \\ -\;\; Ax'=l' \\ \hline A(x-x')=(l-l') \end{array}$$

приводит к уравнению

$$A\delta x=\varepsilon.$$

Так как

$$\delta x=x-x';\qquad \varepsilon=l-l',$$

то

$$\bar{x}=x'+\overline{\delta x};\qquad l=l'+\varepsilon,$$

где x' — условное начало счета («ложный нуль»);
$\overline{\delta x}$ — поправка к x';
l' — приближенный вектор относительно измеренного l;
ε — остаточный вектор.

Различные формы выражения параметров

Матрица кратности величины x. Введем вместо матрицы

$$A^*=[1\ \ 1\ldots1]$$

при x матрицу

$$A^*=[a_1a_2\ldots a_n],$$

где элементы a_i выражают кратность, или частость числа x.

Можно проверить, что если

$$P=\begin{Vmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{Vmatrix},$$

т. е. при неравноточных измерениях, решение уравнения ошибок

$$Ax - l = v \tag{14.32}$$

под условием ортогональности

$$A^* PV = 0$$

приводит к группе формул:

$$\begin{array}{ll}
1)\ \bar{x} = \frac{[pal]}{[paa]}; & 6)\ \sigma_l = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}; \\
2)\ [pav] = 0; & 7)\ \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_l^2}{[paa]}; \\
3)\ [pv^2]_{\min} = [pll] - [pal]\,\bar{x}; & 8)\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_l}{[paa]}; \\
4)\ [pv^2]_{\min} = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]}; & 9)\ p_{\bar{x}}^{-1} = [paa]^{-1}; \\
5)\ \sigma_l^2 = [pv^2]; & 10)\ p_{\bar{x}} = [paa].
\end{array} \tag{14.33}$$

Решение уравнения ошибок под условием ортогональности

$$A^* EV = A^* V = 0,$$

где E — матрица единичного веса, приводит к группе формул

$$\begin{array}{ll}
1)\ \bar{x} = \frac{[al]}{[aa]}; & 6)\ \sigma_l = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}; \\
2)\ [av] = 0, & 7)\ \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_l^2}{[aa]}; \\
3)\ [v^2]_{\min} = [l^2] - [al]\,\bar{x}; & 8)\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_l}{\sqrt{[aa]}}; \\
4)\ [v^2]_{\min} = [l^2[- \frac{[al]}{[aa]}; & 9)\ p_{\bar{x}}^{-1} = [aa]^{-1}; \\
5)\ \sigma_l^2 = \frac{[v^2]}{n-1}; & 10)\ p_{\bar{x}} = [aa],
\end{array} \tag{14.34}$$

при р а в н о т о ч н ы х измерениях частной по отношению к группе формул (14.33).

Если в группе формул (14.33) положить

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1,$$

то будем иметь группу формул:

$$\begin{array}{ll}
1)\ \bar{x} = \frac{[pl]}{[p]}; & 6)\ \sigma_l = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}; \\
2)\ [pv] = 0; & 7)\ \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_l^2}{[p]};
\end{array}$$

$$3)\ [pv^2]=[pl^2]-\frac{[pl]^2}{[p]}; \qquad 8)\ \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_l}{\sqrt{[p]}}; \tag{14.35}$$

$$4)\ [pv^2]_{\min}=]pl^2]-[pl]\,\bar{x}; \qquad 9)\ p_{\bar{x}}^{-1}=[p]^{-1}$$

$$5)\ \sigma_l^2=\frac{[pv^2]}{n-1}; \qquad 10)\ p_{\bar{x}}=[p]$$

при неравноточных измерениях.

И, наконец, если в той же группе (14.33) положить

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=1; \quad p_1=p_2=\ldots=p_n=1,$$

т. е. если коэффициенты начальных уравнений и веса непосредственных измерений нормированы, то получим группу формул

$$1)\ \bar{x}=\frac{[l]}{n}; \qquad 6)\ \sigma_l=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}};$$

$$2)\ [v]=0; \qquad 7)\ \sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma_l^2}{n};$$

$$3)\ [v^2]_{\min}=[l^2[-\frac{[l]^2}{n}; \qquad 8)\ \sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_l}{\sqrt{n}}; \tag{14.36}$$

$$4)\ [v^2]=(l^2)-[l]\,\bar{x}; \qquad 9)\ p_{\bar{x}}^{-1}=n^{-1};$$

$$5)\ \sigma_l^2=\frac{[v^2]}{n-1}; \qquad 10)\ p_{\bar{x}}=n$$

при равноточных измерениях.

Формулы минимума и соотношение Пифагора. Обратимся к формуле

$$[v^2]_{\min}=[l^2]-\frac{[l]^2}{n}.$$

Из этой формулы следует соотношение Пифагора

$$[l^2]=\frac{[l]^2}{n}+[v^2] \tag{14.37}$$

соответственно разложению

$$l=A\bar{x}+v, \tag{14.38}$$

где l — измеренный вектор в пространстве n;

Ax — проекция измеренного вектора l на одномерное пространство;

v — проектирующий вектор, или перпендикуляр, опущенный из конца измеренного вектора l на координатную ось Ox.

Следовательно, в соотношении (14.37) l — гипотенуза, $A\bar{x}$ — большой катет, v — малый катет прямоугольного треугольника.

Пример 1. Обратимся к табл. 7.

Таблица 7

x	v	v^2	v^1	$(v')^2$	v''	$(v'')^2$	$[l^2]$	lv
0	+4,5	20,25	+5,0	25,0	+2,0	4,0	0,0	0
1	+3,5	12,25	+4,0	16,0	+1,0	1,0	1,0	+3,5
2	+2,5	6,25	+3,0	9,0	0,0	0,0	4,0	+5,0
3	+1,5	2,25	+2,0	4,0	−1,0	1,0	9,0	+4,5
4	+0,5	0,25	+1,0	1,0	−2,0	4,0	16,0	+2,0
5	−0,5	0,25	0,0	0,0	−3,0	9,0	25,0	−2,5
6	−1,5	2,25	−1,0	1,0	−4,0	16,0	36,0	−9,0
7	−2,5	6,25	−2,0	4,0	−5,0	25,0	49,0	−17,5
8	−3,5	12,25	−3,0	9,0	−6,0	36,0	64,0	−28,0
9	−4,5	20,25	−4,0	16,0	−7,0	49,0	81,0	−40,5
Σ45	0	82,50	+15,0	85,0	+3,0	145,0	285,0	−82,5
$\overline{X}$ 4,5			−10,0		−28,0			
$\overline{X}'$ 5,0			+5,0		−25,0			
$\overline{X}''$ 2,0								

В таблице приведен натуральный ряд чисел, относительно которого показано, что

$$\overline{x}=4{,}5; \qquad [v]=0;$$

$$[vv]<[v'v']<[v''v''];$$

$$82{,}5<85{,}0<145{,}0,$$

т. е. сумма отклонений от среднего равна нулю и сумма квадратов отклонений от среднего меньше, чем сумма квадратов отклонений от произвольно взятых чисел 5 и 2, не равных среднему.

По данным таблицы имеем:

$$[v^2]=82{,}5; \quad [l^2]=285{,}0; \quad \frac{[l]^2}{n}=\frac{2025}{10}=202{,}5.$$

По формуле минимума

$$[v^2]=[l^2]-\frac{[l]^2}{n}$$

получим $82{,}5=285{,}0-202{,}5$.

В силу соотношения Пифагора

$$l^2\,(Ax)^2+v^2,$$

где

$$[l^2]=l^2=[0,\ 1,\ldots,\ 9]\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\9\end{bmatrix}=285;$$

$$(Ax)^2 = xA^*Ax = 4{,}5 \times [1,\ 1, \ldots, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \times 4{,}5 = 4{,}5 \cdot 10 \cdot 4{,}5 = 202{,}5;$$

$$[v^2] = v^2 = 82{,}5,$$

соблюдается равенство

$$285 = 202{,}5 + 82{,}5$$

соответственно разложению

$$[l^2] = \frac{[l]^2}{n} + [v^2],$$

полученному по формуле минимума.

Таким образом, если формула минимума является исходной, то формула Пифагора служит контрольной и наоборот.

ГЛАВА V

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

§ 15. УРАВНИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Формы связи исходных данных и определяемых величин. Результаты непосредственных измерений

$$l_1,\ l_2,\ldots,l_n, \tag{15.1}$$

сопровождаемые весами

$$p_1,\ p_2,\ldots,p_n, \tag{15.2}$$

могут быть связаны с k определяемыми параметрами

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_k \tag{15.3}$$

n соотношениями линейного

$$a_i x_1 + b_i x_2 + \cdots + g x_k + r_i = q \tag{15.4}$$

и нелинейного вида

$$f_i(x_1,\ x_2,\ldots,x_k) = L_i. \tag{15.5}$$

Метод наименьших квадратов распространяется только на соотношения линейного вида (15.4). Поэтому там, где возникают соотношения нелинейного вида (15.5), последние (в пределах малых изменений аргументов и малых поправок) приводятся к линейному виду (15.4).

Линеаризация нелинейных соотношений. С помощью формулы Тейлора разложения в ряд нелинейная система (15.5) сводится к линейной

$$\begin{gathered} f_i(x_1,\ x_2,\ldots,x_k) = f_i(x'_1,\ x'_2,\ldots,x'_k) + \\ + \frac{\partial f_i}{\partial x'_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x'_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x'_k}\delta x_k = L_i \end{gathered} \tag{15.6}$$

или

$$a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \cdots + g_i\delta x_k = l_i, \tag{15.7}$$

где

$$a_i = \frac{\partial f_i}{\partial x'_1}; \qquad b_i = \frac{\partial f_i}{\partial x'_2};\ldots;\ g_i = \frac{\partial f_i}{\partial x'_k}; \tag{15.8}$$

$$f(x'_1,\ x'_2,\ldots,x'_k) - L_i = l_i. \tag{15.9}$$

Начальное уравнение. Выразим систему (15.7) в матричной форме

$$A\delta x = l, \tag{15.10}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \ldots g_1 \\ a_2 b_2 \ldots g_2 \\ \cdots\cdots \\ a_n b_n \ldots g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1'} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2'} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k'} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1'} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2'} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1'} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2'} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k'} \end{bmatrix} \tag{15.11}$$

— прямоугольная матрица коэффициента указанных систем размера $n \times k$ и ранга k;

$l = [l_1,\ \ l_2, \ldots,\ l_n]$ — вектор свободных членов в пространстве n;

$\delta x = [\delta x_1,\ \ \delta x_2, \ldots, \delta x_k]$ — вектор поправок к вектору

$$x' = [x_1',\ x_2', \ldots, x_k']$$

приближенных значений относительно вектора

$$\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k]$$

искомых параметров в подпространстве k.

Соответственно размерности $n \times k$ матрицы A начальное уравнение (15.10) переопределено на величину

$$d = n - k, \tag{15.12}$$

где n — число строк, равное числу непосредственных измерений;
k — число столбцов, равное числу искомых параметров.

Уравнение ошибок. В силу переопределенности и ошибок измерений начальное уравнение (15.10) приводит к уравнению ошибок

$$A\delta x - l = v, \tag{15.13}$$

где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — вектор отклонений от нулевого вектора $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ в n-мерном пространстве.

Искомые величины. Требуется определить:

1) уравновешенный вектор

$$\bar{x} = \bar{x}' + \overline{\delta x}; \tag{15.14}$$

2) дисперсию отдельного измерения;
3) дисперсию и вес уравновешенного вектора;
4) дисперсию и вес уравновешенного элемента;
5) дисперсию и вес функции уравновешенных элементов.

Условие решения уравнения ошибок. К решению уравнения (15.13) относительно вектора δx приводит условие ортогональности

$$A^* PV = 0, \tag{15.15}$$

согласно которому вектор PV должен быть перпендикулярен ко всем векторам

$$a, \; b, \ldots, g,$$

матрицы A полагая, что

$$P = \begin{Bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & p_n \end{Bmatrix} \qquad (15.16)$$

— весовая матрица непосредственных измерений, образованная из элементов (15.2).

Нормальное уравнение. Подчинив уравнение (15.13) условию (15.15), получим нормальное уравнение

$$A^*PA\delta x - A^*Pl = 0 \qquad (15.17)$$

или

$$N\delta x - L = 0, \qquad (15.18)$$

где матрица

$$N = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] \ldots & [pag] \\ [pab] & [pbb] & [pbg] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ [pag] & [pbg] & [pgg] \end{bmatrix} = A^*PA \qquad (15.19)$$

— квадратная, симметричная, положительно определенная, порядка и ранга k;

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta x_k \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ [pgl] \end{bmatrix} = A^*Pl \qquad (15.20)$$

— соответственно векторы поправок и свободных членов.

Система нормальных уравнений. Соотношение

$$N\delta x = L, \qquad (15.21)$$

полученное из уравнения (15.18), приводит к системе нормальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} [paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + \cdots + [pag]\delta x_k = [pal] \\ [pab]\delta x_1 + [pbb]\delta x_2 + \cdots + [pbg]\delta x_k = [pbl] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [pag]\delta x_1 + [pbg]\delta x_2 + \cdots + [pgg]\delta x_k = [pgl] \end{array}\right\}, \qquad (15.22)$$

где число уравнений равно числу неизвестных.

Определитель $|N|$ матрицы N отличен от нуля и в силу условия

$$A^*PV=0,$$

равносильного условию

$$V^*PV=\min,$$

не может иметь отрицательного значения. Следовательно, система (15.22) — определенная и приводит к однозначной комбинации поправок $\delta x_1, \ldots, \delta x_k$ к приближенным значениям $x'_1, \ldots, x'_k$ относительно искомых параметров

$$\bar{x}_j = x' + \overline{\delta x}.$$

Способы решения системы нормальных уравнений. Существует множество способов решения линейных систем вида (15.22). Из всех способов, описанных в курсах линейной алгебры, особого внимания геодезистов и маркшейдеров заслуживает способ Гаусса последовательного исключения неизвестных и способ Крамера вычисления неизвестных средствами теории определителей. Два эти способа объединяются в одну схему в алгоритмах Гаусса, по которой производятся и уравнительные операции, и оценка точности этих операций.

Способ Гаусса. Процедура решения системы нормальных уравнений (15.22) по способу Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных (при соблюдении контроля вычислений) в результате следующих операций.

Построение нормальной матрицы, окаймленной контрольными элементами. Выразим определитель матрицы A уравнения ошибок

$$Ax - l = v$$

по формуле

$$|A| = |a \cdot b \cdot \ldots \cdot g \cdot l|. \tag{15.23}$$

Введем контрольный вектор

$$s = a + b + \cdots + g + l$$

сомножителем в правую часть формулы (15.23). Получим определитель

$$|A'| = |a \cdot b \ldots g \cdot l \cdot s|.$$

Учитывая веса непосредственных измерений, будем иметь определитель

$$|P^{\frac{1}{2}}A'| = |a\sqrt{p}\; b\sqrt{p} \ldots g\sqrt{p}\, l\sqrt{p}\, g\sqrt{p}\,|$$

единичного веса.

Квадрат определителя

$$|A^{*\prime}PA'| = |a\sqrt{p}\ \ b\sqrt{p} \ldots g\sqrt{p}\ \ l\sqrt{p}\ \ g\sqrt{p}\,|^2, \tag{15.24}$$

вычисляемый по правилу: «каждый вектор на самого себя и на все остальные», приводит к определителю дважды окаймленной матрицы

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} [paa] & [pab] & [pac] & \ldots & [pag] & [pal] & [pas] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] & \ldots & [pbg] & [pbl] & [pbs] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] & \ldots & [pcg] & [pcl] & [pcs] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [pag] & [pbg] & [pcg] & \ldots & [pgg] & [pgl] & [pgs] \\ \hline [pal] & [pbl] & [pcl] & \ldots & [pgl] & [pll] & [pls] \\ [pas] & [pbs] & [pcs] & \ldots & [pgs] & [pls] & [pss] \end{array}\right] \tag{15.25}$$

системы нормальных уравнений (15.22).

Матрица (15.25) содержит все элементы для решения системы (15.22) под текущим и заключительным контролем.

Преобразование матрицы нормальной системы в эквивалентную. Обратимся к матрице

$$\begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{bmatrix} \tag{15.26}$$

3-го порядка.

По теореме Якоби определитель матрицы не изменится, если какую-либо строку (столбец) умножить (разделить или сложить, вычесть) с какой-либо другой строкой (столбцом).

Умножим первую строку матрицы (15.26) на числа

$$\frac{[pab]}{[paa]}; \qquad \frac{[pac]}{[paa]}$$

и вычтем эти числа соответственно из 2-й и 3-й строк. В результате получим матрицу

$$\begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ & [pbb\cdot 1] & [pbc\cdot 1] \\ & [pbc\cdot 1] & [pcc\cdot 1] \end{bmatrix}, \tag{15.27}$$

полагая, что

$$[pbb\cdot 1] = [pbb] - \frac{[pab]^2}{[paa]}; \quad [pbc\cdot 1] = [pbc] - \frac{[pab]\,[pac]}{[paa]};$$

$$[pcc\cdot 1] = [pcc] - \frac{[pac]^2}{[paa]}.$$

Затем умножим вторую строку матрицы (15.27) на число

$$\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}$$

и произведение вычтем из третьей строки.

В результате преобразования будем иметь матрицу

$$\begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ & [pbb\cdot 1] & [pbc\cdot 1] \\ & & [pcc\cdot 2], \end{bmatrix} \tag{15.28}$$

полагая, что

$$[pcc\cdot 2] = [pcc] - \frac{[pac]^2}{[paa]} - \frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}.$$

Матрица (15.28) по отношению к исходной (15.26) — треугольная, эквивалентная, не равная ей, но значение определителей этих матриц одно и то же.

Подобным образом приводится к треугольному виду

$$N_1 = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] \ldots [pag] & [pal] & [pas] \\ & [pbb\cdot 1] \ldots [pbg\cdot 1] & [pbl\cdot 1] & [pbs\cdot 1] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & [pgg\cdot (k-1)] & [pgl\cdot (n-k)] & [pgs\cdot (n-k)] \\ & & [pll\cdot k] & [pls\cdot k] \\ & & & [pss\cdot k] \end{bmatrix} \tag{15.29}$$

матрица (15.25) и соответственно нормальная система (15.22) переходит в эквивалентную

$$\left.\begin{aligned} [paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + \ldots + [pag]\delta x_k &= [pal] \\ [pbb\cdot 1]\delta x_2 + \ldots + [pbg\cdot 1]\delta x_k &= [pbl\cdot 1] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ [pgg\cdot (k-1)]\delta x_k &= [pg\cdot (k-1)] \end{aligned}\right\}. \tag{15.30}$$

Из треугольной матрицы (15.30) следует элиминационная

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{[pab]}{[paa]} \ldots \frac{[pag]}{[paa]} & \frac{[pal]}{[paa]} \\ & 1 \quad \ldots \frac{[pbg\cdot 1]}{pbb\cdot 1]} & \frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ & & 1 \; \frac{[pgl\cdot (k-1)]}{[pgg\cdot (k-1)]} \end{bmatrix} \tag{15.31}$$

относительно элиминационной системы

$$\left.\begin{aligned} \overline{\delta x_1} &= -\frac{[pab]}{[paa]}\overline{\delta x_2} - \ldots - \frac{[pag]}{[paa]}\overline{\delta x_k} + \frac{[pal]}{[paa]} \\ \overline{\delta x_2} &= -\frac{[pbg\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\overline{\delta x_k} + \frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \overline{\delta x_k} &= \frac{[pgl\cdot (k-1)]}{[pgg\cdot (k-1)]} \end{aligned}\right\}, \tag{15.32}$$

откуда в обратной последовательности находятся координаты искомого вектора поправок $\delta\bar{x}$.

Основная часть описанной процедуры сводится к построению элементов эквивалентной матрицы (15.29). Каждый из этих элементов выражает сокращенный символ совокупности арифметических операций, однообразных по своему характеру. Так, например, квадратичные элементы

$$[pbb\cdot 1],\ [pcc\cdot 2],\ [pdd\cdot 3],\ldots,[pll\cdot k],\ [pss\cdot k]$$

суть строки:

$$[pbb\cdot 1]=[pbb]-\frac{[pab]^2}{[paa]};$$

$$[pcc\cdot 2]=[pcc]-\frac{[pac]^2}{[paa]}-\frac{[pbc\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]};$$

$$[pdd\cdot 3]=[pdd]-\frac{[pad]^2}{[paa]}-\frac{[pbd\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}-\frac{[pcd\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]};$$

. . . .

$$[pll\cdot k]=[pll]-\frac{[pal]^2}{[paa]}-\frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}-\cdots-\frac{[pgl\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]};$$

$$[pss\cdot k]=[pss]-\frac{[pas]^2}{[paa]}-\frac{[pbs\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}-\cdots-\frac{[pgs\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]}.$$

Симметричные элементы

$$[pbc\cdot 1],\ [pcd\cdot 2],\ [pdl\cdot 3];\ldots,[pls\cdot k]$$

— сокращенные символы строк:

$$[pbc\cdot 1]=[pbc]-\frac{[pab]\,[pac]}{[paa]};$$

$$[pcd\cdot 2]=[pcd]-\frac{[pac]\,[pad]}{[paa]}-\frac{[pbc1]\,[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]};$$

$$[pdl\cdot 3]=[pal]-\frac{[pad]\,[pal]}{[paa]}-\frac{[pbd\cdot 1]\,[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}-\frac{[pcd\cdot 2]\,[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]};$$

. . . .

$$[pls\cdot k]=[pls]-\frac{[pal]\,[pas]}{[paa]}-\frac{[pbl\cdot 1]\,[pbs\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}-\cdots-\frac{[pgl\cdot(k-1)]\,[pgs\cdot(k-1)]}{[pgg\cdot(k-1)]}.$$

Алгоритм Гаусса. Схема последовательной редукции квадратной матрицы к треугольной, а затем к элиминационной выражает алгоритм Гаусса, т. е. систему однообразных операций, выполняемых по одному общему правилу, согласно которому сложное действие заменяется совокупностью простых действий. Начиная со второй строки треугольной матрицы, каждый элемент этой матрицы сопровождается индексом, показывающим, какое по счету неизвестное исключается из данной системы нормальных уравнений. Последний индекс равен общему числу неизвестных.

Элементы треугольной матрицы, так же как элементы нормальной матрицы, — скалярные произведения одноименных и разноименных векторов. Все скалярные произведения в преобразованной форме выражают разности между *скалярными произведениями векторов нормальной матрицы и последующими их значениями*, полученными в процессе преобразований.

Разложение нормальной матрицы на произведение двух треугольных. Пусть

$$N=\begin{bmatrix}[paa] & [pab]\\ [pab] & [pbb]\end{bmatrix},$$

$$N_1=\begin{bmatrix}[paa] & [pab]\\ & [pbb\cdot 1]\end{bmatrix},\qquad N_2=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{[pab]}{[paa]}\\ & 1\end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$N_1^*N_2=N_1,$$

т. е. что

$$\begin{bmatrix}[paa] & \\ [pab] & [pbb\cdot 1]\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \dfrac{[pab]}{[paa]}\\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[paa] & [pab]\\ [pab] & [pbb]\end{bmatrix}.$$

Пусть

$$N'=\left[\begin{array}{cc|c}[paa] & [pab] & [pal]\\ [pab] & [pbb] & [pbl]\\ \hline [pal] & [pbl] & [pll]\end{array}\right]$$

— матрица, окаймленная свободными членами и контрольным элементом.

Тогда

$$N'=N_1^{*\prime}N_2'=\begin{bmatrix}[paa] & & \\ [pab] & [pbb\cdot 1] & \\ [pal] & [pbl\cdot 1] & [pbl\cdot 2]\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \dfrac{[pab]}{[paa]} & \dfrac{[pal]}{[paa]}\\ & 1 & \dfrac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}\\ & & 1\end{bmatrix}.$$

Если

$$N''=\left[\begin{array}{cc|c|c}[paa] & [pab] & [pal] & [pas]\\ [pab] & [pbb] & [pbl] & [pbs]\\ \hline [pal] & [pbl] & [pll] & [pls]\\ \hline [pas] & [pbs] & [pls] & [pss]\end{array}\right]$$

— матрица, окаймленная свободными членами и контрольными элементами, то

$$N'''=N_1^{*''}N_2''=\begin{bmatrix}[paa] & & & \\ [pab] & [pbb\cdot 1] & & \\ [pal] & [pbl\cdot 1] & [pll\cdot 2] & \\ [pas] & [pbs\cdot 1] & [pls\cdot 2] & [pss\cdot 2]\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \frac{[pab]}{[paa]} & \frac{[pal]}{[paa]} & \frac{[pas]}{[paa]} \\ & 1 & \frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \frac{[pbs\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} \\ & & 1 & \frac{[pbs\cdot 2]}{[pll\cdot 2]} \\ & & & 1\end{bmatrix}=$$

$$=N_1^{*''}N_2''=N''.$$

Контрольные формулы построения матрицы нормальной системы. Если построена матрица

$$\left[\begin{array}{c|c|c} N & \begin{matrix}[pal]\\ [pbl]\\ \cdots\\ [pgl]\end{matrix} & \begin{matrix}[pas]\\ [pbs]\\ \cdots\\ [pgl]\end{matrix} \\ \hline [pal]\,[pbl]\ldots[pgl] & [pll] & [pls] \\ \hline [pas]\,[pbs]\ldots[pgs] & [pls] & [pss]\end{array}\right],$$

то последние строка и столбец содержат элементы **текущего контроля**.

На пересечении двух строк и столбцов расположены элементы, между которыми имеет место **заключительное** равенство

$$[pll]=[pls]=[pss],$$

по которому контролируется взаимная связь между всеми элементами матрицы N.

Контрольные формулы треугольного преобразования матрицы N. Эквивалентная матрица

$$N_1^*=\left[\begin{array}{l|l} \begin{matrix}[paa] & & & \\ [pab] & [pbb\cdot 1] & & \mathrm{I} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [pag] & [pbg\cdot 1] & \ldots & [pgg\cdot(k-1)]\end{matrix} & \mathrm{II} \\ \hline [pal]\,[pbl\cdot 1]\ldots[pgl\cdot(k-1)] & [pll\cdot k] \\ [pas]\,[pbs\cdot 1]\ldots[pgs\cdot(k-1)] & [pls\cdot k]\,[pss\cdot k]\end{array}\right]$$

в последней строке первой ее части содержит **элементы текущего контроля**; вторая ее часть приводит к формуле **заключительного контроля**

$$[pll\cdot k]=[pls\cdot k]=[pss\cdot k].$$

Произведение диагональных элементов, расположенных в первой части матрицы, выражает о п р е д е л и т е л ь

$$|N| = [paa][pbb\cdot 1]\ldots[pgg\cdot(k-1)]$$

матрицы N.

Такой определитель равен квадрату объема косоугольного параллелепипеда, построенного на векторах матрицы начальной системы A в подпространстве k.

Схема Гаусса решения системы нормальных уравнений. Пользуясь соотношением

$$N = N_2^* N_1$$

и ограничиваясь системой нормальных уравнений с шестью неизвестными, для случая равноточных измерений получаем схему Гаусса определения этих неизвестных (табл. 8).

Учебная схема Гаусса. Эквивалентная матрица

$$N_1 = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] & [pal] & [pas] \\ & [pbb\cdot 1] & [pbc\cdot 1] & [pbl\cdot 1] & [pbs\cdot 1] \\ & & [pcc\cdot 2] & [pcl\cdot 2] & [pcs\cdot 2] \\ & & & [pll\cdot 3] & [pls\cdot 3] \\ & & & & [pss\cdot 3] \end{bmatrix}$$

в нормированной форме

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{[pab]}{[paa]} & \frac{[pac]}{[paa]} & \frac{[pal]}{[paa]} & \frac{[pas]}{[paa]} \\ & 1 & \frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \frac{[pbs\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} \\ & & 1 & \frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} & \frac{[pcs\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} \\ & & & 1 & \frac{[pls\cdot 3]}{[pll\cdot 3]} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

приводит к схеме Гаусса (табл. 9) решения системы нормальных уравнений с тремя неизвестными.

Пример решения трех нормальных уравнений:

$$\begin{array}{r} 3\delta x_1 + 2\delta x_2 + \delta x_3 - 3{,}1 = 0 \\ 2\delta x_1 + 4\delta x_2 + 2\delta x_3 - 6{,}6 = 0 \\ \delta x_1 + 2\delta x_2 + 3\delta x_3 - 11{,}7 = 0 \\ \hline \end{array}$$

$\sum\ 6\delta x_1 + 8\delta x_2 + 6\delta x_3 - 21{,}4 = 0$ — контрольное уравнение по схеме Гаусса (табл. 10).

Таблица 8

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	l	s
$[aa]$							
$[ab]$	$[bb]$						
$[ac]$	$[bc]$	$[cc]$					
$[ad]$	$[bd]$	$[cd]$	$[dd]$				
$[ae]$	$[be]$	$[ce]$	$[de]$	$[ee]$			
$[af]$	$[bf]$	$[cf]$	$[df]$	$[ef]$	$[ff]$		
$[al]$	$[bl]$	$[cl]$	$[dl]$	$[el]$	$[fl]$	$[ll]$	
$[as]$	$[bs]$	$[cs]$	$[ds]$	$[es]$	$[fs]$	$[ls]$	$[ss]$
$\boxed{x_1}$	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ae]}{[aa]}$	$-\frac{[af]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$
$[aa]$	$\boxed{x_2}$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
$[ab]$	$[bb\cdot 1]$	$\boxed{x_3}$	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cs]}{[cc\cdot 2]}$
$[ac]$	$[bc\cdot 1]$	$[cc\cdot 2]$	$\boxed{x_4}$	$-\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$
$[ad]$	$[bd\cdot 1]$	$[cd\cdot 2]$	$[dd\cdot 3]$	$\boxed{x_5}$	$-\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}$	$-\frac{[el\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}$	$-\frac{[es\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}$
$[ae]$	$[be\cdot 1]$	$[ce\cdot 2]$	$[de\cdot 3]$	$[ee\cdot 4]$	$\boxed{x_6}$	$-\frac{[fe\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}$	$-\frac{[fs\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}$
$[af]$	$[bf\cdot 1]$	$[cf\cdot 2]$	$[df\cdot 3]$	$[ef\cdot 3]$	$[ff\cdot 5]$	$\boxed{vv}$	
$[al]$	$[bl\cdot 1]$	$[cl\cdot 2]$	$[dl\cdot 3]$	$[el\cdot 4]$	$[fl\cdot 5]$	$[ll\cdot 6]$	$\boxed{D}$
$[as]$	$[bs\cdot 1]$	$[cs\cdot 2]$	$[ds\cdot 3]$	$[es\cdot 4]$	$[fs\cdot 5]$	$[ls\cdot 6]$	$[ss\cdot 6]$

Таблица 9

δx_1	δx_2	δx_3	l	s
$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$
-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$
	$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$
	$-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[as]}{[aa]}$
	$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bl\cdot 1]$	$[bs\cdot 1]$
	-1	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
		$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$
		$-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[as]}{[aa]}$
		$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bcl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
		$[cc\cdot 2]$	$[cl\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$
		-1	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$[ll]$	$[ls]$
$-\frac{[ac]}{[aa]}\,\delta x_3$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,\delta x_3$	δx_3	$-\frac{[al]\,[al]}{[aa]}$	$-\frac{[al]\,[as]}{[aa]}$
$-\frac{[ab]}{[aa]}\,\delta x_2$	δx_2		$-\frac{[bl\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
δx_1			$-\frac{[cl\cdot 2]\,[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]\,[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
			$[ll\cdot 3]$	$[ls\cdot 3]$

Схема квадратных корней. Легко проверить, что матрица

$$N=\begin{bmatrix}[aa] & [ab]\\ [ab] & [bb]\end{bmatrix}$$

Таблица 10

δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль
3,0 —1	2,0 —0,667	1,0 —0,333	—3,1 1,003	2,9 —0,967	—0,967
	4,0 —1,334	2,0 —0,666	—6,6 2,066	1,4 —1,934	
	2,666 —1	1,334 —0,500	—4,534 1,701	—0,534 0,200	—0,534 0,201
		3,0 —0,333 —0,667	—11,7 1,033 2,267	—5,7 —0,967 0,267	
		2,000 —1	—8,400 4,200	—6,400 3,200	—6,400 3,200
			50,94 —3,202 —7,712 —35,280	29,54 2,998 —0,907 —26,880	
			4,746	4,751	
δx_1=—0,10	δx_2=—0,40 0,27	δx_3=4,20 —2,10 —1,40	1,70 1,03		
—0,6	—3,2	25,2	—21,4	0	Контроль

равна произведению двух треугольных

$$\begin{bmatrix} \sqrt{[aa]} & \\ \dfrac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} & \sqrt{[bb\cdot 1]} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{[aa]} & \dfrac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} \\ & \sqrt{[bb\cdot 1]} \end{bmatrix}$$

Точно так же матрица

$$N=\begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [al] \\ [ab] & [bb] & [bl] \\ [al] & [bl] & [ll] \end{bmatrix}$$

сводится к произведению двух треугольных

$$\begin{bmatrix} \sqrt{[aa]} & & \\ \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} & \sqrt{[bb\cdot 1]} & \\ \frac{[al]}{\sqrt{[aa]}} & \frac{[bl\cdot 1]}{\sqrt{[bb\cdot 1]}} & \sqrt{[ll\cdot 2]} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{[aa]} & \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} & \frac{[al]}{\sqrt{[aa]}} \\ & \sqrt{[bb\cdot 1]} & \frac{[bl\cdot 1]}{\sqrt{[bb\cdot 1]}} \\ & & \sqrt{[ll\cdot 2]} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, легко понять структуру построения схемы квадратных корней, выражаемой табл. 11.

Таблица 11

	δx_1	δx_2	δx_3	l	s
	$[aa]$	$-[ab]$ $[bb]$	$-[ac]$ $-[bc]$ $[cc]$	$-[al]$ $-[bl]$ $-[cl]$ $[ll]$	$[as]$ $-[bs]$ $-[cs]$ $-[ls]$
C_1	$\sqrt{[aa]}$	$-\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}$	$-\frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}}$	$-\frac{[al]}{\sqrt{[aa]}}$	$-\frac{[as]}{\sqrt{[aa]}}$
C_2		$\sqrt{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bs\cdot 1]}{\sqrt{[bb\cdot 1]}}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{\sqrt{[bb\cdot 1]}}$	$-\frac{[bs\cdot 1]}{\sqrt{[bb\cdot 1]}}$
C_3			$\sqrt{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cl\cdot 2]}{\sqrt{[cc\cdot 2]}}$	$-\frac{[cs\cdot 2]}{\sqrt{[cc\cdot 2]}}$
				$[ll\cdot 3]$	$-[ls\cdot 3]$

Такую схему предложил Холецкий, она же известна как схема Банахевича (краковяны) и по существу является разновидностью схемы Гаусса.

При этом

$$\delta x_3 = -\frac{[cl\cdot 2]}{\sqrt{[cc\cdot 2]}}; \quad \delta x_2 = \frac{C_{24} + C_{23}\delta x_3}{\sqrt{[bb\cdot 1]}}; \quad \delta x_1 = \frac{C_{14} + C_{13}\delta x_2 + C_{12}\delta x_3}{\sqrt{[aa]}}.$$

Способ Крамера. Обращение нормального уравнения

$$N\delta x = L \tag{15.40}$$

приводит к вектору поправок

$$\delta x = QL, \tag{15.41}$$

где

$$Q=N^{-1}=\begin{bmatrix} Q_{11}Q_{12}\ldots Q_{1k} \\ Q_{21}Q_{22}\ldots Q_{2k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Q_{k1}Q_{k2}\ldots Q_{kk} \end{bmatrix} \tag{15.42}$$

— обратная матрица относительно матрицы N, квадратная, симметричная, обладающая свойством

$$NQ=QN=E. \tag{15.43}$$

Элементы

$$Q_{ij}=\frac{A_{ij}}{|N|}=\frac{(-1)^{i+j}M}{|N|} \tag{15.44}$$

матрицы (15.42) — частные от деления алгебраических дополнений, т. е. миноров, взятых со своими знаками, определителя матрицы N на определитель этой матрицы $|N|$.

Формула (15.41) в явном выражении приводит к координатам

$$\begin{aligned} \overline{\delta x_1}&=[pal]Q_{11}+[pbl]Q_{12}+\cdots+[pgl]Q_{1k}, \\ \overline{\delta x_2}&=[pal]Q_{21}+[pbl]Q_{22}+\cdots+[pgl]Q_{2k}, \\ &\cdot\ \cdot \\ \overline{\delta x_k}&=[pal]Q_{k1}+[pbl]Q_{k2}+\cdots+[pgl]Q_{kk} \end{aligned} \tag{15.45}$$

вектора поправок (14.31), любая из которых определяется по строке

$$\overline{\delta x_j}=[pal]Q_{j1}+[pbl]Q_{j2}+\cdots+[pgl]Q_{jk},\quad j=1,\ 2,\ldots,k \tag{15.46}$$

вне связи с другими поправками.

В правой части (15.46) известны свободные члены нормальной системы, но остаются неизвестными элементы Q_{ij} обратной матрицы Q.

Формула Крамера построения обратной матрицы. Если порядок нормальной матрицы не превышает трех, то построение обратной матрицы производится по формуле Крамера

$$Q_{ij}=\frac{|N|'}{|N|}, \tag{15.47}$$

пользуясь соотношением

$$NQ=E,$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} Q_{11}Q_{12}Q_{13} \\ Q_{21}Q_{22}Q_{23} \\ Q_{31}Q_{32}Q_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Разложением по первой строке матрицы N находим определитель

$$|N|=[paa]\begin{vmatrix}[pbb] & [pbc]\\ [pbc] & [pcc]\end{vmatrix}-[pab]\begin{vmatrix}[pab] & [pbc]\\ [pac] & [pcc]\end{vmatrix}+[pac]\begin{vmatrix}[pab] & [pbb]\\ [pac] & [pbc]\end{vmatrix}.$$

Затем последовательной заменой столбцов матрицы N' первым столбцом матрицы E получим элементы обратной матрицы

$$Q_{11}=\frac{\begin{vmatrix}1 & [pab] & [pac]\\ 0 & [pbb] & [pbc]\\ 0 & [pbc] & [pcc]\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{\begin{vmatrix}[pbb] & [pbc]\\ [pbc] & [pcc]\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{A_{11}}{|N|};$$

$$Q_{12}=\frac{\begin{vmatrix}[paa] & 1 & [pac]\\ [pab] & 0 & [pbc]\\ [pac] & 0 & [pcc]\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{\begin{vmatrix}[pab] & [pbc]\\ [pac] & [pcc]\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{A_{12}}{|N|};$$

$$Q_{13}=\frac{\begin{vmatrix}[paa] & [pab] & 1\\ [pab] & [pbb] & 0\\ [pac] & [pbc] & 0\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{\begin{vmatrix}[pab] & [pbb]\\ [pac] & [pbc]\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{A_{13}}{|N|}.$$

Далее заменой второго и третьего столбцов матрицы N' вторым столбцом единичной матрицы E будем иметь элементы обратной матрицы

$$Q_{22}=\frac{\begin{vmatrix}[paa] & 0 & [pac]\\ [pab] & 1 & [pbc]\\ [pac] & 0 & [pcc]\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{\begin{vmatrix}[paa] & [pac]\\ [pac] & [pcc]\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{A_{22}}{|N|};$$

$$Q_{23}=\frac{\begin{vmatrix}[paa] & [pab] & 0\\ [pab] & [pbb] & 1\\ [pac] & [pbc] & 0\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{\begin{vmatrix}[pab] & [pbb]\\ [pac] & [pbc]\end{vmatrix}}{|N|}=\frac{A_{23}}{|N|}.$$

Наконец, заменив третий столбец матрицы N' третьим столбцом единичной матрицы E, найдем элемент обратной матрицы

$$Q_{33}=\frac{\begin{matrix}[paa] & [pab] & 0\\ [pab] & [pbb] & 0\\ [pac] & [pbc] & 1\end{matrix}}{|N|}=\frac{\begin{matrix}[paa] & [pab]\\ [pab] & [pbb]\end{matrix}}{|N|}=\frac{A_{33}}{|N|}.$$

Так как матрица N симметрична, то матрица Q также симметрична. Следовательно,

$$Q_{12}=Q_{21},\quad Q_{13}=Q_{31},\quad Q_{23}=Q_{32}$$

и, таким образом, надо полагать, что все элементы обратной матрицы найдены.

Если порядок матрицы N свыше трех, то описанный путь построения обратной матрицы связан с громоздкими вычислениями. Между тем описанный способ обобщается нижеследующей моделью.

Построение обратной матрицы по формуле Крамера в матричной форме. Так как

$$NQ=QN=E,$$

то построение матрицы Q сводится к решению уравнения

$$NQ=E$$

относительно Q.

Блочная матрица. Построим матрицу

$$\begin{bmatrix} N & E \\ E & Q \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} [paa] & [pab] & [pac] & 1 & 0 & 0 \\ [pab] & [pbb] & [pbc] & 0 & 1 & 0 \\ [pac] & [pbc] & [pcc] & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ 0 & 1 & 0 & Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ 0 & 0 & 1 & Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{array}\right] \tag{15.48}$$

и сведем ее к виду

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} [paa] & [pab] & [pac] & a_1 & & \\ & [pbb] & [pbc] & b_1 & b_2 & \\ & & [pcc] & c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ & b_2 & c_2 & & Q_{22} & Q_{23} \\ & & c_3 & & & Q_{33} \end{array}\right], \tag{15.49}$$

где

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ b_1 & b_2 & \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выразим матрицу (15.49) в эквивалентной форме

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} [paa] & [pab] & [pac] & a_1 & & \\ & [pbb\cdot 1] & [pbc\cdot 1] & [b_1\cdot 1] & [b_2\cdot 1] & \\ & & [pcc\cdot 2] & [c_1\cdot 2] & [c_2\cdot 2] & [c_2\cdot 2] \\ \hline a_1 & [b_1\cdot 1] & [c_1\cdot 2] & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ & [b_2\cdot 1] & [c_2\cdot 2] & & Q_{22} & Q_{23} \\ & & [c_3\cdot 2] & & & Q_{33} \end{array}\right],$$

а затем в элиминационной форме

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \frac{[pab]}{[pbb]} & \frac{[pac]}{[pbb]} & \frac{a_1}{[paa]} & & \\
 & 1 & \frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \frac{[b_1\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \frac{[b_2\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \\
 & & 1 & \frac{[c_1\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} & \frac{[c_2\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} & \frac{[c_3\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} \\
\hline
a_1 & [b_1\cdot 1] & [c_1\cdot 2] & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\
 & [b_2\cdot 1] & [c_2\cdot 2] & & Q_{22} & Q_{23} \\
 & & [c_3\cdot 2] & & & Q_{33}
\end{array}\right].$$

В такой форме строки и столбцы побочных подматриц

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & \frac{a_1}{[paa]} & & \\
 & & & \frac{[b_1\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \frac{[b_2\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & \\
 & & & \frac{[c_1\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} & \frac{[c_2\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} & \frac{[c_3\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} \\
\hline
a_1 & [b_1\cdot 1] & [c_1\cdot 2] & & & \\
 & [b_2\cdot 1] & [c_2\cdot 2] & & & \\
 & & [c_3\cdot 2] & & &
\end{array}\right]$$

не зависимы друг от друга, поэтому остаются независимыми результаты произведений строк нижней подматрицы на столбцы верхней подматрицы и наоборот.

На этом основании произведения одноименных и разноименных строк и столбцов побочных подматриц приводят к элементам обратной матрицы по главной диагонали

$$Q_{11}=\frac{a_1^2}{[paa]}+\frac{[b_1\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[c_1\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]};$$

$$Q_{22}=\frac{[b_2\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[c_2\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]};$$

$$Q_{33}=\frac{[c_3\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]}$$

и по обе стороны главной диагонали

$$Q_{12}=\frac{[b_1\cdot 1]\,[b_2\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[c_1\cdot 2]\,[c_2\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]};$$

$$Q_{21}=\frac{[b_2\cdot 1]\,[b_1\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[c_2\cdot 2]\,[c_1\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]};$$

$$Q_{31}=\frac{[c_3\cdot 2]\,[c_1\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]};$$

$$Q_{13}= \qquad \frac{[c_1\cdot 2]\,[c_3\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]};$$

$$Q_{23}= \qquad \frac{[c_2\cdot 2]\,[c_3\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]};$$

$$Q_{32}= \qquad \frac{[c_3\cdot 2]\,[c_2\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}.$$

Из формулы

$$Q_{ij}=\frac{A_{ij}}{|N|}=\frac{(-1)^{i+j}M}{|N|}$$

следует, что знак диагонального и недиагонального элементов плюс, если число $(-1)^{i+j}$ четное, и минус, если оно нечетное.

Контроль построения обратной матрицы. Если соблюдается равенство

$$Q_{ij}=Q_{ji}$$

и соотношение

$$NQ=QN=E,$$

то матрица Q получена верно.

Если определитель единичной матрицы равен

$$1\pm\varepsilon,$$

где $\varepsilon>10^{-4}$, то ошибки округлений превышают допустимые.

Схема Гаусса построения обратной матрицы 4-го порядка

В табл. 12 приведена схема построения обратной матрицы 4-го порядка.

Последняя строка табл. 12 содержит формулы заключительного контроля

$$1)\ [ll\cdot 4]=[ls\cdot 4];$$

$$2)\ N_{44}Q_{44}=Q_{44}N_{44}=E_{44}; \qquad 3)\ |E_{44}|=1,$$

первая из которых выражает значение $[v^2]=\min$.

Если контрольные соотношения соблюдаются, то табл. 12 приводит к поправкам

$$\overline{\delta x_4}=-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]};$$

$$\overline{\delta x_3}=-\frac{[cd\cdot 3]}{[cc\cdot 2]}\quad\overline{\delta x_4}-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]};$$

$$\overline{\delta x_2}=-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\quad\overline{\delta x_3}-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\quad\overline{\delta x_2}=\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]};$$

$$\overline{\delta x_1}=-\frac{[ab]}{[aa]}\quad\overline{\delta x_2}-\frac{[ac]}{[aa]}\quad\overline{\delta x_3}-\frac{[ad]}{[aa]}\quad\overline{\delta x_4}-\frac{[al]}{[aa]}$$

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$
	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$
	$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$
	$-\frac{[ab]^2}{[aa]}$	$-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]\,[}{[aa]}$
	$[bb \cdot 1]$	$[bc \cdot 1]$	$[bd \cdot 1]$	$[bl \cdot 1]$
		$-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bl \cdot 1}{[bb \cdot}$
		$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$
		$-\frac{[ac]^2}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]\,[}{[aa]}$
		$-\frac{[bc \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bc \cdot 1]\,[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bc \cdot 1]\,[}{[bb \cdot}$
		$[cc \cdot 2]$	$[cd \cdot 2]$	$[cl \cdot 2]$
			$-\frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$	$-\frac{[cl \cdot 2}{[cc \cdot 2}$

Таблица 12

	$[as]$	$a_1 = 1$		
—	$-\frac{[as]}{[aa]}$	$-\frac{a_1}{[aa]}$		
	$[bs]$	b_1	$b_2 = 1$	
$al]$	$-\frac{[ab]\,[as]}{[aa]}$	$-\frac{[ab]}{[aa]}a_1$	$-\frac{[ab]}{[aa]}a_2$	
	$[b\cdot s\cdot 1]$	$[b_1\cdot 1]$	$[b_2\cdot 1] = 0$	
$]$ $1]$	$-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[b_1\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[b_2\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	
	$[cs]$	c_1	c_2	$c_3 = 1$
$al]$	$-\frac{[ac]\,[as]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}a_1$	$-\frac{[ac]}{[aa]}a_2$	$-\frac{[ac]}{[aa]}a_3$
$l\cdot 1]$ $1]$	$-\frac{[bc\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[b_1\cdot 1]$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[b_2\cdot 1]$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[b_3\cdot 1]$
	$[cs\cdot 2]$	$[c_1\cdot 2]$	$[c_2\cdot 2]$	$[c_3\cdot 2] = 1$
$2]$ $2]$	$-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[c_1\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[c_2\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[c_3\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$

			$[dd]$	$[dl]$	$[ds]$
			$-\frac{[ad]^2}{[aa]}$	$-\frac{[ad]\,[dl]}{[aa]}$	$-\frac{[ad]\,[as]}{[aa]}$
			$-\frac{[bd\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
			$-\frac{[cd\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]^2}$	$-\frac{[cd\cdot 2][cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cd\cdot 2][cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
			$[dd\cdot 3]$	$[dl\cdot 3]$	$[ds\cdot 3]$
				$-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$
				$[ll]$	$[ls]$
				$-\frac{[al]^2}{[aa]}$	$-\frac{[al]\,[as]}{[aa]}$
$a_1 = 1$	$[b_1\cdot 1]$	$[c_1\cdot 2]$	$[d_1\cdot 3]$	$-\frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
	$[b_2\cdot 1] = 1$	$[c_2\cdot 2]$	$[d_2\cdot 3]$	$-\frac{[c\cdot l\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cl\cdot 2][cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
		$[c_3\cdot 2] = 1$	$[d_3\cdot 3]$	$-\frac{[dl\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[dl\cdot 3][ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$
			$[d_4\cdot 3] = 1$	$[ll\cdot 4]$	$[ls\cdot 4]$

d_1	d_2	d_3	$d_4 = 1$
$-\frac{[ad]}{[aa]}a_1$	$-\frac{[ad]}{[aa]}a_2$	$-\frac{[ad]}{[aa]}a_3$	$-\frac{[ad]}{[aa]}a_4$
$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[b_1\cdot 1]$	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[b_2\cdot 1]$	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[b_3\cdot 1]$	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[b_4\cdot 1]$
$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[c_1\cdot 2]$	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[c_2\cdot 2]$	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[c_3\cdot 2]$	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[c_4\cdot 2]$
$[d_1\cdot 3]$	$[d_2\cdot 3]$	$[d_3\cdot 3]$	$[d_4\cdot 3] = 1$
$-\frac{[d_1\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[d_2\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[d_3\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[d_4\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$
Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}
	Q_{22}	Q_{23}	Q_{24}
		Q_{33}	Q_{34}
			Q_{44}

$$N_{44}Q_{44} = Q_{44}N_{44} = E_{44}; \ | E_{44} | = 1$$

и к приближенным значениям $x'_1,...,x'_4$ искомых параметров $\overline{x}_1,...,\overline{x}_4$ по способу Гаусса, а также к тем же поправкам

$$\overline{\delta x}_j=[al]Q_{j1}+[bl]Q_{j2}+[cl]Q_{j3}+[dl]Q_{j4}$$

по правилу Крамера.

Контроль решения системы нормальных уравнений производится подстановкой вектора

$$\overline{\delta x}=[\overline{\delta x}_1,\ \overline{\delta x}_2,\ \overline{\delta x}_3,\ \overline{\delta x}_4]$$

уравновешенных величин в нормальное уравнение

$$N\overline{\delta x}-L=0.$$

§ 16. ОЦЕНКА УРАВНИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Формулы минимума

Формула первая. Умножение всех членов уравнения ошибок

$$A\overline{\delta x}-l=v \tag{16.1}$$

слева на вектор V^*P приводит к соотношению

$$V^*PA\overline{\delta x}-V^*Pl=V^*PV \tag{16.2}$$

или

$$\overline{\delta x}^*A^*PV-l^*PV=V^*PV.$$

Так как

$$A^*PV=0,$$

то

$$V^*PV_{\min}=-l^*PV, \tag{16.3}$$

или

$$[pv^2]_{\min}=-[plv]$$

— первая формула минимума в скалярном выражении.

Формула вторая. Умножение всех членов уравнения ошибок (16.1) слева на вектор l^*P приводит к соотношению

$$l^*PA\overline{\delta x}-l^*Pl=l^*PV.$$

Так как

$$l^*PV=-V^*PV_{\min},$$

то

$$V^*PV_{\min}=l^*Pl-l^*PA\overline{\delta x}, \tag{16.4}$$

или

$$[pv^2]_{\min}=[pll]-[pal]\overline{\delta x}_1-[pbl]\overline{\delta x}_2-\cdots-[pgl]\overline{\delta x}_k$$

— вторая формула минимума в билинейном выражении.

Формула третья. Подстановка вектора

$$\overline{\delta x}=QA^*Pl$$

в уравнение (16.4) приводит к третьей формуле минимума

$$V^*PV_{\min}=l^*Pl-l^*PAQA^*Pl, \tag{16.5}$$

из которой следует квадратичная форма минимума

$$\begin{aligned}[pv^2]_{\min}=[pll]-[pal]^2Q_{11}-2\,[pal]\,[pll]Q_{12}-\cdots-2\,[pal]\,[pag]Q_{1k}-\\ -[pbl]^2Q_{22}-\cdots-2\,[pbl]\,[pcl]-\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -[pgl]^2Q_{kk}.\end{aligned}$$

Построим блочную матрицу

$$\begin{bmatrix} N & l^*PA \\ A^*Pl & V^*PV \end{bmatrix}$$

и выразим ее в эквивалентной форме

$$\begin{bmatrix} N & l^*PA \\ & [pllk] \end{bmatrix}.$$

В результате получим формулу минимума

$$V^*PV=[pv^2]_{\min}=[pll]-\frac{[pal]^2}{[paa]}-\frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb1]}-\cdots-\frac{[pgl\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]} \tag{16.6}$$

в каноническом выражении.

Геометрическое содержание формулы минимума в каноническом выражении. Из формулы (16.6) следует разложение

$$[pl^2]=\frac{[pal]^2}{[paa]}+[\frac{pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}+\cdots+\frac{[pgl\cdot\,(k-1)]^2}{[pgg\cdot\,(k-1)]}+[pv^2],$$

т. е. соотношение Пифагора

$$l^2=\overline{l}^2+\overline{v}^2,$$

где $l^2=[pl^2]$ — квадрат длины измеренного вектора l в n-мерном пространстве;

$$\overline{l}^2=\frac{[pal]^2}{[paa]}+\frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}+\cdots+\frac{[pgl\cdot\,(k-1)]^2}{[pgg\cdot\,(k-1)]}$$

— квадрат проекции измеренного вектора на подпространство k; $\overline{v}^2=[pv^2]$ — квадрат длины перпендикуляра, опущенного из конца измеренного вектора l на подпространство k.

Дисперсия и ошибка отдельного измерения. Переопределенность матрицы уравнений ошибок (16.1) выражается разностью

$$d = n - k$$

между числом строк и столбцов этой матрицы.

Следовательно,

$$\sigma_l^2 = d^{-1} V^* P V_{\min} = \frac{[pv^2]}{n-k} \tag{16.7}$$

— **дисперсия** отдельного измерения и соответственно

$$\sigma_l = \sqrt{d^{-1} V^* P V} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} \tag{16.8}$$

— **ошибка** отдельного измерения.

Обратный вес вектора $\bar{x}$. Так как

$$\overline{\delta x} = QA^* Pl;$$

$$\bar{x} = x' + \delta x = x' + QA^* Pl = x' + C^* l,$$

где $C^* = QA^* P$ — коэффициент при измеренном векторе

$$l = [l_1,\ l_2, \ldots, l_n],$$

и принимая во внимание, что координаты вектора

$$\bar{x} = [\bar{x}_1,\ \bar{x}_2, \ldots,\ \bar{x}_k]$$

взаимозависимы, по формуле

$$\bar{p}_{\bar{x}}^{-1} = C^* P^{-1} C$$

получим

$$\bar{p}_{\bar{x}}^{-1} = QA^* P P^{-1} PAQ = QA^* PAQ = Q.$$

Следовательно, обратная матрица $Q = N^{-1}$ — весовая матрица

$$Q = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \ldots Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} \ldots Q_{2k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Q_{k1} & Q_{k2} \ldots Q_{kk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{p_1} & \frac{r_{12}}{\sqrt{p_1 p_2}} \ldots \frac{r_{1k}}{\sqrt{p_1 p_k}} \\ \frac{r_{21}}{\sqrt{p_2 p_1}} & \frac{1}{p_2} \ldots \frac{r_{2k}}{\sqrt{p_2 p_k}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{r_{k1}}{\sqrt{p_k p_1}} & \frac{r_{k2}}{\sqrt{p_k p_2}} \ldots \frac{1}{p_k} \end{Bmatrix} \tag{16.9}$$

вектора $\bar{x}$.

Вес вектора $\bar{x}$. Так как

$$Q = N^{-1},$$

то

$$\bar{p}_{\bar{x}}=N$$

— вес вектора $\bar{x}$. Следовательно, матрица нормальных уравнений N — весовая матрица вектора $\bar{x}$.

Веса координат вектора $\bar{x}$. Из уравнения (16.9) находим, что

$$\bar{p}_{\bar{x}_j}^{-1}=Q_{jj}$$

— обратный вес j-й координаты вектора $\bar{x}$. Следовательно,

$$\bar{p}_{\bar{x}_j}=\frac{1}{Q_{jj}}$$

— вес j-й координаты вектора $\bar{x}$.

Дисперсия вектора $\bar{x}$. Так как $\bar{D}=\Sigma\bar{P}^{-1}\Sigma$, т. е.

$$\bar{D}_x=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 r_{12}\ldots\sigma_1\sigma_k r_{1k} \\ \sigma_2\sigma_1 r_{21} & \sigma_2^2 \quad \ldots\sigma_2\sigma_k r_{2k} \\ \cdots & \cdots \\ \sigma_k\sigma_1 r_{k1} & \sigma_k\sigma_2 r_{k2}\ldots \quad \sigma_k^2 \end{pmatrix}, \tag{16.10}$$

то $\bar{D}$ — дисперсия вектора $\bar{x}$ в подпространстве k в точке положения $\bar{x}$.

Дисперсия и ошибка координат вектора $\bar{x}$. Из соотношения

$$\sigma_l^2 P^{-1}=\sigma_l^2 Q$$

следует, что

$$\sigma_{\bar{x}_j}^2=\sigma_l^2 Q_{jj}; \qquad \sigma_{\bar{x}_j}=\sigma_l\sqrt{Q_{jj}} \tag{16.11}$$

— дисперсия и ошибка j-й координаты вектора $\bar{x}$, где δ_l^2, δ_l — дисперсия и ошибка отдельного измерения.

Корреляционная матрица вектора $\bar{x}$. Из формулы

$$C=P\bar{P}^{-1}P$$

следует корреляционная матрица

$$C=\begin{pmatrix} 1 & r_{12}\ldots r_{1k} \\ r_{21} & 1\ \ldots r_{2k} \\ \cdots & \cdots \\ r_{k1} & r_{k2}\ldots\ 1 \end{pmatrix}$$

координат вектора $\bar{x}$.

Коэффициент корреляции. Так как

$$Q_{\bar{x}} = \bar{p}_{\bar{x}}^{-1},$$

то

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}}\sqrt{Q_{jj}}} \tag{16.12}$$

— коэффициент корреляции между любой парой координат $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$ вектора $\bar{x}$.

Оценка линейной функции по вектору $\bar{x}$. Если

$$F = f^*\bar{x}, \tag{16.13}$$

где

$$f^* = [f_1,\ f_2, \dots f_k]$$

— вектор постоянных, то

$$P_F^{-1} = f^*Qf \tag{16.14}$$

— обратный вес;

$$\sigma_F^2 = \sigma_l^2 f^*Qf \tag{16.15}$$

— дисперсия;

$$\sigma_F = \sigma_l \sqrt{f^*Qf} \tag{16.16}$$

— ошибка функции (16.13).

Оценка линейной функции от $\bar{x}$ по схеме Гаусса. Форма

$$P_F^{-1} = f^*Qf \tag{16.17}$$

— обратная по отношению к форме

$$P_F = f^*Nf. \tag{16.18}$$

Построим матрицу

$$\begin{bmatrix} N & f \\ f^* & -f_{k+1} \end{bmatrix}, \tag{16.19}$$

где $-f_{k+1} = 0$, и выразим эту матрицу в эквивалентной форме

$$\begin{bmatrix} N & f \\ & -[f_{k+1}k] \end{bmatrix}. \tag{16.20}$$

В конце главной диагонали получим формулу обратного веса в каноническом выражении

$$P_F^{-1} = -[f_{k+1}\cdot k] = -\left(f_{k+1} - \frac{f_1^2}{[paa]} - \frac{[f_2\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} - \dots - \frac{[f_k\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]}\right) =$$
$$= -\frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} + \dots + \frac{[f_k\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]}, \tag{16.21}$$

где

$$[f_2\cdot 1]=f_2-\frac{[pab]}{[paa]}f_1;$$

$$[f_3\cdot 2]=f_3-\frac{[pac]}{[paa]}f_1-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[f_2\cdot 1];$$

$$[f_4\cdot 3]=f_4-\frac{[pad]}{[paa]}f_1-\frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[f_2\cdot 1]-\frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}[f_3\cdot 2]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

— значения, входящие в уравнение (16.21).

Преобразование матрицы (16.19) к виду (16.20) равносильно преобразованию квадратичной формы обратного веса

$$\begin{aligned}P_F^{-1}&=f^*Qf=\\&=f_1^2Q_{11}+2f_1f_2Q_{12}+\cdots+2f_1f_kQ_{1k}+\\&\qquad+f_2^2Q_{22}+\cdots+2f_2f_kQ_{2k}+\\&\qquad\qquad\cdots\cdots\\&\qquad\qquad+f_k^2Q_{kk}\end{aligned}\tag{16.22}$$

к каноническому виду (16.21).

Умножив дисперсию отдельного измерения σ_l^2 на значения (16.21), получим дисперсию функции (16.13) в гауссовой форме

$$\sigma_F^2=\sigma_l^2\,[f_{k+1}\cdot k].$$

Угол поворота осей прямоугольной системы координат до совпадения с главными осями поверхности 2-го порядка. Так как

$$\operatorname{tg}2\alpha_{ij}=\frac{2Q_{ij}}{Q_{ii}-Q_{jj}},\tag{16.23}$$

то $\alpha_{ij}=\operatorname{arctg}2\alpha_{ij}$ — угол поворота между осями.

Если матрицу системы нормальных уравнений выразить в индексной форме

$$N=[a_{ij}],$$

то формула

$$\operatorname{tg}2\alpha_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}}\tag{16.24}$$

приводит к тому же углу поворота α_{ij}.

Параметрическая модель обработки геодезических построений

Теоретически весь процесс преобразований, описанный в этой главе, производится по следующим схемам:

Схема уравнительных операций

1) $A\delta x=l$;
2) $A\delta x-l=v$;
3) $A^*PV=0$;
4) $A^*PA\delta x-A^*Pl=0$;
5) $\overline{\delta x}=QA^*Pl$;
6) $\bar{x}=\bar{x}'+\overline{\delta x}$.

Схема оценки уравнительных операций

7) $A\delta x - l = v$;

8) $V^*PV_{\min} = -l^*PV$;

9) $V^*PV_{\min} = l^*Pl - l^*PA\overline{\delta x}$;

10) $V^*PV_{\min} = l^*Pl - l^*PAQA^*Pl$;

11) $\mu^2 = d^{-1}V^*PV, \ d = n - k$;

12) $p_{\bar{x}}^{-1} = Q = N^{-1}$;

13) $p_{\bar{x}_j}^{-1} = Q_{jj}$;

14) $\mu_{\bar{x}_j}^2 = \mu^2 Q_{jj}$;

15) $F = f\bar{x}$;

16) $P_F^{-1} = f^*Qf$;

17) $\mu_F^2 = \mu^2 f^*Qf$.

Назовем цепь последовательно связанных формул 1—17 *П*-моделью. Практическим отражением *П*-модели является схема Гаусса. В этой схеме получают числовые ответы все пункты *П*-модели. По такой схеме обрабатываются маркшейдерско-геодезические системы малыми вычислительными средствами (логарифмической линейкой, арифмометром, карманным электронно-счетным аппаратом), ею используются во многих инженерно-технических дисциплинах, и она находит широкое распространение в математической статистике. Таким образом, схема Гаусса и ее теоретическое основание в форме *П*-модели обладают той общностью, при которой разрешается множество частных по своему характеру и различных по содержанию физико-технических и статистических задач. При этом *П*-модель не зависит от какого-либо стохастического распределения случайных величин, возникающих при измерениях и наблюдениях. Но по данным *П*-модели можно построить подходящую вероятностную модель (*В*-модель), описывающую картину распределения такого ряда величин. Содержание *П*-модели (и соответственно алгоритма Гаусса) обладает весьма важной особенностью: схема *П*-модели служит программой для прогнозирования явлений по экспериментальным данным, подобно тому как *П*-модель в теории ошибок служит основанием для предрасчета линейных, угловых, линейно-угловых и прочих смещений (деформаций) по данным геодезических измерений.

В этом плане предиктором *П*-модели служит прямоугольная матрица *A* переопределенной системы начальных уравнений. От структуры этой матрицы зависят конечные результаты, к которым автоматически приводит математическая программа *П*-модели.

Если матрица *A* весьма косоугольная, то заведомо следует ожидать сомнительные результаты, так как в этом случае векторы, образующие матрицу *A*, «почти» линейно зависимы. Следовательно, в таком случае существенно важную роль играют соотношения между весами измерений и коэффициентами исходной матрицы *A* *П*-модели. Взаимная связь между ними отражается в матрице системы нормальных уравнений и в конечном итоге на точности искомых параметров.

Роль весов и коэффициентов переопределенной системы линейных уравнений. В принципе, к обсуждению вопроса о весах приводят положения акад. А. А. Маркова. В практическом плане числовое значение весов выражают в различных вариантах, и степень влияния этих значений на результаты искомых величин рассматривают с разных точек зрения. В плане *П*-модели следует обратить внимание на рекомендации Ланцоша [22].

По соображениям Ланцоша при обработке системы линейных уравнений методом наименьших квадратов может возникнуть ситуация, при которой заданные уравнения недостаточно с б а л а н с и р о в а н ы. В этом случае каждое уравнение

$$a_i x_1 + b_i x_2 + \cdots + g_i x_k = l_i$$

перед возведением в квадрат следует умножить на множитель β_i. Этот множитель можно использовать для того, чтобы избежать опасности, при которой некоторые уравнения войдут в сумму квадратов отклонений с большим и малым весами.

Если вес какого-либо отдельного уравнения слишком мал, то это значит, что данное уравнение сравнительно с другими уравнениями практически не участвует в образовании системы, которая приводит к нормальному уравнению

$$A^*PAx = A^*Pl.$$

Если же вес слишком велик, то тем самым придается преувеличенное значение одной части информации за счет всех остальных частей, что ведет даже к худшему виду недостаточной определенности, практически исключая все другие ценные части информации.

Наилучшее равновесие получается, если множители β_i подбираются так, чтобы сумма квадратов каждой строки, не считая правой части, равнялась бы примерно единице. При таком нормировании каждому уравнению придается одинаковая значимость, избегая двух крайностей: излишнего или недостаточного внимания к одному какому-либо уравнению.

Нормирование по строкам и столбцам прямоугольной матрицы не может быть выполнено одновременно. Выравнивание длины столбцов нарушает равновесие длины строк. Требуется несколько повторных подгонок строк и столбцов с тем, чтобы суммы квадратов по ним были достаточно выравнены. При этом нет необходимости стремиться к большой точности, так как отклонение от некоторой средней длины несущественно. Двойное выравнивание гарантирует, что неадекватное выравнивание уравнений и неизвестных косоугольность системы не ухудшает.

§ 17. ПРИМЕР ОБРАБОТКИ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

1. Схема нивелирной сети показана на рис. 17.

2. Высоты марок: $M18 = 183{,}506$ м, $M22 = 192{,}353$ м, $M96 = 191{,}890$ м.

3. Определяемые величины — высоты реперов $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$.

4. Длины ходов, суммы превышений, веса измерений приведены в табл. 13.

5. Система начальных уравнений

1) $x_3 - 183{,}506 = 6{,}125;$

2) $x_4 - x_3 = 8{,}320;$

3) $x_4 - 192{,}353 = 5{,}580;$

4) $x_2 - x_3 = 1{,}368;$

5) $x_2 - x_1 = 4{,}694;$

6) $x_4 - x_1 = 11{,}652;$

7) $x_2 - 191{,}890 = -0{,}905;$

8) $x_4 - x_2 = 6{,}944;$

9) $x_1 - 191{,}890 = -5{,}585.$

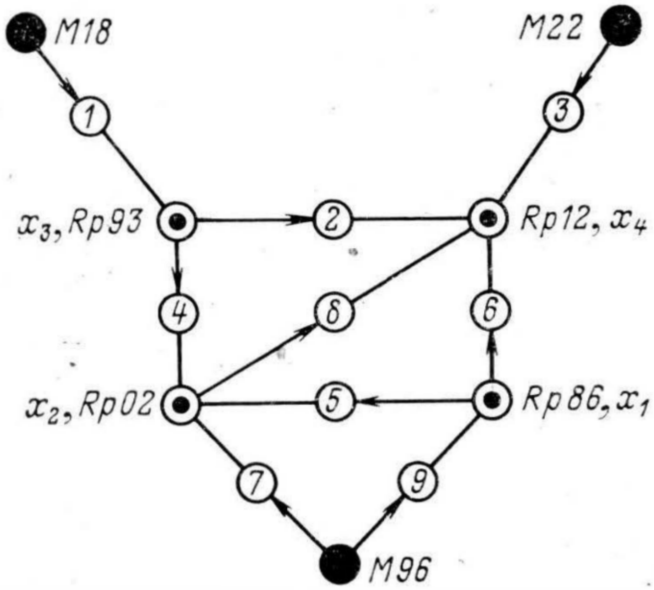

Рис. 17.

6. Приближенные значения определяемых параметров

1) $x_1' = 186{,}297$ м;

2) $x_2' = 190{,}990$ м;

3) $x_3' = 189{,}627$ м;

4) $x_4' = 197{,}941$ м.

Таблица 13

№ ходов	s, км	Σh, м	$p = \frac{15}{s}$
1	12,6	6,125	1,2
2	16,4	8,320	0,9
3	14,1	5,580	1,1
4	10,0	1,368	1,5
5	16,3	4,694	0,9
6	20,4	11,652	0,7
7	12,0	−0,905	1,2
8	13,2	6,944	1,1
9	15,4	−5,585	1,0

Числовые данные заимствованы из книги [4].

7. **Свободные члены системы начальных уравнений в остатках** $l=l'-x'$

1) $l_1=189{,}627-183{,}506-6{,}125=-4$ мм;
2) $l_2=197{,}941-189{,}627-8{,}320=-6$;
3) $l_3=197{,}941-192{,}353-5{,}580=8$;
4) $l_4=190{,}990-189{,}627-1{,}368=-5$;
5) $l_5=190{,}990-186{,}297-4{,}694=-1$;
6) $l_6=197{,}941-186{,}297-11{,}652=-8$;
7) $l_7=190{,}990-191{,}890+0{,}905=5$;
8) $l_8=197{,}541-190{,}990-6{,}944=7$;
9) $l_9=186{,}297-191{,}890+5{,}585=-8$.

8. **Система уравнений ошибок**

$$A\delta x-l=v$$

$$\begin{array}{lccccr}
1) & & & +\delta x_3 & & +4=v_1; \\
2) & & & -\delta x_3 & +\delta x_4 & +6=v_2; \\
3) & & & & +\delta x_4 & -8=v_3; \\
4) & & +\delta x_2 & -\delta x_3 & & +5=v_4; \\
5) & -\delta x_1 & +\delta x_2 & & & +1=v_5; \\
6) & -\delta x_1 & & & +\delta x_4 & +8=v_6; \\
7) & & +\delta x_2 & & & -5=v_7; \\
8) & & -\delta x_2 & & +\delta x_4 & -7=v_8; \\
9) & +\delta x_1 & & & & +8=v_9.
\end{array}$$

9. **Матрица системы уравнения ошибок**

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
A_{9,4}= & \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

10. **Эффективность матрицы** $A_{9,4}$:

$$d=n-k=9-4=5.$$

11. **Дважды расширенные матрицы**

$$A \text{ и } N=A^*PA$$

p.	a]	b]	c]	d]	l]	s]
1,2	0	0	1	0	—4	—3
0,9	0	0	—1	1	—6	—6
1,1	0	0	0	1	8	9
1,5	0	1	—1	0	—5	—5
0,9	—1	1	0	0	—1	—1
0,7	—1	0	0	1	—8	—8
1,2	0	1	0		5	6
1,1	0	—1	0	1	7	7
1,0	1	0	0	0	—8	—7
[pa	2,6	—0,9	0	—0,7	—1,5	—0,5
[pb	0	4,7	—1,5	—1,1	—10,1	—8,9
[pc	0	0	3,6	—0,9	8,1	9,3
[pd	0	0	0	3,8	5,5	6,6
[pl					353,1	355,1
[ps						—

12. Схема Гаусса решения уравнения $Nx=L$ и построения матрицы Q приведена в табл. 14.

13. Контроль решения системы нормальных уравнений:

$$
\begin{array}{c}
2{,}6\overline{\delta x_1}-0{,}9\overline{\delta x_2}+0\overline{\delta x_3}-0{,}7\overline{\delta x_4}-1{,}5 \\
-0{,}9\overline{\delta x_1}+4{,}7\overline{\delta x_2}-1{,}5\overline{\delta x_3}-1{,}1\overline{\delta x_4}-10{,}1 \\
0\overline{\delta x_1}-1{,}5\overline{\delta x_2}+3{,}6\overline{\delta x_3}-0{,}9\overline{\delta x_4}+8{,}1 \\
0{,}7\overline{\delta x_1}-1{,}1\overline{\delta x_2}-0{,}9\overline{\delta x_3}+3{,}8\overline{\delta x_4}+5{,}5 \\
\hline
+\overline{\delta x_1}+1{,}2\overline{\delta x_2}+1{,}2\overline{\delta x_3}+1{,}4\overline{\delta x_4}+2{,}0=-0{,}02
\end{array}
$$

Контроль построения Q:

$$NQ=E;$$

$$
\begin{bmatrix}
2{,}6 & -0{,}9 & 0 & -0{,}7 \\
-0{,}9 & 4{,}7 & -1{,}5 & -1{,}1 \\
0 & -1{,}5 & 3{,}6 & 0{,}9 \\
0{,}7 & -1{,}1 & 0{,}9 & 3{,}8
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
0{,}489 & 0{,}167 & 0{,}110 & 0{,}164 \\
0{,}167 & 0{,}346 & 0{,}187 & 0{,}176 \\
0{,}110 & 0{,}187 & 0{,}398 & 0{,}168 \\
0{,}164 & 0{,}176 & 0{,}168 & 0{,}383
\end{bmatrix}
=
$$

$$
=\begin{bmatrix}
1 & & & \\
 & 1 & & \\
 & & 1 & \\
 & & & 1
\end{bmatrix} \text{ с точностью до } 0{,}001
$$

Таблица 14

δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	l	s	Q_{I}	Q_{II}	Q_{III}	Q_{IV}
2,60 —1	—0,90 0,346	0 0	—0,70 0,269	—1,5 0,577	—0,5 0,19	1 —0,385			
	4,70 —0,31	—1,50 0	—1,10 —0,24	—10,10 —0,52	—8,90 —0,17	0 0,346	1 0		
	4,39 —1	—1,50 0,342	—1,34 0,306	—10,62 2,420	—9,07 2,04	0,346 —0,079	1 —0,228		
		3,60 0 —0,51	—0,90 0 —0,46	8,10 0 —3,62	9,30 0 —3,02	0 0 0,118	0 0 0,342		
		3,09 —1	—1,36 0,440	4,48 —1,451	6,28 —2,00	0,118 —0,038	0,342 —0,110	1 —0,324	
			3,80 —0,18 —0,41 —0,60	5,50 —0,39 —3,25 1,97	6,60 —0,14 —2,78 2,76	0 0,269 0,106 0,052	0 0 0,306 0,150	0 0 0 0,440	
			2,61 —1	3,83 —1,468	6,44 —2,45	0,427 —0,164	0,456 —0,175	0,440 —0,168	1 0,384
				353,10 —0,86 —25,70 —6,50 —5,62	355,10 —0,98 —21,95 —9,11 —9,45	0,485	0,167 0,346	0,110 0,187 0,398	0,164 0,176 0,168 0,387
0,62	1,25 0,44	—2,10 —0,71 0	—1,47 —0,65 —0,46 —0,40	+314,42	314,31				

15. Решение системы нормальных уравнений по формуле Крамера

$$\overline{\delta x} = Q\,(A^* P l):$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\delta x_1} \\ \overline{\delta x_2} \\ \overline{\delta x_3} \\ \overline{\delta x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,487 & 0,167 & 0,110 & 0,164 \\ 0,167 & 0,346 & 0,187 & 0,176 \\ 0,110 & 0,187 & 0,398 & 0,168 \\ 0,164 & 0,176 & 0,168 & 0,383 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,5 \\ -10,1 \\ 8,1 \\ 5,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,62 \\ -1,26 \\ 2,09 \\ 1,44 \end{bmatrix}$$

16. Уравновешенные значения высот реперов

$$\bar{x} = x' + \overline{\delta x}:$$

$$1)\ \bar{x}_1 = 186\,297 + 0{,}6 = \underline{\underline{186\,297{,}6}}\ \text{мм};$$

$$2)\ \bar{x}_2 = 190\,990 + 1{,}2 = \underline{\underline{190\,991{,}2}}\ \text{мм};$$

$$3)\ \bar{x}_3 = 189\,627 - 2{,}1 = \underline{\underline{189\,624{,}9}}\ \text{мм};$$

$$4)\ \bar{x}_4 = 197\,941 - 1{,}5 = \underline{\underline{197\,935{,}5}}\ \text{мм}.$$

17. Непосредственное определение

$$[pv^2]_{\min}$$

приведено в табл. 15.

Таблица 15

№ п/п	a	b	c	d	l	v	p	$v' = v\sqrt{p}$
1			−2,10		−4	6,10	1,2	6,69
2			2,10	−1,47	−6	−5,37	0,9	5,09
3				−1,47	8	6,53	1,1	6,85
4		1,25	2,10		−5	−1,65	1,5	2,02
5	−0,62	1,25			−1	−0,37	0,9	0,35
6	−0,62			−1,47	−8	−10,09	0,7	8,43
7		1,25			5	6,25	1,2	6,85
8		−1,25		−1,47	7	4,28	1,1	4,50
9	0,62				−8	−7,38	1,0	7,38
							$[pv^2]_{\min} = 314{,}5$	

18. Соблюдение условий ортогональности

$$A^*PV = 0:$$

$$\begin{array}{r} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} & & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & -1 \\ & 1 & 1 & \\ -1 & 1 & & \\ -1 & & & -1 \\ & 1 & & \\ & -1 & & -1 \\ 1 & & & \end{array}\right| \end{array}
\cdot
\begin{array}{c} p \\ \left\|\begin{array}{c} 1{,}2\\0{,}9\\1{,}1\\1{,}5\\0{,}9\\0{,}7\\1{,}2\\1{,}1\\1{,}0 \end{array}\right\| \end{array}
\cdot
\begin{array}{c} v \\ \left|\begin{array}{r} -6{,}10\\-5{,}37\\6{,}53\\-1{,}65\\-0{,}37\\-10{,}09\\6{,}25\\4{,}48\\-7{,}38 \end{array}\right| \end{array}
=
\begin{array}{c} pv \\ \left|\begin{array}{r} -7{,}32\\-4{,}83\\7{,}18\\-2{,}48\\-0{,}33\\-7{,}06\\7{,}50\\4{,}71\\-7{,}38 \end{array}\right| \end{array}$$

$$[pav] = -0{,}2;\ \ [pbv] = 0{,}0;\ \ [pcv] = 0;\ \ [pdv] = 0.$$

19. Определение $[pv^2]=\min$ по формулам:

скалярной — $V^*PV_{\min}=l^*PV=[plv]$

$$\begin{array}{cccc} p & l & v & plv \\ \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}9 \\ 1{,}1 \\ 1{,}5 \\ 0{,}9 \\ 0{,}7 \\ 1{,}2 \\ 1{,}1 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} \cdot & \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ +8 \\ -5 \\ -1 \\ -8 \\ +5 \\ +7 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot & \begin{bmatrix} -6{,}10 \\ -5{,}37 \\ +6{,}53 \\ -1{,}65 \\ -0{,}37 \\ -10{,}09 \\ +6{,}25 \\ +4{,}28 \\ -7{,}38 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 29{,}28 \\ 29{,}98 \\ 57{,}44 \\ 12{,}40 \\ 0{,}33 \\ 56{,}48 \\ 37{,}50 \\ 32{,}97 \\ 59{,}04 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[plv]=314{,}4,$$

канонической —

$$V^*PV_{\min}=[pv^2]_{\min}=[pll\cdot 4]=[pls\cdot 4]=314{,}4.$$

20. Ошибка единицы веса непосредственного измерения

$$\sigma_l=\sqrt{d^{-1}V^*PV}=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}=\sqrt{\frac{314{,}4}{9-4}}=\pm 7{,}9 \text{ мм}.$$

21. Веса уравновешенных элементов

$$p_{\overline{x}_1}=\frac{1000}{487}=2{,}0;$$

$$p_{\overline{x}_2}=\frac{1000}{346}=2{,}9;$$

$$p_{\overline{x}_3}=\frac{1000}{398}=2{,}5;$$

$$p_{\overline{x}_4}=\frac{1000}{384}=2{,}6.$$

22. Ошибки уравновешенных элементов

$$\sigma_{\overline{x}_1}=\sigma_l\sqrt{Q_{11}}=7{,}9\cdot 0{,}487=\pm 4 \text{ мм};$$

$$\sigma_{\overline{x}_2}=\sigma_l\sqrt{Q_{22}}=7{,}9\cdot 0{,}346=\pm 3 \text{ мм};$$

$$\sigma_{\overline{x}_3}=\sigma_l\sqrt{Q_{33}}=7{,}9\cdot 0{,}398=\pm 3 \text{ мм};$$

$$\sigma_{\overline{x}_4}=\sigma_l\sqrt{Q_{44}}=7{,}9\cdot 0{,}384=\pm 3 \text{ мм};$$

23. Коэффициенты корреляций

$$r_{ij}=\frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}}\sqrt{Q_{jj}}};$$

$$r_{11}=1; \quad r_{12}=0{,}6; \quad r_{13}=0{,}5; \quad r_{14}=0{,}6 \text{ и т. д.}$$

24. Корреляционная матрица

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ & 1 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ & & 1 & 0{,}6 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

25. Обратные веса функций (разностей высот):

а) $\bar{x}_3-\bar{x}_1$; б) $\bar{x}_4-\bar{x}_2$;

$$P_f^{-1}=f^*Qf;$$

а) $p_a^{-1}=Q_{11}-2Q_{13}+Q_{33}=0{,}487-0{,}220+0{,}398=\underline{\underline{0{,}665}}$;

б) $p_б^{-1}=Q_{22}-2Q_{24}+Q_{44}=0{,}346-0{,}352+0{,}383=\underline{\underline{0{,}377}}$.

Способ Эрмита ортогонального проектирования

Операторы проектирования. Обратимся к первой части параметрической модели:

$$1)\ Ax=l; \qquad 3)\ A^*PV=0;$$
$$2)\ Ax-l=v; \qquad 4)\ A^*PAx-A^*Pl=v;$$
$$5)\ \bar{x}=QAPl.$$

Подставим в уравнение ошибок 2 вместо вектора x вектор $\bar{x}$ из уравнения 5. Получим у р а в н е н и е п о п р а в о к

$$6)\ AQA^*Pl-l=-V$$

или

$$7)\ (E-AQA^*P)\,l=V.$$

В скобках имеем разность двух операторов: е д и н и ч н о г о, матрица которого диагональная

$$\begin{Bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots\ 1 \end{Bmatrix}$$

порядка n, и Эрмита P, матрица которого также диагональная

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

того же порядка n, называемая эрмитовской матрицей, или матрицей проектирования на оси прямоугольной системы координат.

Число осей определяется размерностью матрицы Q_{kk}, входящей в матрицу Эрмита

$$A_{nk}Q_{kk}A_{kn}P_{nn},$$

и равно числу единиц k по главной диагонали. Число же нулей по этой диагонали составляет $d=n-k$.

Свойства операторов E и P. Любая целая положительная степень операторов E и P оставляет матрицы этих операторов без изменения. Так, в частности,

$$E^2=E;$$

$$P^2=(AQA^*P)^2=AQA^*P\cdot AQA^*P=AQA^*P.$$

Произведение cP, где c — вещественная постоянная — также эрмитовская матрица.

Если два подпространства R и S взаимно ортогональны, то

$$P_RP_S=P_SP_R=0.$$

Если при этом

$$P=P_R+P_S,$$

то

$$P^2=(P_R+P_S)(P_R+P_S)=P_R^2+P_RP_S+P_SP_R+P_S^2=P_R+P_S=P.$$

Если подпространство S составляет часть подпространства R, то разность

$$P=P_R-P_S$$

— также матрица проектирования.

Перепишем уравнение поправок в операторной форме

$$8)\ El-Pl=EV.$$

В такой форме первый член El выражает тождественное преобразование и в геометрическом смысле означает, что оператор E проектирует вектор l на оси прямоугольной системы координат в n-мерном пространстве так, что длина вектора l остается неизменной.

Во втором члене оператор P, проектируя тот же вектор l на оси той же системы координат, уменьшает длину вектора l.

Следовательно, уравнение 8 приводит к разложению

$$9)\ El = Pl + EV$$

в ортогональном базисе, в котором l — измеренный вектор в пространстве n, Pl — ортогональная проекция этого вектора на подпространство k, EV — перпендикуляр, опущенный из конца измеренного вектора l на гиперплоскость K.

В силу разложения 9 имеет место соотношение Пифагора

$$10)\ l^2 = \overline{l}^2 + \overline{v}^2$$

в прямоугольном треугольнике, к которому приводят преобразования по методу наименьших квадратов.

Но соотношение Пифагора 10 следует из формулы минимума

$$11)\ V^*PV_{\min} = l^*Pl - l^*PAQA^*Pl,$$

полученной во второй части параметрической модели.

Действительно, из этой формулы имеем

$$l^*Pl = l^*PAQA^*Pl + V^*PV_{\min},$$

т. е.

$$[pl^2] = L^*PL + [pv^2]_{\min},$$

где

$$P = A_{nk}Q_{kk}A_{kn}P_{nn}$$

— оператор Эрмита ортогонального проектирования вектора $l^*Pl = [pl^2]$ на подпространство k,

$$L^* = [p_1l_1 \dots p_nl_n]; \qquad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l \vdots \\ {}_n \end{bmatrix}$$

— векторы.

Поэтому значение

$$[pv^2]_{\min} = [pl^2] - L^*PL_{\text{ср}}$$

в параметрическом способе можно получить по данным непосредственных измерений, не прибегая ни к составлению системы нормальных уравнений, ни к решению такой системы по схеме Гаусса.

Дисперсия ортогонального проектирования по способу Эрмита. Положим, что

$$U = E_{nn} - A_{nk}Q_{kk}A_{kn}P_{nn}.$$

Тогда

$$SpU = \mathrm{Sp}(E_{nn} - A_{nk}Q_{kk}A_{kn}P_{nn}) = \mathrm{Sp}E_{nn} - \mathrm{Sp}A_{nk}Q_{kk}A_{kn}P_{nn},$$

где

$$\mathrm{Sp}E_{nn}=n; \quad \mathrm{Sp}A_{nk}Q_{kk}A_{kn}P_n=\mathrm{Sp}Q_{kk}A_{kn}P_{nn}A_{nk}=k.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Sp}U=n-k,$$

т. е.

$$d=n-k,$$

что выражает разность между числом строк и столбцов матрицы A_{nk}. Поэтому, пользуясь значением

$$V^*PV_{\min}=[pv^2],$$

получаем дисперсию

$$\sigma_l^2=d^{-1}V^*PV_{\min}=\frac{[pv^2]}{n-k}$$

и ошибку

$$\sigma_l=\sqrt{d^{-1}V^*PV_{\min}}=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}$$

отдельного измерения, не пользуясь схемой Гаусса.

Пример. По исходным данным построения нивелирной сети, приведенным в § 17, составим нижеследующую табл. 16.

Таблица 16

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
l	−4	−6	+8	−5	−1	−8	+5	+7	−8
p	1,2	0,9	1,1	1,5	0,9	0,7	1,2	1,1	1,0
$\sqrt{p}l$	−4,38	−5,69	+8,40	−6,12	−0,95	−6,70	+5,48	+7,35	−8,00
pl^2	19,18	32,38	70,56	37,45	0,90	44,89	30,03	54,02	64,00

$$\overline{l^2}=\frac{19,18+32,38+70,56+37,45}{4}=39,89,$$

где

$$\overline{l^2}=L^*PL_{\text{ср}}=\frac{L^*PL}{4}.$$

Из этой таблицы следует значение наименьшей суммы квадратов отклонений

$$313{,}52 = 353{,}41 - 39{,}89.$$

Поэтому

$$\sigma^2 = \frac{313{,}52}{5} = 62{,}70 \text{ мм}$$

— дисперсия и

$$\sigma = \sqrt{62{,}70} = \pm 7{,}9 \text{ мм}$$

— ошибка на 15 км хода.

Следовательно,

$$\sigma_{1\text{ км}} = \frac{7{,}9}{\sqrt{15}} = \pm 2 \text{ мм}$$

— ошибка отдельного измерения на 1 км нивелирного хода.

Таким образом, способы Эрмита и Гаусса приводят к одним и тем же результатам.

ГЛАВА VI

КОРРЕЛАТНЫЙ СПОСОБ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

§ 18. УРАВНИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Исходные данные. В рассматриваемом способе предполагается, что в данном геодезическом построении:

1) непосредственно измерено n элементов

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n; \tag{18.1}$$

2) получено n результатов непосредственных измерений

$$l_1,\ l_2, \ldots, l_n \tag{18.2}$$

с весами

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_n \tag{18.3}$$

и соответственно составлено n соотношений

$$x_i = l_i; \qquad i = 1,\ 2, \ldots, n \tag{18.4}$$

между элементами x_i и l_i;

3) относительно элементов (18.1) существуют r точных математических условий, или уравнений связи в линейной форме

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = u_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_1x_1 + g_2x_2 + \cdots + g_nx_n = u_r \end{array}\right\}, \tag{18.5}$$

а в общем случае в нелинейной форме

$$\varphi_\nu (x_1,\ x_2, \ldots x_n) = u_\nu, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots, \nu. \tag{18.6}$$

Переопределенная система. Система (18.4) — совместная, так что к отклонениям, возникающим под влиянием ошибок измерений, не приводит. Но если систему (18.4) объединить с системой

(18.5), то получим переопределенную систему

$$\left.\begin{array}{llll} x_1=l_1 & & & \\ & x_2=l_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & x_n=l_n \\ [ax]=u_1 & & & \\ & [bx]=u_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & [gx]=u_r \end{array}\right\}, \qquad (18.7)$$

в которой общее число уравнений $n+r$ больше числа неизвестных x_i; ни одно уравнение связи из системы (18.5) или (18.7) не является следствием остальных.

Начальные уравнения. По данным системы (18.7) построим уравнения в начальной форме

$$Ex=l; \qquad (18.8)$$

$$Bx=U, \qquad (18.9)$$

где E — единичная матрица системы (18.4) порядка n;

$$B=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_1 & b_2 \ldots b_n \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_1 & g_2 \ldots g_n \end{bmatrix}$$

— прямоугольная матрица системы (18.5) размера $r \times n$;

$$l=[l_1,\ l_2, \ldots, l_n]; \qquad x=[x_1,\ x_2, \ldots, x_n]$$

— соответственно измеренный и определяемый векторы в пространстве n;

$$U=[u_1,\ u_2, \ldots, u_r]$$

— вектор условий в подпространстве r.

Сведем два уравнения (18.8) и (18.9) в одно

$$B'x=U', \qquad (18.10)$$

где

$$B'=\begin{bmatrix} E \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_1 & a_2 \ldots a_n & & \\ b_1 & b_2 \ldots b_n & & \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ g_1 & g_2 \ldots g_n & & \end{bmatrix} \qquad (18.11)$$

— прямоугольная матрица размера $(n+r)\times n$;

$$U'=[l_1,\ l_2,\dots,l_n,\ u_1,\ u_2,\dots,u_r] \qquad (18.12)$$

— вектор свободных членов в пространстве $n+r$.

Матрица (18.11) переопределена на величину

$$d=(n+r)-n=r, \qquad (18.13)$$

равную числу условий, или уравнений связи (18.5).

Уравнения ошибок и невязок. В силу неопределенности и влияния ошибок измерений начальное уравнение (18.4) перейдет в уравнение ошибок

$$Ex-l=v. \qquad (18.14)$$

в ортогональном базисе E, где

$$V=[v_1,\ v_2,\dots,v_n]$$

— вектор отклонений от нулевого вектора

$$0=[0_1,\ 0_2,\dots,0_n]$$

в пространстве n.

Замена в уравнении связи (18.9) вектора x вектором l приведет к уравнению невязок

$$Bl=U+W \qquad (18.15)$$

или

$$Bl-U=W, \qquad (18.16)$$

где

$$W=[w_1,\ w_2,\dots,w_r]$$

— вектор невязок в подпространстве r в косоугольном базисе B.

Уравнение поправок. Разность уравнений (18.8) и (18.15)

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} Bx=U \\ Bl=U+W \end{array} \\ \hline B(x-l)=-W \end{array} \qquad (18.17)$$

сводится к уравнению поправок

$$BV=-W, \qquad (18.18)$$

где

$$V=x-l, \qquad (18.19)$$

согласно (18.4),— вектор отклонений от нулевого вектора.

Из уравнения (18.18) следует, что вектор поправок BV в базисе B равен вектору невязок W с обратным знаком в том же базисе B.

Следовательно,

$$BV+W=0 \qquad (18.20)$$

— уравнение поправок в базисе B, в котором сумма векторов BV и W равна нулевому вектору в правой части.

Но базис B косоугольный, или произвольный. Следовательно, в этом базисе можно подобрать множество комбинаций векторов вида BV, обращающих вектор невязок в нулевой вектор. Поэтому без дополнительных условий или ограничений однозначное решение уравнения (18.20) относительно вектора поправок V неосуществимо.

К уравнению вида (18.20) приводит нелинейная система (18.6), преобразованная к линейной форме.

Линеаризация нелинейной системы. Система (18.6) приводится к линейному виду подстановкой в эту систему значений

$$x_i = l_i + v_i,$$

где v_i — поправки к результатам непосредственных измерений l_i.

Тогда взамен системы (18.6) получим систему

$$\varphi_\nu = (l_1 + v_1,\ l_2 + v_2, \ldots, l_n + v_n). \tag{18.21}$$

С помощью разложения строк этой системы по формуле Тейлора будем иметь систему r линейных соотношений вида

$$\varphi_\nu (l_1, l_2, \ldots, l_n) = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial l_n} v_n = 0, \tag{18.22}$$

т. е.

$$\begin{aligned} [av] + w_1 &= 0, \\ [bv] + w_2 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ [gv] + w_r &= 0 \end{aligned} \tag{18.23}$$

или

$$BV + W = 0,$$

где коэффициенты $a_i,\ b_i, \ldots, g_i$ — частные производные из уравнения (18.22), образующие матрицу B, а числа

$$w_\nu = \varphi_\nu (l_1,\ l_2, \ldots, l_n)$$

— свободные члены системы (18.23), составляющие вектор невязок W.

Условие решения уравнения поправок. Присоединив к уравнению ошибок (18.14) уравнение поправок (18.20), получим два уравнения

$$\begin{aligned} Ex - l &= V, \\ BV + W &= 0 \end{aligned} \tag{18.24}$$

с двумя неизвестными x и V.

Подчинив первое уравнение условию Лежандра — Гаусса

$$V^* P V = \min \tag{18.25}$$

и приняв во внимание второе уравнение, построим функцию Лагранжа[1]

$$2\Phi = V^*PV - 2K^*(BV+W) = \min \tag{18.26}$$

под условием (18.25), в которой

$$K^* = [k_1,\ k_2, \ldots, k_r]$$

— вектор переходных множителей Лагранжа, именуемый в методе наименьших квадратов в е к т о р о м к о р р е л а т.

Функция в выражении (18.26) получает наименьшее значение, если

$$d(V^*PV) = 2V^*PdV = 0. \tag{18.27}$$

Следовательно, условие решения уравнения поправок (18.20) сводится к определению о т н о с и т е л ь н о г о м и н и м у м а функции (18.26) по формуле (18.27).

Формула вектора поправок. В соответствии с выражением (18.27) из выражения (18.26) следует

$$2d\Phi = 2V^*PdV - 2K^*BdV = 0$$

или

$$(V^*P - K^*B)\,dV = 0.$$

Дифференциальный вектор

$$dV = [dv_1,\ dv_2, \ldots, dv_n]$$

отличен от нуля, поэтому

$$V^*P - K^*B = 0$$

или

$$PV^* = B^*K. \tag{18.28}$$

Поэтому

$$V = P^{-1}B^*K = \pi B^*K; \qquad P^{-1} = \pi \tag{18.29}$$

— формула вектора поправок при неравноточных измерениях. полагая, что

$$\pi = \{\pi_1,\ \pi_2, \ldots, \pi_n\} = P^{-1}\{p_1^{-1},\ p_2^{-1}, \ldots, p_n^{-1}\}$$

— весовая матрица непосредственных измерений, построенная по данным (18.3).

В случае равноточных измерений весовая матрица $P^{-1} = \pi$ замещается матрицей единичного веса E, так что в этом случае формула (18.29) принимает вид

$$V^* = B^*K, \tag{18.30}$$

где символ E опущен.

В формулах (18.29) и (18.30) остается неизвестным вектор коррелат.

[1] Коэффициент 2 — символ квадратичной формы Ф и в правую часть выражения (18.26) вводится для последующего сокращения.

Определение вектора коррелат

Нормальные уравнения коррелат. Подстановка вектора **(18.29)** или (18.30) в уравнение поправок (18.20) приводит к нормальным уравнениям коррелат

$$\begin{gathered} B\pi B^*K + W = 0, \\ BB^*K + W = 0 \end{gathered} \tag{18.31}$$

соответственно при неравноточных и равноточных измерениях.

Положив

$$B\pi B^* = N, \quad BB^* = N,$$

получим нормальное уравнение

$$NK + W = 0 \tag{18.32}$$

в обобщенном выражении.

Формула определения вектора коррелат. Из уравнения (18.32) следует

$$-K = QW, \tag{18.33}$$

где Q — матрица, обратная к N.

Способы определения вектора коррелат. Нормальные уравнения

$$\begin{gathered} Nx - L = 0, \\ NK + W = 0, \end{gathered} \tag{18.34}$$

возникающие в параметрическом и коррелатном способах, имеют одну и ту же структуру.

Следовательно, способы решения уравнений (18.34) по схеме Гаусса и формуле Крамера одни и те же.

Формула определения уравновешенного вектора $\bar{x}$. Подстановка вектора коррелат (18.33) в формулу (18.29) или (18.30) приводит к вектору поправок со знаком минус. Соответственно уравнение ошибок (18.14) перейдет в уравнение поправок

$$Ex = l - V, \tag{18.35}$$

откуда следует:

м е р а   п о л о ж е н и я   в е к т о р а

$$\bar{x} = l - V, \tag{18.37}$$

т. е. уравновешенный вектор в ортонормированном базисе E; разложение измеренного вектора $l = \bar{x} + V$ в этом базисе;

с о о т н о ш е н и е   П и ф а г о р а

$$l^2 = \bar{x}^2 + V^2 \tag{18.38}$$

в том же базисе.

§ 19. ОЦЕНКА УРАВНИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Формулы минимума суммы квадратов поправок

Сводная формула. Так как

$$1)\ PV = B^*K;$$
$$2)\ V = P^{-1}B^*K = \pi B^*K;$$
$$3)\ V^* = K^*B\pi,$$

то

$$V^*PV_{\min} = K^*B\pi B^*K.$$

Принимая во внимание, что

$$4)\ K = -QW;$$
$$5)\ K^* = -W^*Q;$$
$$6)\ Q = (B\pi B^*)^{-1},$$

получаем сводную формулу минимума суммы квадратов поправок

$$V^*PV_{\min} = K^*B\pi B^*K = W^*QW = -W^*K = -K^*W. \qquad (19.1)$$

Разновидности формул минимума:

1) квадратичная —

$$V^*PV_{\min} = K^*B\pi B^*K; \qquad (19.2)$$

2) билинейная —

$$V^*PV_{\min} = W^*QW; \qquad (19.3)$$

3) скалярная —

$$V^*PV_{\min} = -K^*W = -W^*K. \qquad (19.4)$$

При равноточных измерениях в формуле (19.2) весовая матрица $\pi = P^{-1}$ переходит в матрицу единичного веса E, так что формула (19.2) принимает вид

$$V^*V_{\min} = K^*BB^*K. \qquad (19.5)$$

Правые части формул (19.3) и (19.4) остаются неизменными и, таким образом, сводная формула (19.1) переходит в формулу

$$V^*V_{\min} = K^*BB^*K = W^*QW = -K^*W = -W^*K. \qquad (19.6)$$

Оценка измеренного вектора l. По исходным данным P — весовая матрица непосредственных измерений. Следовательно,

$$\sigma_l^2 = \sigma^2 P^{-1} \qquad (19.7)$$

— дисперсия вектора l,

$$\sigma_l = \sigma\sqrt{P^{-1}} \qquad (19.8)$$

— ошибка этого вектора.

Оценка отдельного измерения. Так как

$$d = n + r - n = r$$

— эффективность матрицы (18.16), то

$$\sigma^2_{l_i} = d^{-1} V^* P V_{\min} \tag{19.9}$$

— дисперсия отдельного измерения l_i. Следовательно,

$$\sigma_{l_i} = \sqrt{d^{-1} V^* P V_{\min}} \tag{19.10}$$

— ошибка измерения l_i.

Оценка вектора коррелат K. Так как

$$-K = QW = -Q(Bl - U) = -QBl + QU,$$

где

$$QU = \text{const},$$

то

$$\overline{P}_K^{-1} = QB\pi B^* Q = Q. \tag{19.11}$$

Следовательно, обратная матрица

$$Q_{rr} = (B\pi B^*)^{-1} = N_{rr}^{-1}$$

— весовая матрица вектора коррелат K. Поэтому

$$\overline{P}_K^{-1} = N_{rr} \tag{19.12}$$

— вес вектора коррелат K.

Оценка линейной функции $F = f^* \overline{x}$ в базисе B'. Так как

$$\overline{x} = l - V; \qquad V = \pi B^* K,$$

то функция

$$F = f^* \overline{x} = f^* (l - V) = f^* l - f^* V = f^* l - f\pi B^* K \tag{19.13}$$

относится к объединенному базису B'.

Обратный вес в базисе E. Измеренный вектор l расположен в ортогональном базисе E. В этом базисе имеем

$$P_{F_1}^{-1} = f^* \pi f. \tag{19.14}$$

Обратный вес в базисе B. Вектор коррелат расположен в косоугольном базисе B. В этом базисе находим

$$P_{F_2}^{-1} = f^* \pi B Q B^* \pi f. \tag{19.15}$$

Обратный вес в объединенном базисе B'. В этом базисе получим

$$P_F^{-1} = f^* \pi f - f^* \pi B Q B^* \pi f. \tag{19.16}$$

Дисперсия в базисе B' выражается формулой

$$\sigma_F^2 = \sigma_l^2 \{f^* \pi f - f^* \pi BQB^* \pi f\}, \qquad (19.17)$$

где σ_l^2 определяется формулой (19.9).

Таким образом, первый член в скобках выражения (19.17) возникает в силу влияния ошибок измерений вектора x, второй — за счет условий, налагаемых на вектор x.

Практика уравнительных операций коррелатным способом

Основные формулы. К практике уравнительных операций относится группа формул:

1) $NK + W = 0$; 3) $V^* PV_{\min} = W^* QW = -K^* W = -W^* K$;

2) $V = \pi B^* K$; 4) $\sigma^2 = d^{-1} V^* PV_{\min}$;

5) $P_F^{-1} = f^* \pi f - f^* \pi BQB^* \pi f$.

Явное выражение группы формул 1—5 в символах Гаусса:

1) Система нормальных уравнений коррелат:

$$\left.\begin{aligned}
&[\pi aa]k_1 + [\pi ab]k_2 + \cdots + [\pi ag]k_r + w_1 = 0\\
&[\pi ab]k_2 + [\pi bb[k_2 + \cdots + [\pi bg]k_r + w_2 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[\pi ag]k_1 + [\pi bg]k_2 + \cdots + [\pi gg]k_r + W_r = 0
\end{aligned}\right\}.$$

2) Формула поправок

$$v_i = (a_i k_1 + b_i k_2 + \cdots + g_i k_r)\,\pi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

3) Формулы минимума суммы квадратов поправок:

$$[pv^2]_{\min} = \frac{w_1^2}{[\pi aa]} + \frac{[w_2 \cdot 1]^2}{[\pi bb \cdot 1]} + \cdots + \frac{[w_r \cdot (r-1)]^2}{[\pi gg \cdot (r-1)]};$$

$$[pv^2]_{\min} = -[wk] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 - \cdots - w_r k_r.$$

4) Формула дисперсии отдельного измерения

$$\sigma^2 = \frac{[pv^2]}{r}.$$

5) Формулы оценки линейной функции:

обратного веса

$$P_F^{-1} = [f\pi f r] = [f\pi f] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf \cdot 1]^2}{[\pi bb \cdot 1]} - \cdots - \frac{[\pi gf \cdot (r-1)]^2}{[\pi gg \cdot (r-1)]};$$

дисперсии

$$\sigma_F^2 = \sigma^2 [f\pi f r].$$

К решению системы нормальных уравнений коррелат и ко всем формулам 1—5 приводит схема Гаусса, аналогичная схеме в параметрическом способе.

Общность схем следует из свойств симметричных матриц квадратичных форм, возникающих под условием Лежандра — Гаусса

$$2\Phi = V^* P V = [pv^2] = \min.$$

Обобщенная модель схемы Гаусса

Формула построения обобщенной модели. Если матрица N симметричная, то такая матрица равна произведению двух треугольных матриц

$$N = S_1^* S_2 = S_2^* S_1,$$

где S_1 — эквивалентная матрица;

S_2 — элиминационная матрица.

Легко проверить, что

$$\begin{bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [aa] & \\ [ab] & [bb\cdot 1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{[ab]}{[aa]} \\ & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} [aa] & [ab] & w_1 \\ [ab] & [bb] & w_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [aa] & & \\ [ab] & [bb\cdot 1] & \\ w_1 & [w_2\cdot 1] & [w_3\cdot 2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{[ab]}{[aa]} & \frac{w_1}{[aa]} \\ & 1 & \frac{[w_2\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Модель, представленная в табл. 17, получена разложением матрицы

$$\begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] & [ae] & [af] & w_1 & [as] \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] & [be] & [bf] & w_2 & [bs] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] & [ce] & [cf] & w_3 & [cs] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] & [de] & [df] & w_4 & [ds] \\ [ae] & [be] & [ce] & [de] & [ee] & [ef] & w_5 & [es] \\ [af] & [bf] & [cf] & [df] & [ef] & [ff] & w_6 & [fs] \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & & \\ [as] & [bs] & [cs] & [ds] & [es] & [fs] & & \end{bmatrix} \qquad (19.18)$$

системы нормальных уравнений коррелат, окаймленной свободными членами (невязками) и контрольными элементами.

К модели этого вида приводят уравнительные операции в параметрическом способе с той лишь разницей, что по главной диагонали вместо коррелат k_ν расположены параметры x_j, а по строке и столбцу вместо невязок

$$w_1,\ w_2, \ldots, w_r,\ w_{r+1}$$

Таблица 17

k_1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{aa}$	$-\frac{[ad]}{[aa]}$	$-\frac{[ae]}{[aa]}$	$-\frac{[af]}{[aa]}$	$-\frac{w_1}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$
$[aa]$	k_2	$-\frac{[bc]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[w_2\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
$[ab]$	$[bb\cdot 1]$	k_3	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[w_3\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
$[ac]$	$[bc\cdot 1]$	$[cc2]$	k_4	$-\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[w_4\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$	$-\frac{[ds\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$
$[ad]$	$[bd\cdot 1]$	$[cd\cdot 2]$	$[dd\cdot 3]$	k_5	$-\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}$	$-\frac{[w_5\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}$	$-\frac{[es\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}$
$[ae]$	$[be\cdot 1]$	$[ce\cdot 2]$	$[de\cdot 3]$	$[ee\cdot 4]$	k_6	$-\frac{[w_6\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}$	$-\frac{[fs\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}$
$[af]$	$[bf\cdot 1]$	$[cf\cdot 2]$	$[df\cdot 3]$	$[ef\cdot 4]$	$[ff\cdot 5]$	$[vv]$	$[vv]$
w_1	$[w_2\cdot 1]$	$[w_3\cdot 2]$	$[w_4\cdot 3]$	$[w_5\cdot 4]$	$[w_6\cdot 5]$	$[w_7\cdot 6]$	kv
$[as]$	$[bs\cdot 1]$	$[cs\cdot 2]$	$[ds\cdot 3]$	$[es\cdot 4]$	$[fs\cdot 5]$		

— свободные члены

$$[pal],\ [pbl], \ldots, [pgl],\ [pll].$$

Преобразование квадратичных форм к каноническому виду в Гауссовых символах

Основание. Напишем квадратичные формы:
1) однородные —

$$V^*PV_{\min} = W^*QW; \qquad P_F^{-1} = f^*Qf. \tag{19.19}$$

2) неоднородные —

$$V^*PV_{\min} = l^*Pl - l^*PAQA^*Pl; \quad P_F^{-1} = f^*\pi f - f^*\pi BQB^*\pi f. \tag{19.20}$$

Построим блочные матрицы:
1) Для форм (19.19) —

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} N_{rr} & W_{r1} \\ W_{1r} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} N_{kk} & f_{k1} \\ f_{1k} & 0 \end{pmatrix}. \tag{19.21}$$

2) Для форм (19.20) —

$$\text{в)}\ \begin{pmatrix} N_{rr} & B_{rn}\pi_{nn}f_{n1} \\ f_{1n}\pi_{nn}B_{nr} & f_{1n}\pi_{nn}f_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \text{г)}\ \begin{pmatrix} N_{kk} & A_{kn}P_{nn}l_{n1} \\ l_{1n}P_{nn}A_{nk} & l_{1n}P_{nn}l_{n1} \end{pmatrix}. \quad (19.22)$$

Умножим первые строки матриц (19.21) слева на векторы

$$-W_{1r}Q_{rr}; \qquad -f_{1k}Q_{kk};$$

матриц (19.22) слева на векторы

$$-f_{1n}\pi_{nn}B_{nr}Q_{rr}; \qquad -l_{1n}P_{nn}A_{nk}-Q_{kk}$$

и произведения сложим со вторыми строками тех же матриц. В результате получим преобразованные матрицы в треугольной форме*

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} N_{\text{тр}} & W \\ & W^*QW \end{pmatrix}; \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} N_{\text{тр}} & f \\ & f^*Qf \end{pmatrix}; \quad (19.23)$$

$$\text{в)}\ \begin{pmatrix} N_{\text{тр}} & B\pi f \\ & f^*\pi f - f^*\pi BQB^*\pi f \end{pmatrix}; \qquad \text{г)}\ \begin{pmatrix} N_{\text{тр}} & A^*Pl \\ & l^*Pl - l^*PAQA^*Pl \end{pmatrix}, \quad (19.24)$$

где вторые строки содержат правые части формул (19.19) и (19.20).

Обобщенный алгоритм Гаусса. Перепишем матрицы (19.21) в следующих формах

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} N_{rr} & W_{r1} \\ W^*_{1r} & -W_{r+1} \end{pmatrix}; \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} N_{kk} & f_{k1} \\ f^*_{1k} & -f_{k+1} \end{pmatrix}, \quad (19.25)$$

где

$$-W_{r+1}=0, \qquad -f_{k+1}=0.$$

Подвергая матрицы (19.25) треугольному преобразованию, получим

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} N_{\text{тр}} & W_{r1} \\ & -[w_{r+1}\cdot r] \end{pmatrix}; \qquad \text{б)}\ \begin{pmatrix} N_{\text{тр}} & f_{k1} \\ & -[f_{k+1}\cdot k] \end{pmatrix}. \quad (19.26)$$

Из этих матриц следует, что

$$\left.\begin{aligned} -[w_{r+1}\cdot r] &= \frac{w_1^2}{[\pi aa]} + \frac{[w_2\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} + \cdots + \frac{[w_r\cdot(r-1)]^2}{[\pi gg\cdot(r-1)]} \\ -[f_{k+1}\cdot k] &= \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} + \cdots + \frac{[f_k\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]} \end{aligned}\right\}. \quad (19.27)$$

---

* В формулах (19.23), (19.24) и (19.26) символ $N_{\text{тр}}$ означает матрицу N в треугольной форме.

Из матриц (19.22) в треугольной форме

$$\text{в)}\ \begin{pmatrix} N_{rr} & B_{rn}\pi_{nn}f_{n1} \\ & [f\pi fr] \end{pmatrix}; \qquad \text{г)}\ \begin{pmatrix} N_{kk} & A_{kn}P_{nn}l_{n1} \\ & [pll\cdot k[\end{pmatrix}$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} [f\pi f\cdot r] &= [f\pi f] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} - \cdots - \frac{[\pi gf\cdot(r-1)]^2}{[\pi gg\cdot(r-1)]} \\ [pll\cdot k] &= [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} - \cdots - \frac{[pgl\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(r-1)]} \end{aligned}\right|. \tag{19.28}$$

Таким образом, квадратичные формы (19.19) и (19.20) равносильны каноническим

$$V^*PV_{\min} = -[w_{r+1}\cdot r]; \qquad V^*PV_{\min} = [pll\cdot k];$$
$$P_F^{-1} = [f\pi f\cdot r]; \qquad P_F^{-1} = [f_{k+1}\cdot k].$$

Геометрическое содержание описанных преобразований. Матрицы нормальных уравнений N_{rr} и N_{kk} квадратные, симметричные, положительно определенные, ранга r и k соответственно. Каждая из этих матриц описывает центральную поверхность 2-го порядка и содержит соответственно r и k главных осей.

Преобразование квадратичных форм (19.19) и (19.20) к каноническому виду (19.27) и (19.28), т. е. к сумме квадратов, равносильно преобразованию центральной поверхности 2-го порядка к главным осям. Главные оси образуют ортогональную систему координат. Следовательно, в такой системе находятся координаты векторов k, $\bar{x}$.

Коррелатная модель

Матрицы и векторы K-модели:

$$E_{nn} = \begin{bmatrix} 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & 1\ldots 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 \quad 1 \end{bmatrix}; \qquad l_{n1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ l_n \end{bmatrix}; \qquad x_{n1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix};$$

$$v_{n1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}; \quad B_{rn} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2\ldots a_n \\ b_1 & b_2\ldots b_n \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_1 & g_2\ldots g_n \end{bmatrix}; \quad U_{r1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix}; \quad w_{r1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ w_r \end{bmatrix};$$

$$P_{nn}=\begin{Bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & P_n \end{Bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots0 \\ 0 & 1\ldots0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0\ldots1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & a_2\ldots a_n \\ b_1 & b_2\ldots b_n \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_1 & g_2\ldots g_n \end{pmatrix} \end{bmatrix}}^{n} \begin{matrix} \updownarrow n \\ n+r; \\ \updownarrow r \end{matrix}$$

$$P_{nn}^{-1}=\begin{Bmatrix} P_1^{-1} & & & \\ & P_2^{-1} & & \\ & & \cdot & \\ & & & P_n^{-1} \end{Bmatrix};$$

$$N_{rr}=\begin{bmatrix} [\pi aa] & [\pi ab]\ldots[\pi ag] \\ [\pi ab] & [\pi bb]\ldots[\pi bg] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [\pi ag] & [\pi bg]\ldots\pi gg] \end{bmatrix}; \qquad Q_{rr}=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}\ldots Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22}\ldots Q_{2r} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Q_{r1} & Q_{r2}\ldots Q_{rr} \end{bmatrix}.$$

1-я часть модели —

1) $Ex=l;$
$Bx=U;$

2) $x-l=V;$
$Bl=U+W;$

3) $B(l+V)=U;$
$Bl=-BV+U;$

4) $BV+W=0;$
$BV=-W;$

5) $V^*PV=\min;$

6) $2\Phi=V^*PV-2K^*(BK+W)=\min;$

7) $\Phi dV=V^*PdV-K^*BdV=0;$
$(V^*P-K^*B)\,dV=0;$

8) $V^*P-K^*B=0;$
$PV=B^*K;$

9) $V=P^{-1}BK;$
$V=\pi B^*K;$

10) $B\pi BK+W=0;$
$NK+W=0;$

11) $K=-QW;$

12) $\bar{x}=l-V;$
$l=\bar{x}+V;$
$l^2=\bar{x}^2+V^2.$

2-я часть модели —

13) $PV=B^*K;$
$V=\pi B^*K;\ V^*=K^*B\pi$
$-K=QW;$

16) $\sigma^2=d^{-1}V^*PV_{\min};$

17) $\bar{P}_K^{-1}=Q;$

18) $F=f^*\bar{x};$

14) $V^*PV_{\min}=K^*B\pi B^*K=$
$=W^*QW=-K^2W=-W^*K$;

19) $P_F^{-1}=f^*\pi f-f^*\pi BQB^*\pi f$;

15) $d=n+r-n=r$;

20) $\sigma_F=\dfrac{\sigma}{\sqrt{P_F}}$.

§ 20. ПРИМЕР ОБРАБОТКИ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

1. **Схема сети,** показанная на рис. 18, та же, что и в параметрическом способе.

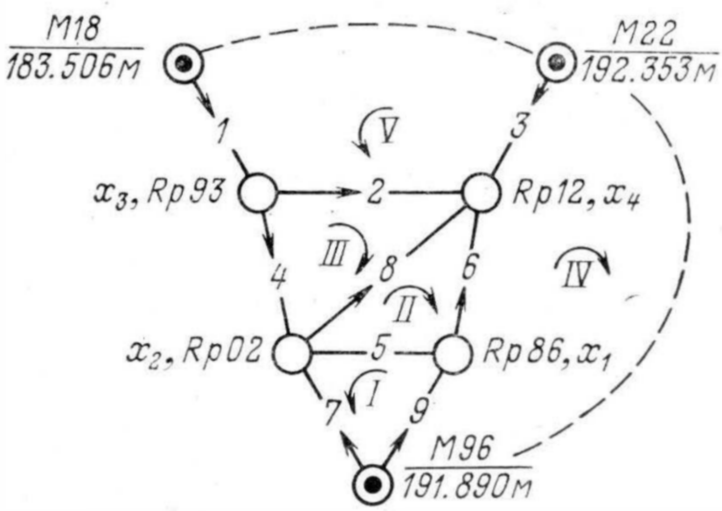

Рис. 18.

2. Длина ходов, сумма превышений, обратные веса приведены в табл. 18.

Таблица 18

№ хода	s, км	[h], м	$\frac{1}{p_i}=\frac{s}{15}=\pi_i$	π_i
1	12,6	6,125	0,8	π_1
2	16,4	8,320	1,1	π_2
3	14,1	5,580	0,9	π_3
4	10,0	1,368	0,7	π_4
5	16,3	4,694	1,1	π_5
6	20,4	11,652	1,4	π_6
7	12,0	−0,905	0,8	π_7
8	13,2	6,944	0,9	π_8
9	15,4	−5,585	1,0	π_9

3. **Число условных уравнений**

$$r=P+T-1=3+3-1=5,$$

где P — число замкнутых полигонов;
T — число твердых пунктов.

4. Построение замкнутых полигонов, соответственных числу условий (см. схему):

3 — действительных,

2 — фиктивных

5 — замкнутых полигонов равно числу условий.

5. Невязки полигонов

$$[h]_\nu = w_\nu;$$

1) $4{,}694 + 0{,}905 - 5{,}585 = 14$ мм;

2) $4{,}694 + 6{,}944 - 11{,}652 = -14$ мм;

3) $8{,}320 - 6{,}944 - 1{,}368 = 8$ мм;

4) $191{,}890 - 5{,}585 + 11{,}652 - 5{,}580 - 192{,}353 = 24$ мм;

5) $183{,}506 + 6{,}125 + 8{,}320 - 5{,}580 - 192{,}353 = 18$ мм.

6. Вектор невязок

$$w_{\text{мм}} = (14,\ -14,\ 8,\ 24,\ 18).$$

7. Система условных уравнений

$$BV + W = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|r|}
a & & 0 & 0 & 0 & +v_5 & 0 & -v_7 & 0 & +v_9 & +14=0 \\
b & & 0 & 0 & 0 & +v_5 & -v_6 & 0 & +v_8 & 0 & -14=0 \\
c & & +v_2 & 0 & -v_4 & 0 & 0 & 0 & -v_8 & 0 & +8=0 \\
d & & 0 & -v_3 & 0 & 0 & -v_6 & 0 & 0 & -v_9 & +24=0 \\
e & +v_1 & +v_2 & -v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +18=0
\end{array}.$$

8. Матрица системы

$$B_{59} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

9. Объединенная матрица

$$B_{14,5} = \begin{bmatrix} E \\ B \end{bmatrix}.$$

10. Эффективность (переопределенность) матрицы

$$d = n + r - n = 9 + 5 - 9 = 5.$$

11. Построение матриц B^* и N приведено в табл. 19.

Таблица 19

π	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	$e]$	
0,8					1	
1,1			1		1	
0,9				−1	−1	
0,7			−1			
1,1	1	1				
1,4		−1		−1		
0,8	−1					
0,9		1	−1			
1,0	1			−1		
w	14	−14	8	24	18	
$[\pi a$	2,9	1,1	0	1,0	0	29,0
$[\pi b$		3,4	−0,9	−1,4	0	−11,8
$[\pi c$			2,7	0	1,1	−8,5
$[\pi d$				3,3	0,9	27,9
$[\pi e$					2,8	−22,8

12. Система нормальных уравнений коррелат

1) $2{,}9k_1 + 1{,}1k_2 + 0k_3 + 1{,}0k_4 + 0k_5 + 14 = 0$

2) $+1{,}1k_1 + 3{,}4k_2 - 0{,}9k_3 - 1{,}4k_4 + 0k_5 - 14 = 0$

3) $0k_1 - 0{,}9k_2 + 2{,}7k_3 + 0k_4 + 1{,}1k_5 + 8 = 0$

4) $+1{,}0k_1 - 1{,}4k_2 + 0k_3 + 3{,}3k_4 + 0{,}9k_5 + 24 = 0$

5) $+0k_1 + 0k_2 + 1{,}1k_3 + 0{,}9k_4 + 2{,}8k_5 + 18 = 0$

Контроль $5{,}0k_1 + 2{,}2k_2 + 2{,}9k_3 + 3{,}8k_4 + 4{,}8k_5 + 50 = -0{,}02$

13. Решение системы нормальных уравнений коррелат по способу квадратных корней приведено в табл. 20.

14. Значения поправок

$$V = \pi B^* K = (a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4 + l_i k_5)\,\pi_i:$$

$$v_1 = -6{,}02; \qquad v_6 = -10{,}0;$$

$$v_2 = -5{,}45; \qquad v_7 = 6{,}18;$$

$$v_3=6{,}53; \qquad v_8=4{,}35;$$
$$v_4=-1{,}80; \qquad v_9=-7{,}47.$$
$$v_5=-0{,}37;$$

Таблица 20

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	w	F	x_3	$S=s+w$	Контроль
2,9	—1,1	0	—1,0	0	—14,0	0	0	—19,0	
	3,4	0,9	1,4	0	14,0	—1,4	0	10,4	
		2,7	0	—1,1	—8,0	—1,1	0	—12,0	
			3,3	—0,9	—24,0	1,4	0,9	—25,5	
				2,8	—18,0	—1,1	0,9	—23,0	
					2,5	0,9	0		
1,703	—0,646	0	—0,587	0	—8,221	0	0	—11,157	—11,157
	1,727	0,521	1,030	0	11,182	—0,811	0	10,195	10,195
		1,558	0,344	—0,706	—1,395	—0,977		—4,292	—4,293
			1,333	—0,857	—6,104	0,171	0,675	—7,448	—7,447
				1,252	—9,412	0,445	—0,257	—10,852	—10,853
—7,73	7,40	2,57	0,26	—7,52	—11,784 1,567				
	$[pv^2]=320$	$P_F^{-1}=0{,}66$					0,38		

15. Уравновешенные значения измеренных величин

$$\bar{x}_1=l_1+v_1=6125-6{,}0=6119{,}0 \text{ мм};$$
$$\bar{x}_2=l_2+v_2=8320-5{,}4=8314{,}6 \text{ мм};$$
$$\bar{x}_3=l_3+v_3=5580+6{,}5=5586{,}5 \text{ мм};$$
$$\bar{x}_4=l_4+v_4=1368-1{,}8=1366{,}2 \text{ мм};$$
$$\bar{x}_5=l_5+v_5=4694-0{,}4=4693{,}6 \text{ мм};$$
$$\bar{x}_6=l_6+v_6=11\,652-10{,}0=11642{,}0 \text{ мм};$$
$$\bar{x}_7=l_7+v_7=-905+6{,}2=-898{,}8 \text{ мм};$$
$$\bar{x}_8=l_8+v_8=6944+4{,}4=6948{,}4 \text{ мм};$$
$$\bar{x}_9=l_9+v_9=-5585-7{,}5=-5592{,}5 \text{ мм}.$$

16. Минимум суммы квадратов поправок

$$V^*PV_{\min}=-K^*W=-[kw]=[pv^2]=-[kw]=$$
$$=[-7{,}73,\ 7{,}40,\ 2{,}57,\ 0{,}26,\ -7{,}52]\cdot\begin{bmatrix}14\\-14\\8\\24\\18\end{bmatrix}=-320{,}82\approx-321.$$

17. Ошибка отдельного измерения

$$\sigma = \sqrt{\frac{321}{5}} = \pm 8 \text{ мм}.$$

§ 21. СПОСОБЫ ПОПОВА И МЕРИМАНА

Способ Попова* составления нормальных уравнений коррелат по чертежу нивелирной сети

Основание способа. Пусть схема первая (рис. 19) изображает свободную нивелирную сеть, в которой стрелками по ходам показаны положительные (отрицательные) превышения между пунктами, а стрелками в полигонах — последовательность распределения поправок в условных уравнениях.

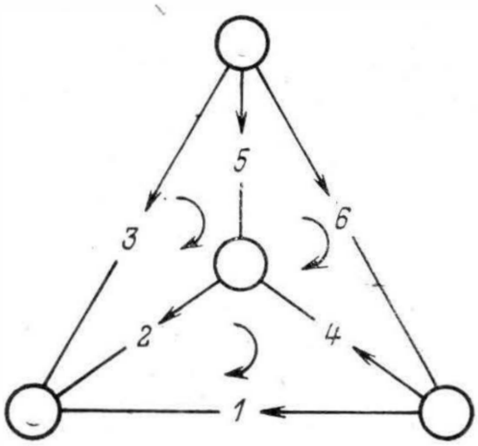

Рис. 19.

Если l_i — длина хода, то

$$p_i = \frac{1}{l_1}$$

— вес хода. Следовательно,

$$\frac{1}{p_i} = l_i = \pi_i$$

— обратный вес или длина хода. По этой схеме имеем:

1) число условий —

$$r = P + T - 1 = 3 + 1 - 1 = 3,$$

где P — число полигонов;

T — число твердых точек, полагая, что в свободной сети одна из точек принимается за твердую;

2) условные уравнения

$$\left.\begin{array}{llllll} a & v_1 & -v_2 & -v_4 & +w_1 = 0 \\ b & v_2 & -v_3 & +v_5 & +w_2 = 0 \\ c & v_4 & -v_5 & +v_6 & +w_3 = 0 \end{array}\right\}; \qquad (21.1)$$

3) матрицы B^* и N (табл. 21).

4) нормальные уравнения коррелат

$$\left.\begin{array}{l} (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)\,k_1 - \pi_2 k_2 - \pi_4 k_3 + w_1 = 0 \\ -\pi_2 k_1 + (\pi_2 + \pi_3 + \pi_5)\,k_2 - \pi_5 k_5 + w_2 = 0 \\ -\pi_4 k_1 + \pi_5 k_2 + (\pi_4 + \pi_5 + \pi_6)\,k_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\}, \qquad (21.2)$$

---

* Советский геодезист, проф., д-р техн. наук, чл.-кор. АН БССР.

Таблица 21

№ поправки	π	$a]$	$b]$	$c]$
1	π_1	1		
2	π_2	-1	1	
3	π_3		-1	
4	π_4	-1		1
5	π_5			-1
6	π_6		1	1
$[\pi a$		$\pi_1+\pi_2+\pi_3$	$-\Pi_2$	$-\pi_4$
$[\pi b$			$\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4$	$-\pi_5$
$[\pi c$				$\pi_4+\pi_5+\pi_6$

где

$$\begin{aligned} [\pi aa] &= (\pi_1+\pi_2+\pi_3) \\ [\pi bb] &= (\pi_2+\pi_3+\pi_5) \\ [\pi cc] &= (\pi_4+\pi_5+\pi_6) \end{aligned} \tag{21.3}$$

— сумма длин сторон полигонов I, II, III со знаком плюс:

$$[\pi ab] = -\pi_2 \qquad \begin{aligned} [\pi ac] &= -\pi_4 \\ [\pi bc] &= -\pi_5 \end{aligned} \tag{21.4}$$

— длины сторон смежных полигонов со знаком минус.

Равенства (21.3) и (21.4) показывают, что коэффициенты нормальных уравнений коррелат можно получить непосредственно по чертежу сети, и, следовательно, необходимость в построении табл. 21 отпадает.

Практически к способу Попова приводят правила:

1) по числу условий в данной сети образуют равное число замкнутых, смежных, неперекрывающихся полигонов, недостающие полигоны дополняют фиктивными ходами;

2) квадратичный коэффициент равен сумме длин всех сторон полигона со знаком плюс, симметричный — длине смежной стороны со знаком минус;

3) индекс коррелаты квадратичного коэффициента соответствует номеру полигона;

4) индекс коррелаты симметричного коэффициента определяется номером смежного полигона.

Таким образом, по чертежу сети (рис. 19) три полигона приводят к трем нормальным уравнениям коррелат (21.2).

По второй схеме (рис. 20), где три твердые точки, четыре смежных полигона, число условий равно

$$r = T + P - 1 = 3 + 4 - 1 = 6. \tag{21.5}$$

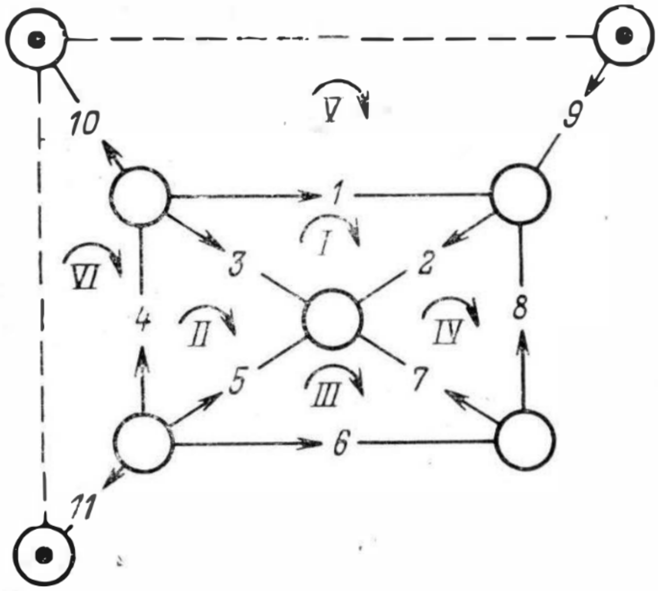

Рис. 20.

Соответственно числу условий дополним или образуем два недостающих полигона фиктивными ходами (пунктиром). Тогда непосредственно по чертежу сети получим шесть нормальных уравнений коррелат

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\pi_1+\pi_2+\pi_3)\,k_1 - \pi_3 k_2 - 0k_3 - \pi_2 k_4 - \pi_1 k_5 - 0k_6 + w_1 = 0 \\
-\pi_3 k_1 + (\pi_3+\pi_4+\pi_5)\,k_2 - \pi_5 k_3 - 0k_4 - 0k_5 - \pi_4 k_6 + w_2 = 0 \\
-0k_1 - \pi_5 k_2 + (\pi_5+\pi_6+\pi_7)\,k_3 - \pi_7 k_4 - 0k_5 - 0k_6 + w_3 = 0 \\
-\pi_2 k_1 - 0k_2 - \pi_7 k_3 + (\pi_2+\pi_7+\pi_8)\,k_4 - 0k_5 - 0k_6 + w_4 = 0 \\
-\pi_1 k_1 - 0k_2 - 0k_3 - 0k_4 + (\pi_1+\pi_9+\pi_{10})\,k_5 - 0k_6 + w_5 = 0 \\
-0k_1 - \pi_4 k_2 - 0k_3 - 0k_4 - \pi_{10} k_3 + (\pi_4+\pi_{10}+\pi_{11})k_6 + w_6 = 0
\end{array}
\right\}
\quad (21.6)
$$

Способ Меримана определения поправок к превышениям по чертежу нивелирной сети

Правила определения поправок. Поправка v_i для хода, не смежного с соседним полигоном, равна произведению длины хода на коррелату с номером полигона, к которому этот ход относится. Знак поправки плюс, если направление по ходу совпадает с направлением подсчета невязок, и минус в противном случае.

Поправка для хода, смежного с соседним полигоном, равна произведению длины хода на разность коррелат с индексами смежных полигонов.

Правила приводят к поправкам (21.7)

$$v_1=\pi_1 k_1; \quad v_4=-\pi_4 k_1+\pi_4 k_3=\pi_4(k_3-k_1);$$
$$v_2=-\pi_2 k_1+\pi_2 k_2=\pi_2(k_2-k_1); \quad v_5=\pi_5 k_2-\pi_5 k_3=\pi_5(k_2-k_3); \tag{21.7}$$
$$v_3=-\pi_3 k_2; \qquad v_6=\pi_6 k_3$$

по ходам в первой схеме (см. рис. 19) и к поправкам (21.8)

$$\begin{aligned} &v_1=\pi_1(k_1-k_5); && v_7=\pi_7(k_4-k_3);\\ &v_2=\pi_2(k_1-k_4); && v_8=-\pi_8 k_4;\\ &v_3=\pi_3(k_2-k_1); && v_9=\pi_9 k_5;\\ &v_4=\pi_4(k_2-k_6); && v_{10}=\pi_{10}(k_5-k_6);\\ &v_5=\pi_5(k_3-k_2); && v_{11}=\pi_{11}k_6\\ &v_6=-\pi_6 k_3; && \end{aligned} \tag{21.8}$$

по ходам во второй схеме (см. рис. 20).

Взаимная связь способов Попова и Меримана. Первая схема содержит условные уравнения

$$\begin{aligned} &v_1-v_2-v_4+w_1=0,\\ &v_2-v_3+v_5+w_2=0,\\ &v_4-v_5+v_6+w_3=0. \end{aligned} \tag{21.9}$$

Подстановка в эти уравнения значений поправок (21.7), определяемых по способу Меримана, приводит к нормальным уравнениям, найденным по способу Попова.

Так, подстановка значений поправок v_1, v_2, v_4 в первое условное уравнение из выражений (21.9) приводит к уравнениям

$$\pi_1 k_1-\pi_2(k_2-k_1)-\pi_4(k_3-k_1)+w_1=0;$$
$$\underline{\pi_1 k_1}-\pi_2 k_2+\underline{\pi_2 k_1}-\pi_4 k_3+\underline{\pi_4 k_4}+w_1=0,$$

откуда следует первое нормальное уравнение

$$(\pi_1+\pi_2+\pi_4)k_1-\pi_2 k_2-\pi_4 k_3+w_1=0,$$

полученное по способу Попова.

Вторая схема содержит условные уравнения

$$\begin{aligned} &1)\quad v_1+v_2-v_3+w_1=0;\\ &2)\quad v_3+v_4-v_5+w_2=0;\\ &3)\quad v_5-v_6-v_7+w_3=0;\\ &4)\quad -v_2+v_7-v_8+w_4=0; \end{aligned} \tag{21.10}$$

$$5)\ -v_1+v_9+v_{10}+w_5=0;$$
$$6)\ -v_4-v_{10}+v_{11}+w_6=0.$$

Подстановка в эти уравнения значений поправок (21.8) приводит к системе нормальных уравнений коррелат (21.6).

Примеры. По первым трем условным уравнениям из выражения (21.10) и соответствующим значениям поправок из выражений (21.8) получим первые три нормальных уравнения:

$$1)\ \underline{v_1+v_2-v_3+w_1=0};$$
$$\pi_1(k_1-k_5)+\pi_2(k_1-k_2)-\pi_3(k_2-k_1)+w_1=0;$$
$$\underline{\pi_1k_1}-\pi_1k_5+\underline{\pi_2k_1}-\pi_2k_4-\pi_3k_2+\underline{\pi_3k_1}+w_1=0;$$
$$\underline{\underline{(\pi_1+\pi_2+\pi_3)k_1-\pi_3k_2-0\cdot k_3-\pi_2k_4-\pi_1k_5-0\cdot k_6+w_1=0}},$$
$$2)\ v_3+v_4-v_5+w_2=0;$$
$$\pi_3(k_2-k_1)+\pi_4(k_2-k_6)-\pi_5(k_3-k_2)+w_2=0;$$
$$\underline{\pi_3k_2}-\pi_3k_1+\underline{\pi_4k_2}-\pi_4k_6-\pi_5k_3+\underline{\pi_5k_2}+w_2=0;$$
$$\underline{\underline{-\pi_3k_1+(\pi_3+\pi_4+\pi_5)k_2-\pi_5k_3-0\cdot k_4-0\cdot k_5-\pi_6k_6+w_2=0}},$$
$$3)\ v_5-v_6-v_7+w_3=0;$$
$$\pi_5(k_3-k_2)-\pi_6k_3-\pi_7(k_4-k_3)+w_3=0;$$
$$\underline{\pi_5k_3}-\pi_5k_2-\underline{\pi_6k_3}-\pi_7k_4+\underline{\pi_7k_3}+w_3=0;$$
$$\underline{\underline{-0\cdot k_1-\pi_5k_2+(\pi_5+\pi_6+\pi_7)k_3-\pi_7k_4-0\cdot k_5-0\cdot k_6+w_3=0}}$$

из системы (21.6).

Пользуясь соответствующими значениями поправок из (21.8), легко построить три последних уравнения из системы (21.6).

Примечание. В смысле метода наименьших квадратов способы Попова и Меримана приводят к строгим результатам там, где линейные элементы не связаны с угловыми элементами.

Обработка по способу Попова линейно-угловых измерений теодолитных и полигонометрических систем возможна раздельно, т. е. не строго и, следовательно, упрощенно*.

Обобщение способов Попова, Меримана и других графических построений приведено в работе [21].

§ 22. СПОСОБ ГРУПП. ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Исходные соображения. В связи с использованием счетно-решающих устройств автоматического действия при обработке результатов геодезических измерений привлекает внимание, во-первых,

* Попов В. В. Уравнивание полигонов. М., Геодезиздат, 1941.

теория группового решения системы нормальных уравнений, во-вторых, алгоритм, строго устанавливающий формальные правила решения этих уравнений. Значение первой задачи возрастает по мере развития геодезических систем сплошного типа и, следовательно, с увеличением числа нормальных уравнений; значение второй — в связи с рациональным построением алгоритма Гаусса для машин дискретного действия.

К исходной задаче в рассматриваемой области относится задача решения системы нормальных уравнений по способу двух групп. Идея решения такой задачи высказана еще Гауссом. Реализация этой идеи отражена в трудах Бесселя, Ганзена и Гельмерта, в исследованиях Крюгера и Урмаева, в работах Пранис-Праневича и многих других советских и зарубежных геодезистов.

Теория уравнительных операций по способу групп средствами классической математики усложняется по мере перехода от двух- и трехгруппового уравновешивания к многогрупповому и в общем случае приводит к весьма сложным преобразованиям,* разобраться в которых не просто.

Между тем, опираясь на матричную алгебру, можно построить теорию уравнительных операций по способу групп в той форме, из которой все известные способы следуют как частные случаи. Основы такой теории изложены в труде Ф. Р. Гантмахера [8]. С помощью этой теории изложим формальные операции совместного решения системы нормальных уравнений по способу двух и трех групп в обобщенных алгоритмах Гаусса.

Матрицы систем начальных уравнений в *П*- и *К*-способах в блочной форме. Расширенные матрицы начальных уравнений в *П*- и *К*-способах имеют вид

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1c_1\ldots g_1 & l_1 \\ a_2 & b_2c_2\ldots g_2 & l_2 \\ a_3 & b_3c_3\ldots g_3 & l_3 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_n & b_nc_n\ldots g_n & l_n \end{array}\right]; \qquad B=\left[\begin{array}{c|c} a_1a_2a_3\ldots a_n & w_1 \\ b_1b_2b_3\ldots b_n & w_2 \\ c_1c_2c_3\ldots c_n & w_3 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ g_1g_2g_3\ldots g_n & w_r \end{array}\right].$$

Выразим матрицу A в двухгрупповой форме

$$A=[A\,|\,B\,|\,L],$$

где A и B — блочные подматрицы в прямоугольной форме различных размеров,

$$L=[l_1,\ l_2,\ l_3,\ldots,\ l_n]$$

— вектор свободных членов.

---

* Пранис-Праневич И. Ю. Руководство по уравнительным вычислениям триангуляции. М., Геодезиздат, 1956.

Симметризация матрицы A приводит к блочной матрице

$$N=\begin{bmatrix} A^*A & A^*B & A^*l \\ B^* & AB^*B & B^*l \\ L^*A & L^*B & l^*l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & L_1 \\ N_{21} & N_{22} & L_2 \\ L_1^* & L_2^* & L_k \end{bmatrix}$$

в словарной и индексной формах, в которых по обозначению

$$A^*A=N_{11}; \qquad B^*B=N_{22}$$

— квадратные подматрицы различных порядков;

$$B^*A=(A^*B)^*; \qquad N_{21}=(N_{12})^*$$

— прямоугольные подматрицы соответствующих размеров;

$$l^*A=(A^*l)^*; \qquad L_1^*=(L_1)^*;$$
$$l^*B=(B^*l)^*; \qquad L_2^*=(L_2)^*$$

— подвекторы, образованные произведением блочных подматриц A и B на вектор свободных членов l.

Символ $L_k=l^*l$ обозначает квадрат скалярного произведения вектора свободных членов l.

Принимая во внимание, что в K-способе вектор невязок

$$W=[w_1, \; w_2, \ldots, w_r]$$

одновременно является вектором свободных членов системы нормальных уравнений коррелат, симметризация матрицы B без вектора W приводит к блочной матрице

$$\begin{bmatrix} AA^* & AB^* \\ B^*A & BB^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

второго порядка.

Приписав по столбцу и по строке этой матрицы подвекторы

$$W_{\text{I}}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{r_1} \end{bmatrix}; \qquad W_{\text{II}}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{r_2} \end{bmatrix}$$

вектора невязок W, получим блочную матрицу

$$N=\begin{bmatrix} AA^* & AB^* & W_{\text{I}} \\ B^*A & BB^* & W_{\text{II}} \\ W_{\text{I}}^* & W_{\text{II}}^* & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & W_{\text{I}} \\ N_{21} & N_{22} & W_{\text{II}} \\ W_{\text{I}}^* & W_{\text{II}}^* & -W_{r+1} \end{bmatrix}$$

того же порядка в окаймленной форме, где в конце главной диагонали для построения формулы минимума введен символ $-W_{r+1}=0$.

Квазитреугольные матрицы. Блочные матрицы вида

$$[N_R \cdot 2] = \begin{bmatrix} A^*A & A^*B & L_1 \\ & (B^*B \cdot 1) & [L_2 \cdot 1] \\ & & [L_3 \cdot 2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & L_1 \\ & [N_{22} \cdot 1] & [L_2 \cdot 1] \\ & & [L_3 \cdot 2] \end{bmatrix};$$

$$[N_r \cdot 2] = \begin{bmatrix} AA^* & AB^* & W_{\mathrm{I}} \\ & [BB^* \cdot 1] & [W_{\mathrm{II}} \cdot 1] \\ & & -[0 \cdot 2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & W_{\mathrm{I}} \\ & [N_{22} \cdot 1] & [W_{\mathrm{II}} \cdot 1] \\ & & -[W_3 \cdot 2] \end{bmatrix}$$

называются квазитреугольными и являются обобщением обыкновенных треугольных матриц соответственно в Π- и K-способах.

Элементы этих матриц — подматрицы и подвекторы, выражены в символах Гаусса в преобразованной форме.

Определители блочной матрицы. Так как

$$|N| = |N_{11}| \cdot |N_{22} \cdot 1|$$

— определитель матрицы N, то

$$|Q| = |Q_{11}|\,|Q_{22} \cdot 1|$$

— определитель матрицы

$$Q = Q_{11}\,[Q_{22} \cdot 1],$$

где

$$Q_{11} = N^{-1}, \qquad [Q_{22} \cdot 1] = [N_{22} \cdot 1]^{-1}$$

— обратные подматрицы первой и второй групп.

Построение обратных подматриц. Подматрица Q_{11} следует из соотношения

$$N_{11} Q_{11} = E_{11}$$

по схеме, описанной в § 15. Подматрица

$$[Q_{22} \cdot 1] = [N_{22} \cdot 1]^{-1}$$

определяется по формуле

$$[Q_{22} \cdot 1] = Q_{22} - Q_{21} N_{11} Q_{12},$$

где в правой части все элементы известны.

Развертывание обобщенных алгоритмов Гаусса. Любой элемент треугольной блочной матрицы развертывается простейшим образом в индексах и словарных символах. Например, для Π-способа в индексной форме условно имеем

$$[N_{22} \cdot 1] = N_{22} - \frac{N_{21} N_{12}}{N_{11}};$$

$$[L_2 \cdot 1] = L_2 - \frac{L^2}{N_{11}};$$

$$[L_3 \cdot 2] = L_3 - \frac{L_1^2}{N_{11}} - \frac{[L_2 \cdot 1]^2}{[N_{22} \cdot 1]};$$

в действительной, т. е в матричной, форме получим

$$[N_{22}\cdot 1]=N_{22}-N_{21}Q_{22}N_{12};$$

$$[L_2\cdot 1]=L_2-L_1^*Q_{11}L_1;$$

$$[L_3\cdot 2]=L_3-L_1^*Q_{11}L_1-[L_2\cdot 1]^*[Q_{22}\cdot 1][L_2\cdot 1].$$

Подобным образом находим

$$[B^*B\cdot 1]=B^*B-\frac{B^*AA^*B}{N_{11}}=B^*B-B^*AQ_{11}A^*B;$$

$$[B^*L\cdot 1]=B^*L-\frac{(B^*L)^2}{A^*A}=B^*L-B^*LQ_{11}L^*B.$$

Операторы преобразований блочной матрицы. Из разложений

$$[N_{22}\cdot 1]=N_{22}-N_{12}Q_{11}N_{12}=N_{22}-N_{12}\rho_{22};$$

$$[B^*B\cdot 1]=B^*B-B^*AQ_{A^*A}A^*B=B^*B-B^*A\rho_{A^*B};$$

$$[L_2\cdot 1]=L_2-L_1^*Q_{11}L_1=L_2-L_1\rho_{11}$$

следует, что

$$\rho_{12}=Q_{11}N_{12},\quad \rho_{A^*B}-Q_{A^*A}A^*B,\quad \rho_{12}-Q_{11}L_1$$

— операторы, преобразующие блочную матрицу N в квазитреугольную в $П$-способе.

Аналогично можно построить операторы в K-способе.

Модель уравнительных операций по способу двух групп. Предполагается, что двухгрупповая матрица построена. Тогда, объединяя параметрический и коррелатный способы, модель содержит:

1) нормальные уравнения

$$N_{11}x_1+N_{12}x_2=y_1;$$

$$N_{21}x_1+N_{22}x_2=y_2;$$

2) эквивалентные уравнения

$$N_{11}x_1+N_{12}x_2=y_1;$$

$$[N_{22}\cdot 1]\,x_2=[y_2\cdot 1];$$

3) элиминационные строки:

$$\overline{x}_2=[N_{22}\cdot 1]^{-1}[y_2\cdot 1]=[Q_{22}\cdot 1][y_2\cdot 1];$$

$$\overline{x}_1=-N_{11}^{-1}N_{12}\overline{x}_2+N_{11}^{-1}y_1=-Q_{11}N_{12}\overline{x}_2+Q_{11}y_1;$$

4) формулу минимума

$$V^*V_{\min}=[y_3\cdot 2];$$

5) дисперсию отдельного измерения

$$\sigma_y^2=d^{-1}V^*V_{\min},$$

полагая в соответствии с видом уравнения, что $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ — подвекторы вектора параметров $\bar{x}$ или вектора коррелат K; y_1 и y_2 — подвекторы вектора свободных членов L или вектора невязок W.

Примеры решения уравнений по способу двух групп

1. Способ Бесселя комбинации параметрического способа с коррелатным*. Пусть

$$Ax = l;$$
$$Bx = U$$

— начальные уравнения соответственно в $П$- и $К$-способах. Положив, что объединенная матрица

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

переопределена на величину

$$d = n + r = k,$$

получим уравнения ошибок и невязок

$$\left.\begin{aligned} A\delta x - l &= V; \\ B\delta x &= -W, \end{aligned}\right\} \tag{22.1}$$

где

$$\delta x = \bar{x} - x'.$$

Подчинив уравнения предписанию

$$V^* V = \min,$$

составим функцию Лагранжа

$$2\Phi = V^* V = (A\delta x - l)^2 + 2K^* (B\delta x + W) = \min. \tag{22.2}$$

Тогда под условием

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta x} = 0,$$

получим одно уравнение

$$A^* A\delta x - A^* l + B^* K = 0 \tag{22.3}$$

с двумя неизвестными x и k.

---

* Такой способ описан в работе [42] средствами обычной алгебры.

Припишем к уравнению (22.3) второе уравнение из (22.1); получится два уравнения

$$AA^*\delta x - A^*l + B^*K = 0;$$
$$B\delta x + W = 0$$

с двумя неизвестными.

Построим блочную матрицу

$$\begin{bmatrix} A^*A & B^* & A^*l \\ B & 0 & W \end{bmatrix}.$$

Умножив первую строку этой матрицы слева на $-BQ$, где ($Q = (A^*A)^{-1}$, и сложив со второй строкой, найдем преобразованную матрицу

$$\begin{bmatrix} AA^* & B^* & A^*l \\ & -BQB^* & W + BQA^*l \end{bmatrix}$$

относительно уравнений

$$A^*A\delta x + B^*K - A^*l = 0;$$
$$BQB^*K + W + BQA^*l = 0$$

или

$$\begin{gathered} A^*A\delta x + B^*K - A^*l = 0; \\ B_0B^*K + W_0 = 0, \end{gathered} \tag{22.4}$$

где

$$B_0 = BQ; \qquad W_0 = W + BQA^*l = W + B_0A^*l.$$

К решению уравнений (22.4) по способу двух групп приводит формула

$$\overline{\delta x} = -B_0^*K + QA^*l, \tag{22.5}$$

полагая при этом, что

$$-K = Q_0W_0; \quad Q_0 = (B_0B^*)^{-1}; \quad B_0^* = QB^*; \quad Q = (A^*A)^{-1}.$$

Формула (22.5) содержит векторы:

первичных поправок

$$\overline{\delta x}' = QA^*l,$$

вторичных поправок

$$\overline{\delta x}'' = -B_0K,$$

окончательных поправок

$$\overline{\delta x} = \overline{\delta x}' + \overline{\delta x}''.$$

Следовательно,

$$\bar{x} = x' + \bar{\delta}x$$

— уравновешенный вектор.

К формулам минимума по способу двух групп приводят блочные матрицы

$$\begin{bmatrix} A^*A & A^*l \\ l^*A & l^*l \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} B_0B^* & W^* \\ W & 0 \end{bmatrix},$$

в преобразованной форме имеющие вид:

$$\begin{bmatrix} A^*A & A^*l \\ & l^*l - l^*AQA^*l \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} B_0B^* & W^* \\ & W_0^*Q_0W_0 \end{bmatrix}.$$

Откуда находим:

1. $(V^*V)'_{\min} = l^*l - l^*AQA^*l$;
2. $(V^*V)''_{\min} = -W_0^*Q_0W_0 = -W_0^*K = -K^*W_0$;
3. $V^*V_{\min} = (V^*V)'_{\min} + (V^*V)''_{\min}$.

Следовательно,

$$\sigma^2 = d^{-1}VV_{\min}$$

— дисперсия отдельного измерения $(d = n + r - k)$.

К формуле веса функции уравновешенного вектора по способу двух групп приводит блочная матрица

$$\begin{bmatrix} A^*A & B^* & f \\ B & 0 & 0 \\ f^* & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

в преобразованной форме

$$\begin{bmatrix} A^*A & B^* & f \\ & -BQB^* & BQf \\ & & -f^*Qf - f^*QB^*Q_0BQf \end{bmatrix}.$$

Отсюда следуют формулы обратных весов:

1-й группы

$$P_{F_{\mathrm{I}}}^{-1} = f^*Qf; \qquad Q = (A^*A)^{-1},$$

2-й группы

$$P_{F_{\mathrm{II}}}^{-1} = f^*B_0Q_0B_0^*f; \qquad B_0 = QB^*, \ B_0^* = BQ,$$

сумма из которых

$$P_F^{-1} = f^*Qf + f^*B_0Q_0B_0^*f, \qquad Q_0 = (BQB^*)^{-1}$$

— обратный вес функции $F = f\bar{x}$.

2. Способ двух групп Крюгера-Урмаева обработки триангуляционной системы. Пусть задана центральная система (рис. 21), в которой возникли условия:

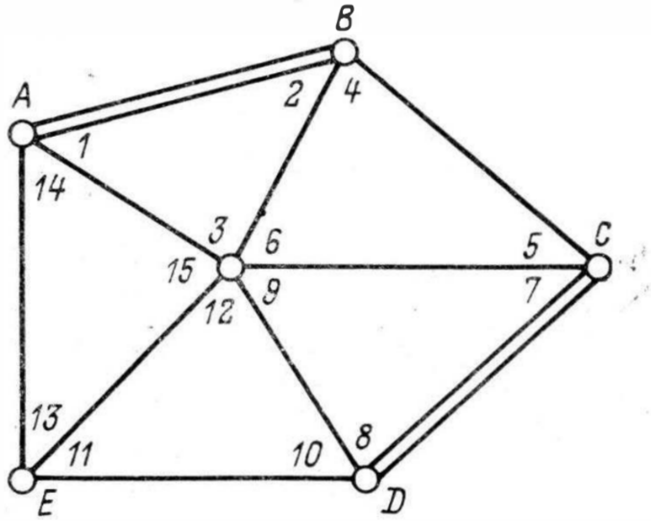

Рис. 21.

треугольников

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + w_1 = 0$$

$$b_4v_4 + b_5v_5 + b_6v_6 + w_2 = 0$$

$$c_7v_7 + c_8v_8 + c_9v_9 + w_3 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

горизонта

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3 + \alpha_4v_4 + \alpha_5v_5 + \alpha_6v_6 + \cdots + w_\alpha = 0,$$

полюса

$$\beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \beta_3v_3 + \beta_4v_4 + \beta_5v_5 + \beta_6v_6 + \cdots + w_\beta = 0,$$

сторон

$$\gamma_1v_1 + \gamma_2v_2 + \gamma_3v_3 + \gamma_4v_4 + \gamma_5v_5 + \gamma_6v_6 + \cdots + w_\gamma = 0.$$

Отнесем в первую группу условия треугольников, во вторую — остальные условия.

Система из двух групп условий характеризуется **блочной матрицей**

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & & & & \cdots \\
\hline
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \cdots \\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \cdots \\
\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & \cdots
\end{array}\right],$$

где верхний блок содержит коэффициенты условий первой группы, нижний — коэффициенты второй группы.

Произведение

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & \ldots & \\
\hline
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \ldots & \\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \ldots & \\
\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & \ldots & \ldots
\end{array}\right]\cdot
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & & & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\
1 & & & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\
1 & & & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\
 & 1 & & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\
 & 1 & & \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \\
 & 1 & & \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right]$$

приводит к матрице

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
3E_{33} & & & \sum\limits_1^3 \alpha & \sum\limits_1^3 \beta & \sum\limits_1^3 \gamma \\
 & 3E_{33} & & \sum\limits_4^6 \alpha & \sum\limits_4^6 \beta & \sum\limits_4^6 \gamma \\
 & & \ldots & \ldots & & \ldots \\
\hline
\sum\limits_1^3 \alpha & \sum\limits_4^6 \alpha & \ldots & [\alpha\alpha] & [\alpha\beta] & [\alpha\gamma] \\
\sum\limits_1^3 \beta & \sum\limits_4^6 \beta & \ldots & [\beta\alpha] & [\beta\beta] & [\beta\gamma] \\
\sum\limits_1^3 \gamma & \sum\limits_3^6 \gamma & \ldots & [\gamma\alpha] & [\gamma\beta] & [\gamma\gamma]
\end{array}\right]$$

системы нормальных уравнений коррелат при совместном решении этих уравнений.

Блочная матрица

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
3E_{33} & & & & & & w_1 \\
 & 3E_{33} & & & & & w_2 \\
 & & \ldots & & & & \\
\hline
 & & & [AA] & [AB] & [AC] & w_\alpha \\
 & & & [AB] & [BB] & [BC] & w_\beta \\
 & & & [AC] & [BC] & [CC] & w_\gamma
\end{array}\right]$$

— двухгрупповая матрица Крюгера — Урмаева. В этой матрице подматрицы по главной диагонали не связаны между собой. Поэтому решение второй группы уравнений не зависит от решения первой группы уравнений.

Блок-матрица первой группы уравнений ортогональная и соответственно приводит к системе независимых нормальных уравнений коррелат

$$\begin{aligned}3k_1+w_1&=0\\ 3k_2+w_2&=0\\ 3k_3+w_3&=0\\ \ldots&\ldots,\end{aligned}$$

число которых r_1. Следовательно,

$$k_1=-\frac{1}{3}w_1,$$

$$k_2=-\frac{1}{3}w_2,$$

$$k_3=-\frac{1}{3}w_3$$

— значения коррелат и соответственно

$$v_1'=v_2'=v_3'=-\frac{1}{3}w_1,$$

$$v_4'=v_5'=v_6'=-\frac{1}{3}w_2,$$

$$v_7'=v_8'=v_9'=-\frac{1}{3}w_3$$

— значения первой группы поправок.

Построение диагональной блок-матрицы 2-й группы уравнений

Вспомогательные коррелаты. Обратимся к формуле

$$-\rho_{AB^*}=Q_{AA^*}AB^*.$$

Так как

$$Q_{AA^*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}E_{33} & \\ & \frac{1}{3}E_{33}\\ & \ldots\end{bmatrix};\qquad AB^*=\begin{bmatrix}\sum\limits_1^3\alpha & \sum\limits_1^3\beta & \sum\limits_1^3\gamma\\ \sum\limits_4^6\alpha & \sum\limits_4^6\beta & \sum\limits_4^6\gamma\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{bmatrix},$$

то

$$-\rho_{AB^*}=Q_{AA^*}AB^*,$$

$$-\begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\ldots\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23}\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sum\limits_1^3\alpha & \frac{1}{3}\sum\limits_1^3\beta & \frac{1}{3}\sum\limits_1^3\gamma\ldots\\ \frac{1}{3}\sum\limits_4^6\alpha & \frac{1}{3}\sum\limits_4^6\beta & \frac{1}{3}\sum\limits_4^6\gamma\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\rho_{11} = -\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}\alpha; \quad \rho_{12} = -\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}\beta, \quad \rho_{13} = -\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}\gamma;$$

$$\rho_{21} = -\frac{1}{3}\sum_{4}^{6}\alpha, \quad \rho_{22} = -\frac{1}{3}\sum_{4}^{6}\beta, \quad \rho_{23} = -\frac{1}{3}\sum_{4}^{6}\gamma$$

— переходные, или вспомогательные коррелаты.

Элементы матрицы 2-й группы. По формуле

$$B' = B^* - A\rho_{AB^*}$$

находим элементы

$$\begin{array}{ccc}
A_1 = \alpha_1 + \rho_{11} & B_1 = \beta_1 + \rho_{12} & C_1 = \gamma_1 + \rho_{13} \\
A_2 = \alpha_2 + \rho_{11} & B_2 = \beta_2 + \rho_{12} & C_2 = \gamma_2 + \rho_{13} \\
A_3 = \alpha_3 + \rho_{11} & B_3 = \beta_3 + \rho_{12} & C_3 = \gamma_3 + \rho_{13} \\
\hline
\sum_{1}^{3} A = 0 & \sum_{1}^{3} B = 0 & \sum_{1}^{3} C = 0 \\
A_4 = \alpha_4 + \rho_{12} & B_4 = \beta_4 + \rho_{22} & C_4 = \gamma_4 + \rho_{23} \\
A_5 = \alpha_5 + \rho_{12} & B_5 = \beta_5 + \rho_{22} & C_5 = \gamma_5 + \rho_{23} \\
A_6 = \alpha_6 + \rho_{12} & B_6 = \beta_6 + \rho_{22} & C_6 = \gamma_6 + \rho_{23} \\
\hline
\sum_{4}^{6} A = 0 & \sum_{4}^{6} B = 0 & \sum_{4}^{6} C = 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots,
\end{array}$$

совокупность из которых удовлетворяет условиям ортогональности

$$[aA] = [aB] = [aC] = \cdots = 0;$$
$$[bA] = [bB] = [bC] = \cdots = 0;$$
$$[cA] = [cB] = [cC] = \cdots = 0$$

и, следовательно, условиям независимости уравнений 1-й и 2-й групп.

Диагональная блок-матрица 2-й группы. Так как

$$[BB^* \cdot 1] = B\,(B^* - A^*\rho_{AB^*}) = BB^{*\prime},$$

то $BB^{*\prime}$ — диагональная блок-матрица системы нормальных уравнений коррелат в преобразованной форме.

Вектор невязок 2-й группы. По формуле

$$[W_2 \cdot 1] = W_2 - W_1\rho_W$$

находим, что

$$[W_2 \cdot 1] = W_2,$$

так как вектор невязок 1-й группы введен в уравнения этой группы.

Система нормальных уравнений 2-й группы. Диагональная блок-матрица 2-й группы — матрица системы нормальных уравнений коррелат

$$\left.\begin{aligned} [AA]\,k''_1 + [AB]\,k''_2 + [AC]\,k''_3 + W_\alpha = 0; \\ [AB]\,k''_1 + [BB]\,k''_2 + [BC]\,k''_3 + W_\beta = 0; \\ [AC]\,k''_1 + [BC]\,k''_2 + [CC]\,k''_3 + W_\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (22.6)$$

2-й группы.

Вектор коррелат 2-й группы. Совместное решение системы (22.6) приводит к значениям коррелат

$$\begin{array}{llll} k''_1 = -\dfrac{[AB]}{[AA]} & k''_2 - \dfrac{[AC]}{[AA]} & k''_3 - \dfrac{W_\alpha}{[AA]} & - \cdots; \\ k''_2 = & -\dfrac{[BC\cdot 1]}{[BB\cdot 1]} & k''_3 - \dfrac{[W_\beta\cdot 1]}{[BB\cdot 1]}; & \\ k''_3 = & & -\dfrac{[W_\gamma\cdot 2]}{[CC\cdot 2]} & \end{array}$$

и, следовательно, к вектору коррелат

$$k_{II} = (k''_1,\ k''_2,\ k''_3, \ldots)$$

2-й группы.

2-я группа поправок. Формула

$$V = B^* K$$

по ν-й строке

$$v''_\nu = A_\nu k''_1 + B_\nu k''_2 + C_\nu k''_3 + \cdots$$

доставляет вторичные поправки и, следовательно, вектор поправок v'' 2-й группы.

Результаты уравновешивания по способу двух групп. Вектор окончательных поправок

$$v = v' + v''.$$

Соотношение Пифагора

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Условие ортогональности

$$V_1^* V_2 = V_2^* V_1 = 0.$$

Условие Лежандра

$$[v^2] = [vv] = \min.$$

Ошибка отдельного измерения

$$\sigma = \sqrt{\frac{[vv]}{r}}.$$

Числовой пример уравновешивания центральной системы по способу двух групп Крюгера — Урмаева*

По схеме возникают:

1) пять условий треугольников

$$(1)+(2)+(3)+w_1=0;$$
$$(4)+(5)+(6)+w_2=0;$$
$$(7)+(8)+(9)+w_3=0;$$
$$(10)+(11)+(12)+w_4=0;$$
$$(13)+(14)+(15)+w_5=0;$$

2) условие горизонта

$$(3)+(6)+(9)+(12)+(15)+w_6=0;$$

3) условие полюса

$$\frac{\sin 2 \sin 5 \sin 8 \sin 11 \sin 14}{\sin 1 \sin 4 \sin 7 \sin 10 \sin 13}=1$$

и соответственно уравнение полюса

$$\Delta_1(1)+\Delta_2(2)-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)-\Delta_7(7)+\Delta_8(8)-\Delta_{10}(10)+$$
$$+\Delta_{11}(11)-\Delta_{13}(13)+\Delta_{14}(14)+w_7=0;$$

4) условие сторон

$$\frac{a \sin 3 \sin 5 \sin 8}{b \sin 1 \sin 4 \sin 9}=1$$

и соответственно уравнение сторон

$$-\Delta_1(1)+\Delta_3(3)-\Delta_4(4)+\Delta_5(5)+\Delta_8(8)-\Delta_9(9)+w_8=0.$$

Первая таблица вычислений. В табл. 22 записаны измеренные углы, найдены невязки, делением на 3 получены первичные поправки и приведены предварительно исправленные углы. Здесь же приведены вторичные поправки и вторично исправленные углы по предварительно исправленным углам, невязкам и значениям пе-

* Пример решен доц., канд. техн. наук Б. И. Беляевым.

Таблица 22

№ угла	Измеренные углы	Первичные поправки, с	Первично исправленные углы, с	Вторичные поправки, с	Вторично исправленные углы, с
1 2 3	52°29′51,4″ 57 34 54,8 69 55 16,0	—0,8 —0,7 —0,7	50,6 54,1 15,3	—5,2 —5,6 +10,8	45,4 48,5 26,1
	180 00 02,2	—2,2		0	00,0
4 5 6	49 51 10,4 47 12 20,7 82 56 20,8	2,7 2,7 2,7	12,1 24,4 23,5	—8,7 +9,1 —0,4	03,4 33,5 23,1
	179 59 51,9	8,1		0	00,0
7 8 9	58 08 29,8 41 53 21,4 79 58 05,7	1,0 1,1 1,0	30,8 22,5 06,7	+3,0 +6,3 —9,3	33,8 28,8 57,4
	159 59 56,9	3,1		0	00,0
10 11 12	46 25 53,0 73 11 29,9 60 22 33,4	1,3 1,3 1,2	54,3 31,1 40,6	+9,5 —6,6 —2,9	03,8 24,5 37,7
	179 59 56,3	3,7		0	00,0
13 14 15	59 10 19,7 54 02 10,2 66 47 38,2	—2,7 —2,7 —2,7	17,0 07,5 35,5	+8,3 —8,7 +0,4	25,3 58,8 35,9
	180 00 08,1	—8,1		0	00,0

$\lg b = 3{,}451\ 6416$; $\lg a = 3{,}564\ 7228$

ремен логарифмов. По этим данным получена вторая группа условий:

$$(3)+(6)+(9)+(12)+(15)+1{,}6=0;$$

$$-1{,}62(1)\ +1{,}34(2)\ -1{,}78(4)\ +1{,}95(5)\ -1{,}31(7)\ +2{,}35(8)-$$
$$-2{,}0(8)\ -1{,}26(13)\ +1{,}53(14)+2{,}33=0;$$

$$-1{,}62(1)\ +0{,}77(3)\ -1{,}78(4)\ +1{,}95(5)\ +2{,}35(8)$$
$$-0{,}38(9)\ -67{,}93=0.$$

Вторая таблица вычислений. В табл. 23 показан процесс преобразований коэффициентов условных уравнений второй группы,

Таблица 23

№ угла	Коэффициенты 2-й группы			Преобразованные коэффициенты 2-й группы			
	α	β	γ	A	B	C	S
1		—1,62	—1,62	—1	—1,527	—1,337	—3,864
2		1,34		—1	1,433	0,283	0,716
3	1		0,77	2	0,093	1,053	3,146
ρ	$-\frac{1}{3}$	0,093	0,283				
Контроль				0	0	0	0
4		—1,78	—1,78	—1	—1,837	—1,837	—4,673
5		1,95	1,95	—1	1,893	1,893	2,787
6	1			2	—0,059	—0,057	1,886
ρ	$-\frac{1}{3}$	—0,057	—0,057				
Контроль				0	0	0	0
7		—1,31		—1	—1,656	—0,656	—3,314
8		2,35	3,35	—1	2,003	1,694	2,698
9	1		—0,38	2	0,347	—1,036	0,617
ρ	$-\frac{1}{3}$	—0,347	—0,656				
Контроль				0	0	0	0
10		—2		—1	—1,547		—2,517
11		0,64		—1	1,093		0,093
12	1			2	0,453		2,453
ρ	$-\frac{1}{3}$						
Контроль				0	0		0
13		—1,26		—1	—1,35		—2,35
14		1,53		—1	1,44		0,44
15				2	—0,09		1,91
ρ	$-\frac{1}{3}$						
Контроль				0	0		0
[A				30,0	0,156	—0,12	30,036
[B					25,931	14,347	40,434
[C						14,311	28,535

причем в условном уравнении горизонта дробные коэффициенты $^1/_3$, $^2/_3$ сведены к целым числам умножением на 3.

В конце таблицы помещены коэффициенты нормальных уравнений коррелат. Из решения последних получены значения коррелат

$$k_1 = -0{,}087; \quad k_2 = -6{,}086; \quad k_3 = +10{,}847$$

и найдены значения вторичных поправок. Эти поправки помещены в табл. 22 и там же приведены уравновешенные значения углов в секундах.

В итоге вычислений произведена оценка отдельного измерения

$$\sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} = \sqrt{\frac{808{,}98}{8}} = \pm 10''{,}0,$$

где

$$[v^2] = [v'^2] + [v''^2] = 808{,}98$$

— сумма квадратов первичных и вторичных поправок.

Итерационные процессы

Определения. Итерация — неоднократно повторяемая счетная операция для получения искомой величины, в алгебраическом смысле итерация — определение корня уравнения

$$y = f(x)$$

последовательным приближением. При известных условиях предполагается, что, итерируя это уравнение, можно получить значение корня с любой степенью приближения.

В противоположность прямым способам решения систем линейных уравнений, таким как способ Гаусса, Крамера и др., существуют различные итерационные способы, два из которых целесообразны при механизированной системе счета.

Способ Якоби. Система нормальных уравнений

$$1)\quad [aa]\,x_1 + [ab]\,x_2 + [ac]\,x_3 = [al];$$

$$[ab]\,x_1 + [bb]\,x_2 + [bc]\,x_3 = [bl];$$

$$[ac]\,x_1 + [bc]\,x_2 + [cc]\,x_3 = [cl]$$

делением на квадратичные коэффициенты перейдет в систему

$$2)\quad x_1 = \frac{[ab]}{[aa]}\quad x_2 + \frac{[ac]}{[aa]}\quad x_3 = \frac{[al]}{[aa]};$$

$$\frac{[ab]}{[bb]}\,x_1+x_2+\frac{[bc]}{[bb]}\,x_3=\frac{[bl]}{[bb]};$$
$$\frac{[ac]}{[cc]}\,x_1+\frac{[bc]}{[cc]}\,x_2+x_3=\frac{[cl]}{[cc]}$$

или

$$3)\quad \begin{aligned} x_1+A_2x_2+A_3x_3&=A_1;\\ B_1x_1+x_2+B_3x_3&=B_l;\\ C_1x_1+C_2x_2+x_3&=C_l, \end{aligned}$$

где A, B, C — коэффициенты и свободные члены системы 2.

Из уравнений 3 получим систему

$$4)\quad \begin{aligned} x_1&=-A_2x_2-A_3x_3+A_l;\\ x_2&=-B_1x_1-B_3x_3+B_l;\\ x_3&=-C_1x_1-C_2x_2+C_l, \end{aligned}$$

по которой производится процесс последовательных приближений к искомым корням системы 1.

Полагая *в первом приближении* значения:

$$5)\quad x_1'=A_l=\frac{[al]}{[aa]};$$
$$x_2'=B_l=\frac{[bl]}{[bb]};$$
$$x_3'=C_l=\frac{[cl]}{[cc]}$$

и подставляя эти значения в систему 4, получаем *вторые приближения*

$$6)\quad \begin{aligned} x_1''&=-x_1'-A_2x_2'-A_3x_3';\\ x_2''&=-x_2'-B_1x_1'-B_3x_3';\\ x_3''&=-x_3'-C_1x_1'-C_2x_2'. \end{aligned}$$

Подстановка вторых приближений в систему 4 приводит к *третьим приближениям* и т. д.

Процесс приближений заканчивается, когда разностью между последовательными значениями x_i и x_{i+1} можно пренебречь. Соотношения 4 суть формулы Якоби, выражающие процесс *простой итерации*. Особенность этих формул состоит в том, что ошибка, допущенная в некотором приближении, может влиять на число шагов (приближений), но не влияет (в принципе) на конечный результат. Но ошибка, допущенная при переходе от системы 1 к системе 2, приводит к неверному решению.

Схему итеративного процесса по способу Якоби подсказывает матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{[ab]}{[aa]} & \frac{[ac]}{[aa]} & \frac{[al]}{[aa]} \\ \frac{[ab]}{[bb]} & 1 & \frac{[bc]}{[bb]} & \frac{[bl]}{[bb]} \\ \frac{[ac]}{[cc]} & \frac{[bc]}{[cc]} & 1 & \frac{[cl]}{[cc]} \end{bmatrix},$$

приведенная к виду

$$\begin{bmatrix} 1 & A_2 & A_3 & L_1 \\ B_1 & 1 & B_3 & L_2 \\ C_1 & C_2 & 1 & L_3 \end{bmatrix}.$$

Пример. По коэффициентам и свободным членам заданной системы

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26;$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7;$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$$

строим матрицу Якоби

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}12 & -0{,}12 & 3{,}25 \\ -0{,}20 & 1 & 0{,}20 & 1{,}40 \\ -0{,}20 & 0{,}20 & 1 & 1{,}40 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь этой матрицей, находим приближения

x'	3,25	1,40	1,40
x''	2,90	1,03	1,03
x'''	2,99	1,03	1,03

и, следовательно, корни

$$x_1 = 3{,}0; \qquad x_2 = 1{,}0; \qquad x_3 = 1{,}0,$$

удовлетворяющие заданной системе.

Условия сходимости процесса итерации по способу Якоби. Если система нормальных уравнений составлена правильно, то определитель Грама системы больше нуля и сходимость системы всегда обеспечена. Но темп сходимости зависит от соотношения между квадратичными и симметричными коэффициентами: чем меньше последние, тем быстрее сходимость и наоборот.

В общем случае, т. е. в случае несимметричных и симметричных матриц, сходимость гарантирована, если

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots + |a_{ii+1}| + |a_{ii+1}| + |a_{in}|$$

для всех i.

Модифицируя способ Якоби, можно ускорить сходимость, пользуясь следующим способом.

Способ Гаусса — Зейделя. В этом способе к первым приближениям приводят формулы

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad + L_1;\\
x_2^{(1)} &= B_1 x_1^{(1)} + \cdots \qquad\quad + L_2;\\
x_3^{(1)} &= C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_2^{(1)} + \cdots + L_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Последующие приближения находятся по формулам

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= A_1 x_1^{(k)} + A_2 x_2^{(k)} + A_3 x_3^{(k)} + L_1;\\
x_2^{(k+1)} &= B_1 x_1^{(k+1)} + B_2 x_2^{(k)} + B_3 x_3^{(k)} + L_2;\\
x_3^{(k+1)} &= C_1 x_1^{(k+1)} + C_2 x_2^{(k+1)} + C_3 x_3^{(k)} + L_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

удобным для машинного счета.

Пример. Корни

$$x=3, \qquad y=2, \qquad z=1$$

системы

$$
\begin{aligned}
2x - y + z &= 5;\\
x + 3y - 2z &= 7;\\
x + 2y - 3z &= 10
\end{aligned}
$$

получены последовательными приближениями при

$$x = y = z = 0$$

из первого уравнения

$$x = \frac{5 + y - z}{2} = \frac{5}{2};$$

при

$$x = \frac{5}{2}, \qquad z = 0;$$

из второго уравнения

$$y = \frac{7 - x + 2z}{3} = \frac{3}{2}$$

при

$$x = \frac{5}{2}, \qquad y = \frac{3}{2};$$

из третьего уравнения

$$z = \frac{10 - x - 2y}{3} = \frac{3}{2}.$$

Пользуясь значениями

$$x=\frac{5}{2}; \qquad y=\frac{5}{2}; \qquad z=\frac{3}{2},$$

следующее приближение дает корни

$$x=\frac{10}{3}=3{,}33; \qquad y=\frac{16}{9}=1{,}78; \qquad z=\frac{28}{27}=1{,}04$$

или

$$x=3; \qquad y=1; \qquad z=1,$$

приведенные в начале примера.

ГЛАВА VII

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

§ 23. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Вводные сведения. Известно, что со времен Лапласа, Лежандра и Гаусса метод наименьших квадратов является неотъемлемой частью геодезии и астрономии. В связи же с работами А. А. Маркова в 20-х годах нашего столетия метод наименьших квадратов включен в математическую статистику как важная и естественная часть теории оценок результатов измерений и наблюдений. В капитальном труде С. Р. Рао содержится специальная глава, из которой следует, что к оценке неизвестных параметров в линейной модели приводит теория метода наименьших квадратов Гаусса—Маркова [30].

В своем труде Рао, опираясь на теорию матриц и векторных пространств, описывает несколько различных подходов к теории оценок, предлагает обобщенный подход, охватывающий все практические ситуации, заменяет различные модели одной моделью и обслуживает задачи оценок и проверок гипотез по всей общности.

В аналогичном плане изложена теория метода наименьших квадратов в работе Ю. В. Линника [23].

Маркшейдерские исследования и математическая статистика. Геодезическая и маркшейдерская практика тесно связана с различного рода исследованиями в полевой и лабораторной обстановке.

Исходя из данных опыта и теоретических предпосылок, маркшейдер пользуется стандартными формулами, выражающими общие закономерности исследуемых явлений. В эти формулы могут входить известные постоянные — константы, не зависящие от условий эксперимента, и некоторые вводимые исследователем параметры, остающиеся неизвестными только в условиях данного эксперимента.

В таких случаях связь между независимой переменной, ее функцией, известными величинами (константами и параметрами) может быть выражена вполне определенным соотношением $y=f(x)$.

Однако в большинстве случаев объект исследования представляет настолько сложную задачу, что теоретически весьма затруднительно и даже невозможно построить общую формулу, описывающую математическую связь между переменными. При такой ситуации в качестве исходной возникает следующая задача математической статистики.

Интерполяция. Результаты измерений и наблюдений всегда выражаются дискретным множеством неупорядоченных значений и в наглядной форме определяются множеством точек, распределение которых отражает некоторую статистическую совокупность.

Между тем функция, которая интересует экспериментатора, определяется для непрерывного интервала переменной. Практически, однако, функция всегда табулируется независимо от того, является ли табулирование результатом вычислений или результатом измерений и наблюдений. Табулирование приводит к задаче определения неизвестной функции в точках, расположенных между значениями, приведенными в таблице. Это та проблема интерполяции, с которой связано определение по ряду данных значений математического выражения искомой функции.

Эмпирические формулы. Теория интерполяции служит основой построения приближенных функций. В узком смысле практика этой теории сводится к построению графика функции по ряду дискретных точек. В широком плане практика этой теории устанавливает возможность равномерного приближения непрерывной функции, при котором разность между приближающей и приближаемой функциями во всех точках рассматриваемой области не превосходит по абсолютному значению наперед заданной величины (по теореме Вейерштрасса). Такая практика связана с весьма громоздкими вычислениями и не всегда обеспечивает хорошее приближение функции [14].

В практике геодезических и маркшейдерских исследований к наиболее удобным способам приближений приводят *П*- и *К*-модели, построенные методом наименьших квадратов. По схеме той и другой модели можно построить эмпирические формулы не только в том случае, когда математические связи между переменными вовсе не известны, но и тогда, когда в исследования включаются сложные формулы, воспользоваться которыми затруднительно.

Экстраполяция. Эмпирическая формула, даже вполне обоснованная для данных физических условий эксперимента, не устанавливает универсальной закономерности исследуемого явления и не обладает общностью на всем пространстве рассматриваемого явления.

Эмпирическая формула имеет силу только для тех значений аргумента, которые лежат в промежутке опытных данных. Выход за пределы данного промежутка приводит к процессу экстраполяции и может привести к неправильному выводу. Поэтому пользоваться эмпирической формулой на всем пространстве возможного процесса относительно значений, лежащем за пределами опыта, нет формальных оснований. Тем не менее практика применения эмпирических формул за пределами опытов проверяет их значимость на дополнительных опытах и часто приводит к ценным результатам.

Корреляция и регрессия. В статистических исследованиях маркшейдера центральными являются:

1) взаимозависимость между несколькими величинами, не обязательно между всеми;

2) зависимость одной или нескольких величин от остальных.

Соответственно предполагается, что возникает два типа задач, к которым относятся линейные корреляция и регрессия.

Основоположником теории корреляции и регрессии является Гальтон (Великобритания). Теория корреляций развита Пирсоном и его учеником Юлом (Великобритания).

В статистической терминологии для этих типов задач не существует четкого различия. В ряде исследований полагают, что «уравнение регрессии» целесообразно заменять более строгим и точным термином «уравнение корреляционной связи». Имеет место и другая точка зрения: Кендалл и Стьюарт исследование взаимозависимости относят к теории корреляции, изучение зависимости — к теории регрессии [18, 37].

Теоретически и практически два типа указанных задач естественно и логично рассматривать как разновидности одной задачи, в которой сохраняется общность и различие между ними. К такому обобщению приводит *П*-модель.

Параметрическая модель в статистике. Существенная особенность параметрической модели обработки геодезических построений состоит в том, что схема этой модели полностью совпадает со статистической схемой Гаусса — Маркова, описанной Рао [30].

Рассматривая по Рао последовательность решения статистических задач методом наименьших квадратов, легко обнаружить, что если в *П*-модели исходные матрицы A и P, а также векторы x и l заменить соответственно матрицами X, E и векторами β, V, то получим схему Гаусса — Маркова в обозначениях Рао, реализующую модель

$$(Y,\ X\beta,\ \sigma^2 E).$$

К этой же модели редуцируется модель общего вида

$$(Y,\ X\beta,\ \sigma^2 P)$$

подходящим преобразованием вектора Y.

Виды эмпирических формул. Многие явления природы математически характеризуются одной из трех основных зависимостей: степенной, показательной, гармонической.

Общая формула степенной функции имеет вид

$$y-k=a(x-h)^n.$$

Если $n=1$, то формула соответствует прямой линии

$$y=ax+b$$

или

$$y=ax.$$

Если $n>0$, то уравнение принадлежит к параболическому виду

$$y-k=a(x-h)^n$$

с вершиной в точке (h, k). К тому же виду относятся частные формулы

$$y=ax^n; \quad y=ax^n+b; \quad y=cx^2+bx+a.$$

Если $n<0$, то формула принадлежит к гиперболическому виду

$$y-k=a(x-h)^{-n}$$

с центром в точке (h, k). К этому же виду относятся частные формулы

$$y=\frac{a}{x^n}; \quad y=\frac{a}{x^n}+b; \quad xy=bx+ay.$$

Последняя формула приводится к виду

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1.$$

Показательная зависимость выражается формулой

$$y=ab^x$$

или

$$y=ab^{kx},$$

а также гармонической формулой

$$y=a\sin(nx+b).$$

Преобразование уравнений кривых в уравнения прямых. Воспользовавшись различными системами координат с функциональными шкалами на осях, уравнения нелинейных форм можно обратить в линейные.

Так, например, уравнение

$$y=a+bx^2$$

переходит в уравнение

$$y=a+bu,$$

полагая, что $u=x^2$. Уравнение

$$y=a+\frac{b}{x}$$

приводится к линейному виду

$$y=a+bu$$

подстановкой

$$u=\frac{1}{x}.$$

Уравнение

$$xy = bx + ay$$

делением на xy и подстановкой

$$u = \frac{1}{x}; \qquad v = \frac{1}{y}$$

сводится к виду

$$1 = au + bv.$$

Во многих случаях удобно строить эмпирическую формулу не для данных величин, а для их логарифмов. Так, например, уравнение

$$y - k = a\,(x - h)^n$$

в результате логарифмирования

$$\lg (y - k) = \lg a + n \lg (x - h)$$

и подстановки

$$v = \lg (y - k), \qquad u = \lg (x - h)$$

переходит в уравнение

$$v = \lg a + nu.$$

Показательная функция

$$y = ab^{kx}$$

переходит в линейную

$$\lg y = kx \lg b + \lg a.$$

Графическое описание эмпирической зависимости. Во всех случаях, когда требуется построить эмпирическую формулу, рекомендуется предварительно вычертить в прямоугольных координатах по данным опыта график прямой или кривой с тем, чтобы иметь общее представление о характере эмпирической формулы. Точки на графике выразят некоторый разброс, т. е. случайные отклонения от предполагаемой или видимой закономерности, обусловленные неизбежными при всяком опыте ошибками измерений и наблюдений.

Если расположение геометрического места точек имеет линейный характер, то в простейших случаях в качестве эмпирической формулы можно принять уравнение прямой

$$y = ax + b.$$

Если же расположение точек указывает на более сложную зависимость, то обращаются к степенной или параболической функции

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k.$$

Теоретически предполагается, что через любые n точек с координатами x_i и y_i всегда можно проводить кривую, аналитически выражаемую полиномом степени $n-1$, так, чтобы она в точности проходила через каждую из этих точек. Однако подобный путь не приводит к цели, так как случайное расположение точек на графике является отражением статистического распределения результатов опыта. Но пользуясь методом наименьших квадратов можно сгладить случайные отклонения и наилучшим образом выразить общий характер зависимости y от x.

Способы построения эмпирических формул интерполированием

Схема интерполирования. Последовательность формул

1) $Xa=Y$; 4) $X^*Xa-X^*Y=0$;

2) $Xa-Y=V$; 5) $\bar{a}=(X^*X)^{-1}X^*Y$;

3) $X^*V=0$; 6) $V^*V_{\min}=Y^*Y-Y^*X\bar{a}$

служит схемой определения параметров эмпирических функций линейного

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k \tag{23.1}$$

и параболического вида

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2^2+\cdots+a_kx_k^k. \tag{23.2}$$

Начальные матрицы. Соответственно двум видам функций по экспериментальным данным возникает два вида прямоугольных матриц

$$X=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12}\ldots x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22}\ldots x_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1 & x_{n1} & x_{n2}\ldots x_{nk} \end{bmatrix}; \qquad X=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12}^2\ldots x_{1k}^k \\ 1 & x_{21} & x_{22}^2\ldots x_{2k}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1 & x_{n1} & x_{n2}^2\ldots x_{nk}^k \end{bmatrix}$$

размера $n\times(k+1)$, переопределенных на величину

$$d=n-k-1.$$

В обоих случаях

$$Y=(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n)$$

— измеренный, или табулированный вектор;

$$a=(a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_k) \tag{23.3}$$

— вектор искомых параметров.

Нормальные матрицы. К определению вектора (23.3) приводят матрицы нормального вида:

1.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} n & [x_1] & [x_2] & \ldots [x_k] & [y] \\ [x_1] & [x_1x_2] & [x_1x_2] & \ldots [x_1x_k] & [x_1y] \\ [x_2] & [x_2x_1] & [x_2x_2] & \ldots [x_2x_k] & [x_2y] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [x_k] & [x_kx_1] & [x_kx_2] & \ldots [x_kx_k] & [x_ky] \\ \hline [y] & [x_1y] & [x_2y] & \ldots [x_ky] & [yy] \end{array}\right], \tag{23.4}$$

если функция линейная:

2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} n & [x] & [x^2] & \ldots [x^k] & [y] \\ [x] & [x^2] & [x^3] & \ldots [x^{k+1}] & [xy] \\ [x^2] & [x^3] & [x^4] & \ldots [x^{k+2}] & [x^2y] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [x^k] & [x^{k+1}] & [x^{k+2}] & \ldots [x^{2k}] & [x^ky] \\ \hline [y] & [xy] & [x^2y] & \ldots [x^2y] & [yy] \end{array}\right], \tag{23.5}$$

если функция параболическая.

Треугольные матрицы. Формула

$$N = S_1^* S_2$$

приводит к произведению треугольных матриц:

1. в линейном случае

$$\begin{bmatrix} n & & \\ [x_1] & [x_1x_1\cdot 1] \ldots [x_1y\cdot 1] & \\ [x_2] & [x_2x_1\cdot 2] \ldots [x_2y\cdot 2] & \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{[x_1]}{n} & \dfrac{[x^2]}{n} \ldots \dfrac{[y]}{n} \\ & 1 & \dfrac{[x_1x_2\cdot 1]}{[x_1x_1\cdot 1]} \ldots \dfrac{[x_1y\cdot 1]}{[x_1x_1\cdot 1]} \\ & & 1 \quad \ldots \dfrac{[x_2y\cdot 2]}{[x_2x_2\cdot 2]} \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix}, \tag{23.6}$$

2) в параболическом случае

$$\begin{bmatrix} n & & & \\ [x] & [x^2\cdot 1] \ldots & & \\ [x^2] & [x^3\cdot 1] & [x^4\cdot 2] \ldots [x^2y\cdot 2] & \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{[x]}{n} & \dfrac{[x^2]}{n} \ldots \dfrac{[y]}{n} \\ & 1 & \dfrac{[x^3\cdot 1]}{[x^2\cdot 1]} \ldots \dfrac{[xy\cdot 1]}{[x^2\cdot 1]} \\ & & 1 \quad \ldots \dfrac{[x^2y\cdot 1]}{[x^4\cdot 2]} \\ & & \cdots \end{bmatrix}. \tag{23.7}$$

Элиминационные системы. К составляющим вектора параметров (23.3) приводят формулы

$$a_0 = -\frac{[x_1]}{n}a_1 - \frac{[x_2]}{n}a_2 - \ldots - \frac{[x_k]}{n}a_k + \frac{[y]}{n};$$

$$a_1 = -\frac{[x_1x_2\cdot 1]}{[x_1x_1\cdot 1]}a_2 - \ldots - \frac{[x_1x_k\cdot 1]}{[x_1x_1\cdot 1]}a_k + \frac{[x_1y\cdot 1]}{[x_1x_1\cdot 1]};$$

$$a_2 = -\frac{[x_2x_k\cdot 2]}{[x_2x_2\cdot 2]}a_k + \frac{[x_2y\cdot 2]}{[x_2x_2\cdot 2]};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_k = \frac{[x_ky\cdot k]}{[x_kx_k\cdot k]}$$

в случае линейного интерполирования и формулы

$$a_0 = \frac{[x]}{n}a_1 - \frac{[x^2]}{n}a_2 - \ldots - \frac{[x^k]}{n}a_k + \frac{[y]}{n};$$

$$a_1 = -\frac{[x^3\cdot 1]}{[x^2\cdot 1]}a_2 - \ldots - \frac{[x^{k+2}\cdot 2]}{[x^4\cdot 2]}a_k + \frac{[x^2y\cdot 2]}{[x^4\cdot 2]};$$

$$a_2 = -\frac{[x^{k+2}\cdot 2]}{[x^4\cdot 2]}a_k + \frac{[x^2y\cdot 2]}{[x^4\cdot 2]};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_k = \frac{[x^ky\cdot k]}{[x^{2k}\cdot k]}$$

в случае параболического интерполирования.

Оценка интерполирования. Так как

$$[vv]_{\min} = [yy\cdot k] = [yy] - \frac{[y]^2}{n} - \frac{[x_1y\cdot 1]^2}{[x_1x_1\cdot 1]} - $$
$$- \frac{[x_2y\cdot 2]^2}{[x_2x_2\cdot 2]} - \ldots - \frac{[x_ky\cdot (k-1)]^2}{[x_kx_k\cdot (k-1)]},$$

для линейной формы:

$$[vv]_{\min} = [yy\cdot k] = [yy] - \frac{[y]^2}{n} - \frac{[xy\cdot 1]^2}{[x^2\cdot 1]} - \ldots - \frac{[x^ky\cdot k]^2}{[x^{2k}\cdot k]},$$

для параболической формы, то

$$\sigma = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k-1}}$$

— ошибка интерполирования.

Пример [14]. Построить эмпирические формулы:

$$1.\ y = a_0 + a_1x, \qquad 2.\ y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2^2$$

по следующим данным:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1,3	1,4	1,1	1,3	1,8	1,6	2,3

Начальная матрица. Первая формула — частное выражение второй. Поэтому построим начальную матрицу X по данным x и y второй формулы. Имеем

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 & x_7^2 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 1{,}4 & 1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}1 & 1{,}3 & 1{,}8 & 1{,}6 & 2{,}3 \end{bmatrix}.$$

Нормальная матрица. Произведение

$$X^*X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 1{,}4 & 1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}1 & 1{,}3 & 1{,}8 & 1{,}6 & 2{,}3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1{,}4 \\ 1 & 1 & 1 & 1{,}3 \\ 1 & 2 & 4 & 1{,}4 \\ 1 & 3 & 9 & 1{,}4 \\ 1 & 4 & 16 & 1{,}3 \\ 1 & 5 & 25 & 1{,}8 \\ 1 & 6 & 36 & 1{,}6 \\ 1 & 7 & 49 & 2{,}3 \end{bmatrix}$$

приводит к квадратной матрице

$$\begin{bmatrix} 8 & 28 & 140 & 12{,}2 \\ 28 & 140 & 784 & 47{,}3 \\ 140 & 784 & 4676 & 252{,}9 \\ 12{,}2 & 47{,}3 & 252{,}9 & 19{,}6 \end{bmatrix}$$

нормального вида.

Эмпирические формулы. По схеме Гаусса

$$\left[\begin{array}{cc|c} 8 & 28 & 12{,}2 \\ 28 & 140 & 47{,}3 \\ 1{,}22 & 47{,}3 & 19{,}6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 8 & & \\ 28 & 42 & \\ 1{,}22 & 4{,}6 & 1{,}3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3{,}5 & 1{,}525 \\ & 1 & 0{,}109 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

находим параметры $a_1 = 0{,}109$; $a_0 = 1{,}142$ эмпирической формулы

$$y = 1{,}142 + 0{,}109x$$

линейного вида.

По аналогичной схеме

$$\begin{bmatrix} 8 & 28 & 140 & 12{,}2 \\ 28 & 140 & 784 & 47{,}5 \\ 140 & 784 & 4676 & 252{,}9 \\ 12{,}2 & 47{,}3 & 252{,}9 & 19{,}6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & & & \\ 28 & 42 & & \\ 140 & 294 & 168 & \\ 12{,}2 & 4{,}6 & 7{,}2 & 0{,}31 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3{,}5 & 17{,}5 & 1{,}525 \\ & 1 & 7{,}0 & 0{,}109 \\ & & 1 & 0{,}043 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

получим параметры

$$a_2 = 0{,}043; \quad a_1 = 0{,}190; \quad a_0 = 1{,}441$$

эмпирической формулы

$$y = 1{,}441 + 0{,}190x + 0{,}043x^2$$

параболического вида.

Оценка интерполирования. Так как

$$1.\ [vv] = 0{,}60,$$

если формула линейная,

$$2.\ [vv] = 0{,}31,$$

если формула параболическая, то

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{0{,}60}{5}} \approx 10{,}33;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{0{,}31}{4}} \approx \pm 0{,}28$$

— ошибки интерполирования.

§ 24. ОСНОВЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

О символах корреляционных соотношений. В этой области статистики временами трудно достигнуть однозначных и гибких обозначений. В такого рода обозначениях выражаются формулы корреляций взаимосвязанных и зависимых величин в обозначениях английского статистика Юла (1907 г.). В этих обозначениях уяснение физического смысла формул корреляционных соотношений вызывает серьезные затруднения. Между тем для геодезистов и маркшейдеров не составляет труда усвоить способ построения и содержание корреляционных формул в гауссовых обозначениях, т. е. в символах, принятых в классической литературе по способу наименьших квадратов.

Два вида корреляционных матриц. При оценке тесноты связи следует различать:

1) взаимные связи между переменными x_i и y_j функции

$$\bar{y}=f(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

2) зависимость между функцией $\bar{y}$ и переменными $x_1, \ldots, x_k$ этой функции.

К первому случаю относится корреляционная матрица

$$C=\begin{Bmatrix} 1 & r_{12} \ldots r_{1k} \\ r_{21} & 1 \ldots r_{2k} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_{k1} & r_{k2} \ldots r_{kk} \end{Bmatrix}, \tag{24.1}$$

ко второму — корреляционная матрица

$$C'=\begin{Bmatrix} 1 & r_{12} \ldots r_{1k} r_{1y} \\ r_{21} & 1 \ldots r_{2k} r_{2y} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_{k1} & r_{k_2} \ldots r_{kk} r_{ky} \\ r_{1y} & r_{2y} \ldots r_{kk} r_{k+1} \end{Bmatrix},$$

окаймленная коэффициентами $r_{1y}, \ldots, r_{1k}$.

Корреляционные матрицы C и C' в треугольной форме. Выразим диагональные элементы матриц C и C' в символах

$$r_{11}=r_{22}=\cdots=r_{kk}=1, \quad r_{k+1}=0.$$

Тогда получим матрицы

$$C_1=\begin{Bmatrix} r_{11} & r_{12} \ldots r_{1k} \\ & [r_{22}\cdot 1] \ldots [r_{2k}\cdot 1] \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & [r_{kk}\cdot(k-1)] \end{Bmatrix}; \tag{24.3}$$

$$C_1'=\begin{Bmatrix} r_{11} & r_{12} \ldots r_{1k} r_{1y} \\ & [r_{22}\cdot 1] \ldots [r_{2k}\cdot 1]\ [r_{2y}\cdot 1] \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & [r_{kk}\cdot(k-1)]\ [r_{ky}\cdot(k\cdot 1)] \\ & -[r_{k+1}\cdot k] \end{Bmatrix}; \tag{24.4}$$

эквивалентные матрицам (24.1) и (24.2).

Определители матриц C_1 и C_1'. Из (24.3) имеем определитель

$$|C|=r_{11}[r_{22}\cdot 1] \ldots [r_{kk}\cdot(k-1)]$$

матрицы (24.1).

Из (24.4) получим определитель

$$|C'|=r_{11}[r_{22}\cdot 1] \ldots [r_{kk}\cdot(k-1)]\ [r_{k+1}\cdot k]$$

матрицы C.

Множественный коэффициент корреляции. Отношение определителей

$$R^2_{y0x}=\frac{|C'|}{|C|}=\frac{\begin{vmatrix} r_{11}r_{12}\ldots r_{1k}r_{1y} \\ r_{21}r_{22}\ldots r_{2k}r_{2y} \\ \ldots\ldots\ldots \\ r_{k1}r_{k2}\ldots r_{kk}r_{ky} \\ r_{1y}r_{2y}\ldots r_{ky}r_{k+1,y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_{11}r_{12}\ldots r_{1k} \\ r_{21}r_{22}\ldots r_{2k} \\ \ldots\ldots \\ r_{k1}r_{k2}\ldots r_{kk} \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} r_{11}r_{12}\ldots r_{1k}r_{1y} \\ [r_{22}\cdot 1]\ldots[r_{2k}\cdot 1]\ [r_{2y}\cdot 1] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [r_{kk}\cdot(k-1)]\ [r_{ky}\cdot(k-1)] \\ -[r_{k+1,y}k] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_{11}r_{12}\ldots r_{1k} \\ [r_{22}\cdot 1]\ldots[r_{2y}\cdot 1] \\ \ldots\ldots\ldots \\ [r_{ky}\cdot(k-1)] \end{vmatrix}},$$

т. е.

$$R^2_{yx}=\frac{r_{11}\,[r_{22}\cdot 1]\,[r_{kk}\cdot(k-1)]\,[r_{k+1,y}\cdot k]}{r_{11}\,[r_{22}\cdot 1]\,[r_{kk}\cdot(k-1)]} \tag{24.5}$$

приводит к формуле

$$R^2_{yx}=-[r_{k+1}\cdot k]=$$

$$=-\left(r_{k+1}-\frac{r^2_{1y}}{r_{11}}-\frac{[r_{2y}\cdot 1]^2}{[r_{22}\cdot 1[}-\cdots-\frac{[r_{ky}\cdot(k-1)]^2}{[r_{kk}\cdot(k-1)]}\right)=$$

$$=\frac{r^2_{1y}}{r_{11}}+\frac{[r_{2y}\cdot 1]^2}{[r_{22}\cdot 1]}+\cdots+\frac{[r_{ky}\cdot(k-1)]^2}{[r_{kk}\cdot(k-1)]}. \tag{24.6}$$

множественного коэффициента корреляции между переменной y и всеми переменными $x_1, x_2,\ldots,x_k$ в совокупности.

Слагаемые в (24.6) означают:

$$\frac{r^2_{1y}}{r_{11}}=r^2_{1y};$$

$$\left.\begin{aligned} &[r_{2y}\cdot 1]=r_{2y}-\frac{r_{22}}{r_{11}}\,r_{1y}=r_{2y}-r_{12}r_{1y}; \\ &[r_{3y}\cdot 2]=r_{3y}-\frac{r_{13}}{r_{11}}\,r_{1y}-\frac{[r_{32}\cdot 1]}{[r_{22}\cdot 1]}\,[r_{2y}\cdot 1]= \\ &\qquad =r_{3y}-r_{13}r_{1y}-\frac{[r_{32}\cdot 1]}{[r_{22}\cdot 1]}\,[r_{2y}\cdot 1]; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{24.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &[r_{22}\cdot 1]=r_{22}-\frac{r^2_{21}}{r_{11}}=1-r^2_{21}; \\ &[r_{33}\cdot 2]=r_{33}-\frac{r^2_{31}}{r_{11}}-\frac{[r_{32}\cdot 1]^2}{[r_{22}\cdot 1]}=1-r^2_{31}-\frac{[r_{32}\cdot 1]^2}{[r_{22}\cdot 1]}; \\ &[r_{32}\cdot 1]=r_{32}-\frac{r_{31}r_{22}}{r_{11}}=r_{32}-r_{31}r_{12};\quad [r_{23}\cdot 1]=r_{23}-r_{21}r_{13}; \\ &\qquad\qquad [r_{32}\cdot 1]=[r_{23}\cdot 1]; \\ &[r_{43}\cdot 1]=r_{43}-\frac{r_{41}r_{13}}{r_{11}}=r_{43}-r_{41}r_{13}; \\ &\qquad\qquad [r_{43}\cdot 1]=[r_{34}\cdot 1]; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{24.8}$$

Символы вида (24.7) выражают связь между переменными y и $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а символы вида (24.8) — связь между переменными $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Частные формулы множественной корреляции выведены для двух случаев.

1. Связь между переменной y и одной переменной x

$$R = r_{1y};$$

двумя переменными x_1 и x_2

$$R^2 = r_{1y}^2 + \frac{[r_{2y}\cdot 1]^2}{[r_2\cdot 1]},$$

или

$$R = \frac{r_{1y}^2 + r_{2y}^2 - 2r_{1y}r_{2y}r_{12}}{1 - r_{12}^2};$$

тремя переменными

$$R^2 = r_{1y}^2 + \frac{[r_{2y}\cdot 1]^2}{[r_2\cdot 1]} + \frac{[r_{3y}\cdot 2]^2}{[r_3\cdot 2]}$$

или

$$R^2 = \{r_{1y}^2(1 - r_{23}^2) + r_{2y}^2(1 - r_{13}^2) + r_{3y}^2(1 - r_{12}^2) -$$
$$-2r_1r_2(r_{12} - r_{13}r_{23}) - 2r_{1y}r_{3y}(r_{13} - r_{12}r_{32}) -$$
$$-2r_{2y}r_{3y}(r_{23} - r_{21}r_{31})\} : \{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}\}.$$

Если все переменные x_j взаимно независимы, то в этом случае для любых x_i и $y_j r_{ij} = 0$. Тогда

$$R^2 = r_{1y}^2 + r_{2y}^2 + \ldots + r_{ky}^2. \qquad (24.9)$$

Следовательно, квадрат коэффициента множественной корреляции равен сумме квадратов коэффициентов корреляции между y и каждым x_j.

2. Связь между x_j и остальными переменными x. Определитель

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12}\ldots r_{1k} \\ r_{21} & r_{22}\ldots r_{2k} \\ r_{k1} & r_{k2}\ldots r_{kk} \end{vmatrix}$$

в треугольном выражении

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12}\ldots r_{1k} & \\ & [r_{22}\cdot 1]\ldots[r_{2k}\cdot 1] & \\ & \cdot\ \cdot\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ & & [r_{kk}\cdot(k-1)] \end{vmatrix}$$

приводит к формуле

$$R^2_{x_k x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}} = [r_{kk} \cdot (k-1)] = r_{kk} - \frac{r^2_{1k}}{r_{11}} - \frac{[r_{2k} \cdot 1]^2}{[r_{22} \cdot 1]} - \ldots -$$

$$- \cdots - \frac{[r_{kk} \cdot (k-1)]^2}{[r_{kk} \cdot (k-1)]} = 1 - r^2_{1k} - \frac{[r_{2k} \cdot 1]^2}{[r_{22} \cdot 1]} - \cdots - \frac{[r_{kk} \cdot (k-1)]^2}{[r_{kk} \cdot 1]} \quad (24.10)$$

коэффициента корреляции между последней переменной x_k и всеми предшествующими переменными $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Перенумеровав переменные x_j, любую из них можно отнести к последней переменной x_k.

Примеры. По формуле

$$r^2_{3.12} = 1 - [r_{33} \cdot 2]$$

имеем меру линейной связи между x_3 и x_1, x_2:

$$r^2_{3.12} = 1 - \left(r_{33} - \frac{r^2_{31}}{r_{11}} - \frac{[r_{32} \cdot 1]^2}{[r_{22} \cdot 1]} \right) = r^2_{31} + \frac{[r_{32} \cdot 1]^2}{[r_{22} \cdot 1]} = \frac{r^2_{31} [r_{22} \cdot 1] + [r_{32} \cdot 1]^2}{[r_{22} \cdot 1]} =$$

$$= \frac{r^2_{31} (1 - r^2_{13}) + (r_{32} - r_{13} r_{12})^2}{1 - r^2_{12}} = \frac{r^2_{31} + r^2_{32} - 2 r_{31} r_{21} r_{23}}{1 - r^2_{12}}. \quad (24.11)$$

По этой же формуле заменой индексов получим меру линейной связи:

между x_2 и x_1, x_2

$$r^2_{2.13} = \frac{r^2_{21} + r^2_{23} - 2 r_{21} r_{31} r_{23}}{1 - r^2_{13}}; \quad (24.12)$$

между x_1 и x_2, x_3

$$r^2_{1.23} = \frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2 r_{12} r_{13} r_{23}}{1 - r^2_{23}}. \quad (24.13)$$

Формулы (24.12), (24.13) можно получить непосредственно вращением матрицы C вокруг побочной диагонали и преобразованием такой матрицы к треугольной форме. Так, например, вращая матрицу C, будем иметь

$$\begin{bmatrix} r_{33} & r_{32} & r_{31} \\ r_{23} & r_{22} & r_{21} \\ r_{13} & r_{12} & r_{11} \end{bmatrix}.$$

Тогда из треугольной матрицы

$$\begin{bmatrix} r_{33} & r_{32} & r_{31} \\ & [r_{22} \cdot 1] & [r_{21} \cdot 1] \\ & & [r_{11} \cdot 2] \end{bmatrix}$$

следует

$$r_{1.23} = 1 - [r_{11} \cdot 2] = 1 - \left(r_{11} - \frac{r^2_{13}}{r_{23}} - \frac{[r_{12} \cdot 1]^2}{[r_{22} \cdot 1]} \right) =$$

$$= \frac{r^2_{13} [r_{22} \cdot 1] + [r_{12} \cdot 1]^2}{[r_{22} \cdot 1]}. \quad (24.14)$$

Так как

$$[r_{22}\cdot 1]=r_{22}-\frac{r_{23}^2}{r_{33}}=1-r_{23}^2;$$

$$[r_{12}\cdot 1]=r_{12}-\frac{r_{13}r_{23}}{r_{33}}=r_{12}-r_{13}r_{23},$$

то отношение (24.14) приводит к формуле

$$r_{1\cdot 23}=\frac{r_{12}^2+r_{13}^2-2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2},$$

т. е. к формуле (24.13).

Частные коэффициенты корреляции. Допустим, что теснота связи между двумя величинами x_1 и x_2, с одной стороны, и третьей величиной x_3 — с другой, установлена, так что между этими величинами предполагаются известными коэффициенты корреляции

$$r_{12},\ r_{13},\ r_{23} \tag{24.15}$$

трех пар случайных величин

$$x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3 \tag{24.16}$$

вне какой-либо связи с третьей величиной по отношению к каждой паре. С учетом же третьей величины вместо символов (24.15) вводятся символы

$$r_{12.3},\ r_{13.2},\ r_{23.1},$$

где первые два индекса (до точки) относятся к соответствующей паре случайных величин (24.16), а третий (после точки) — к фиксированной величине, влияние которой предусматривается по ходу решения задачи.

Корреляцию между двумя величинами при фиксированных значениях остальных величин называют частной корреляцией.

Если значение корреляции r_{ij} между двумя величинами x_i и x_j при фиксировании третьей величины x_{j+1} уменьшается, то это означает, что взаимная связь величин x_i и x_j возникает частично под воздействием величины x_{j+1}.

Если же частная корреляция мала или равна нулю, то предполагается, что взаимная связь величин x_i и x_j целиком обусловлена влиянием величины x_{i+1}. И, наконец, если частная корреляция $r_{ij.k}$ больше первоначальной r_{ij}, то полагают, что фиксированная величина ослабила или «замаскировала» корреляцию r_{ij}. При всех этих предположениях статистическая зависимость, как бы ни была она сильна, никогда не может установить причинной связи. Вопрос о причинности корреляционных связей имеет внестатистические основания.

Формула частной корреляции, выраженная через множественные коэффициенты корреляции. Пусть форма корреляционной связи

$$\overline{y}_m=f(x_1,\ x_2,\dots,x_k,\quad x_{k+1},\dots,x_m) \tag{24.17}$$

ставится в зависимость от формы связи

$$\bar{y}_k = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k), \tag{24.18}$$

а форма связи

$$\bar{y}_{m-k} = \psi(x_{k+1}, \ldots, x_m)$$

фиксирована.

Тогда частный коэффициент выразится по формуле

$$R_{k(m-k)} = \frac{R_m^2 - R_{m-k}^2}{1 - R_{m-k}^2}, \tag{24.19}$$

где R_m и R_{m-k} — соответственно множественные коэффициенты форм связи (24.17) и (24.18).

Пример частных корреляций. Мера линейной связи между двумя переменными

$$x_2, \ x_3$$

из трех

$$x_1, \ x_2, \ x_3$$

с учетом влияния x_1.

Так как

$$R_3 = 1 - [r_{33} \cdot 2] = \frac{r_{31}^2 + r_{23} - 2r_{21}r_{31}r_{23}}{1 - r_{12}^2};$$

$$R_1^2 = r_{13}^2,$$

то

$$r_{23.1}^2 = \frac{\dfrac{r_{31}^2 + r_{23}^2 - 2r_{21}r_{31}r_{23}}{1 - r_{12}^2} - r_{13}^2}{1 - r_{13}^2} = \frac{(r_{23} - r_{12}r_{13})^2}{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}; \tag{24.20}$$

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}}.$$

Пользуясь формулой (24.20), получим меру линейной связи между x_1 и x_2 при постоянном x

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}; \tag{24.21}$$

между x_1 и x_3 при постоянном x_2

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}}, \tag{24.22}$$

где индексы в правых частях располагаются соответственно индексам в левых.

Формулы вида (24.20) — (24.22) можно получить из соотношения

$$r_{ij\rho}=\frac{-C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}},$$

где C_{ij}, C_{ii}, C_{jj} — миноры определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

матрицы C. Так, например, соотношение

$$r_{13.2}=\frac{C_{13}}{\sqrt{C_{11}C_{33}}},$$

где

$$-C_{13}=\begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ 1 & r_{23} \end{vmatrix}=r_{13}-r_{12}r_{23};\qquad C_{11}=\begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{32} & 1 \end{vmatrix}=1-r_{23}^2$$

$$C_{22}=\begin{vmatrix} 1 & r_{13} \\ r_{31} & 1 \end{vmatrix}=1-r_{13}^2$$

приводит к формуле (24.22).

Формула Юла. Пусть

$$C=\begin{pmatrix} 1 & r_{12}\ldots r_{1\rho} \\ r_{21} & 1\ \ldots r_{2\rho} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_{\rho 1} & r_{\rho 2}\ldots 1 \end{pmatrix}$$

— корреляционная матрица величин

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_\rho.$$

Тогда

1. $1-r^2_{1\,(2,\ldots,\,\rho)}=(1-r^2_{12})(1-r^2_{13.2})\ldots(1-r^2_{1\rho\,(2\ldots\rho-1)});$

2. $r_{12.3}=\dfrac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{(1-r_{13}^2)^{1/2}(1-r_{23}^2)^{1/2}};$

3. $r_{12}=\dfrac{r_{12.3}-r_{13.2}r_{23.1}}{(1-r_{13.2}^2)^{1/2}(1-r_{23.1}^2)^{1/2}};$

4. $r_{12\,(34\ldots\rho-1)}=\dfrac{r_{12\,(3\ldots\rho)}+r_{1\rho\,(2\ldots\rho-1)}\,r_{2\rho\,(13\ldots\rho-1)}}{\left(1-r^2_{1\rho\,(2\ldots\rho-1)}\right)^{1/2}\left(1-r^2_{2\rho\,(13\ldots\rho-1)}\right)^{1/2}}.$

§ 25. ОСНОВЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Понятие линейной регрессии. Такое понятие введено Гальтоном. В современной статистике идея этой теории развивается в целях прогнозирования ожидаемых результатов по заданным статистическим данным.

Так, если

$$x=(x_1,\ x_2,\dots,x_k)\tag{25.1}$$

— заданные или измеренные величины и по ним определяются значения

$$y=(y_1,\ y_2,\dots,y_k),\tag{25.2}$$

то значения (25.2), зависимые от (25.1), называют переменными критериями, а величины (25.1) — независимыми от (25.1), предсказывающими, или прогнозирующими переменными.

При таком соотношении переменных возникает задача построения функции

$$f(x_1,\ x_2,\dots,x_k),$$

называемой предиктором для y.

Наилучшим предиктором f будет такой, при котором соблюдается условие

$$(y-f)=\min.\tag{25.3}$$

В статистическом смысле решение задачи в соответствии с предписанием (25.3), т. е. методом наименьших квадратов, означает определение условного математического ожидания $\bar{y}$ при данном x, т. е. регрессии y на x_1, x_2, ..., x_k.

Условные средние. Обратимся к статистической табл. 24.

Таблица 24

Значения y	Значения x, y при							Σ
	$x=20$	$x=30$	$x=40$	$x=50$	$x=60$	$x=70$	$x=80$	
20	19	5	.	.	.	.	.	24
30	23	116	11	.	.	.	.	150
40	1	41	98	9	.	.	.	149
50	.	4	32	65	7	.	.	108
60	.	1	4	21	36	3	.	65
70	.	.	1	2	11	13	1	28
80	.	.	.	.	1	3	2	6
Σ	43	167	146	97	55	19	3	530

В табл. 24 между значениями x и y или y и x полностью отсутствуют функциональные связи. Такая таблица содержит:

частные распределения

1. y по $x=20$:	x по $y=0$:
$x=20,\ 30,\ 40;$	$y=20,\ 30,\ 40;$
$y=19,\ 23,\ 1;$	$x=19,\ 5,\ 0;$

2. y по $x=30$: | x по $y=30$:

$x=20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60;$ | $y=20,\ 30,\ 40;$

$y=5,\ 116,\ 41,\ 4,\ 1;$ | $x=23,\ 116,\ 11;$

условные средние

$$\bar{y}_1=\frac{19{,}20+23{,}30+1{,}40}{43}=26;\qquad \bar{x}_1=\frac{19{,}20+5{,}30+40{,}0}{24}=22;$$

$$\bar{y}_2=\frac{5{,}20+116{,}30+41{,}40+4{,}50+1{,}60}{167}=33;$$

$$\bar{x}_2=\frac{23{,}20+116{,}30+11{,}40}{150}=29;$$

условные средние по таблице в целом

1. y по x

$x=20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80;$

$\bar{y}_x=26,\ 33,\ 42,\ 52,\ 61,\ 70,\ 77;$

2. x по y

$y=20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 80;$

$\bar{x}_y=22,\ 29,\ 38,\ 47,\ 56,\ 64,\ 71.$

На рис. 22 прямые AA и BB близко проходят относительно координат условных средних.

Уравнения регрессий. Прямые AA и BB, отражающие статистические связи $\bar{y}$ по x и $\bar{x}$ по y, характеризуются уравнениями регрессий в линейной форме:

1. $\bar{y}$ по x | 2. $\bar{x}$ по y

$\bar{y}=ax+b;$ | $\bar{x}=cy+d,$

ни одно из которых не обратимо в другое.

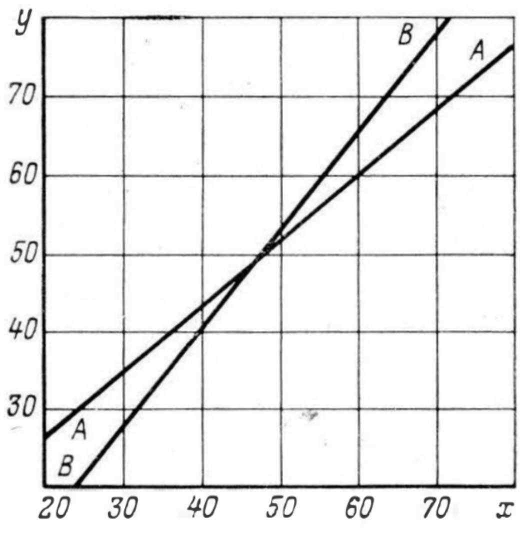

Рис. 22.

В общем случае определение условного математического ожидания $\bar{y}$ при данном x, т. е. регрессии $\bar{y}$ по $x_1,\ x_2,\dots,x_k$, производится по схеме параметрической модели.

Общая модель линейной регрессии. Параметрическая модель линейной регрессии в символах математической статистики сводится к следующей последовательности операций:

1. $Xa=Y;$

8. $V^*V_{\min}=Y^*Y-Y^*Xa;$

2. $Xa-Y=V$;
3. $X^*V=0$;
4. $X^*Xa-X^*Y=0$;
5. $a=QX^*Y$, $Q=(X^*X)^{-1}$;
6. $Xa-Y=V \mid V^* \mid Y^*$;
7. $V^*V_{\min}=-Y^*V$;
9. $V^*V_{\min}=Y^*Y-Y^*XQX^*Y$;
10. $d=n-k$;
11. $\sigma^2=d^{-1}V^*V_{\min}$;
12. $P_a^{-1}=Q$;
13. $P_{\bar{a}}=Q^{-1}=X^*X$;
14. $\sigma_{yj}^2=\sigma^2 Q_{jj}$.

Первые пять формул относятся к определению вектора параметров a, остальные — к оценке этого вектора и его составляющих.

Ортогональная модель линейной регрессии. Процедура планирования эксперимента весьма упрощается, если матрица x^*x — диагональная. Тогда обратная матрица $Q=(x^*x)^{-1}$ — также диагональная. При этом имеет место условие $[x_i x_j]=0$, соответственно которому диагональные элементы матриц

$$x^*x, \qquad (x^*x)^{-1}$$

равны

$$[x_i x_i], \qquad [x_i x_i]^{-1}.$$

В этом случае соотношения в анализе выражаются особенно просто.

§ 26. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

1. Предполагается, что зависимость Y от X выражается линейной функцией вида

$$Xc=Y, \tag{26.1}$$

где

$$X=\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_{12} \end{bmatrix}; \qquad C=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; \qquad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

— матрицы соответственно размеров $n\times 2$, 2×1, $n\times 1$.

Требуется определить параметр c, коэффициенты корреляции $r_{y,x}$, $r_{x,y}$ и линии регрессии y на x, x на y.

По схеме параметрической модели имеем нормальное уравнение

$$X^*Xc-X^*Y=0 \tag{26.2}$$

Так как

$$X^*X=\begin{bmatrix} n & [x] \\ [x] & [x^2] \end{bmatrix}; \qquad X^*Y=\begin{bmatrix} [y] \\ [xy] \end{bmatrix},$$

то получим системы:

1) нормальные

$$\left.\begin{aligned} an+b[x]&=[y] \\ a[x]+b[x^2]&=[xy] \end{aligned}\right\};$$

2) эквивалентные

$$\left.\begin{aligned} an+b[x]&=[y] \\ b[x^2\cdot 1]&+[xy\cdot 1] \end{aligned}\right\};$$

3) элиминационные

$$\left.\begin{aligned} a&=-b\frac{[x]}{n}+\frac{[y]}{n} \\ b&=\frac{[xy\cdot 1]}{[x^2\cdot 1]} \end{aligned}\right\}.$$

Следовательно,

$$c=(a,\ b)$$

— искомый параметр уравнения (26.1).

Выразим нормальное уравнение (26.2) в координатах центра тяжести $(\bar{x}, \bar{y})$. В этих координатах нормальное уравнение примет вид

$$x'^*x'a=x'^*y'$$

или

$$[x'x']\,a=[x'y']. \tag{26.3}$$

Следовательно,

$$a=\frac{[x'y']}{[x'x']} \tag{26.4}$$

— угловой коэффициент уравнения прямой (26.1).

Теснота связи между векторами x' и y' выражается коэффициентом корреляции

$$r_{x,y}=\frac{[x'y']}{\sqrt{[x'x']\,[y'y']}}.$$

Так как

$$[x'x']=n\sigma_x^2, \qquad [y'y']=n\sigma_y^2;$$
$$[x'y']=n\sigma_x\sigma_y r_{xy},$$

то

$$a = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \qquad (26.5)$$

Заменив в формуле (26.3) угловой коэффициент a его значением (26.5), получим прямую

$$(y-\overline{y}) = r_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x}), \qquad (26.6)$$

т. е. линию регрессии y по x.

Если рассматриваемый случай свести к уравнению

$$x = cy + d, \qquad (26.7)$$

т. е. к обратной зависимости между $\overline{x}$ и y, то получим прямую

$$(x-\overline{x}) = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y}), \qquad (26.8)$$

т. е. линию регрессии $\overline{x}$ по y.

Отношение

$$\frac{(x-\overline{x})}{(y-\overline{y})} = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad (26.9)$$

влечет обратное:

$$\frac{(y-\overline{y})}{(x-\overline{x})} = r_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \qquad (26.10)$$

Следовательно, тангенсы углов наклона прямых (26.6) и (26.8)

$$r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \operatorname{tg}\varphi_1;$$

$$r_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \operatorname{tg}\varphi_2$$

различны.

Из соотношения

$$r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot r_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = r_{xy}^2$$

следует, что произведение коэффициентов регрессии равно квадрату коэффициента корреляции и что наклон прямых зависит от коэффициента корреляции и не зависит от ошибок σ_x и σ_y. При функциональной связи между x и y обе прямые регрессии совпадают и поэтому

$$r_{xy}\frac{1}{r_{yx}} = \pm 1.$$

Чем меньше модуль r_{xy}, тем больше расхождение в наклонах прямых.

Если $r_{xy}=0$, то прямые взаимно ортогональны. Причем наклон одной из них равен нулю, наклон другой — $\frac{\pi}{2}$.

2. Пусть регрессия y на x выражается уравнением

$$Y=Xa,$$

где

$$X=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12}\ldots x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22}\ldots x_{2k} \\ . & & \ldots\ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2}\ldots x_{nk} \end{bmatrix}$$

— матрица независимых, или предсказывающих переменных размера $n(k+1)$;

$$Y=(y_1,\ y_2,\ldots,y_n)$$

— вектор зависимых переменных, или переменных критерия;

$$a=(a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_k)$$

— вектор параметров линейных функций вида

$$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k.$$

Требуется определить:

1) вектор a, удовлетворяющий предписанию

$$(Xa-Y)=\min;$$

2) условную дисперсию Y при данном X:

3) меру точности предсказания;

4) множественный коэффициент корреляции.

Решение первого вопроса аналогично определению вектора a при построении эмпирической формулы, поэтому перейдем к решению второго вопроса.

Условная дисперсия вектора $\overline{Y}$ по данным матрицы X. Построим расширенную матрицу

$$X'=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12}\ldots x_{1k} & y_1 \\ 1 & x_{21} & x_{22}\ldots x_{2k} & y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2}\ldots x_{nk} & y_k \end{bmatrix}$$

и выразим эту матрицу в уклонениях от средних. С этой целью построим вектор средних

$$\overline{X}=(1,\ \overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_k,\ \overline{y}).$$

Тогда разность

$$X' - \overline{X} = V$$

выразит матрицу

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \ldots v_{1k} & v_{1y} \\ v_{21} & v_{22} \ldots v_{2k} & v_{2y} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} \ldots v_{nk} & v_{ny} \end{bmatrix}$$

в отклонениях от средних, т. е. от центра тяжести распределения заданных величин.

Далее построим матрицу ковариаций

$$\begin{bmatrix} [v_1v_1] & [v_1v_2] \ldots [v_1v_k] & [v_1v_{1y}] \\ [v_2v_1] & [v_2v_2] \ldots [v_2v_k] & [v_2v_{2y}] \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ [v_kv_1] & [v_kv_2] \ldots [v_kv_k] & [v_kv_{ky}] \\ [v_1v_{1y}] & [v_2v_{2y}] \ldots [v_kv_{ky}] & [v_yv_y] \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\frac{[v_jv_j]}{n} = \sigma_j^2; \qquad \frac{[v_iv_j]}{n} = \sigma_i\sigma_j r_{ij};$$

$$\frac{[v_jv_{jy}]}{n} = \sigma_j\sigma_{jy} r_{jy}; \qquad \frac{[v_yv_y]}{n} = \sigma_y^2,$$

то получим матрицу

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 r_{12} \ldots \sigma_1\sigma_k r_{1k} & \sigma_1\sigma_{1y} \\ \sigma_2\sigma_1 r_{21} & \sigma_2^2 \ldots \sigma_2\sigma_k r_{2k} & \sigma_2\sigma_{2y} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \sigma_k\sigma_1\sigma_{k1} & \sigma_k\sigma_2 r_{2k} \ldots \sigma_k^2 & \sigma_k\sigma_{ky} \\ \sigma_1\sigma_{1y} & \sigma_2\sigma_{2y} \ldots \sigma_k\sigma_{ky} & \sigma_y^2 \end{Bmatrix} \tag{26.11}$$

условных дисперсий вектора Y при данном X.

Сведем матрицу (26.11) к виду

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^2 & \overline{\sigma}_{12} \ldots \overline{\sigma}_{1k} & \overline{\sigma}_{1y} \\ \overline{\sigma}_{21} & \sigma_2^2 \ldots \overline{\sigma}_{2k} & \overline{\sigma}_{2y} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \overline{\sigma}_{k1} & \overline{\sigma}_{k2} \ldots \sigma_k^2 & \overline{\sigma}_{ky} \\ \overline{\sigma}_{1y} & \overline{\sigma}_{2y} \ldots \overline{\sigma}_{ky} & \sigma_y^2 \end{Bmatrix}, \tag{26.12}$$

где

$$\overline{\sigma}_{ij} = \sigma_i\sigma_j r_{ij}.$$

Выразим эту матрицу в треугольной форме

$$\left\{\begin{array}{llll} \sigma_1^2 & \overline{\sigma}_{12} \ldots \overline{\sigma}_{1k} & & \overline{\sigma}_{1y} \\ & [\sigma_2^2 \cdot 1] \, .. \overline{[\sigma_{2k} \cdot 1]} & & \overline{[\sigma_{2y} \cdot 1]} \\ & \cdot \quad \cdot & & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ & & [\sigma_k^2 (k-1)] & \overline{[\sigma_{ky} (k-1)]} \\ & & & [\sigma_y^2 \cdot k] \end{array}\right\}. \tag{26.13}$$

В конце главной диагонали получим формулу

$$\sigma^2_{y/x_{\min}} = [\sigma_y^2 \cdot k] = \sigma_y^2 - \frac{\overline{\sigma}_{1y}^2}{\sigma_1^2} - \frac{\overline{[\sigma_{2y} \cdot 1]}^2}{[\sigma_2^2 \cdot 1]} - \frac{\overline{[\sigma_{ky} \cdot (k-1)]}^2}{[\sigma_k^2 \cdot (k-1)]} \tag{26.14}$$

наименьшей условной дисперсии вектора $\overline{Y}$ по данным матрицы X.

Корреляционное отношение. Положив

$$\frac{\overline{\sigma}_{1y}^2}{\sigma_1^2} + \frac{\overline{[\sigma_{2y} \cdot 1]}^2}{[\sigma_2^2 \cdot 1]} + \cdots + \frac{\overline{[\sigma_{ky} \cdot (k-1)]}^2}{[\sigma_k^2 \cdot (k-1)]} = \sigma_{y/x}^2 \tag{26.15}$$

сведем формулу минимума дисперсии (26.14) к сумме дисперсий

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y/x}^2 + \sigma_V^2, \tag{26.16}$$

т. е. к соотношению Пифагора.

Разделив соотношение (26.16) на дисперсию σ_y^2, получим нормированное выражение

$$1 = \frac{\sigma_{y/x}^2}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_V^2}{\sigma_y^2}$$

или

$$1 = \frac{\sigma_{y/x}^2}{\sigma_y^2} + \eta_{y/x}^2, \tag{26.17}$$

где

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{\sigma_V^2}{\sigma_y^2} \tag{26.18}$$

— корреляционное отношение, выражающее квадрат максимального значения коэффициента корреляции.

Мера точности предсказания определяется по формуле

$$\eta_{y/x}^2 = 1 - \frac{\sigma_{y/x}^2}{\sigma_y^2}. \tag{26.19}$$

Статистический смысл корреляционного отношения. Число (26.18) — положительное и принимает значения в пределах

$$0 \leqslant \eta_{y/x}^2 \leqslant 1.$$

Если $\eta_{y/x}=1$, то $\sigma^2_{y/x}=0$. Тогда все распределение сконцентрировано на кривой регрессии y по x и, следовательно, имеет место однозначная функциональная зависимость y от x.

Если $\sigma_{y/x}=0$, то линия регрессии — горизонтальная прямая, проходящая через центр тяжести распределения. В этом случае величина y не коррелирована с x.

В случае линейной регрессии корреляционное отношение (26.18) равно

$$R^2_{y/x}=1-\frac{\sigma^2_{y/x}}{\sigma^2_y},$$

так что выражает множественный коэффициент корреляции независимо от того, является ли регрессия линейной или нелинейной.

Если регрессия нелинейная, то числа

$$\eta^2_{y/x} \quad \text{и} \quad R^2_{y/x}$$

различны, причем

$$\eta^2_{y/x} \geqslant R^2_{y/x}.$$

Если $\eta_{y/x}=R_{y/x}$, то регрессия y по x точно линейная, и, обратно, если регрессия y по x точно линейная, то $\eta_{y/x}=R_{y/x}$.

Таким образом, мера точности предсказания выражает меру зависимости между

$$y \text{ и } x_1,\ x_2, \ldots, x_k,$$

и эта мера полезна при сравнении различных предсказывающих величин в конкретных задачах.

§ 27. ОСНОВЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Задачи анализа — статистическое описание действия совокупности факторов на испытываемые явления. Математические основы анализа предложены Фишером.

Метод анализа — сравнение средних и соответственно дисперсий средних по данным распределения случайных величин.

Сравнение средних. Пусть

$$x_1, \ldots, x_n; \quad y_1, \ldots, y_n; \quad z_1, \ldots, z_n$$

— независимые (свободные), нормально распределенные измеренные величины. Они получены в одинаковых экспериментальных условиях. Предположим, что все x_i, y_i, z_i имеют одинаковую дисперсию. Возникает вопрос, одинаковы ли средние значения указанных распределений?

К ответу на этот вопрос приводит дисперсионный анализ. Идея этого анализа основана на том, что если x, y, z имеют одинаковое среднее значение, то общая сумма квадратов

$$Q=[(x-M)^2]+[(y-M)^2]+[(z-M)^2],$$

где M — общее выборочное среднее значение всех x_i, y_i, z_i распадается на две составные части

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

из которых первая

$$Q_1 = n_1\,(\bar{x} - M)^2 + n_2\,(\bar{y} - M)^2 + n_3\,(z - M)^2$$

связана с оценкой дисперсии внутри классов, а вторая

$$Q_2 = [(x - \bar{x})^2] + [(y - \bar{y})^2] + [(z - \bar{z})^2]$$

— с оценкой дисперсии между классами. Затем две эти части сравниваются при помощи критерия F.

Вычислив Q_1 и Q_2, получим оценки

$$s_1^2 = \frac{Q_1}{r-1}; \qquad s_2^2 = \frac{Q_2}{N-r},$$

где в знаменателях приведены числа степеней свободы, r — число классов, $N = n_1 + n_2 + n_3$ — сумма весов.

Если величина s_1^2 меньше или немного больше величины s_2^2, то нет оснований считать средние значения в классах различными.

Но если s_1^2 значительно превосходит s_2, то возникает подозрение, что средние значения различны. Чтобы установить, насколько возникшее подозрение является обоснованным, составляют отношение

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(N-r)\,Q_1}{(r-1)\,Q_2}$$

и обращаются к критерию F на том основании, что если все x_i, y_i, z_i независимы и распределены одинаково нормально с одним и тем же средним значением и дисперсией, то указанное отношение подчиняется распределению F.

Критерий F. По Фишеру статистика

$$z = \frac{1}{2}\log F,$$

где

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

— дисперсионное отношение, в котором s_1^2 и s_2^2 получены по n_1 и n_2 наблюдениям, положив, что наблюдения независимы и распределены нормально и что случайная величина

$$\varkappa_1^2 = \frac{(n-1)\,s_1^2}{\sigma_1^2}$$

подчиняется распределению $\varkappa^2$ с $f_1 = n_1 - 1$ степенями свободы, а случайная величина

$$\varkappa_2^2 = \frac{(n_2-1)\,s_2^2}{\sigma_2^2}$$

подчиняется распределению $\varkappa^2$ с $f_2 = n_2 - 1$ степенями свободы.
Если $\sigma_1 = \sigma_2$, то

$$\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_2^2} = \frac{f_1 s_1^2}{f_2 s_2^2}.$$

Для проверки гипотезы $\sigma_1 = \sigma_2$ вычисляют дисперсионное отношение F выборочных дисперсий

$$\sigma_1^2 = \frac{[(x - \overline{x})^2]}{n_1 - 1}; \qquad \sigma_2 = \frac{[(y - \overline{y})^2]}{n_2 - 1}$$

по результатам наблюдений n_1 и n_2.

Однофакторный анализ

Матрица наблюдений. Если наблюдатель, располагая q однотипными приборами, каждый из них измерял один и тот же объект определенным способом в одинаковых физических условиях p раз, то итог всех результатов наблюдений выражается прямоугольной матрицей

$$X = [x_{ij}]$$

размера $q \times p$.

Построим окаймленную матрицу

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \ldots x_{1p} & s'_1 \\ x_{21} & x_{22} \ldots x_{2p} & s'_2 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ x_{q1} & x_{q2} \ldots q_{qp} & s'_p \\ s''_1 & s''_2 \ldots s''_q & s \end{bmatrix}$$

по методу сумм, где $[s''_q] = [s'_p] = [s]$.

Из этой матрицы по столбцам и строкам имеем средние

$$\overline{x}_i = \frac{[s'_q]}{g}, \qquad \overline{x}_j = \frac{[s_p]}{p}, \qquad \overline{\overline{x}} = \frac{[s]}{qp};$$

отклонения от средних

$$v_i = x_i - \overline{x}_i, \quad v_j = x_j - \overline{x}_j, \quad v = x_{ij} - \overline{x};$$

суммы отклонений от средних

$$[v_i] = 0, \quad [v_j] = 0, \quad [v] = 0;$$

суммы квадратов отклонений от средних

$$\theta_1 = [v_i v_i], \quad \theta_2 = [v_j v_j], \quad \theta = [vv];$$

число степеней свободы

$$d_1 = q - 1, \quad d_2 = p - 1, \quad d = qp - 1;$$

дисперсии средних

$$\sigma_q^2 = \frac{[v_i v_i]}{q-1}, \qquad \sigma_p^2 = \frac{[v_j v_j]}{p-1}, \qquad \sigma_s^2 = \frac{[vv]}{qp-1},$$

из которых σ_q^2, σ_p^2 — дисперсии первой и второй выборок.

Математическое ожидание этих выборок равно дисперсии генеральной совокупности σ_0^2, так что

$$M\sigma_q^2 = \sigma_0^2; \qquad M\sigma_p^2 = \sigma_0^2.$$

Отношение

$$\theta = \frac{\sigma_q^2}{\sigma_p^2}$$

выражает показатель достоверности выборок. Такой показатель подчиняется определенному закону распределения, зависящему только от объемов выборок n_1 и n_2. По этим выборкам закон распределения позволяет вычислить вероятность того, что отношение дисперсий превзойдет заданное число θ_1. Если найденная вероятность окажется достаточно малой, то в соответствии с принципом практической невозможности маловероятных событий число θ_1 можно полагать граничным показателем достоверности.

Пусть исходя из общих соображений установлено, что числа

$$p_1 = 0{,}05; \quad p_2 = 0{,}01; \quad p_3 = 0{,}001$$

выражают соответственно редкие, очень редкие и чрезвычайно редкие явления. Тогда при заданных выборках n_1 и n_2 для каждого из указанных трех чисел можно вычислить граничный показатель достоверности, пользуясь отношением

$$\theta = \frac{\sigma_q^2}{\sigma_p^2} \; (\sigma_q^2 > \sigma_p)$$

дисперсий двух выборок из нормальной совокупности.

Схема дисперсионного анализа. В приложениях рекомендуется пользоваться схемой, приведенной в табл. 25.

Таблица 25

Дисперсия	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии
Между классами	Q_1	$d_1 = q - 1$	$\frac{Q_1}{d_1} = s_1^2$
Внутри классов	Q_2	$d_2 = p - 1$	$\frac{Q_2}{d_2} = s_2^2$
По всем наблюдениям	Q	$d = pq - 1$	$\frac{Q}{d} = s^2$

Оценка по критерию Фишера. Величина

$$z = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_q^2}{\sigma_p^2}$$

подчинена распределению Фишера, для которого

$$k_1 = p - 1; \qquad k_2 = p(q - 1)$$

— граничные показатели достоверности.

Точно так же величины

$$z_1 = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_q^2}{s^2}; \qquad z_2 = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_p^2}{s^2}$$

подчинены распределению Фишера полагая, что

$$k_1 = p - 1, \qquad k_2 = pq - 1$$

для распределения z_1 и

$$R_1 = p(q - 1), \qquad k_2 = pq - 1$$

для распределения z_2.

Определив наблюденное значение

$$z_0 = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_q^2}{\sigma_s^2}$$

и пользуясь таблицей распределения Фишера для

$$k_1 = p - 1; \qquad k_2 = p(q - 1),$$

можно найти значение z_1. Тогда случайное расхождение между σ и σ_s^2 имеет место, если

$$z_0 < z_1.$$

В том случае, когда $\sigma_q^2 < \sigma_s^2$, пользуются формулой

$$z = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2},$$

полагая, что

$$k_1 = p(q - 1), \qquad k_2 = p - 1$$

— граничные показатели.

Таблицы граничных показателей помещены в работах [32, 33, 37].

Двухфакторный анализ

1. Матрица наблюдений над признаками или факторами A и B

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} B_1 & & B_2 \ldots B_p \end{array} & \\
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \ldots x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} \ldots x_{2p} \\ \cdots & \cdots \\ x_{q1} & x_{q2} \ldots x_{qp} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_q \end{array}
\end{array}$$

размера $q \times p$, в которой все наблюдения по признаку A делятся на q групп $A_1, A_2, \ldots, A_q$ и по признаку B на p групп $B_1, B_2, \ldots, B_p$ с общим числом наблюдений qp.

2. Матрица наблюдений, окаймленная средними по строкам и столбцам

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & X & & \begin{array}{c}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_p\end{array} \\ \hline \bar{x}_1 & & \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_q & \bar{x} \end{array}\right].$$

3. Тождество из общей и частных сумм квадратов

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

4. Критерии степени значимости расхождений в средних по строкам и столбцам

$$F_A = \frac{(q-1)^{-1} Q_1}{(p-1)(q-1)^{-1} Q_3} = \frac{s_1^2}{s_3^2};$$

$$F_B = \frac{(p-1)^{-1} Q_2}{\{(p-1)(q-1)\}^{-1} Q_3} = \frac{s_2^2}{s_3}.$$

5. Оценка параметра $\sqrt{\sigma^2}$

$$s_2 = \frac{Q}{pq-1} = \frac{\sum\limits_i \sum\limits_j (x_{ij} - \bar{x})^2}{pq-1}.$$

6. Меры систематической изменчивости средних по строкам и столбцам

$$\frac{p-1}{qp}(s_1^2 - s_3^2) = \delta_{i_l}^2;$$

$$\frac{q-1}{qp}(s_2^2 - s_3^2) = \delta_{ik}.$$

7. Доверительные интервалы

$$\bar{x}_i - \bar{x}_j \pm ts_3\sqrt{\frac{2}{p}};$$

$$\bar{x}_i - x_j \pm ts_3\sqrt{\frac{2}{p}}.$$

8. Схема двухфакторного анализа приведена в табл. 26.

Таблица 26

Род дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии
Между средними по строкам	$Q_1 = q[(\bar{x}_i - \bar{x})^2]$	$d_1 = p - 1$	$\frac{Q_1}{d_1} = s_1^2$
Между средними по столбцам	$Q_2 = p[(\bar{x}_j - \bar{x})^2]$	$d_2 = q - 1$	$\frac{Q_2}{d_2} = s_2^2$
Остаточная	$Q_3 = \sum\limits_i \sum\limits_j (x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})$	$d_3 = (p-1)\times$ $\times(q-1)$	$\frac{Q_3}{d_3} = s_3^2$
Общая	$Q = \sum\limits_i \sum\limits_j (x_{ij} - \bar{x})^2$	$d = qp - 1$	$\frac{Q}{d} = s^2$

Распределение, отличное от нормального. В этом случае предполагается, что в каждом классе число n не слишком мало, например, $n \geqslant 4$. При этом предположении d_1 будет существенно меньше, чем d_2. Отсюда следует, что относительная ошибка оценки s_1^2 подвержена значительно бо́льшим случайным колебаниям, чем относительная ошибка оценки s_2^2. Поэтому критерий

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

зависит главным образом от распределения числителя, связанного с распределением элементов матрицы X.

Согласно центральной предельной теореме средние имеют приближенно нормальное распределение даже в том случае, когда распределения отдельных элементов выборок сильно отклоняются от нормального распределения.

При малых n ситуация возникает менее благоприятная. Но даже в случае $n=2$ образование сумм и разностей

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \qquad u_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

с последующим сложением их квадратов в значительной степени выравнивает отклонения от нормальности.

Таким образом, критерием F можно пользоваться даже в том случае, когда остается неизвестным, подчиняются ли результаты наблюдений нормальному распределению или нет.

Связь с критерием t. Для двух рядов наблюдений получаются оценки

$$s_1^2 = Q_1 = n_1(\bar{x} - M)^2 + n_2(\bar{y} - M)^2 =$$
$$= n_1\left(\bar{x} - \frac{n_1\bar{x} + n_2\bar{y}}{n_1 + n_2}\right)^2 + n_2\left(\bar{y} - \frac{n_1\bar{x} + n_2\bar{y}}{n_1 + n_2}\right)^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{x} - \bar{y})^2;$$
$$s_2 = \frac{Q_2}{N-2} = \frac{[(x-\bar{x})^2] + [(y-\bar{y})^2]}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Следовательно,

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(\bar{x} - \bar{y})^2}{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) s_2^2},$$

где правая часть — квадрат статистики t, используемый в критерии Стьюдента. Это означает, что при двух классах критерий F совпадает с двусторонним критерием t. Таким образом, если n_1 и n_2 не слишком малы, например, оба более или равны 4, то двусторонний критерий t можно применить даже в том случае, когда x и y имеют распределение, отличное от нормального.

Корреляция внутри классов. Если каждый класс содержит лишь два наблюдения, то возникает ряд, состоящий из 7 пар наблюдений (x, x'). Для вычисления Q_1 и Q_2 из каждой пары образуют среднее и разность.

Если M — общее среднее всех $\bar{x}$, то

$$Q_1 = 2[(x - \bar{x})^2]; \qquad Q_2 = \frac{1}{2}[\delta^2].$$

Для контроля служит формула

$$Q_1 + Q_2 = Q = \sum[(x - M)^2 + (x' + M)^2].$$

Затем находят

$$s_1^2 = \frac{Q_1}{r-1}, \quad s_2^2 = \frac{Q_2}{r}, \quad s = \frac{Q}{N-1} = \frac{Q_1 + Q_2}{2r-1}.$$

Выборочный коэффициент корреляции внутри классов определяется по формуле

$$r' = \frac{2[(x-M)(x'-M)]}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2}.$$

Если выборочная дисперсия внутри классов равна нулю, то коэффициент r' равен 1. Если же выборочная дисперсия между классами равна нулю, то $r' = -1$, однако практически этого никогда не наблюдается. Если обе выборочные дисперсии приближенно равны друг другу, то величина r' близка к нулю [6, 32, 33, 37].

§ 28. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Задача о перпендикуляре для гиперплоскости. Задачу ортогонального проектирования измеренного вектора y на заданное подпространство n-мерного пространства можно свести к задаче о перпендикуляре для гиперплоскости.

В труде [41] содержание этой задачи формулируется так: в евклидовом пространстве E даны вектор y и гиперплоскость E'', полученная параллельным сдвигом некоторого подпространства E'. Тогда существует разложение

$$y = x + v, \tag{28.1}$$

где x принадлежит гиперплоскости E'', а вектор v ортогонален подпространству E'. Геометрический смысл этого разложения показан на рис. 23, где слагаемые неортогональны. Но если в гипер-

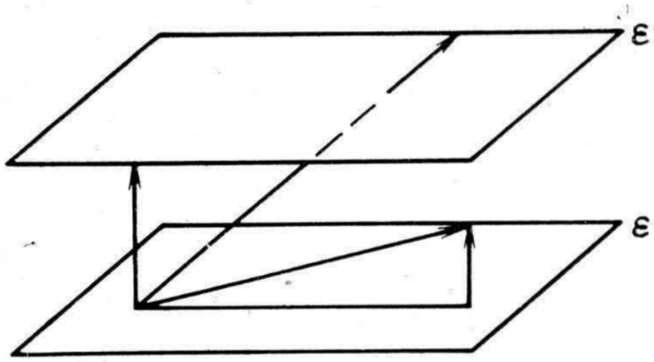

Рис. 23.

плоскости E'' зафиксировать любой вектор y_0 и вычесть его из обеих частей равенства (28.1), то получим задачу о разложении вектора $y - y_0$ на слагаемые $x - y_0$ и v, первое из которых принадлежит подпространству E', а второе — ортогонально к этому подпространству (рис. 24).

Единственность разложения (28.1). Из наличия двух разложений вида

$$y = x_1 + v_1 = x_2 + v_2$$

имели бы

$$0 = (x_1 - x_2) + (v_1 - v_2),$$

где $x_1 - x_2$ принадлежит подпространству E' а $v_1 - v_2$ ортогонально этому подпространству.

Отсюда следует, что

$$x_1-x_2=v_1-v_2=0,$$

т. е. что существует единственность разложения (28.1).

Наличие разложения (28.1) вместе с его единственностью показывает, что все пространство E есть прямая сумма

$$E=E'+E'' \tag{28.2}$$

подпространства E' и его ортогонального дополнения E''. Из этой суммы следует, что если размерность пространства E равна n, а размерность подпространства E' равна k, то размер-

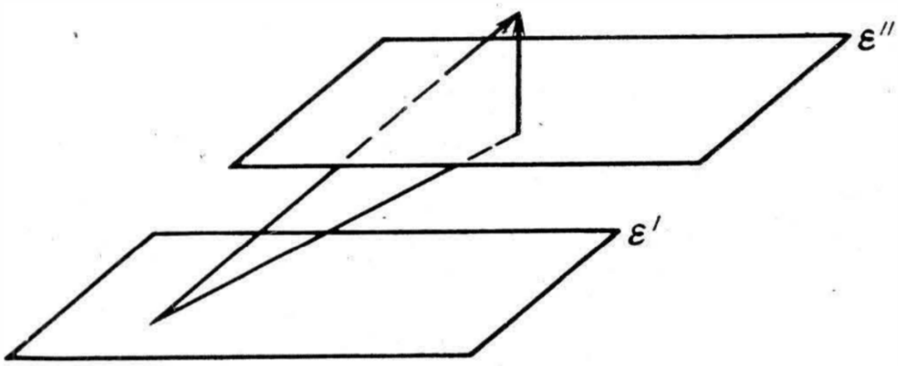

Рис. 24.

ность ортогонального дополнения E'' равна $n-k$, так что размерность прямой суммы (28.2) равна размерности слагаемых E' и E''.

Разложение (28.1) в ортогональном базисе n-мерного евклидова пространства ε на прямую сумму (28.2) влечет за собой соотношение Пифагора

$$y^2=x^2+v^2 \tag{28.3}$$

или

$$[y^2]=[x^2]+[v^2], \tag{28.4}$$

где $[y^2]$ относится ко всему пространству E_n, $[x_2]$ — к подпространству E'_k, $[v^2]$ — к ортогональному дополнению E''_{n-k}.

Разложения частного вида. Задача о перпендикуляре или ортогонального проектирования на гиперплоскость имеет решение в том случае, когда вектор y лежит в подпространстве E'.

В этом случае решение имеет вид

$$y=x+0.$$

Другого решения не существует.

Из соотношения Пифагора (28.3) следует, что справедливо неравенство

$$0\leqslant|v|\leqslant|y|,$$

которое выражает тот факт, что длина перпендикуляра не превосходит длины наклонной.

Случаи, когда в одном из неравенств (28.5) имеет место знак равенства. Равенство $|v|=0$ означает, что вектор y входит в подпространство E'', а равенство $|v|=|y|$ — что вектор y ортогонален подпространству E.

При всяком ином расположении вектора y длина вектора v — величина положительная и всегда меньше, чем длина вектора y.

Неравенство Бесселя. Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — ортонормированный базис в подпространстве E' и

$$x=\sum_{j=1}^{k} a_j x_j.$$

Тогда

$$x^2=\sum_{j=1}^{k} a_j^2.$$

Подставляя значение x в соотношение (28.3), получим

$$y^2=\sum_{j=1}^{k} a_j^2+v^2.$$

В частности для любой конечной ортонормированной системы $e_1,\ldots,e_n$ и любого вектора y имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^2 \leqslant y^2, \tag{28.6}$$

называемое неравенством Бесселя, которое означает, что квадрат длины вектора y не меньше, чем сумма квадратов его проекций на любые k взаимно ортогональных направлений.

Изоморфизм евклидовых пространств. Пространства E' и E'' евклидово изоморфны, если они изоморфны как вещественные линейные пространства и для любой пары векторов x', y' в E' и x'', y'' в E'' выполняется равенство

$$(x',\ y')=(x'',\ y'').$$

Геометрические теоремы, справедливые для пространства E', справедливы и для изоморфного пространства E''.

Всякие два евклидова пространства равной размерности n евклидово изоморфны. Всякая геометрическая теорема, справедливая в n-мерном евклидовом пространстве E_n', справедлива в любом другом n-мерном пространстве E_n''.

Теоремы элементарной геометрии, т. е. в пространстве E_3, остаются справедливыми в любом трехмерном подпространстве любого евклидова пространства. Таким образом, все теоремы элементарной геометрии справедливы в любом евклидовом пространстве.

Метод наименьших квадратов и преобразование линий и поверхностей 2-го порядка к главным осям.

Задача преобразования. Известно, что теория квадратичных форм тесно связана с задачей приведения уравнений кривых и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду. Такая операция в геометрическом смысле означает преобразование к главным осям линий и поверхностей 2-го порядка. Так как главные оси взаимно ортогональны и имеют длину, равную единице, то совокупность из этих осей естественно можно принять за систему прямоугольных координат в евклидовом пространстве любого числа измерений.

Операция приведения к каноническому виду осуществима различными способами. Одним из наиболее простых способов является способ Лагранжа, описанный в курсах высшей алгебры. Покажем, что схема Гаусса решения системы нормальных уравнений есть схема преобразования квадратичных форм к сумме квадратов, т. е. к каноническому виду, и приводит к главным осям автоматически.

Эллипсоиды, возникающие в параметрическом способе. Уравнение ошибок

$$Ax - l = v$$

под условием

$$V^*PV = [pv^2] = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \ldots + p_nv_n^2 = \min.$$

приводит к выражению

$$V^*PV = (Ax - l)^*P(Ax - l) = \min,$$

из которого следует квадратичная форма

$$\begin{aligned} V^*PV &= (x^*A^* - l^*)\,P\,(Ax - l) = \\ &= x^*A^*PAx - x^*A^*Pl - l^*PAx + l^*Pl = \\ &= x^*A^*PAx - 2x^*APl + l^*Pl = \min, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} 2\Phi = [pv^2] &= [paa]\,x_1^2 + 2\,[pab]\,x_1x_2 + \ldots + \\ &+ 2\,[pag]\,x_1x_k - 2\,[pal]\,x_1 + [pbb]\,x_2^2 + \\ &+ \ldots + 2\,[pbg]\,x_2x_k - 2\,[pbb]\,x_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ [pgg]\,x_k^2 - 2\,[pgl]\,x_k + [pll] = \min \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2\Phi = [pv^2] &= x_1([paa]\,x_1 + [pab]\,x_2 + \ldots + [pag]\,x_k - [pal]) + \\ &+ x_2([pab]\,x_1 + [pbb]\,x_2 + \ldots + [pbg]\,x_k - [pbl]) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ x_k([pag]\,x_1 + [pbg]\,x_2 + \ldots + [pgg]\,x_k - [pgl] - \\ &- [pal]\,x_1 - [pbl]\,x_2 - \ldots - [pgl]\,x_k - [pll] = \min. \end{aligned} \qquad (28.7)$$

Найдем по всем переменным x_j частные производные и положим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}=0.$$

Тогда получим систему нормальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}&=[paa]\,x_1+[pab]\,x_2+\ldots+[pag]\,x_k-[pal]=0\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}&=[pab]\,x_1+[pbb]\,x_2+\ldots+[pbg]\,x_k-[pbl]=0\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}&=[pag]\,x_1+[pbg]\,x_2+\ldots+[pgg]\,x_k-[pgl]=0\end{aligned}\right\}$$

по числу k переменных и формулу минимума в билинейном выражении

$$[pv^2]_{\min}=[pll]-[pal]\,x_1-[pbl]\,x_2-\cdots-[pgl]\,x_k.$$

Далее, пользуясь матрицей

$$\begin{bmatrix}[paa] & [pab]\ldots[pag] & [pal]\\ [pab] & [pbb]\ldots[pbg] & [pbl]\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ [pag] & [pbg]\ldots[pgg] & [pgl]\\ [pal] & [pbl]\ldots[pgl] & [pll]\end{bmatrix}$$

квадратичной формы (28.7) в треугольном выражении

$$\begin{bmatrix}[paa] & [pab]\ldots[pag] & [pal] & \\ & [pbb\cdot 1]\ldots[pbg\cdot 1] & [pbl\cdot 1] & \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \\ & [pgg\cdot(k-1)] & [pgl\cdot(k-1)] & \\ & & & [pll\cdot k]\end{bmatrix}, \tag{28.8}$$

получаем формулу минимума канонического вида

$$[pv^2]_{\min}=[pll]-\frac{[pal]^2}{[paa]}-\frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}-\cdots-\frac{[pgl\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]}, \tag{28.9}$$

в которой числа

$$[paa],\ [pbb\cdot 1],\ldots,[pgg\cdot(k-1)],$$

т. е. диагональные элементы треугольной матрицы (28.8) суть *собственные значения поверхности 2-го порядка.*

Эллипсоид, порождаемый условием $[pv^2]=\min$. Из канонической формы минимума (28.9) следует, что

$$[pll]-[pvv]=\frac{[pal]^2}{[paa]}+\frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}+\cdots+\frac{[pgl\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]}.$$

Разность

$$[pll]-[pvv]=c^2$$

всегда положительная и не может быть ни отрицательной, ни равной нулю. Поэтому выражения

$$\frac{[pal]^2}{[paa]}+\frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}+\cdots+\frac{[pgl\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]}=c^2 \qquad (28.10)$$

или

$$\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\cdots+\lambda_k\bar{x}_k=C^2;$$
$$\bar{x}^*\lambda\bar{x}=\lambda\bar{x}^2=c^2$$

будут уравнениями главных осей центральной поверхности 2-го порядка, т. е. эллипсоида в подпространстве n измерений, расположенного в n-мерном пространстве Евклида.

Из уравнения (28.11) следует, что

$$\bar{x}^2=\lambda^{-1}c^2,$$

т. е.

$$\bar{x}^2=\bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2+\cdots+\bar{x}_k^2=c^2$$

— квадрат расстояния от начала координат до точки на поверхности эллипсоида, в которой главная ось пересекает эту поверхность. Причем $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ — элиминационные средние, т. е. уравновешенные элементы, или наилучшие значения, определяемые по схеме Гаусса.

Так как

$$\lambda=\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_k\}=\{[paa]^{-1},\ [pbb\cdot 1]^{-1},\ldots,[pgg\cdot(k-1)]^{-1}\}$$

— диагональная матрица характеристических чисел эллипсоида и, следовательно,

$$\lambda^{-1}=\{\lambda_1^{-1},\ \lambda_2^{-1},\ldots,\lambda_k^{-1}\}=\{[paa],\ [pbb\cdot 1],\ldots,[pgg\cdot(k-1)]\}$$

— диагональная матрица собственных значений эллипсоида, то λ_j — величина, обратная квадрату расстояния от центра до точки поверхности эллипсоида.

Поэтому, если какое-либо собственное значение велико, то в направлении соответствующей главной оси поверхность эллипсоида расположена близко к центру; если же собственное значение мало, то в направлении соответствующей главной оси поверхность эллипсоида далеко отстоит от центра.

Таким образом, каждое из чисел

$$[paa],\ [pbb\cdot 1],\ldots,[pgg\cdot(k-1)],$$

получаемое по схеме Гаусса, являясь собственным значением данного эллипсоида, выражает квадрат длины главной полу оси этого эллипсоида. Следовательно, в физическом смысле наименьшее и наибольшее значения из этих чисел определяют минимальное и максимальное смещение (растяжение) от начала прямоугольной системы координат, т. е. от центра пересечения главных осей до поверхности эллипсоида.

Совокупность всех смещений (сдвигов) по осям координат возникает в силу переопределенности начального уравнения

$$Ax = l, \tag{28.12}$$

из которого следует уравнение ошибок

$$Ax - l = v. \tag{28.13}$$

Если уравнение (28.12) задано в определенной, или совместной форме, то выражение (28.13) сводится к уравнению

$$Ax - l = 0.$$

Тогда эллипсоид вырождается в точку

$$x = A^{-1}l$$

пересечения линейных систем, где A^{-1} обратная матрица относительно квадратной, а не прямоугольной матрицы A.

Весовой эллипсоид. Формула обратного веса

$$\begin{aligned} P_F^{-1} = f^*Qf = f_1^2Q_{11} + 2f_1f_2Q_{12} + \ldots + 2f_1f_kQ_{1k} + \\ + f_2^2Q_{22} + \ldots + 2f_2f_kQ_{2k} + \\ \cdots\cdots\cdots \\ + f_k^2Q_{kk} \end{aligned} \tag{28.14}$$

линейной функции

$$F = f\bar{x} = f_1\bar{x}_1 + f_2\bar{x}_2 + \ldots + f_k\bar{x}_k$$

уравновешенных элементов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ в каноническом выражении

$$P_F^{-1} = [f_{k+1}\cdot k] = \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]} + \cdots + \frac{[f_k\cdot(k-1)]^2}{[pgg\cdot(k-1)]} \tag{28.15}$$

описывает весовой эллипсоид в тех же собственных значениях, в которых выражена каноническая форма минимума.

Из формулы (28.14) следует, что главные оси эллипсоида наклонны к осям прямоугольной системы координат, а формула (28.15) показывает, что прямоугольная система координат приведена к главным осям.

Эллипсоиды, возникающие в коррелатном способе. По формуле минимума

$$V^*PV_{\min} = KB\pi B^*K$$

имеем квадратичную форму

$$
\begin{aligned}
[pv^2]_{\min} = [\pi aa]\, k_1^2 + 2\, [\pi ab]\, k_1 k_2 + \ldots + 2\, [\pi ag]\, k_1 k_2 + \\
+ [\pi bb]\, k_2^2 + \ldots + 2\, [\pi bg]\, k_2 k_r + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ [\pi gg]\, k_r^2,
\end{aligned} \qquad (28.16)
$$

описывающую поверхность 2-го порядка, т. е. r-мерный эллипсоид, и соответственно форму

$$
\begin{aligned}
[pv]_{\min} = k_1 ([\pi aa]\, k_1 + [\pi ab]\, k_2 + \ldots + [\pi ag]\, k_r) + \\
+ k_2 ([\pi ab]\, k_1 + [\pi bb]\, k_2 + \ldots + [\pi bg]\, k_r) + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ k_r ([\pi ag]\, k_1 + [\pi bg]\, k_2 + \ldots + [\pi gg]\, k_r,
\end{aligned}
$$

из которой следует билинейное выражение минимума

$$[pv^2]_{\min} = -k_1 w_1 - k_2 w_2 - \ldots - k_r w_r.$$

Матрица

$$
\begin{bmatrix}
[\pi aa] & [\pi ab] \ldots [\pi ag] \\
[\pi ab] & [\pi bb] \ldots [\pi bg] \\
\cdots & \cdots \\
[\pi ag] & [\pi bg] \ldots [\pi gg]
\end{bmatrix}
$$

многочлена (28.16) в треугольной форме

$$
\begin{bmatrix}
[\pi aa] & [\pi ab] \ldots [\pi ag] & \\
 & [\pi bb \cdot 1] \ldots [\pi bg \cdot 1[& \\
 & \cdots\cdots & \\
 & & [\pi gg \cdot (r-1)]
\end{bmatrix}
$$

содержит собственные значения

$$[\pi aa],\ [\pi bb \cdot 1], \ldots,]\pi gg \cdot (r-1)],$$

аналогичные собственным значениям в параметрическом способе.

Поэтому решение системы нормальных уравнений коррелат по схеме Гаусса приводит к формуле минимума канонического вида

$$[pv^2]_{\min} = \frac{w_1^2}{[\pi aa]} + \frac{[w_2 \cdot 1]^2}{[\pi bb \cdot 1]} + \cdots + \frac{[w_2 \cdot (r-1)]^2}{[\pi gg \cdot (r-1)]},$$

т. е. эллипсоиду концентрации невязок, значения главных полуосей которого доставляет та же схема Гаусса.

И, наконец, заметим, что формула обратного веса

$$P_F^{-1} = f^* \pi f - f^* \pi BQB^* \pi f$$

линейной функции

$$F = f^*\bar{x} = f_1\bar{x}_1 + f_2\bar{x}_2 + \ldots + f_n\bar{x}_n$$

в каноническом выражении

$$P_F^{-1} = [fr] = [\pi ff] - \frac{[\pi af]}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} - \cdots - \frac{[\pi gf\cdot(r-1)]^2}{[\pi gg\cdot(r-1)]}$$

приводит к разности обратных весов

$$P_F^{-1} = P_{\rm I}^{-1} - P_{{\rm I}I}^{-1}$$

или

$$P_{\rm I}^{-1} - P_F^{-1} = P_{\rm II}^{-1},$$

где

$$P_{\rm II}^{-1} = \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} + \frac{[\pi bf\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} + \cdots + \frac{[\pi gf\cdot(r-1)]^2}{[\pi gg\cdot(r-1)]}$$

— каноническая форма эллипсоида, возникающего за счет математических связей (условий), налагаемых на результаты непосредственных измерений.

Таким образом, независимо от способа обработки результатов измерений и наблюдений (параметрического или коррелатного) схема Гаусса является той общей геометрической моделью, которая приводит квадратичную форму

$$y^2 = x^2 + v^2 - 2x^*v$$

под условием $x^*v = 0$ или $v^*v = \min$ к сумме квадратов

$$y^2 = \bar{x}^2 + v^2$$

соответственно разложению

$$y = \bar{x} + v,$$

т. е. ортогональному проектированию измеренного вектора на гиперплоскость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. Пер. с англ. М., ГИФМЛ, 1963.
2. *Арлей Н., Бух К.* Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Пер. с англ. М., Изд-во ин. лит-ры, 1951.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. Пер. с англ. М., Наука, 1969.
4. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1977.
5. *Бурмистров Г. А.* Основы способа наименьших квадратов. М., Госгеолтехиздат, 1963.
6. *Ван дер Варден Б. П.* Математическая статистика. Пер. с нем. М., Изд-во ин. лит-ры, 1960.
7. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М., ГИФМЛ, 1962.
8. *Гантмахер Ф. Ф.* Теория матриц. М., Наука, 1967.
9. *Гаусс К. Ф.* Способ наименьших квадратов. Том. I. М., Госгеодезиздат, 1957.
10. *Гайдаев П. А.* Вычисление геодезических сетей 3 и 4 классов. М., Недра, 1972.
11. *Гайдаев П. А., Большаков В. Д.* Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1969.
12. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М. — Л., ГИТТЛ, 1951.
13. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М., Наука, 1965.
14. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.— Л., ГТТИ, 1934.
15. *Идельсон Н. И.* Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. М., Геодезиздат, 1947.
16. *Иордан В.* Руководство по геодезии. Т. I. Уравнительные вычисления по способу наименьших квадратов. Пер. с нем. Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939.
17. *Кемниц Ю. В.* Определение параметров эмпирических формул. М., Недра, 1964.
18. *Кендалл М., Стьюард А.* Статистические выводы и связи. Пер. с англ. М., Наука, 1973.
19. *Крамер Г.* Математические методы статистики. Пер. с англ. М., Изд-во ин. лит-ры, 1948.
20. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М., Наука, 1974.
21. *Коротков С. А.* Применение теории графов в геодезии. М., Недра, 1976.
22. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. Перевод с англ. М., ГИМФЛ, 1961.
23. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
24. *Мазмишвили А. И., Беляев Б. И.* Способ наименьших квадратов. М., Геодезиздат, 1959.
25. *Мазмишвили А. И.* Способ наименьших квадратов. М., Недра, 1968.
26. *Маликов М. Ф.* Основы метрологии. М., 1949.
27. *Немчинов В. С.* Сельскохозяйственная статистика с основами общей теории. М., Наука, 1967.
28. *Окунев Е. М.* Высшая алгебра. М.—Л., ОНКТИ, 1937.
29. *Папазов М. Г., Могильный С. Г.* Теория ошибок и способ наименьших квадратов. М., Недра, 1968.

30. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение. Перевод с англ. М., Наука, 1968.

31. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М., Наука, 1966.

32. *Романовский В. И.* Применения математической статистики в опытном деле. М.—Л., ОГИЗ, 1947.

33. *Рыжов П. А.* Математическая статистика в горном деле. М., Высшая школа, 1973.

34. *Сборник* задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под редакцией А. А. Свешникова. М., Наука, 1965.

35. *Сирл С., Госман У.* Матричная алгебра в экономике. Пер. с англ. М., Статистика, 1977.

36. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. III. М., ГТТИ, 1933.

37. *Смирнов Н. В., Белугин Д. А.* Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. М., Недра, 1969.

38. *Тернер Д.* Вероятность. Статистика и исследование операции. Пер. с англ. М., Статистика, 1976.

39. *Чеботарев А. С.* Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М., Геодезиздат, 1958.

40. *Хемминг Р. В.* Численные методы. Пер. с англ. М., Наука, 1968.

41. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М., Наука, 1969.

42. *Шилов П. И.* Способ наименьших квадратов. М., Геодезиздат, 1941.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 2736

АВРААМ ИВАНОВИЧ МАЗМИШВИЛИ

ТЕОРИЯ ОШИБОК
И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Редактор издательства **Л. И. Елагин**
Переплет художника **А. Я. Толмачева**
Художественный редактор **О. Н. Зайцева**
Технический редактор **Б. А. Илясова**
Корректор **К. И. Савенкова**

Сдано в набор 10.05.78. Подписано в печать 20.11.78. Т-18469 Формат 60Х90¹/₁₆. Бумага № 2. Гарнитура литер. Печать высокая. Печ. л. 19,5 Уч.-изд. л. 16,06. Тираж 4400 экз. Заказ 608/7213—9. Цена 80 коп.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.

Московская типография № 11 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 113105, Нагатинская ул., д. 1.