# ВСЛУБЛЮВ ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОА НАИМЕНЬШИХ КВААРАТОВ

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ В АСТРОМЕТРИИ РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК Институт прикладной астрономии

# В.С. ГУБАНОВ

# ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ В АСТРОМЕТРИИ



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ "НАУКА" 1997 УДК 528.14 ББК 22.61 Г93

Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. – СПб.: Наука, 1997. – 318 с., ил. 53.

ISBN 5-02-024860-6

Книга содержит систематическое изложение основ теории метода наименьших квадратов (МНК) и его современных обобщений – средней квадратической коллокации и фильтрации Калмана. Рассмотрены основные типы параметрических и стохастических моделей данных измерений, встречающихся в астрометрии и космической геодезии, разработаны конкретные алгоритмы оптимального оценивания параметров этих моделей в удобной матричной форме. Особое внимание уделено проблеме глобального уравнивания данных – совместной обработке многочисленных и разнообразных измерений на глобальных станций. Даны примеры применения обобщенной теории МНК к обработке радиоинтерферометрических наблюдений со сверхдлинными базами, к анализу вращательного движения Земли и др. Показаны перспективы дальнейших приложений.

Для научных работников и инженеров естественнонаучных специальностей, которые в своей практической деятельности связаны с необходимостью обработки и интерпретации данных измерений и позиционных наблюдений. Может быть использована в качестве учебного пособия студентами старших курсов и аспирантами университетов и вузов по специальностям астрометрия, небесная механика, геодезия, геофизика и др.

Рецензенты: чл.-кор. РАН, д-р техн. наук С. С. Лавров, заслуж. деят. науки РФ, проф. Ю. В. Батраков

> Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 97-02-30069

ТП-98-І-№ 68 ISBN 5-02-024860-6 © В. С. Губанов, 1997 © Российская академия наук, 1997

#### оглавление

| Предисловие  |    | •  |     |    | • | •  |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | • |   |   |   |   |   | • |   | 5 |
|--------------|----|----|-----|----|---|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Список сокра | ще | ни | йı  | ис | б | 03 | Ha | PE | eł | Ш | Й |   |   | • | • |   |   | • |   | • |   |   | • | • |   | • |   | 7 |
| Введение     |    |    | • • |    | • | •  | •  | •  | •  | • | • | • | • | • |   | • | • | • | • | • | • | • | • |   | • | • | • | 8 |

# Глава 1. Линейные модели данных наблюдений

| §1.  | Данные позиционных наблюдений            | 13 |
|------|--|----|
| § 2. | Априорные ковариации данных              | 17 |
| § 3. | Типовые модели данных                    | 19 |
| § 4. | Полнота и ортогональность моделей данных | 25 |
| § 5. | Ортогонализация моделей данных           | 29 |

## Глава 2. Метод наименьших квадратов

| Линейные евклидовы пространства           | 33  |
|---|---|
| Метод максимального правдоподобия         | 38  |
| Приведение к модели равноточных данных    | 43  |
| Свойства МНК-оценок                       | 46  |
| Двухгрупповой метод наименьших квадратов  | 52  |
| Неполные модели данных                    | 55  |
| Нелинейный метод наименьших квадратов     | 61  |
| Регуляризация метода наименьших квадратов | 64  |
| Оптимальное оценивание                    | 67  |
|   | Линейные евклидовы пространства Метод максимального правдоподобия Приведение к модели равноточных данных Свойства МНК-оценок Двухгрупповой метод наименьших квадратов Неполные модели данных Нелинейный метод наименьших квадратов Регуляризация метода наименьших квадратов Оптимальное оценивание |

# Глава 3. Параметрическое уравнивание

| §1.  | Количество параметрической информации | 73  |
|------|---------------------------------------|-----|
| § 2. | Уравнивание с "мяткими" условиями     | 75  |
| §3.  | Уравнивание с "жесткими" условиями    | 79  |
| §4.  | Стохастическая регуляризация          | 81  |
| § 5. | Многогрупповое уравнивание            | 86  |
| §6.  | Глобальное уравнивание                | 93  |
| §7.  | Метод обобщенного среднего            | 97  |
| §8.  | Рекуррентное уравнивание              | 107 |

# Глава 4. Средняя квадратическая коллокация

| §1.  | Линейные гильбертовы пространства         | 114 |
|------|---|-----|
| § 2. | Случайные процессы и последовательности   | 121 |
| §3.  | Основная задача коллокации                | 125 |
| § 4. | Объединение случайных последовательностей | 131 |
| § 5. | Интерполяция, фильтрация и прогноз        | 136 |
| §6.  | Коллокация с параметрами                  | 139 |
| §7.  | Свойства коллокационных оценок            | 149 |
| § 8. | Двухгрупповая коллокация                  | 157 |
| § 9. | Точность двухгрупповой коллокации         | 163 |
| §10. | . Нелинейная коллокация                   | 168 |

# Глава 5. Коллокационное уравнивание

| §1.  | Рекуррентная коллокация             | 174 |
|------|-------------------------------------|-----|
| § 2. | Последовательная коллокация         | 181 |
| § 3. | Многогрупповая коллокация           | 184 |
| § 4. | Глобальная коллокация               | 189 |
| § 5. | Случайные поля на сфере             | 196 |
| §6.  | Плотность ошибок координат на сфере | 201 |
| §7.  | Коллокация случайных полей на сфере | 205 |

# Глава б. Фильтрация Калмана

| § 1. Наблюдаемые динамические системы    | 210 |
|--|-----|
| § 2. Задача оптимальной фильтрации       | 216 |
| § 3. Фильтр Калмана как рекуррентный МНК | 217 |
| § 4. Оптимальный фильтр Калмана          | 223 |
| § 5. Рекуррентный прогноз                | 229 |
| § 6. Рекурсивное сглаживание             | 233 |
| § 7. Динамическое моделирование          | 237 |
| § 8. Динамическая модель вращения Земли  | 251 |
| § 9. Сравнение алгоритмов ФК и СКК       | 262 |

# Глава 7. Стохастический анализ в астрометрии

| § 1. Внутрисуточные флуктуации эйконала тропосферы |  |
|--|--|
| § 2. Внутрисуточные флуктуации шкал времени        |  |
| § 3. Внутрисуточные вариации ПВЗ                   |  |
| § 4. Фильтрация и прогноз ПВЗ                      |  |
| § 5. Ковариационный анализ                         |  |
| § 6. Усреднение каталогов                          |  |
| § 7. Усреднение отсчетов                           |  |

#### ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге дано систематическое изложение теории метода наименыпих квадратов (МНК) от его классической концепции до современных обобщений. Необходимость более полного изложения теории МНК вызвана двумя причинами. Во-первых, для описания современных данных позиционных наблюдений высшей точности уже недостаточно простого параметрического моделирования, а требуется использовать стохастические и динамические модели, для анализа которых у традиционного МНК нет возможностей. Во-вторых, современные методы стохастического анализа – средняя квадратическая коллокация (СКК) и фильтрация Калмана (ФК) – часто излагаются обособленно, вне связи с фундаментальной концепцией МНК, и существуют как бы независимо от нее. Автор старался показать, что эти новые методы укладываются в некоторую обобщенную концепцию МНК и поэтому имеют с ним общее основание. Благодаря этому существенно расширяется область применения МНК и достигается более тесное сближение его формальных математических алгоритмов с физикой изучаемых явлений. Одним из наиболее важных эффектов обобщения теории МНК является повышение точности и достоверности результатов обработки данных, их более глубокое понимание и правильная интерпретация с физической точки зрения.

Анализ современных астрометрических работ показывает, что метод наименыших квадратов до сих пор используется только в своем классическом варианте, который называют процессом Гаусса-Маркова. Новые результаты в теории МНК, по-видимому, просто неизвестны. Особенно неблагоприятное положение сложилось в русскоязычной научной литературе. Монографии Ю.В.Линника [38] и С.Р.Рао [45], в которых содержится систематическое и полное по тому времени изложение теории МНК, относятся соответственно к 1962 и 1968 гг. Но именно за последние 30 лет эта теория получила качественное развитие и именно в этот период произошли наиболее существенные изменения в методике и технике астрометрии.

Идея написать эту книгу возникла у автора после знакомства с замечательной монографией Гельмута Морица "Современная физическая геодезия" [41], в которой весьма подробно изложен метод СКК применительно к решению основной задачи физической геодезии – уточнению гармоник геопотенциала по разнообразным данным наземных и космических измерений. Мысль о том, что подобным образом могут решаться и разнообразные задачи астрометрии и геодинамики, не имеющие строгого решения в рамках классической теории МНК, стала стимулом, который помог автору изучить этот сложный предмет и адаптировать теорию СКК к новым задачам.

Теория обобщенного метода наименыших квадратов (ОМНК) изложена в книге исключительно с точки зрения се практического применения, поэтому это изложение местами недостаточно строго, но зато все полезные выводы даны в виде матричных алгоритмов, пригодных к немедленному использованию. Благодаря тому, что современные измерительные системы в астрометрии и геодезии принимают глобальный характер и имеют высокую степень автоматизации, одсовместная обработка ной ИЗ актуальных залач является (уравнивание) огромного количества разнообразных данных. Этим задачам в книге уделяется значительное внимание, но их разнообразие оказалось настолько велико, что проблему в целом еще нельзя считать решенной.

Предлагаемая книга предназначена не только астрометристам и геодезистам, но и всем, кто ведет исследования на основе обработки данных измерений. Она будет также полезна в качестве учебного пособия начинающим молодым специалистам, студентам и аспирантам астрономических и геодезических специальностей. Физики и инженеры также найдут в ней полезную информацию.

В заключение хотелось бы выразить искреннюю благодарность моим молодым коллегам, студентам и аспирантам Е. В. Брумбергу, Д. Л. Васильеву, Э. В. Волкову, М. А. Можаеву, С. Д. Петрову, Ю. Л. Русинову, И. Ф. Суркису и О. А. Титову, которые выполнили большое количество вычислений, связанных с исследованием и применеием изложенных в книге алгоритмов.

Особую признательность выражаю рецензентам чл.-кор. РАН С. С. Лаврову и проф. Ю. В. Батракову, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим множество ценных замечаний, которые позволили существенно улучшить изложение.

| АКΦ                      | – автоковариационная функция.                                 |
|--------------------------|---|
| BP                       | - внегалактический радиоисточник.                             |
| ГЛОНАСС                  | - глобальная навигационная спутниковая система.               |
| ИСЗ                      | – искусственные спутники Земли.                               |
| ИСО                      | - инструментальная система отсчета.                           |
| КО                       | - космический объект.   |
| МНК                      | – метод наименыших квадратов.                                 |
| НП                       | – наблюдательный пункт.                                       |
| ОМНК                     | – обобщенный метод наименыших квадратов.                      |
| ПВ3                      | – параметры вращения Земли.                                   |
| РСДБ                     | – радиоинтерферометр(ия) со сверхдлинными базами.             |
| СКК                      | – средняя квадратическая коллокация.                          |
| СКО                      | - средняя квадратическая ошибка.                              |
| ФК                       | – фильтр(ация) Калмана.                                       |
| CIO                      | - Conventional International Origin.                          |
| CRS                      | - Celestial Reference System.                                 |
| GPS                      | – Global Positioning System.                                  |
| IERS                     | <ul> <li>International Earth Rotation Service.</li> </ul>     |
| TRS                      | – Terrestrial Reference System.                               |
| $\mathbf{a} = (a_i)$     | – векторы-столбцы с элементами a <sub>i</sub> (i = 1, 2,, n). |
| $\mathbf{a}' = [a_j]$    | – векторы-строки с элементами $a_j$ ( $j = 1, 2,, m$ ).       |
| $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  | – матрицы (i – номер строки, j – номер столбца).              |
| $\mathbf{A}' = [a_{ji}]$ | - транспонированные матрицы.                                  |
| D                        | - матрицы апостериорных ковариаций.                           |
| E{ <b>a</b> }            | - математическое ожидание случайного вектора а (вероят-       |
|                          | ностное среднее по ансамблю реализаций - генеральной          |
|                          | совокупности).  |
| G{ <b>a</b> }            | - общее среднее в линейном (метрическом) и вероятност-        |
|                          | ном пространствах.  |
| $M\{\mathbf{a}\}$        | - арифметическое среднее из множества значений.               |
| P, W                     | - весовые матрицы.  |
| Q                        | <ul> <li>матрицы априорных ковариаций.</li> </ul>             |
| I                        | <ul> <li>единичная квадратная матрица.</li> </ul>             |
| 0                        | - нулевая прямоугольная матрица.                              |

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы, но потому, что сии вещи не входят в крут наших понятий.

Козьма Прутков. Плоды раздумья. Мысли и афоризмы, 66.

Метод наименыших квадратов (МНК) является одним из важнейших инструментов научных исследований в тех областях естествознания, где приходится иметь дело с анализом экспериментальных данных, полученных с помощью измерений. Особенно велика его роль в астрометрии и космической геодезии, так как именно здесь возникают наиболее сложные задачи массовой обработки данных позиционных наблюдений. Поскольку позиционные наблюдения в астрометрии, как правило, косвенные, то их результаты (данные) представляют линейными алгебраическими моделями с неизвестными коэффициентами, которые и являются искомыми астрометрическими и геодезическими параметрами. Оценивание этих параметров в условиях, когда данные наблюдений отягощены случайными ошибками, и является одной из основных задач МНК.

Основной принцип МНК – минимизация квадратичной формы случайных невязок модели данных – имеет вполне ясное вероятностное обоснование, так как он соответствует принципу максимума плотности вероятности совместного распределения этих невязок. Именно по этой причине алгоритм МНК способен дать наиболее оптимальные и достоверные оценки параметров модели данных из всех возможных линейных оценок. Однако на практике оценки МНК иногда оказываются совершенно неприемлемыми, поэтому формальное применение принципа МНК еще не гарантирует оптимальности оценивания. Нужно, чтобы этот принцип достаточно точно соответствовал модели данных, которая в свою очередь должна полно отражать физическую сущность измерений.

Для разъяснения этой проблемы рассмотрим основной принцип МНК с двух точек зрения – формальной теории линейных векторных пространств и вероятностной теории случайных процессов и последовательностей. Ключевым понятием теории линейных векторных пространств является действительная симметрическая (симметричная) положительно определенная порождающая матрица (ядро), непосредственно связанная с базисом пространства и участвующая во всех линейных преобразованиях его элементов и, в частности, в образовании скалярных произведений, билинейных и квадратичных форм. С другой стороны, важнейшим понятием теории случайных последовательностей является матрица ковариации. С ее помощью в вероятностном пространстве производятся преобразования одних случайных последовательностей в другие. Между тем любую случайную последовательность можно формально представить в виде случайного вектора как элемента линейного пространства, причем ядро этого пространства легко отождествляется с обратной матрицей ковариаций этого вектора, которая поэтому должна быть невырожденной и положительно определенной. Таким образом, формальное понятие ядра линейного пространства ставится в соответствие понятию ковариации, которое, по сути дела, является физическим понятием, так как с помощью ковариационных функций и матриц можно восстановить спектр мощности и синтезировать динамическую модель случайной последовательности, которые ясно отражают такие ее физические свойства, как распределение энергии по частотам, устойчивость (стационарность), наличие периодичностей, характер их затухания или возбуждения и проч.

Если подойти с этих позиций к классической теории МНК, созданной К. Ф. Гауссом почти 200 лет назад [12], то окажется, что этот метод определен в конечномерных евклидовых пространствах с ортонормированным базисом и единичной порождающей матрицей I. В теории случайных последовательностей такой матрице соответствует матрица ковариаций простейшего вида  $\sigma^2 I$ . Это говорит о том, что классический МНК может дать оптимальные оценки только в условиях, когда параметры линейных моделей данных постоянны, сами модели вполне точны, а их невязки представляют собой случайные ощибки наблюдений, которые центрированы, нормально распределены, независимы и равноточны.

Однако довольно скоро выяснилось, что эти условия являются слишком жесткими и на практике никогда не выполняются. Особенно неприемлемым оказалось требование равноточности измерений, которое можно снять, только если заменить матрицу ковариаций  $\sigma^2 I$  на более общую диагональную матрицу diag( $\sigma_i^2$ ), составленную из различных дисперсий отдельных измерений. В линейных пространствах таким матрицам соответствует ортогональный, но не нормированный базис. Именно в таком базисе и определено первое обобщение МНК, называемое *процессом Гаусса-Маркова*. Если же ввести понятие коррелированных ошибок измерений, которые описываются полными матрицами ковариаций  $Q = [q_{ij}]$ , то это автоматически приво-

дит к необходимости дальнейшего обобщения принципа МНК в евклидовых пространствах с косоугольным и криволинейным базисом и полной порождающей матрицей. Наконец, средняя квадратическая коллокация (СКК) как обобщение МНК в бесконечномерных гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром позволяет построить оптимальные алгоритмы оценивания случайных функций и непрерывных двумерных функционалов (случайных полей).

Таким образом, основной смысл обобщения МНК, излагаемого в настоящей книге, заключается не в пересмотре принципа наименыших квадратов (для этого сейчас нет никаких серьезных оснований), а в его последовательном обобщении с целью приведения (адаптации) этого принципа к реальным, иногда довольно сложным условиям его практического применения. Именно такой путь позволяет сблизить формальную математику алгоритмов МНК с физической сущностью решаемой задачи, повысить достоверность результатов обработки данных измерений и улучшить их понимание.

В последнее время резко возросла точность наземных позиционных измерений и стало ясно, что линейные модели с постоянными коэффициентами (параметрами) вообще не могут достаточно точно описывать результаты таких наблюдений. В частности, динамика турбулентной атмосферы как среды распространения излучения космических объектов (КО) создает нестабильность измеряемых величин в широком частотном диапазоне от 10<sup>-8</sup> до 10<sup>2</sup> Гц. Если низкочастотные вариации состояния атмосферы вплоть до 10<sup>-4</sup> Гц создают эффекты типа трендов и поддаются линейному моделированию, то более высокочастотные флуктуации уже ведут себя как случайный процесс. Аналогичные проблемы могут возникать и вследствие неустойчивости измерительной системы инструмента. Так, например, в РСДБ устойчивость инструментальной системы почти полностью определяется стабильностью опорных эталонов времени и частоты. Однако даже у лучших водородных мазеров фазовые флуктуации на суточном интервале времени не могут быть представлены только в виде тренда, так как они содержат случайную компоненту, энергия которой превышает точность современных РСДБ-наблюдений. Во всех таких случаях в модели данных приходится вводить стохастические (случайные) параметры, которые невозможно оценить традиционным методом наименьших квадратов.

Современная астрометрия представляет собой науку о позиционных определениях космических объектов в 4-мерном пространствевремени. Ее основная задача состоит в создании опорных координатно-временных систем отсчета наземного и космического базирования и в постоянном мониторинге их взаимной ориентации. На этой основе средствами астрометрии и других смежных наук решаются многочисленные задачи координатно-временного обеспечения (КВО) фундаментальной и прикладной науки. В последние годы благодаря широкому применению новой техники координатно-временных измерений (РСДБ, лазерная локация ИСЗ и Луны, навигационные системы GPS и ГЛОНАСС, спутниковая геодезическая система DORIS, астрометрический спутник HIPPARCOS и др.) резко возросли объем, разнообразие, точность и стоимость астрометрических данных. Это в свою очередь вызвало повышение требований к качеству их математической обработки, причем основная задача этой обработки состоит в том, чтобы повысить не формальную, а реальную точность результатов, т.е. их физическую достоверность.

Еще совсем недавно астрометрия была в основном наблюдательной наукой и превыше всего в ней ценилось "искусство" наблюдателя, т.е. способность извлекать с помощью довольно простых измерительных средств нужную информацию. Однако в последние годы благодаря созданию полностью автоматизированных измерительных систем как наземного, так и космического базирования роль астрометриста в научно-исследовательском процессе существенным образом изменилась – из "наблюдателя" он превратился в "вычислителя", занятого обработкой больших массивов данных наблюдений, полученных обычно без его участия. Его основным "инструментом" становится компьютер и соответствующие программные средства математической обработки этих данных.

Важнейшей проблемой современной астрометрии является также необходимость совместной обработки разнородных данных, полученных с помощью различных измерительных систем. Эта проблема возникает при составлении сводных каталогов координат небесных объектов (звезд или радиоисточников), при определении окончательных значений параметров вращения Земли (ПВЗ), полученных с помощью различных инструментальных комплексов, а также при совместном уравнивании спутниковых наблюдений на глобальных сетях станций. Основным недостатком применения МНК в этой области является его неспособность учесть коррелированность (статистическую зависимость) случайно-систематических ошибок этих данных и выделить из них оптимальным образом полезную информацию. Именно поэтому методология МНК особенно активно развивалась в наземной и космической геодезии и именно там возникло одно из важнейших его обобщений – средняя квадратическая коллокация (CKK) [41].

Следует также учесть, что современные астрометрические данные, как правило, существенно (иногда на несколько порядков) точнее прежних и поэтому содержат гораздо больше разнообразной и полезной информации, для извлечения которой часто приходится применять способы, которые раньше в астрометрии не использовались или были просто неизвестны.

Таким образом, на современном этапе развития астрометрии математические методы обработки данных наблюдений становятся одним из важнейших элементов исследовательского процесса. Эти методы разнообразны, но большинство из них имеет одну общую основу – принцип максимального правдоподобия, часто отождествляемый с принципом (методом) наименьших квадратов (МНК).

Имеется несколько подходов к решению задачи об улучшении качества математической обработки современных астрометрических данных. Один из них состоит в разработке все более точных и полных математических моделей данных за счет повышения точности редукционных вычислений. Однако редукционные вычисления всегда основаны на согласованных международных стандартах, которые меняются не часто, и их точность всегда ограничена локальными эффектами, нестабильностью измерительных систем и земной атмосферы. Другой подход, не исключающий, а дополняющий первый, состоит во внедрении в астрометрическую практику более современных методов обработки наблюдений, которые, с одной стороны, позволяли бы включить в этот процесс не только результаты непосредственных измерений, но и всю имеющуюся априорную информацию, которая игнорируется при использовании МНК, а с другой стороны, могли бы учитывать или хотя бы частично нейтрализовать недостатки используемых математических моделей данных.

Благодаря обобщению теории МНК удается приблизить математические модели данных к реальным физическим условиям наблюдений и повысить достоверность результатов их обработки. Кроме того, становится возможным существенно расширить область применения ОМНК. Его алгоритмы могут использоваться для решения следующих основных астрометрических задач:

– обработка данных отдельных серий наблюдений на любом астрометрическом инструменте; оценивание постоянных параметров и стохастических сигналов линейной модели данных;

– совместное (глобальное) уравнивание массовых наблюдений на однотипных инструментах, работающих как независимо, так и в составе глобальных измерительных систем, оценивание глобальных параметров;

- оптимальная фильтрация, объединение и прогноз временных рядов, заданных в виде случайных последовательностей наблюденных значений параметров вращения Земли (ПВЗ) и других астрометрических и геодезических величин;

- выделение сигналов с непрерывным спектром и синтез динамических систем;

– оптимальная фильтрация случайных полей на небесной сфере, заданных в виде случайных и систематических ошибок координат звезд или внегалактических радиоисточников, объединение каталогов координат этих объектов и т.д.

Некоторые наиболее важные применения ОМНК в астрометрии и геодинамике иллюстрируются в последней главе книги. Хотя этих примеров еще немного и их результаты иногда носят предварительный характер, но и они убеждают в эффективности этого метода. Поэтому есть основания утверждать, что в дальнейшем будут обнаружены новые возможности его применения.

# Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

#### §1. Данные позиционных наблюдений

В астрометрии позиционные наблюдения космических объектов (КО) выполняются в так называемой инструментальной системе отсчета (ИСО), которая задается специальными техническими средствами, непосредственно участвующими в процессе наблюдений. С помощью этих средств измеряются некоторые физические величины, так или иначе отражающие мгновенные относительные положения ИСО и КО в 4-мерном пространстве-времени. В качестве примера рассмотрим наблюдения на астролябии. Непосредственно измеряемой величиной в этом случае является момент прохождения звезды через альмукантарат – малый круг на небесной сфере с центром в зените и радиусом, равным половине угла объективной призмы инструмента. В данном случае в состав технических средств ИСО входят телескоп, объективная призма, хранитель времени (часы) и ртутный горизонт, задающий направление на зенит. Моменты прохождений звезд измеряются с помощью специального контактного микрометра, который тоже входит в состав средств ИСО. В более сложных инструментах, например радиоинтерферометрах со сверхдлинной базой (РСДБ), в состав ИСО может входить гораздо больше технических устройств. Однако в любом случае в единичном акте позиционных наблюдений измеряются одна или максимум две величины. В этом отношении астрометрические инструменты можно разделить на два типа – одномерные и двумерные. К двумерным инструментам следует отнести меридианные круги и радиоинтерферометры. Все остальные инструменты являются одномерными.

Технические устройства ИСО обычно работают недостаточно стабильно. В результате оказывается внутренне неустойчивой и сама инструментальная система. Для ее стабилизации важнейшие параметры технических устройств пцательно контролируют, и эта информация используется для корректировки непосредственно измеренных величин. Такую процедуру принято называть *первичной* обработкой данных. Она носит индивидуальный характер для разных инструментов, поэтому мы ее рассматривать здесь не будем. Предположим, что мы имеем дело с уже исправленными таким образом наблюденными величинами  $L_0$ , которые относятся к ИСО, внутренняя устойчивость которой обеспечена по крайней мере на интервале одной серии наблюдений продолжительностью не более одних суток.

Дальнейший анализ величин L<sub>0</sub> называют вторичной обработкой данных. Эта процедура состоит из двух этапов: pedykционной обработки и параметрического уравнивания. Цель редукционной обработки заключается в том, чтобы как можно точнее предвычислить измеренную (наблюденную) величину Lo, т.е. вычислить такую величину  $L_{\rm C}$ , которая как можно меньше отличалась бы от  $L_{\rm O}$ . Делается это с помощью редукционных теорий и априорных данных. В их число входят принятые координаты инструмента (или параметры его ориентировки) в земной системе отсчета (TRS), теория вращения Земли, описывающая ориентировку TRS по отношению к небесной опорной системе (CRS), принятые координаты КО в этой системе, модель гравитационного поля Земли, астрономические и геодезические постоянные, характеристики земной атмосферы как среды распространения излучения КО, а также другие данные и теории, описывающие процесс наблюдений в ИСО. В оптической астрометрии система CRS задается в настоящее время фундаментальным каталогом координат и собственных движений звезд FK5 [59], а в радиоастрометрии – каталогами координат внегалактических радиоисточников, которые публикуются в ежегодных отчетах Международной службы вращения Земли (IERS) [69]. Обе эти системы являются максимально приближенными к воображаемой инерциальной системе координат, движущейся в пространстве поступательно без вращений. Поскольку положения наблюдаемых КО задаются именно в этой системе, то основная задача редукционных вычислений состоит в переходе от инерциальной системы CRS к ИСО по схеме: CRS → TRS → ИСО. Подобная же схема используется и для редукции позиционных наблюдений ИСЗ и планет, с той лишь разницей, что роль CRS в этом случае играет возмущенная орбита этих небесных тел. Для того чтобы такая орбита была устойчивой в пространстве, необходим пцательный учет ее возмущений. Такие системы отсчета называют динамическими.

В последние годы для целей наземной навигации практически полностью развернуты глобальные спутниковые навигационные системы GPS (США) и ГЛОНАСС (Россия), которые представляют собой уже 4-мерные глобальные пространственно-временные системы отсчета (ПВСО) космического базирования, так как бортовые шкалы времени навигационных ИСЗ постоянно синхронизированы. Потребитель при определении своего местоположения использует не только мгновенные координаты этих спутников, но и время, хранящееся на их борту. В будущем глобальные ПВСО, возможно, будут функционировать и на поверхности Земли. Их прообразом являются действующие РСДБ-комплексы.

Сейчас в качестве основы редукционных вычислений принят международный стандарт IERS (1992) [70], который, однако, относится лишь к общим глобальным редукциям, таким как эфемериды Луны и планет, геопотенциал, прецессия, нутация, приливные и тектонические деформации Земли, океанические приливы, тропосферные и релятивистские эффекты и проч. Что же касается перехода от TRS к ИСО, то эта процедура для разных инструментов носит индивидуальный характер. В качестве примера приведем общую формулу редукции РСДБ-наблюдений [74]

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{C}} = -\frac{1}{c} \mathbf{b}' \mathbf{WSPNk} + \sum_{i} \delta \boldsymbol{\tau}_{i},$$

в которой  $\tau_{\rm C}$  – предвычисленная временная задержка сигнала, c – скорость света, **b** – геометрический вектор базы интерферометра, **k** – орт направления на радиоисточник, W – матрица преобразования TRS для перехода от мгновенного полюса вращения Земли к CIO – условному международному началу, S – матрица учета неравномерности осевого вращения Земли (всемирного времени), P и N – матрицы преобразования CRS вследствие прецессии и нутации оси вращения Земли в пространстве,  $\delta \tau_i$  – многочисленные редукционные поправки, учитывающие нестабильность системы инструмента, задержку сигнала в тропосфере, а также деформации Земли и вариации ее вращательного движения вследствие многочисленных геофизических эффектов. Общее представление о природе этих эффектов дает схема, представленная на рис. 1.1 [65].



Рис. 1.1. Геофизические эффекты во вращательном движении и деформациях Земли.

Таким образом, в астрометрии принято иметь дело не с самими наблюденными величинами, а с малыми разностями типа (O-C)

$$l_i = h_i (L_0 - L_C)_i \quad (i = 1, 2, ..., N),$$
(1.1)

где  $h_i$  – коэффициенты нормировки и масштабирования. Очевидно, что величины  $L_C$  и  $L_O$  должны быть отнесены к одной и той же системе отсчета – ИСО. В этой системе измеренная величина  $L_O$  равняется истичной величине L с точностью до *ошибок* наблюдений  $\tau$ , т.е.  $L_O = L + \tau$ , а предвычисленная величина  $L_C$  равна L ( $L = L_C + \varepsilon$ ) с точностью до редукционных *поправок*  $\varepsilon$ , обусловленных неточностью исходных данных и принятых редукционных теорий. Можно назвать следующие источники ошибок этих теорий:

– ощибки принятых координат инструмента и/или параметров его ориентации в TRS;

- ошибки принятых координат и скоростей КО в CRS;

- ошибочность принятых астрометрических стандартов;

- неполнота или ошибочность математической модели данных;

- нестабильность ИСО и среды распространения сигнала – земной атмосферы;

 – нерегулярность вращательного движения Земли, ее приливных и тектонических деформаций и т.д.

Подставляя величины L<sub>0</sub> и L<sub>C</sub> в (1.1), получаем

$$l_i = h_i (\tau + \varepsilon)_i \quad (i = 1, 2, ..., N).$$
 (1.2)

Вектор-столбец размером  $N \times 1$ , составленный из величин  $l_i$  (i = 1, 2, ..., N), будем называть вектором данных и обозначать  $l = (l_1, l_2, ..., l_N) = (l_i)$ . Соответствующую строку размером  $l \times N$  будем обозначать  $l' = [l_1, l_2, ..., l_N]$ , где знаком (') отмечается процедура транспонирования (замена строк столбцами). Выделим в векторе данных систематическую компоненту  $c = (c_i)$  и представим ее с точностью до членов первого порядка в виде линейной параметрической модели

$$c_{i} = \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{\partial l_{i}}{\partial p_{j}} \right) \Delta p_{j}, \qquad (1.3)$$

где  $\Delta p_j$  – неизвестные малые поправки к принятым значениям параметров  $p_j$ . Введем *m*-мерный вектор-столбец этих поправок  $\mathbf{z} = (\Delta p_j)$ (j = 1, 2, ..., m) и  $N \times m$ -матрицу частных производных  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ , где  $c_{ij} = (\partial l_i / \partial p_j)$ . Тогда формулу (1.3) можно записать в матричной форме  $\mathbf{c} = \mathbf{C}\mathbf{z}$ . Векторы-столбцы  $\mathbf{c}_j = (c_1, c_2, ..., c_N)_j$  матрицы C будем называть базисными векторами модели (1.3), а саму матрицу  $\mathbf{C}$  – матрицей плана. В результате получаем следующую модель данных:

$$\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{r},\tag{1.4}$$

где введено новое обозначение для вектора невязок r = l - c.

Невязки принятой модели данных (1.4) представляют собой квазислучайные величины, которые можно условно разбить на две компоненты:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{s}. \tag{1.5}$$

Первая из них (u) представляет собой чисто случайную (некоррелированную) величину, обусловленную стохастическими ошибками измерений или высокочастотными эффектами турбулентной атмосферы. Вторая (s) вызвана неточностью или неполнотой модели систематических ошибок данных c = Cz, которая в более корректной записи принимает вид

$$\mathbf{c} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{s}.\tag{1.6}$$

Таким образом, вектор s представляет собой немоделируемую часть систематических ощибок с. Чаще всего s – это систематические ощибки данных наблюдений, о существовании которых исследователь даже не подозревает или у него не хватает всей необходимой информации для их моделирования. Правда, иногда ошибки s не включаются в модель c = Cz сознательно с целью упрощения модели.

#### §2. Априорные ковариации данных

В понятие *данных наблюдений* необходимо кроме вектора l включить также и априорную ковариационную матрицу данных, которая, согласно определению ковариаций [41, с.63], с учетом (1.4) имеет вид

$$\mathbf{Q}_{ll} = E\{\mathbf{ll'}\} = E\{(\mathbf{c} + \mathbf{r})(\mathbf{c} + \mathbf{r})'\} = E\{\mathbf{rr'}\} = \mathbf{Q}_{ll}, \qquad (1.7)$$

где учтено, что случайный вектор невязкок г центрирован, поэтому

$$E\{\mathbf{r}\}=0, E\{\mathbf{cr'}\}=0, E\{\mathbf{rc'}\}=0.$$

Тогда по (1.5) находим

$$\mathbf{Q}_{\prime\prime} = E\{\mathbf{rr'}\} = E\{(\mathbf{u} + \mathbf{s})(\mathbf{u} + \mathbf{s})'\} = E\{\mathbf{uu'}\} + E\{\mathbf{ss'}\} = \mathbf{Q}_{uu} + \mathbf{Q}_{ss},$$
 (1.8)

где  $Q_{rr}, Q_{uu}$  и  $Q_{ss}$  – автоковариационные матрицы случайных величин **r**, **u** и **s** соответственно. При этом использовано то обстоятельство, что векторы **u** и **s** взаимно независимы, поэтому  $Q_{us} = Q_{su} = 0$ .

Так как чисто случайная величина и не коррелирована по определению, то ее автоковариационная матрица является диагональной:

$$\mathbf{Q}_{\mu\mu} = \text{diag}(\sigma_i^2)_{\mu} \quad (i = 1, 2, ..., N), \tag{1.9}$$

где  $(\sigma_i^2)_u$  – априорные оценки дисперсий данных  $l_i$ . Обычно эти оценки могут быть получены в процессе наблюдений по внутренней сходимости отдельных отсчетов измеряемой величины, поэтому их называют внутренними оценками точности. Если  $(\sigma_i^2)_u = \sigma_u^2 = \text{const}$ , имеем

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}} = \sigma_{\boldsymbol{u}}^2 \mathbf{I},\tag{1.10}$$

где I – единичная матрица размером  $N \times N$ . Автоковариации (1.9) характерны для некоррелированных случайных процессов типа "белого" шума, а (1.10) – для стационарного белого шума с постоянной дисперсией.

Рассмотрим теперь случай, когда для части редукционных ошибок модель их влияния на данные наблюдений известна, но параметры этой модели определять из наблюдений не требуется или это по каким-либо причинам нецелесообразно. В первую очередь это относится к принятым международным стандартам редукций, когда их точность существенно превышает точность наблюдений. В этом случае вектор s можно представить в виде суммы

$$\mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{w}.\tag{1.11}$$

Примем, что его первая компонента v совсем не поддается моделированию, а вторая может быть записана в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}\mathbf{d},\tag{1.12}$$

где d = (d<sub>j</sub>) (j = 1,2,...,k) –  $k \times 1$ -вектор поправок редукционных параметров, а G есть  $N \times k$ -матрица частных производных вектора данных l по этим параметрам. Задача ставится таким образом, что хотя вектор d определять и не требуется (в противном случае модель (1.12) нужно объединить с моделью (1.6)), но желательно учесть имеющуюся априорную информацию о точности принятых значений параметров, составляющих этот вектор. Эта информация может быть задана или в виде средней квадратической ошибки (СКО) ( $\sigma_j$ )<sub>d</sub> этих параметров,

или в виде допуска, т.е. центрированного интервала  $[-\Delta d, \Delta d]$ , внутри которого почти наверняка заключен вектор d. В последнем случае можно вычислить вероятность попадания d в интервал  $\pm \Delta d$  [54, с.183]:

$$P(|d_j| < \Delta d_j) = 2\Phi(\Delta d_j / \sigma_j), \qquad (1.13)$$

где  $\Phi(u)$  – интеграљная функция нормаљного распределения (интеграл вероятности). Задаваясь вероятностью  $P_0 = 0.997$ , получаем соотношение  $\Delta d_j = 3\sigma_j$ , известное в литературе под названием "правило трех сигм". С его помощью можно перейти от доверительного интервала к априорной оценке СКО. Зная оценки СКО для всех неулучшаемых параметров, можно построить для них диагональную ковариационную матрицу размером  $k \times k$ :

$$\mathbf{Q}_{dd} = \operatorname{diag}(\sigma_j^2)_d$$
 (j = 1, 2, ..., k). (1.14)

С ее помощью, согласно (1.8) и (1.12), можно найти  $N \times N$ -матрицу автоковариаций вектора w:

$$\mathbf{Q}_{ww} = E\{\mathbf{ww'}\} = E\{\mathbf{Gdd'G'}\} = \mathbf{G}E\{\mathbf{dd'}\}\mathbf{G'} = \mathbf{G}\mathbf{Q}_{dd}\mathbf{G'}.$$
 (1.15)

Тогда окончательное выражение ковариационной матрицы данных, описьваемых линейной моделью (1.4) с постоянными (неслучайными) параметрами, согласно (1.7), (1.10) и (1.15), примет вид

$$\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{Q}_{rr} = \mathbf{Q}_{uu} + \mathbf{Q}_{vv} + \mathbf{Q}_{ww} \,. \tag{1.16}$$

Как показано выше, матрицы  $Q_{\mu\mu}$  и  $Q_{\mu\nu\mu}$  могут быть оценены а priori. Что же касается матрицы  $Q_{\mu\mu}$ , то ввиду непредсказуемости ошибок v их автоковариации можно оценить только в процессе итераций, причем на первом шаге этого процесса обычно принимают  $Q_{\mu\mu} \approx 0$ . Таким образом, в общем случае  $Q_{\mu\nu}$  является полной  $N \times N$ -матрицей. Иногда вместо ковариационной матрицы  $Q_{\mu\nu}$  удобно использовать обратную ей безразмерную весовую матрицу данных

$$\mathbf{P}_{rr} = [p_{ij}] = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \quad (i, j = 1, 2, ..., N), \tag{1.17}$$

где  $\sigma_0^2$  – дисперсия наблюдений с единичным весом (см. § 1-3 гл. 2).

#### §3. Типовые модели данных

Как показано в §1 настоящей главы, вектор данных 1 представляет собой результат совместного действия различных ошибок наблюдений и редукций. Систематическую часть этих суммарных ошибок с принято делить на две составляющие а и b, т.е. обычно полагают c = a + b. Целесообразность такого разделения вытекает из неоднородности параметров, входящих в модель (1.4). Некоторая группа этих параметров, образующих вектор x, может иметь особую физи-

ческую природу, которая требует применения для их оценивания специфических способов, отличных от способов оценивания остальных параметров, образующих вектор у. Например, если параметры х являются глобальными и постоянными, а параметы у – локальными и переменными, то первые нужно оценивать один раз в самом конце обработки цикла наблюдений, а вторые – при обработке каждой серии этого цикла. В таких случаях составляющие а и в необходимо представить двумя разными моделями a = Ax и b = By, в которых x, y – векторы параметров длиной *m* и *n* соответственно, A и B – соответ-

ствующие им матрицы плана размером  $N \times m$  и  $N \times n$ . Подставляя сумму c = Ax + By в (1.6), получаем двухгрупповую модель данных

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{r}. \tag{1.18}$$

Из ее сравнения с общей моделью (1.4) видно, что z = (x, y) представляет собой составной вектор, а  $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} -$ составную матрицу.

Все способы составления двухгрупповой модели (1.18) основаны на сложившейся классификация параметров, приведенной в табл. 1.1. В верхней половине этой таблицы дана классификация по признакам области распределения параметров, а в нижней - по характеру их распределения в этой области. Некоторые параметры могут обладать сразу несколькими признаками. Глобальные параметры, как правило, являются одновременно и постоянными, а локальные и инструментальные параметры часто бывают неустойчивыми или стохастическими. В связи с этим невозможно указать общее правило образования двухгрупповых моделей данных. Эта процедура существенно зависит также от типа инструмента, цели и программы наблюдений. Например, при абсолютных наблюдениях с целью уточнения опорной небесной системы координат CRS к составляющей а принято относить систематические ошибки предвычисленных положений наблюдаемых КО в некоторой конкретной реализации CRS, которая может быть задана или в форме каталога координат опорных объектов (звезд, ВР), или в виде их эфемерид (ИСЗ, планеты). Ко второй составляющей b в этом случае относят все остальные систематические ошибки наблюдений и редукций.

Систематические ошибки координат звезд принято представлять в виде разложения в ряд Лапласа по сферическим функциям [2, с.51]

$$a_i = \sum_n Y_n(\alpha_i, \delta_i), \qquad (1.19)$$

$$Y_n = \sum_{m=0}^n (c_{n,m} \cos m\alpha_i + d_{n,m} \sin m\alpha_i) P_n^{(m)}(\sin \delta_i).$$

десь  $P_n^{(m)}$  – присоединенные функции Лежандра первого рода;  $n_{m,m}$ ,  $d_{n,m}$  – постоянные коэффициенты. Иногда в этом выражении присоединенные функции заменяют обыкновенными полиномами leжандра  $P_n = P_n^{(0)}$ , а для учета ошибок, зависящих от яркости звезд, водят полиномы Эрмита [78].

| ~ ~ .    | <br>10 1     |           |       |        |       |         |         |
|----------|--------------|-----------|-------|--------|-------|---------|---------|
| annuna   | <br>к пассиd | hurching  | т паг | NAMETT | DOB 1 | моленей | TAHHLIY |
| аолица . | <br>1Chaoong | nu a tu n | ւոսբ  | Jamort |       | моделен | даншыл  |

| Характеристика                    | Компоненты модели данных  |
|-----------------------------------|---|
| Глобальные                        | Астрономические и физические постоянные;<br>ошибки CRS и TRS; параметры вращения<br>Земли; числа Лява; геопотенциал; эфемериды<br>ИСЗ, болыших и малых планет; фигура Земли;<br>динамические эффекты жидкого ядра |
| Региональные                      | Движения литосферных плит, прогибы зем-<br>ной поверхности; эффекты океанической и<br>тропосферной циркуляции   |
| Локальные                         | Координаты наблюдательного пункта; ло-<br>кальные деформации земной коры; аномаль-<br>ная рефракция и другие атмосферные эффек-<br>ты   |
| Инструментальные                  | Ошибки привязки к опорному реперу наблю-<br>дательного пункта; ошибки наблюдений в<br>инструментальной системе; павильонная реф-<br>ракция и термические эффекты  |
| Постоянные                        | Неизменные на протяжении всего цикла на-<br>блюдений  |
| Квазипостоянные<br>(неустойчивые) | Постоянные на ограниченном интервале вре-<br>мени, обычно равном продолжительности<br>единичной серии наблюдений; могут меняться<br>скачком от серии к серии  |
| Переменные<br>(регулярные)        | Изменяются даже на интервале одной серии<br>наблюдений, но поддаются описанию линей-<br>ной моделью с постоянными коэффициентами  |
| Стохастические                    | Случайные флуктуации параметров, связан-<br>ных с инструментальной системой и/или<br>внешней средой, вследствие протекающих там<br>стохастических процессов   |

Таким образом, в модели a = Ax вектор x представляет собой совокупность неизвестных коэффициентов разложения (1.19), а столбцы матрицы A составлены из значений соответствующих функций того же разложения в точках i = 1, 2, ..., N. В общем случае, когда наблюдения ведутся с помощью инструмента неортогонального типа, ошибки обеих экваториальных координат звезд влияют на данные наблюдений в виде линейной комбинации, поэтому модель a = Ax в свою очередь тоже разбивается на две группы:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_{\alpha} + \mathbf{a}_{\delta} = \mathbf{A}_{\alpha}\mathbf{x}_{\alpha} + \mathbf{A}_{\delta}\mathbf{x}_{\delta}, \qquad (1.20)$$

где **a**<sub>α</sub> и **a**<sub>δ</sub> определяются формулами (1.19).

В РСДБ-наблюдениях по программе IERS, когда количество наблюдаемых ВР невелико, не принято выделять систематическую компоненту ошибок их координат. В этом случае определяются индивидуальные ошибки координат КО как квазислучайные величины, распределенные по небесной сфере. При наблюдениях тел солнечной системы (Солнца, Луны, больших и малых планет) модель а = Ах описывает неточность эфемерид этих тел, и поэтому вектор х представляет собой набор уточняемых элементов их орбит и некоторых астрономических постоянных. Предвычисление положений ИСЗ делается, как правило, методом численного интегрирования уравнений его движения, поэтому уточняемыми параметрами в этом случае являются координаты и скорости ИСЗ на заданную эпоху. Что касается всех остальных систематических ошибок данных  $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ , то в основном они зависят от ощибок геометрической ориентации инструмента или его координат в земной системе TRS. Хотя геометрическая и физическая теория каждого астрометрического инструмента индивидуальна, для основных угломерных инструментов можно указать типовую модель его ориентировки в TRS. Эта модель имеет следующий простой вид:

 $b_i = e(t_i)\cos\theta\cos\psi + f(t_i)\cos\theta\sin\psi + g(t_i)\sin\theta + h(t_i),$ 

где  $\psi, \theta$  – обобщенные аргументы, зависящие от времени *t* и координат KO, а e(t), f(t), g(t), h(t) – обобщенные параметры. Их связь с инструментальными параметрами показана в табл. 1.2.

| Таблица 1.2. | Параметры   | типовой  | модели | ошибок | ориентировки | на- |
|--------------|-------------|----------|--------|--------|--------------|-----|
| земных астро | метрических | инструме | HTOB   |        |              |     |

| Инструмент | θ | Ψ | e(1)    | f(t)         | g(1)       | h(t)       |
|------------|---|---|---------|--------------|------------|------------|
| Пассажный  | 0 | Z | b+ucosφ | a+usinφ      | -          | С          |
| Верт. круг | 0 | Z | Р       | q            | -          | Δφ         |
| Астролябия | 0 | Α | Δφ      | ucosq        |            | $\Delta z$ |
| РСДБ       | δ | h | Δe      | $-\Delta Se$ | $\Delta p$ | $\Delta T$ |

В таблице приняты следующие обозначения: z, A – зенитное расстояние и азимут звезды; a, b, c – азимут, наклонность и коллимация меридианного инструмента;  $u, \Delta \phi, \Delta z$  – поправки часов, широты и зенитного расстояния; p, q – горизонтальное и вертикальное гнутие трубы вертикального круга;  $\delta, h$  – склонение и часовой угол радиоисточника;  $\Delta e, \Delta p$  – поправки экваториальной и полярной проекции базы радиоинтерферометра;  $\Delta S$  – поправка звездного времени;  $\Delta T$ поправка синхронизации часов. Если функции e, f, g, h непрерывны, то мы имеем дело с *регулярными* параметрами, и на ограниченном интервале наблюдений их можно представить, например, в виде разложений по полиномам Лежандра с *постоянными* коэффициентами:

$$e(t) = \sum_{n} e_{n} P_{n}(t).$$
 (1.21)

Совокупность таких коэффициентов для всех функций *e*, *f*, *g*, *h* образует вектор у. Вместо полиномиальных разложений типа (1.21) иногда применяются сплайн-аппроксимация, ряды Фурье и др.

Рассмотренные выше модели имеют параметры, постоянные на интервале каждой серии наблюдений. Однако на практике встречаются случаи, когда некоторые параметры настолько неустойчивы, что их невозможно аппроксимировать с достаточной точностью даже на коротких интервалах времени. В пределе они могут быть просто случайными величинами. Если такие параметры оценивать не требуется, то их влияние на данные наблюдений можно включить в невязки г (см. §1 наст. гл.). Однако иногда стохастические параметры требуется оценить или исключить в процессе уравнивания. В этом случае их необходимо представить в модели данных в явном виде.

Пусть имеется какая-либо серия наблюдений с постоянными и стохастическими параметрами. Постоянные параметры объединим в вектор х, а стохастические – в вектор у. Причем будем считать, что количество разноименных стохастических параметров равно *n*. Тогда модель таких данных примет вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}_{j}\mathbf{y}_{j} + \mathbf{r}, \qquad (1.22)$$

где  $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, ..., y_{Nj})$  – один из векторов стохастических параметров, состоящий из N компонент  $y_{ij}$ ;  $\mathbf{B}_j = \operatorname{diag}(b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{Nj})$  – соответствующая ему диагональная матрица плана размером  $N \times N$ . Совокупность всех стохастических параметров можно представить в виде единого составного вектора длиной nN:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y}_{j}) \quad (j = 1, 2, ..., n).$$
 (1.23)

Вводя также блочную матрицу

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n], \tag{1.24}$$

имеющую размер N × nN, получаем вместо (1.22) модель

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{r},\tag{1.25}$$

которая по форме подностью совпадает с (1.18), но имеет смешанный состав параметров. В ней вектор х представляет постоянные параметры, а вектор у – стохастические.

Насколько нам известно, наибольшее число разноименных стохастических параметров (n = 3) содержится в моделях РСДБ-наблюдений. Два из них описывают флуктуации тропосферной задержки сигнала в зенитах обоих пунктов радиоинтерферометра, разнесенных на большие расстояния, а третий характеризует относительные флуктуации шкал атомного времени этих пунктов. В оптической астрометрии стохастические параметры описывают высокочастотные флуктуации рефракции – так называемые атмосферные дрожания изображений звезд в поле зрения инструмента.

Рассмотрим теперь модель данных нескольких серий наблюдений:

$$\mathbf{l}_{k} = \mathbf{A}_{k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{k}\mathbf{y}_{k} + \mathbf{r}_{k} \quad (k = 1, 2, \dots, M). \tag{1.26}$$

Эту модель будем называть многогрупповой. Здесь каждая серия данных с номером k представлена своей моделью, однако вектор параметров х является общим для всех серий. Такие модели очень распространены и используются, когда необходимо отделить глобальные параметры от локальных, постоянные от неустойчивых и т.п. (см. табл. 1.1). Например, при многобазовом уравнивании РСДБнаблюдений, когда k означает номер базы радиоинтерферометрической сети, к параметрам х относят ПВЗ и координаты ВР, а к параметрам  $y_k$  – относительные координаты пунктов сети, тропосферные задержки, параметры синхронизации часов и проч. Схема многогрупповой модели представлена на рис. 1.2.

Обозначая

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} \\ \mathbf{A}_{2} \\ \cdots \\ \mathbf{A}_{M} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{B} = \operatorname{diag}(\mathbf{B}_{1}, \mathbf{B}_{2}, \dots, \mathbf{B}_{M}), \\ \mathbf{y} = (\mathbf{y}_{1}, \mathbf{y}_{2}, \dots, \mathbf{y}_{M}), \\ \mathbf{l} = (\mathbf{l}_{1}, \mathbf{l}_{2}, \dots, \mathbf{l}_{M}), \\ \mathbf{r} = (\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{2}, \dots, \mathbf{r}_{M}), \end{array}$$
(1.27)

модель (1.26) можно представить в более общем виде (1.18).

| Векторы    | $\rightarrow$ | x              | $\mathbf{y}_1$ | <b>y</b> <sub>2</sub> | <b>y</b> <sub>3</sub> |     | У <sub>М</sub> | 1              |
|------------|---------------|----------------|----------------|-----------------------|-----------------------|-----|----------------|----------------|
| параметров |               | A              | Bi             |                       |                       |     |                | 1,             |
| Матрицы    |               | A <sub>2</sub> |                | B <sub>2</sub>        |                       |     |                | 12             |
| плана      | <b>→</b>      | A3             |                |                       | <b>B</b> 3            |     |                | l,             |
|            |               | •••            |                |                       |                       | •*• | -              | •••            |
|            |               | A <sub>M</sub> |                |                       |                       |     | B <sub>M</sub> | I <sub>M</sub> |

Рис. 1.2. Схема модели совокупности данных М серий наблюдений.

#### §4. Полнота и ортогональность моделей данных

Рассмотрим данные  $l = (l_i)$  (i = 1, 2, ..., N), полученные в течение какойлибо одной серии наблюдений. Примем вначале, что эти данные не содержат систематических ошибок, а представляют собой равноточные и центрированные случайные величины  $\mathbf{r} = (r_i)$ , т.е. будем считать, что  $\mathbf{l} = \mathbf{r}$ . Несмотря на это попытаемся определить из этих данных параметры двух систематических ошибок с помощью простейшей двухпараметрической модели

$$\mathbf{l} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{r},\tag{1.28}$$

где  $\mathbf{a} = (a_i)$ ,  $\mathbf{b} = (b_i) - векторы-столбцы, представляющие собой за$ данные в дискретных точках (<math>i = 1, 2, ..., N) базисные функции модели, а x, y – неизвестные скалярные параметры.

Решение избыточной системы уравнений (1.28) с единичной весовой матрицей будем искать по методу наименьших квадратов (МНК) при условии минимума скалярного произведения вектора невязок (r,r) = r'r = min. Как хорошо известно (см. §1 гл.2), это условие приводит к нормальной системе уравнений вида

$$(a, a) + (a, b) = (a, l),$$
  
 $(b, a) + (b, b) = (b, l),$  (1.29)

где (a, a) = a'a, (a, b) = a'b и т.д. – соответствующие скалярные произведения. Будем для простоты считать, что векторы **a** и **b** нормированы, т.е. имеют место равенства (a, a) = (b, b) = l. Тогда, учитывая, что в рассматриваемом случае l = r, решение системы уравнений (1.29) можно записать в виде

$$x_r = [(\mathbf{a}, \mathbf{r}) - (\mathbf{b}, \mathbf{r})(\mathbf{a}, \mathbf{b})] / D,$$
  

$$y_r = [(\mathbf{b}, \mathbf{r}) - (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{a}, \mathbf{b})] / D,$$
(1.30)

где  $D = 1 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 -$  определитель левой части нормальной системы (1.29). Эти формулы определяют случайные ошибки оценок параметров x и y, так как они целиком зависят от центрированного случайного вектора г.

Рассмотрим теперь случай, когда данные I кроме случайных ощибок г содержат еще и скрытую систематическую ошибку s = cz, где z – неизвестный параметр этой ошибки. Очевидно, что в этом случае модель данных (1.28) становится неполной. Полагая в формулах (1.29) I = s + r, находим новое решение

$$x = x_s + x_r, \quad y = y_s + y_r,$$

где случайные составляющие x, и y, по-прежнему определяются формулами (1.30), а систематические ошибки этих оценок равны

$$x_{s} = [(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{b})]z / D,$$
  

$$y_{s} = [(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{b})]z / D.$$
(1.31)

Из формул (1.30) видно, что случайные ошибки оценок искомых параметров x и y растут с уменьшением определителя D, т.е. с ростом скалярного произведения (a, b). При (a, b)  $\rightarrow \pm 1$  эти ошибки увеличиваются неограниченно, а при (a, b) = 0 они минимальны. Таким образом, для двухгрупповой модели данных величина (a, b) играет роль критерия ортогональности. При (a, b) = 0 эта модель является *ортого*нальной и система (1.29) распадается на два независимых уравнения, которые могут быть решены порознь. Полученные таким образом оценки параметров x и y будут строго независимыми. Степень взаимной зависимости этих параметров при 0 < |(a, b)| < 1 можно выразить уравнением регрессии

$$y_r = k_r x_r + (1 - k_r^2)(\mathbf{b}, \mathbf{r}) / D$$

где  $k_r = (\mathbf{a}, \mathbf{r})/(\mathbf{b}, \mathbf{r})$ -коэффициент регрессии, являющийся случайной величиной. Случайным является и относительное смещение оценок параметров x и y.

Однако из формул (1.31) следует, что неортогональность модели данных способствует проникновению в решение, причем в увеличенном масштабе, неучтенных (скрытых) систематических ощибок наблюдений и/или редукций. Уравнение регрессии систематических ошибок оцениваемых параметров в этом случае имеет вид

$$y_s = k_s x_s + (1 - k_s^2)(\mathbf{b}, \mathbf{c})z / D,$$

где коэффициент регрессии  $k_s = (\mathbf{a}, \mathbf{c})/(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  уже не является случайный величиной. Неслучайным является и относительное смещение параметров x и y, если параметр z систематической ошибки s устойчив в течение всех серий наблюдений. Если скрытую ошибку  $\mathbf{s} = \mathbf{c}\mathbf{z}$  включить в модель данных, т. е. принять вместо (1.28)

$$\mathbf{l} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z + \mathbf{r},$$

то МНК-оценки всех параметров при l = r будут иметь нулевое матожидание, и поэтому их можно назвать статистически истинными. При этом случайный разброс таких оценок от серии к серии будет минимальным, когда (a, b) = (a, c) = (b, c) = 0, т. е. при взаимной ортогональности базисных функций. Для иллюстрации эффектов неортогональности модели (1.28) рассмотрим следующий пример.

Пусть имеются данные *m* серий наблюдений (*s* = 1, 2, ..., *m*) и пусть их можно представить в виде линейной параметрической модели

$$(l_i)_s = x_s \cos\theta_i + y_s + (r_i)_s \quad (i = 1, 2, \dots, N), \tag{1.32}$$

где  $\theta_i \in [0, \theta]$ ,  $\theta_i = \theta \frac{i-1}{N-1}$ ,  $r_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  – нормальный некоррелированный шум с нулевым матожиданием и единичной дисперсией,  $x_s, y_s$  – параметры модели, которые будем считать постоянными внутри каждой серии и случайными от серии к серии. Вводя векторы-столбцы  $l_s = (l_i)_s$ ,  $\mathbf{r}_s = (r_i)_s$ ,  $\mathbf{z}_s = (x_s, y_s)$  и матрицу  $\mathbf{C} = [\cos \theta_i \ 1]$ , получаем модель

$$\mathbf{l}_s = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{r}_s, \quad \mathbf{Q}_{rr} = \mathbf{I}. \tag{1.33}$$

Будем считать, что  $l_s = 0$  при всех s = 1, 2, ..., m. Тогда, очевидно, E(z) = 0 для всех серий *s*. Идея численного эксперимента состоит в том, чтобы изучить статистические характеристики оценок  $\hat{x}_s$  и  $\hat{y}_s$  в зависимости от матрицы плана C, которая является функцией аргумента  $\theta$ . При  $0 \le \theta \le \pi$  корреляции  $\rho_{xy}$  должны меняться в пределах от -1 до 0 (см. табл. 1.3). С ростом модуля корреляций  $|\rho_{xy}|$  точность оценивания обоих параметров падает, хотя оценки СКО  $\sigma_0$  невязок модели (1.33) остаются практически неизменными.

| θ               | π/4   | π/2   | 3π/4  | π    |
|-----------------|-------|-------|-------|------|
| ρ <sub>xy</sub> | -1.00 | -0.90 | -0.47 | 0.00 |
| σχ              | 1.29  | 0.11  | 0.03  | 0.02 |
| σ,              | 1.06  | 0.05  | 0.01  | 0.01 |
| σ₀              | 1.02  | 1.01  | 1.00  | 1.00 |

Таблица 1.3. Точность оценок параметров модели (1.33)

Оценки  $\hat{x}_s, \hat{y}_s$  получены методом наименьших квадратов (см. §2 гл. 1) из обработки *m* серий наблюдений одинаковой длины N = 100. Количество обработанных серий для  $\theta = \pi$  равно m = 100, а для остальных значений  $\theta - m = 50$ . Результаты вычислений представлены на рис. 1.3 в виде регрессии  $\hat{y}_s = f(\hat{x}_s)$ .



Рис. 1.3. Регрессия  $\hat{y} = f(\hat{x})$  при:  $\theta = \pi/4$  (a),  $\theta = \pi/2$  (б),  $\theta = 3\pi/4$  (в),  $\theta = \pi$  (г).

Рис. 1.3 наглядно показывает, как с увеличением интервала изменения функции  $\cos \theta_i$  и уменьшением корреляции  $|\rho_{xy}|$  уменьшается взаимная зависимость оценок  $x_s$  и  $y_s$ . Очевидно, что только при  $|\rho_{xy}| < 0.5$  эти оценки можно считать достаточно независимыми.

#### §5. Ортогонализация моделей данных

В силу выпеизложенного желательно иметь дело с ортогональными моделями данных. Линейная модель данных (1.4) называется ортогональной, если матрица плана С удовлетворяет условию

$$\mathbf{C}'\mathbf{P}_{II}\mathbf{C} = \mathbf{I},\tag{1.34}$$

где **Р**<sub>*rr*</sub> – безразмерная весовая матрица данных, определяемая формулой (1.17).

В некоторых задачах астрометрии и геодезии необходимо оценивать параметры z, имеющие важный геометрический или физический смысл, например координаты космических объектов и наблюдательных пунктов, ПВЗ и т.п. В этом случае базисные функции модели с = Сг, зависящей от этих параметров, должны оставаться неизменными (за исключением, может быть, их нормировки), что не позволяет применять к этой модели никаких ортогонализирующих преобразований. По сути дела, в этом случае мы можем управлять процессом ортогонализации модели с = Сг только одним способом - путем подбора соответствующей программы наблюдений. С вычислительной точки зрения программа наблюдений будет оппимальной, если она обеспечивает ортогональность модели данных. В принципе мы можем подобрать такую матрицу плана С и такое распределение весов наблюдений, чтобы условие (1.34) выполнялось хотя бы приближенно. Такая программа будет квазиоптимальной. К сожалению, определение оптимальных весов путем обратного преобразования Р, = (CC')<sup>-1</sup> невозможно, так как матрица СС' всегда вырождена [10, с. 29].

Для моделирования ошибок, зависящих от времени *t*, обычно используют ортогональные разложения (1.21) по полиномам Лежандра, которые генерируются с помощью рекуррентной формулы [2, с. 28]

$$(n-m+2)P_{n+2}^{(m)}(t) = (2n+3)tP_{n+1}^{(m)}(t) - (n+m+1)P_n^{(m)}(t),$$
(1.35)

где следует принять m = 0,  $P_0(t) = 1$ ,  $P_1(t) = t$ . Эти полиномы будут ортогональными автоматически при равномерном распределении наблюдений на интервале  $t \in [-1, +1]$ .

Для моделирования двумерных функций, заданных на небесной сфере, таких как геопотенциал или систематические ошибки звездных каталогов, применяются их разложения по сферическим функциям типа (1.19). При равномерном распределении данных по сфере эти функции также оказываются взаимно ортогональными.

Следует, однако, заметить, что обычно часть параметров модели данных оценивать не требуется, а необходимо лишь исключить их влияние на остальную часть модели данных. Например, при обработке абсолютных наблюдений на пассажном инструменте конечная задача состоит в том, чтобы найти поправки прямых восхождений наблюдаемых звезд, т.е. параметры х первой части  $\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  двухгрупповой модели данных (1.18) (см. §3 наст. гл.). При этом параметры у второй части этой модели  $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ , описывающей обобщенную систему инструмента, большого интереса не представляют. Важно только, чтобы эта модель была полной и чтобы она затем была полностью исключена из имеющихся данных наблюдений. Это обстоятельство позволяет осуществлять любые эквивалентные линейные преобразования модели  $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ , в том числе и ее ортогонализацию.

Рассмотрим процесс ортогонализации Грама-Шмидта [36, с.431]. Представим столбцы прямоугольной матрицы  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  (i = 1, 2, ..., N; j = 1, 2, ..., n) в виде совокупности *n* базисных векторов  $\mathbf{b}_j$  длиной *N*. Тогда существует ортонормированная последовательность того же количества векторов  $\overline{\mathbf{b}}_j$ , с помощью которых можно составить матрицу  $\overline{\mathbf{B}} = [\overline{\mathbf{b}}_{ij}]$  и эквивалентную модель  $\mathbf{b} = \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{y}}$ . Векторы  $\overline{\mathbf{b}}_j$  строятся с помощью следующих рекуррентных формул:

$$\overline{\mathbf{b}}_{j} = \frac{\mathbf{f}_{j}}{\sqrt{(\mathbf{f}_{j}, \mathbf{f}_{j})}}, \qquad \mathbf{f}_{1} = \mathbf{b}_{1},$$

$$\mathbf{f}_{j+1} = \mathbf{b}_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} (\overline{\mathbf{b}}_{k}, \mathbf{b}_{j+1}) \overline{\mathbf{b}}_{k},$$
(1.36)

где круглыми скобками обозначены скалярные произведения векторов.

В силу эквивалентности ортогонального преобразования Грама-Шмидта имеем  $\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{y} = \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{y}}$ , откуда  $\overline{\mathbf{y}} = (\overline{\mathbf{B}}'\overline{\mathbf{B}})^{-1}\overline{\mathbf{B}}'\mathbf{B}\mathbf{y}$ . Так как столбцы матрицы  $\overline{\mathbf{B}}$  ортонормированы, то  $\overline{\mathbf{B}}'\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{I}$  и поэтому

$$\overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{B}}' \mathbf{B} \mathbf{y}. \tag{1.37}$$

Обратное преобразование имеет вид

-30-

 $\mathbf{y} = (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{y}}.$  (1.38)

Если описанная выше предварительная ортогонализация модели данных не проводилась, между оценками параметров  $\hat{z}_j$  могут возникнуть очень тесные корреляционные связи, которые мешают интерпретации полученных результатов и отрицательно сказываются на их точности. В этом случае бывает полезно уже полученные оценки определяемых параметров  $\hat{z}$  выразить через другие некоррелированные параметры  $\overline{z}$ .

Так как МНК-оценки  $\hat{z}$  всегда находятся из решения систем уравнений вида (см. §2 гл. 2)

$$\mathbf{V}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h},\tag{1.39}$$

то эту замену можно сделать путем линейного преобразования [27, с.225]

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{R}' \,\overline{\mathbf{z}},\tag{1.40}$$

где  $\mathbf{R} = \{r_{jk}\}$  – ортогональная  $m \times m$ -матрица правосторонних собственных векторов матрицы  $\mathbf{V}^{-1}$ . Столбцами матрицы  $\mathbf{R}$  являются собственные векторы  $\mathbf{r}_k = (r_j)_k$ .

Преобразование  $\mathbf{RV}^{-1}\mathbf{R}' = \mathbf{L}$  превращает  $\mathbf{V}^{-1}$ в диагональную матрицу  $\mathbf{L} = \operatorname{diag}(\lambda_j)$ , составленную из ее собственных значений  $\lambda_j$  (j = 1, 2, ..., m). Подставляя (1.40) в систему уравнений (1.39) и умножая ее слева на  $\mathbf{R}$ , получаем новую систему

решение которой дает

$$\overline{\mathbf{z}} = (\mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{R}')^{-1}\mathbf{R}\mathbf{h}.$$
 (1.41)

Пользуясь формулой (1.40) и свойством ортогональности матрицы R, т.е. равенством  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}'$ , легко показать, что матрица

$$(\mathbf{RVR'})^{-1} = (\mathbf{R'})^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{RV}^{-1}\mathbf{R'} = \mathbf{L}$$

является диагональной и поэтому решение (1.41) можно представить в более простой форме z = LRh.

Умножая (1.40) слева на R, получаем обратное преобразование  $\bar{z} = R\hat{z}$ , или в развернутом виде

Эти формулы представляют собой множественную регрессию между искомыми параметрами. Вычисление собственных значений и собственных векторов для действительной симметричной матрицы производится методом вращений Якоби [76, с.360].

#### Глава 2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

#### §1. Линейные евклидовы пространства

Рассмотрим *N*-мерное действительное векторное пространство  $\mathcal{L}^N$  с базисом  $\{e\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_N\}$ , заданным множеством из *N* линейно независимых векторов  $\mathbf{e}_j$ . Любой вектор х из этого пространства может быть представлен в виде разложения по заданному базису [53, с.56]

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{N} x_j \mathbf{e}_j, \qquad (2.1)$$

где  $x_1, x_2, ..., x_N$  - координаты вектора х в этом базисе.

Введем понятие линейного преобразования векторных пространств с помощью линейного оператора **A** [36, с. 419]. Такой оператор считается заданным, если имеется некоторая векторная функция  $f(\mathbf{x})$ , которая каждому вектору **x** из пространства  $\mathcal{E}^N$  ставит в соответствие другой вектор **y** из пространства  $\mathcal{E}^M$ :

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} \,, \tag{2.2}$$

и при этом сохраняются следующие линейные операции:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \equiv \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) \equiv \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Линейное преобразование (2.2) иногда называют отображением пространства  $\mathcal{L}^N$  в пространство  $\mathcal{L}^M$ . Оператор, отображающий линейное пространство  $\mathcal{L}^N$  в себя, т.е. не меняющий его размерности, называется собственным линейным оператором пространства  $\mathcal{L}^N$ .

Базисные векторы  $e_1, e_2, ..., e_N$ , как и всякие другие, можно подвергнуть действию какого-либо линейного оператора **А.** Полученные новые векторы  $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_N$  можно снова разложить по тому же базису  $\{e\}$ . Таким способом мы получим [53, с. 93]

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_{j} = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \mathbf{e}_{i} \quad (j = 1, 2, ..., N).$$
(2.3)

Коэффициенты  $a_{ij}$  (i, j = 1, 2, ..., N) определяют  $N \times N$ -матрицу  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  как *ядро* оператора **A** в базисе {*e*}. Столбцы этой матрицы есть координаты векторов **A***e*<sub>*i*</sub> в базисе {*e*}.

С помощью матрицы А можно получить линейное преобразование одного вектора в другой. Используя разложения (2.1) и (2.3), находим

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\sum_{j=1}^{N} x_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{N} x_j \mathbf{A}\mathbf{e}_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} x_j \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j\right) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \mathbf{e}_i = \mathbf{y}$$

откуда видно, что координаты вектора у в базисе {e} равны

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j$$
 (*i* = 1, 2, ..., *N*),

что можно записать в матричной форме y = Ax. Здесь координаты  $x_j$ вектора x и координаты  $y_i$  вектора y отнесены  $\kappa$  одному и тому же базису  $\{e\} = \{e_1, e_2, ..., e_N\}$  пространства  $\mathcal{L}^N$ . Произведение двух линейных преобразований A и B можно представить произведением соответствующих матриц A и B. Если векторы x и y относятся к разным пространствам  $\mathcal{L}^N$  и  $\mathcal{L}^M$ , то матрица преобразования A становится прямоугольной  $M \times N$ -матрицей.

Другой тип линейных преобразований связан с заменой базиса пространства (системы координат). Если в пространстве  $\mathcal{L}^{N}$  имеется вектор х, то, согласно (2.1), его представление в разных базисах  $\{e\} = \{\mathbf{e}_{1}, \mathbf{e}_{2}, ..., \mathbf{e}_{N}\}$  и  $\{\tilde{e}\} = \{\tilde{\mathbf{e}}_{1}, \tilde{\mathbf{e}}_{2}, ..., \tilde{\mathbf{e}}_{N}\}$  имеет вид

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{N} x_j \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{N} \bar{x}_k \bar{\mathbf{e}}_k.$$

Координаты  $x_j$  и  $\tilde{x}_k$  одного и того же вектора х в разных базисах связаны соотношениями [36, с. 427]

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{\breve{x}}, \quad \mathbf{\breve{x}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}, \tag{2.4}$$

где  $\mathbf{T} = [t_{ij}](i, j = 1, 2, ..., N)$  – квадратная (необходимо невырожденная) матрица взаимного линейного преобразования базисов

$$\check{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^N t_{ij} \mathbf{e}_i \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Если последовательность базисных векторов представить в виде составного вектора-столбца  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_N)$  размером  $N \times 1$ , элементами которого являются базисные векторы, то последнее равенство можно записать в следующей матричной форме:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{T}'\mathbf{e}.\tag{2.5}$$

Евклидовы пространства являются унитарными, поскольку в них определена бинарная операция, называемая скалярным произведением двух векторов х и у. Пусть координаты этих векторов в общем базисе  $\{e\}$  равны соответственно  $(x_1, x_2, ..., x_N)$  и  $(y_1, y_2, ..., y_N)$ . Тогда их скалярное произведение будет равно [36, с. 429]:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}' \mathbf{y} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{e}'_i\right) \left(\sum_{j=1}^{N} y_j \mathbf{e}_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j x_i y_j = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x_i y_j.$$

Входящие сюда скалярные произведения базисных векторов  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  образуют  $N \times N$ -матрицу  $\mathbf{P} = [p_{ij}]$  с элементами

$$p_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, N),$$
(2.6)

поэтому

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{y} = P(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$
(2.7)

Выражение (2.7) полностью совпадает с определением билинейной формы  $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  [53, с. 145], которая представляет собой вещественную функцию двух векторных аргументов. При  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  эта форма называется квадратичной:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} x_i x_j.$$
(2.8)

Матрицу Р называют порождающей матрицей евклидова пространства, или его ядром, имея в виду, что она непосредственно связана с базисом пространства и порождает всевозможные билинейные и квадратичные формы. При P = I скалярное произведение (2.7) будем называть простым, во всех остальных случаях – обобщенным. Согласно (2.6), элементы матрицы Р суть простые скалярные произведения базисных векторов.
Определение (2.7) полностью удовлетворяет необходимым свойствам скалярного произведения в *N*-мерном евклидовом пространстве  $\mathscr{E}^N$  только в том случае, если  $N \times N$ -матрица Р является симметричной и положительно определенной [31, с. 192]. При этом положительно определенная матрица Р порождает неотрицательные квадратичные формы, удовлетворяющие условию  $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \ge 0$ , где знак равенства достигается только при  $x_1 = x_2 = ... = x_N = 0$ . Имеется несколько признаков положительной определенности матрица Р. Например, такая матрица положительно определена, если положительны все ее центральные миноры, т.е.

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{1j} \\ p_{21} & p_{22} & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{j1} & p_{j2} & p_{jj} \end{vmatrix} > 0 \quad (j = 1, 2, ..., N).$$

Известно также [36, с.405], что матрица Р положительно определена, если существует такая матрица А, имеющая полный ранг, что P = A'A. Если квадратные матрицы A и B положительно определены, то матрица P = AB тоже положительно определена.

Из определения (2.6) видно, что матрица Р непосредственно связана с базисом пространства  $\mathcal{E}^N$  и при фиксированном базисе определяется однозначно. Используя введенный выше составной вектор базиса  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_N)$ , се можно представить в виде матрицы Грама

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}' = [(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)] = [p_{ij}].$$

При переходе к другому базису  $\{\breve{e}\} = \{\breve{e}_1, \breve{e}_2, ..., \breve{e}_N\}$  эта матрица, согласно (2.5), принимает вид [36, с. 430]

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}' = \mathbf{T}'\mathbf{e}\mathbf{e}'\mathbf{T} = \mathbf{T}'\mathbf{P}\mathbf{T}.$$
(2.9)

Теперь, учитывая (2.4), (2.5) и (2.9), можно показать, что скалярное произведение (2.7) инвариантно относительно преобразований базиса:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{\breve{x}}'(\mathbf{T}'\mathbf{P}\mathbf{T})\mathbf{\breve{y}} = \mathbf{\breve{x}}'\mathbf{\breve{P}}\mathbf{\breve{y}} = (\mathbf{\breve{x}},\mathbf{\breve{y}}).$$

Заметим также, что в силу невырожденности матрицы перехода Т матрицы Ри Римеют один и тот же ранг.

Во всяком *N*-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис  $\{\tilde{e}\} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_N\}$ , который имеет следующее свойство:

$$(\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) = \tilde{p}_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$
(2.10)

Примером может служить *N*-мерный декартов прямоугольный базис:

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, \dots, 0), \ \tilde{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \ \tilde{\mathbf{e}}_N = (0, 0, \dots, 1).$$

Согласно определению (2.6), ядро евклидова пространства в ортонормированном базисе (2.10) представляет собой единичную  $N \times N$ матрицу  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ . Такие пространства называют ортонормированными и обозначают  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^N$ . В ортонормированном пространстве все скалярные произведения – простые. Переход из пространства  $\boldsymbol{\varepsilon}^N$  в пространство  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^N$  означает преобразование базиса  $\{e\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_N\}$  в ортонормированный базис  $\{\tilde{e}\} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, ..., \tilde{\mathbf{e}}_N\}$  по формуле (2.5) и соответствующее переопределение координат всех векторных элементов пространства  $\boldsymbol{\varepsilon}^N$  в новом базисе  $\tilde{e}$  по формуле (2.1). Ортонормированный базис задает N-мерную прямоугольную систему координат, в то время как система координат, задаваемая произвольным базисом, в общем случае является косоугольной. Действительно, угол  $\boldsymbol{\varphi}$  между базисными векторами в общем случае равен [31, с.87]

$$\cos\varphi_{ij} = \frac{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)}{\sqrt{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}\sqrt{(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j)}} = \frac{p_{ij}}{\sqrt{p_{ii}p_{jj}}},$$

откуда при условии (2.8) получаем  $\varphi_{ii} = \pi / 2$ . Выражение

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}p_{ij}x_ix_j\right)^{1/2}$$

называется обобщенной евклидовой нормой элемента х евклидового пространства  $\mathcal{E}^N$ . В ортонормированном пространстве  $\tilde{\mathcal{E}}^N$  квадратичная форма (2.8) принимает канонический вид

$$P(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2,$$

а норма

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}$$

приобретает геометрический смысл длины вектора.

# §2. Метод максимального правдоподобия

Рассмотрим серию данных наблюдений  $(l_1, l_2, ..., l_N)$  как *N*-мерную выборку случайного вектора І. Предположим, что каждая из величин  $l_i$  имеет нормальное распределение вероятностей с плотностью [36, с.575]

$$L(l_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{(l_i-c_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\},\,$$

которая зависит от измеренных значений величины  $l_i$  и двух параметров – математического ожидания  $c_i$  и дисперсии  $\sigma_i^2$ . Плотность вероятности совместного распределения некоторого множества измеряемых величин (компонент случайного вектора  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_N)$ ) называется *N*-мерным нормальным распределением [38, с. 50]

$$L(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathbf{Q}_{\prime\prime}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{r}'\mathbf{Q}_{\prime\prime}^{-1}\mathbf{r}\right\},$$
(2.11)

где  $\mathbf{r} = \mathbf{l} - \mathbf{c}$  есть вектор центрированных случайных величин  $r_i = l_i - c_i$ ,  $\mathbf{Q}_{rr} = [q_{ij}] = E\{\mathbf{rr'}\}$  (i, j = 1, 2, ..., N) – невырожденная положительно определенная ковариационная матрица этих величин. В развернутом виде формула (2.11) имеет вид [36, с. 583]

$$L(r_1, r_2, ..., r_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det[q_{ij}]}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{q}_{ij} r_i r_j\right\},\,$$

где  $q_{ij}, \ddot{q}_{ij}$  – элементы матриц  $\mathbf{Q}_{rr}$  и  $\mathbf{Q}_{rr}^{-1}$  соответственно.

Функцию L принято называть функцией правдоподобия. Если матрица  $\mathbf{Q}_{rr}$  задана а ргіогі, то эта функция зависит от N измеренных величин  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_N)$  и N неизвестных параметров  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_N)$ . Если вместо ковариационной матрицы  $\mathbf{Q}_{rr}$  известна безразмерная весовая матрица

$$\mathbf{P}_{rr} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{rr}^{-1}, \qquad (2.12)$$

$$L(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \sigma_0^{2N} \det \mathbf{P}_{rr}^{-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \mathbf{r}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{r}\right\},$$
 (2.13)

где (N+1)-й параметр  $\sigma_0^2$  называется дисперсией единицы веса, так как при  $\mathbf{P}_{rr} = \mathbf{I}$  имеем  $\mathbf{Q}_{rr} = \sigma_0^2 \mathbf{I}$ . Значения параметров этой функции считаются наиболее правдоподобными, если они доставляют ей максимум. Легко показать, что эта функция достигает максимума одновременно со своим натуральным логарифмом

$$\ln L = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2}\ln(\sigma_0^2) + \frac{1}{2}\ln(\det \mathbf{P}_{rr}^{-1}) - \frac{1}{2\sigma_0^2}\mathbf{r'}\mathbf{P}_{rr}\mathbf{r}$$

Из этого выражения видно, что при любом фиксированном значении дисперсии  $\sigma_0^2$  максимум функции ln *L* достигается при условии минимума квадратичной формы

$$R = \mathbf{r}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{r} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{r}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{r} = \frac{1}{\sigma_0^2} S = \min.$$
(2.14)

Это означает, что параметры  $c = (c_1, c_2, ..., c_N)$  и дисперсию  $\sigma_0^2$  можно оценивать раздельно.

Астрометрические наблюдения всегда косвенные, так как искомые параметры z связаны с непосредственными данными измерений l не прямо, a с помощью линейной модели вида (1.4) (см. §1 гл.1)

$$\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{r} \,. \tag{2.15}$$

Здесь  $\mathbf{l} = (l_i) - N \times 1$ -вектор данных (i = 1, 2, ..., N),  $\mathbf{z} = (z_j) - m \times 1$ вектор неизвестных параметров (j = 1, 2, ..., m),  $\mathbf{C} = [c_{ij}]$  – известная  $N \times m$ -матрица частных производных вида  $c_{ij} = \partial l_i / \partial z_j$ ,  $\mathbf{r} = (r_i) - N \times 1$ -вектор квазислучайных невязок с матожиданием  $E\{\mathbf{r}\} = 0$ . Матрицу C принято называть матрицей плана. Будем считать, что все ее столбцы линейно независимы и, таким образом, ранг этой матрицы равен m, что можно записать в виде rank(C) = m. Таким образом, благодаря модели (2.15) задача оценивания N параметров  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_N)$  переходит в задачу оценивания m параметров  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_m)$ . Если эта модель полная, то вектор  $\mathbf{c} = \mathbf{C}\mathbf{z}$  представляет собой матожидание вектора **l**, так как

$$E\{\mathbf{l}\} = E\{\mathbf{c} + \mathbf{r}\} = \mathbf{c} = \mathbf{C}\mathbf{z},$$

и поэтому условие (2.14) можно переписать в виде

$$S = \min\{(\mathbf{l}' - \mathbf{z}'\mathbf{C}')\mathbf{P}_{\prime\prime}(\mathbf{l} - \mathbf{C}\mathbf{z})\}.$$

Нам необходимо найти такие оценки  $\hat{z}$  параметров модели (2.15), которые удовлетворяли бы этому условию. Для раскрытия экстремума функции S(z) воспользуемся правилами векторного дифференцирования [45, с. 73]. Пусть z, b – векторы-столбцы длиной m, A –  $m \times m$ -матрица. Поскольку производная функции f(z) есть векторстолбец

$$\partial f(\mathbf{z}) / \partial \mathbf{z} = (\partial f / \partial z_1, \partial f / \partial z_2, \dots, \partial f / \partial z_m),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{b}'\mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{z}'\mathbf{b}) = \mathbf{b}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{z}'\mathbf{z}) = 2\mathbf{z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{b}'\mathbf{A}\mathbf{z}) = \mathbf{A}'\mathbf{b}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{z}'\mathbf{A}\mathbf{z}) = 2\mathbf{A}\mathbf{z}.$$
(2.16)

Последнее равенство справедливо, если А – симметричная матрица. Используя эти соотношения, находим необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial S}{\partial z}\Big|_{z=\hat{z}} = -\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} + \mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C}\hat{z} = \mathbf{0},$$

откуда имеем

$$(\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{I}.$$
 (2.17)

Условие минимума квадратичной формы S означает, что матрица

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \bigg|_{z=\hat{z}} = \mathbf{C}' \mathbf{P}_{\prime\prime} \mathbf{C}$$

должна быть положительно определена.

Выражение (2.17) представляет собой матричную запись так называемой нормальной системы уравнений. Будем иногда использовать и более краткую запись этой системы где

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l}.$$

Поскольку матрица  $P_m$  неособенная, а rank(C') = rank(C) = m, то  $m \times m$ -матрица W имеет полный ранг (rank(W) = m) и тоже является неособенной. На этом основании система (2.17) имеет единственное решение

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{h}.$$
 (2.19)

Оценки невязок модели (2.15), очевидно, равны

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}, \qquad (2.20)$$

откуда с учетом (2.19) получаем

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{I} - \mathbf{C} (\mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{I} =$$
  
= (**I** - **U**)**I** = (**I** - **U**)(**Cz** + **r**) = (**I** - **U**)**r**, (2.21)

где введена N × N -матрица

$$\mathbf{U} = \mathbf{C} (\mathbf{C}' \mathbf{P}_{\prime\prime} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{P}_{\prime\prime}.$$
(2.22)

Вычислим теперь  $m \times m$ -матрицу апостериорных ковариаций оценок  $\hat{z}$ :

$$\mathbf{D}_{zz} = E\{\mathbf{e}_{z}\mathbf{e}_{z}'\},\$$

где  $\mathbf{e}_z = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z} - ошибки оценивания. Поскольку матрица W неособен$ ная, то

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\hat{\mathbf{z}}$$
 и  $\mathbf{z} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{z}$ ,

и поэтому, согласно (2.15), (2.20) и (2.21), имеем

$$\mathbf{e}_{z} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}(\mathbf{C}\hat{z} - \mathbf{C}z) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{U}\mathbf{r}.$$

Тогда с учетом (2.12) и (2.22) находим

$$\mathbf{D}_{zz} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{U}E\{\mathbf{rr}'\}\mathbf{U}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C}\mathbf{W}^{-1} = = \sigma_0^2\mathbf{W}^{-1} = \sigma_0^2(\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})^{-1} = (\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C})^{-1}.$$
 (2.23)

Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{D}_{zz} = [d_{jk}]$  являются дисперсиями оценок  $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_j)$ :

$$\sigma_j^2 = d_{jj},$$

а определитель det **D**<sub>22</sub> иногда называют обобщенной дисперсией этого вектора. Кроме того, часто используют корреляционную матрицу

$$\mathbf{R}_{zz} = (\rho_{ik}) \quad (j, k = 1, 2, ..., m), \tag{2.24}$$

где

$$\rho_{jk} = \frac{d_{jk}}{\sqrt{d_{jj}d_{kk}}}$$

представляют собой апостериорные коэффициенты корреляции между оценками параметров  $\hat{z}_i$  и  $\hat{z}_k$ .

С заданной вероятностью β можно утверждать, что истинные значения величин z<sub>j</sub> лежат в пределах [38, с.159]:

$$z_j \in [\hat{z}_j - \gamma \sigma_j, \hat{z}_j + \gamma \sigma_j],$$
 (2.25)

где  $\hat{z}_j$  определяется формулой (2.19), а  $\gamma$  есть 100(1- $\beta$ )-процентный квантиль распределения Стьюдента  $t_{N-m,\beta} \in N-m$  степенями свободы такой, что вероятность  $P\{|t_{N-m,\beta}| \le \gamma\} = \beta$ .

Учитъвая (2.21)–(2.23), получаем апостериорную оценку ковариаций невязок г :

$$\mathbf{D}_{rr} = E\{\hat{\mathbf{rr}}'\} = (\mathbf{I} - \mathbf{U})E\{\mathbf{rr'}\}(\mathbf{I} - \mathbf{U})' = (\mathbf{I} - \mathbf{U})\mathbf{Q}_{rr}(\mathbf{I} - \mathbf{U})' = (\mathbf{I} - \mathbf{U})\mathbf{Q}_{rr} = \mathbf{Q}_{rr} - \mathbf{C}(\mathbf{C'}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C'} = \mathbf{Q}_{rr} - \mathbf{C}\mathbf{D}_{zz}\mathbf{C'}.$$
 (2.26)

Напомним, что если а ргіогі задана только весовая матрица данных  $P_{rr}$ , то для получения оценок апостериорных ковариаций  $D_{zz}$  и  $D_{rr}$  необходимо оценить величину дисперсии единицы веса  $\sigma_0^2$ , введенную ранее формулой (2.11). Для этого опять воспользуемся методом максимального правдоподобия, т.е. минимизируем функцию  $\ln L$  по параметру  $\sigma_0^2$ . Это дает уравнение

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{N}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^4} (\mathbf{r'} \mathbf{P}_{rr} \mathbf{r}) = 0.$$

Для того чтобы согласовать получаемую отсюда оценку  $\hat{\sigma}_0^2$  с уже полученными оценками параметров  $\hat{z}$ , необходимо в правой части этого равенства вместо невязок г использовать их оценки  $\hat{r} = l - C\hat{z}$ . Тогда получаем

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{r}})}{N} = \frac{\hat{S}}{N}.$$
(2.27)

Таким образом, формулы (2.19), (2.20), (2.23) и (2.27) дают полное решение проблемы оценивания параметров модели (2.15) методом максимального правдоподобия. Этот метод называют также методом наименьших квадратов.

## §3. Приведение к модели равноточных данных

Изложенная выше теория МНК использует лишь самые общие свойства ковариационной матрицы данных Q<sub>17</sub>, а именно ее неособенность и положительную определенность. Это обстоятельство можно рассматривать как существенное обобщение классической теории МНК, которая предполагает, что матрица Q<sub>17</sub> имеет диагональный вид

$$\mathbf{Q}_{rr} = \operatorname{diag}(\sigma_{l}^{2}) \quad (i = 1, 2, ..., N).$$
 (2.28)

Согласно представлению (см. §1 гл. 1)  $\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{s}$ , невязки г линейной модели данных (2.15) могут иметь полную (недиагональную) ковариационную матрицу  $\mathbf{Q}_{rr} = \mathbf{Q}_{uu} + \mathbf{Q}_{ss}$ . Эта матрица становится диагональной только в том случае, если ошибки наблюдений и независимы (не коррелированы) и в данных l нет скрытых систематических ошибок s, не учтенных моделью (2.15), т.е. когда эта модель является полной (см. §2 гл. 1). Поскольку ошибки наблюдений u, как правило, не коррелированы, то наличие внедиагональных ковариаций в матрице  $\mathbf{Q}_{rr}$  говорит о наличии в данных l скрытых ошибок s и указывает на неполноту принятой модели данных.

Рассмотрим особенности уравнивания полных моделей данных, имеющих диагональные ковариационные матрицы вида (2.28). Введем, согласно определению (1.17), весовую матрицу данных

$$\mathbf{P}_{rr} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{rr}^{-1} = \text{diag}(\sigma_0^2 / \sigma_i^2) = \text{diag}(p_i) \quad (i = 1, 2, ..., N),$$
(2.29)

которая также является диагональной положительно определенной матрицей. Для нее можно определить правило извлечения квадратного корня [38, с. 27]

$$\mathbf{P}_{rr}^{1/2} = \operatorname{diag}(\sqrt{p_i}), \qquad (2.30)$$

поскольку

$$\mathbf{P}_{rr} = \mathbf{P}_{rr}^{1/2} \mathbf{P}_{rr}^{1/2}.$$
 (2.31)

Умножая теперь обе части уравнения (2.15) на  $P_{rr}^{1/2}$ , получим эквивалентную модель равноточных данных [38, с. 137; 4, с. 193]

$$\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{t},\tag{2.32}$$

где

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}_{rr}^{1/2} \mathbf{l}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{P}_{rr}^{1/2} \mathbf{C}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{P}_{rr}^{1/2} \mathbf{r}.$$
 (2.33)

Действительно, принимая во внимание формулы (2.12) и (2.28)–(2.31), находим

$$\mathbf{Q}_{II} = E\{\mathbf{tt'}\} = \mathbf{P}_{Ir}^{1/2} E\{\mathbf{rr'}\}\mathbf{P}_{Ir}^{1/2} =$$
$$= \mathbf{P}_{Ir}^{1/2} \mathbf{Q}_{Ir} \mathbf{P}_{Ir}^{1/2} = \sigma_0^2 \mathbf{P}_{Ir}^{1/2} \mathbf{P}_{Ir}^{-1} \mathbf{P}_{Ir}^{1/2} = \sigma_0^2 \mathbf{I}, \qquad (2.34)$$

что и означает равноточность нового вектора данных f. Все его элементы имеют одинаковую дисперсию  $\sigma_0^2$  и единичный вес, поскольку

$$\mathbf{P}_{tt} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{tt}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Таким образом, введенную ранее произвольным образом величину  $\sigma_0^2$  можно идентифицировать с дисперсией  $\sigma_i^2$  равноточных величин t, имеющих единичный вес. Именно по этой причине ее принято называть дисперсией единицы веса.

Линейное преобразование (2.33) не меняет оценок параметров исходной модели данных. Действительно, нормальная система для модели (2.32) с ковариационной матрицей (2.34) принимает вид

$$(G'G)\hat{z} = G'f,$$
  
 $\hat{z} = (G'G)^{-1}G'f.$  (2.35)

откуда находим

Учитывая (2.31) и (2.33), получаем

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr}^{1/2} \mathbf{P}_{rr}^{1/2} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr}^{1/2} \mathbf{P}_{rr}^{1/2} \mathbf{I} =$$
$$= (\mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{I} = (\mathbf{C}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{I}, \qquad (2.36)$$

что полностью совпадает с (2.19).

Таким образом, благодаря условию (2.28) становится возможным преобразование (2.23) полной модели неравноточных данных (2.15) в эквивалентную модель (2.32) равноточных данных. Но когда матрицы  $Q_{rr}$  и  $P_{rr}$  не являются диагональными, такое преобразование невозможно, так как для них не существует операции извлечения квадратного корня в смысле равенства (2.31). Предположим, однако, что существует какое-то другое эквивалентное преобразование модели (2.15) в (2.32) с помощью некоторой  $N \times N$ -матрицы приведения S. Тогда вместо (2.33) имеем

$$\mathbf{f} = \mathbf{S}\mathbf{I}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{S}\mathbf{C}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{r}. \tag{2.37}$$

Подставляя (2.37) в (2.34), получаем условие преобразования данных к единичному весу

$$\mathbf{SP}_{rr}^{-1}\mathbf{S}' = \mathbf{I}.\tag{2.38}$$

С другой стороны, условие несмещенности (2.36) оценок  $\hat{z}$  дает

$$(C'S'SC)^{-1}C'S'S = (C'P_{rr}C)^{-1}C'P_{rr},$$
  
 $P_{rr} = S'S.$  (2.39)

откуда следует

Легко показать, что если существует обратная матрица  $S^{-1}$ , то оба условия (2.38) и (2.39), связывающие матрицы  $P_{rr}$  и S, совпадают. Действительно, в этом случае условие (2.39) можно записать в виде

$$(S^{-1})'P_{\prime\prime}S^{-1} = I,$$

что совпадает с (2.38), так как

$$\mathbf{I}^{-1} = [(\mathbf{S}^{-1})'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{S}^{-1}]^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{P}_{rr}^{-1}\mathbf{S}' = \mathbf{I}.$$

С другой стороны, из матричной алгебры известно [46, с. 69–72], что **Р**,, как действительная симметричная положительно определенная матрица допускает факторизацию методом квадратного корня, т.е. разложение на сомножители вида (2.39), где **S** – верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, S' – транспонированная к ней матрица. Элементы матрицы S находятся по формулам (алгоритм Холецкого)

$$s_{11} = \sqrt{p_{11}}, \quad s_{ii} = \sqrt{p_{i1} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^2} \quad (i = 2, 3, ..., m),$$
  

$$s_{1j} = p_{1j} / s_{11} \quad (j = 2, 3, ..., m),$$
  

$$s_{ij} = (p_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj}) / s_{ii} \quad (j = 2, 3, ..., m; i = 2, 3, ..., j-1).$$

Легко заметить, что когда  $P_{rr}$  – диагональная матрица, эти формулы дают  $S = P_{rr}^{1/2}$ , и разложение (2.39) принимает вид (2.31).

Таким образом, в случае полной невырожденной весовой матрицы данных операция извлечения квадратного корня (2.31) заменяется операцией факторизации методом квадратного корня (2.39), и мы приходим к следующему обобщенному определению для СКО единицы веса:

$$\sigma_0^2 \mathbf{I} = E\{\mathbf{tt}'\} = \mathbf{Q}_{tt} = \mathbf{S} E\{\mathbf{rr}'\} \mathbf{S}' = \mathbf{S} \mathbf{Q}_{tt} \mathbf{S}', \qquad (2.40)$$

где t = Sr – равноточный вектор. Одновременно это доказывает, что (2.32) есть модель равноточных данных.

## §4. Свойства МНК-оценок

Рассмотрим теперь наиболее важные свойства полученных в §2 настоящей главы МНК-оценок.

(1) Условие (2.17) равносильно равенству

$$C'P_{rr}\hat{r} = 0.$$
 (2.41)

Действительно, подставляя (2.20) в (2.17), находим  $(\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}(\mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}+\hat{\mathbf{r}})$ , откуда непосредственно вытекает (2.41).

(2) Оценки  $\hat{\mathbf{z}}$  действительно доставляют минимум квадратичной форме (2.14), и поэтому условие ее минимизации является необходимым и достаточным.

Рассмотрим произвольный  $m \times 1$ -вектор  $z_1$  в качестве оценки параметров **z**. Тогда он будет удовлетворять уравнениям (2.15) с невязками

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{z}_1. \tag{2.42}$$

Докажем, что

$$\hat{S}_{l} = (\mathbf{r}_{l}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{r}_{l}) \ge (\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{r}}) = \hat{S}.$$
(2.43)

Сопоставляя (2.20) и (2.42), находим

$$(\mathbf{r}_1 - \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{C}(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_1), \quad \mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{C}(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_1),$$

откуда

$$\mathbf{r}_{l}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{r}_{l} = (\hat{\mathbf{r}}' + (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_{1})'\mathbf{C}')\mathbf{P}_{rr}(\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{C}(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_{1})) = \hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}_{rr}\hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_{1})'\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C}(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_{1}) + (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_{1})'\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C}(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}_{1}).$$

Так как  $\mathbf{P}_{rr}$  – симметричная матрица, то, согласно (2.41), имеем С' $\mathbf{P}_{rr}\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \ \hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C} = \mathbf{0},$  поэтому

$$\hat{S}_{l} = \hat{S} + (\mathbf{r}_{l} - \hat{\mathbf{r}})' \mathbf{P}_{rr} (\mathbf{r}_{l} - \hat{\mathbf{r}}).$$
(2.44)

Кроме того, матрица **Р**<sub>*r*</sub> положительно определена, поэтому все порождаемые ею квадратичные формы положительно полуопределены (см. §6 гл.1), т.е.

$$(\mathbf{r}_{l}-\hat{\mathbf{r}})'\mathbf{P}_{\prime\prime}(\mathbf{r}_{l}-\hat{\mathbf{r}})\geq 0,$$

поэтому, согласно (2.44), находим  $\hat{S}_1 \ge \hat{S}$ , что и доказывает (2.43).

(3) Оценки **2** являются асимптотически несмещенными. Действительно, согласно (2.16), имеем

$$E\{\hat{\mathbf{z}}\} = (\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}E\{\mathbf{l}\} = \mathbf{z}.$$

(4) Оценки  $\hat{z}$  представляют собой случайный нормальный т-мерный вектор с плотностью распределения вероятности

$$L(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \sigma_0^{2m} \det \mathbf{W}_{zz}^{-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2} (\hat{\mathbf{z}}' - \mathbf{z}') \mathbf{W}_{zz} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})\right\},$$
 (2.45)

где  $z = E\{\hat{z}\}, W_{zz} = \sigma_0^2 D_{zz}^{-1}$  – апостериорная весовая матрица оценок  $\hat{z}$ .

Согласно (2.19), оценки  $\hat{z}$  являются линейной (векторной) функцией данных l. B §1 настоящей главы мы условились, что эти данные представляют собой N-мерный нормальный вектор. Там же мы приняли считать, что rank(C) = m, где m – длина вектора параметров z. Если можно доказать, что матрица H линейного преобразования  $\hat{z}$  = Hl имеет тот же ранг m, то это означает, что  $\hat{z}$  нормально распределен с плотностью (2.45) и является невырожденным m-мерным вектором [38, с. 51–55). Действительно, согласно (2.19), матрица этого преобразования равна

$$\mathbf{H} = (\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}, \qquad (2.46)$$

откуда видно, что rank(H) = m, так как  $P_{rr}$  – неособенная матрица.

Теперь остается показать, что апостериорная весовая матрица  $W_{zz}$  положительно определена. Поскольку априорная весовая матрица данных  $P_{rr}$  всегда положительно определена, то она может быть факторизована, т.е. представлена в виде произведения двух взаимно транспонированных матриц (см. формулу (2.39)), поэтому

$$W_{zz} = C'P_{rr}C = (SC)'(SC) = Y'Y.$$
 (2.47)

Так как  $N \times N$ -матрица факторизации S является неособенной и положительно определенной, то rank (Y) = rank(SC) = rank(C) = m, и тогда

$$G = \det \mathbf{W}_{zz} = \det (\mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{C}) = \det (\mathbf{Y}' \mathbf{Y}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) & (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_m) \\ (\mathbf{y}_2, \mathbf{c}_1) & (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2) & (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_1) & (\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_2) & \dots & (\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m) \end{vmatrix} > 0.$$
(2.48)

Выражение (2.48) представляет собой определитель Грама в ортонормированном евклидовом пространстве  $\tilde{\mathcal{E}}^m$ , поскольку он составлен из скалярных произведений ( $y_j$ ,  $y_k$ ) с единичной весовой матрицей. В линейной алгебре доказывается [38, с.32], что такой определитель всегда положителен. Но его порядок до сих пор не был ничем ограничен, поэтому можно утверждать, что будут положительны все центральные миноры матрицы  $W_{zz}$ , а значит (см. §l наст. гл.), эта матрица и обратная ей матрица  $D_{zz} = \sigma_0^2 W_{zz}^{-1}$  будут положительно определенными.

(5) Оценки  $\hat{z}$  являются наиболее точными в классе линейных несмещенных оценок.

Предположим, что кроме МНК-оценки  $\hat{z} = Hl$  вектор параметров z имеет еще какую-либо линейную несмещенную оценку  $\tilde{z} = \tilde{H}l$  с ковариационной матрицей  $\tilde{D}_{zz}$ . Докажем, что разность ковариационных матриц этих оценок есть неотрицательно определенная матрица, т.е.  $\tilde{D}_{zz} - D_{zz} \ge 0$ . Обозначим  $\tilde{H} = H + X$ , тогда, согласно определению ковариаций, имеем

$$\mathbf{D}_{zz} = E\{\mathbf{\hat{z}}\mathbf{\hat{z}'}\} = \mathbf{H}E\{\mathbf{ll'}\}\mathbf{H'} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\prime\prime}\mathbf{H'},$$

$$\mathbf{D}_{zz} = E\{\mathbf{\bar{z}}\mathbf{\bar{z}'}\} = (\mathbf{H} + \mathbf{X})E\{\mathbf{l}\mathbf{l}'\}(\mathbf{H} + \mathbf{X})' = = \mathbf{D}_{zz} + \mathbf{X}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{H}' + \mathbf{H}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{X}' + \mathbf{X}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{X}'.$$
(2.49)

Кроме того, для любой несмещенной оценки имеем равенства

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{H}\mathbf{I} = \mathbf{H}(\mathbf{C}\hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{r}}), \quad E\{\hat{\mathbf{z}}\} = \mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{C}E\{\hat{\mathbf{z}}\} + \mathbf{H}E\{\hat{\mathbf{r}}\} = \mathbf{H}\mathbf{C}\mathbf{z},$$

откуда имеем

$$(HC-I)z = 0$$
, или  $HC = I$ 

и поэтому

$$\mathbf{XC} = (\mathbf{\tilde{H}} - \mathbf{H})\mathbf{C} = \mathbf{\tilde{H}C} - \mathbf{HC} = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Учитывая теперь выражения (2.12) и (2.46), имеем

$$XQ_{rr}H' = XQ_{rr}Q_{rr}^{-1}C(C'Q_{rr}^{-1}C)^{-1} = XC(C'Q_{rr}^{-1}C)^{-1} = 0,$$
  

$$HQ_{rr}X' = (C'Q_{rr}^{-1}C)^{-1}(XC)' = 0.$$
(2.50)

Подставляя (2.50) в (2.49), находим

$$\mathbf{D}_{zz} = \mathbf{D}_{zz} + \mathbf{X}\mathbf{Q}_{II}\mathbf{X}'.$$

Но поскольку матрица  $Q_{rr}$  по условию положительно определена, то при любой матрице X произведение  $XQ_{rr}X'$  есть неотрицательно определенная матрица, что и доказывает свойство (5).

(6) Вектор невязок  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}$  длиной N является независимым от вектора  $\hat{\mathbf{z}}$  вырожденным нормальным вектором, имеющим только N-т независимых компонент.

Согласно (2.21), имеем

$$\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{I} - \mathbf{U})\mathbf{I}. \tag{2.51}$$

Здесь  $N \times N$ -матрица U, введенная формулой (2.22), и вместе с ней матрица (I – U) являются и*демпотентными*, так как обладают свойством

$$U^{2} = UU = U, (I - U)^{2} = I - 2U + U^{2} = (I - U).$$
 (2.52)

Кроме того, имеем также [45, с. 43]

$$\operatorname{rank}(\mathbf{U}) + \operatorname{rank}(\mathbf{I} - \mathbf{U}) = N.$$
(2.53)

Определим теперь ранг матрицы U. Учитывая, что UC = C, а rank(C) = m, по теореме перемножения рангов [38, c.31] получаем

 $m = \operatorname{rank}(\mathbf{C}) \le \min \{\operatorname{rank}(\mathbf{U}), \operatorname{rank}(\mathbf{C})\} = \min \{\operatorname{rank}(\mathbf{U}), m\},\$ 

т.е.  $rank(U) \ge m$ . Но по той же теореме с учетом (2.22) имеем  $rank(U) \le rank(C) = m$ , поэтому окончательно rank(U) = m. Тогда, согласно (2.53), находим

$$\operatorname{rank}(\mathbf{I} - \mathbf{U}) = N - m, \tag{2.54}$$

откуда и следует, что вектор невязок  $\hat{\mathbf{r}}$  длиной N является вырожденным (N-m)-мерным случайным вектором.

Заметим также, что  $N \times N$ -матрица апостериорных ковариаций вектора невязок  $\mathbf{D}_{rr}$  является вырожденной, и поэтому оценки невязок  $\hat{\mathbf{r}}$  не имеют апостериорной весовой матрицы вида  $\mathbf{W}_{rr} = \sigma_0^2 \mathbf{D}_{rr}^{-1}$ . Действительно, формула (2.26) дает

$$\mathbf{D}_{\prime\prime} = (\mathbf{I} - \mathbf{U})\mathbf{Q}_{\prime\prime}.$$

Но, согласно (2.54), идемпотентная  $N \times N$ -матрица (I–U) имеет неполный ранг, равный (N - m), и всегда является вырожденной, а это значит, что и матрица **D**<sub>*n*</sub> тоже имеет неполный ранг и потому тоже всегда вырождена.

Для доказательства независимости векторов  $\hat{z}$  и  $\hat{r}$  необходимо убедиться, что  $E\{\hat{r}\hat{z}'\}=0$ . Принимая во внимание (2.19), (2.21), (2.22), (2.46) и (2.51), находим

$$E\{\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{z}}'\} = (\mathbf{I} - \mathbf{U})E\{\mathbf{l}l'\}\mathbf{W}' = (\mathbf{I} - \mathbf{U})\mathbf{Q}_{\prime\prime}\mathbf{P}_{\prime\prime}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{P}_{\prime\prime}\mathbf{C})^{-1} =$$
  
=  $\sigma_0^2[\mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{P}_{\prime\prime}\mathbf{C})^{-1} - \mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{P}_{\prime\prime}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{\prime\prime}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{P}_{\prime\prime}\mathbf{C})^{-1}] = 0.$ 

(7) Апостериорная оценка дисперсии единицы веса (2.27), полученная методом максимального правдоподобия,

$$\hat{s}_0^2 = \frac{(\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{P}_r, \hat{\mathbf{r}})}{N} = \frac{\hat{S}}{N}$$
(2.55)

является смещенной. Несмещенная оценка этой величины имеет вид

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{P}_n, \hat{\mathbf{r}})}{N-m} = \frac{\hat{S}}{N-m},$$
(2.56)

*ide*  $m = \operatorname{rank}(\mathbf{C})$ .

Причина смещенности оценки (2.55) заключается в том, что оценки невязок  $\hat{\mathbf{r}}$ , определяемые формулой (2.21), в отличие от их истинных значений г представляют собой вырожденный вектор размерностью (N-m). Это значит, что из N компонент вектора  $\hat{\mathbf{r}}$  только (N-m) величин являются независимыми, а остальные можно представить их линейной комбинацией. Используя (2.21), (2.22), (2.32), (2.37) и (2.39), имеем

$$\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' (\mathbf{I} - \mathbf{U}') \mathbf{P}_{rr} (\mathbf{I} - \mathbf{U}) \mathbf{r} = = \mathbf{r}' \mathbf{P}_{rr} (\mathbf{I} - \mathbf{U}) \mathbf{r} = \mathbf{t}' \mathbf{t} - \mathbf{t}' \mathbf{Z} \mathbf{t} = \mathbf{t}' (\mathbf{I} - \mathbf{Z}) \mathbf{t},$$
(2.57)

где

$$Z = (SC)(C'P_{rr}C)^{-1}(SC)' = (SC)[(SC)'(SC)]^{-1}(SC)'$$

представляет собой идемпотентную матрицу размером  $N \times N$ . Очевидно, что матрица (I – Z) также идемпотентна. Поскольку, согласно (2.37), t есть *N*-мерный вектор независимых равноточных случайных величин, то, согласно теореме о распределении квадратичных форм [45, с. 164], квадратичная форма (2.57) имеет  $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы, равным гапk(I–Z) = N – гапk(Z). Учитывая, что S – неособенная положительно определенная матрица ранга N, видим, что произведение матриц (SC) имеет ранг m, поэтому, рассуждая подобно тому, как это делалось в отношении матрицы U при доказательстве свойства (6), убеждаемся, что гапk(Z) = m. Вводя понятие ранга квадратичной формы [38, с. 38], равного числу степеней свободы  $\chi_k^2$ -распределения, получаем

$$\operatorname{rank}(\hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}_{rr}\hat{\mathbf{r}}) = \operatorname{rank}((\mathbf{I} - \mathbf{U}')\mathbf{P}_{rr}(\mathbf{I} - \mathbf{U})) = N - m.$$
(2.58)

Согласно определению распределения  $\chi_k^2$  [1, с. 93–94] с k степенями свободы, имеем  $E\{\chi_k^2\} = \sigma_0^2 k$ , поэтому, полагая k = N - m, находим

$$E\{\hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}_{r,r}\hat{\mathbf{r}}\}=\sigma_0^2(N-m)$$

Определим теперь матожидание оценки (2.55):

$$E\{\hat{s}_0^2\} = \frac{1}{N} E\{\hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}_n\hat{\mathbf{r}}\} = \sigma_0^2 \frac{N-m}{N} \neq \sigma_0^2,$$

откуда видно, что оценка  $\hat{s}_0^2$  является смещенной. Несмещенная оценка равна

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{N}{N-m} \hat{s}_0^2 = \frac{(\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{r}})}{N-m}.$$

Доверительный интервал для этой оценки имеет вид [1, с. 167]:

$$\sigma_0^2 \in \left(\frac{(N-m)\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{N-m,\frac{1-\beta}{2}}}, \frac{(N-m)\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{N-m,\frac{1+\beta}{2}}}\right)$$

где  $\chi^2_{k,\alpha}$  – квантиль распределения  $\chi^2$  с числом степеней свободы k, определяемый равенством  $P\{\chi^2_k > \chi^2_{k,\alpha}\} = \alpha$ .

Квдратичную форму ( $\hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}_{rr}\hat{\mathbf{r}}$ ) можно вычислить, не зная невязок  $\hat{\mathbf{r}}$ . Используя равенства (2.18) и (2.41), находим

$$\hat{\mathbf{r}}'\mathbf{P}_{rr}\hat{\mathbf{r}} = (\hat{\mathbf{z}}'\mathbf{C}' - \mathbf{l}')\mathbf{P}_{rr}(\mathbf{C}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{l}) = \hat{\mathbf{z}}'\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{l}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} - \mathbf{l}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C}\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}'\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} = \hat{\mathbf{z}}'\mathbf{V}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{l}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} - \hat{\mathbf{z}}'\mathbf{V}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{l}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} - \hat{\mathbf{z}'}\mathbf{V}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{l}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} - \hat{\mathbf{z}'}\mathbf{V}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{l}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} - \hat{\mathbf{z}'}\mathbf{V}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{l}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} + \mathbf{l}'\mathbf{P}_{r$$

### §5. Двухгрупповой метод наименьших квадратов

Рассмотрим двухгрупповую модель данных (1.18)

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{r}.$$
 (2.60)

Вводя блочную матрицу плана  $C = [A \ B]$  и составной вектор параметров z = (x, y), эту модель можно привести к общему виду (2.15), поэтому нормальную систему уравнений можно представить в общем виде (2.18)

$$\mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}, \qquad (2.61)$$

в виде блочной структуры

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{xx} & \mathbf{W}_{xy} \\ \mathbf{W}_{yx} & \mathbf{W}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x} \\ \mathbf{h}_{y} \end{bmatrix}$$
(2.62)

и в форме системы двух матричных уравнений

$$W_{xx}\hat{\mathbf{x}} + W_{xy}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}_{x},$$
  

$$W_{yx}\hat{\mathbf{x}} + W_{yy}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}_{y},$$
(2.63)

где

$$\mathbf{h}_{x} = \mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{l}, \quad \mathbf{h}_{y} = \mathbf{B}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{l},$$

$$\mathbf{W}_{xx} = \mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{A}, \quad \mathbf{W}_{xy} = \mathbf{W}'_{yx} = \mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{B}, \quad \mathbf{W}_{yy} = \mathbf{B}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{B}.$$
(2.64)

Решение уравнения (2.62) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{xx} & \mathbf{W}_{xy} \\ \mathbf{W}_{yx} & \mathbf{W}_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x} \\ \mathbf{h}_{y} \end{bmatrix}$$

Согласно правилам обращения блочных матриц [36, с. 666], имеем

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{xx} & \mathbf{V}_{xy} \\ \mathbf{V}_{yx} & \mathbf{V}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x} \\ \mathbf{h}_{y} \end{bmatrix}, \qquad (2.65)$$

где

$$V_{xx} = (W_{xx} - W_{xy}W_{yy}^{-1}W_{yx})^{-1}, \quad V_{yx} = -W_{yy}^{-1}W_{yx}V_{xx},$$
  

$$V_{yy} = (W_{yy} - W_{yx}W_{xx}^{-1}W_{xy})^{-1}, \quad V_{xy} = -W_{xx}^{-1}W_{xy}V_{yy}.$$
(2.66)

Очевидно, что матрица апостериорных ковариаций определяемых параметров в этом случае равна

$$\mathbf{D}_{zz} = \hat{\sigma}_{0}^{2} \mathbf{W}_{zz}^{-1} = \hat{\sigma}_{0}^{2} \mathbf{V}_{zz} = \hat{\sigma}_{0}^{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{xx} & \mathbf{V}_{xy} \\ \mathbf{V}_{yx} & \mathbf{V}_{yy} \end{bmatrix},$$
(2.67)

где дисперсия единицы веса вычисляется по общей формуле (2.56)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{S}}{N - (m+n)},$$
 (2.68)

в которой

$$\hat{S} = \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{l} - \hat{\mathbf{x}}' \mathbf{h}_x - \hat{\mathbf{y}}' \mathbf{h}_y.$$
(2.69)

Будем считать, что векторы параметров х и у состоят из m и n компонент соответственно, так что составной вектор z имеет длину (m+n). Тогда из формул (2.65) и (2.66) видно, что обращению подлежат матрицы порядка m и n, в то время как прямое решение системы (2.65) требует обращения матрицы V размером  $(m+n) \times (m+n)$ . Из (2.65) имеем

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_{xx}\mathbf{h}_{x} + \mathbf{V}_{xy}\mathbf{h}_{y},$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{V}_{yx}\mathbf{h}_{x} + \mathbf{V}_{yy}\mathbf{h}_{y},$$
(2.70)

откуда после громоздких матричных преобразований с использованием (2.66) и матричного тождества [40, с. 93]

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$
(2.71)

находим

$$(\mathbf{W}_{xx} - \mathbf{W}_{xy}\mathbf{W}_{yy}^{-1}\mathbf{W}_{yx})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_{x} - \mathbf{W}_{xy}\mathbf{W}_{yy}^{-1}\mathbf{h}_{y},$$
  

$$(\mathbf{W}_{yy} - \mathbf{W}_{yx}\mathbf{W}_{xx}^{-1}\mathbf{W}_{xy})\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}_{y} - \mathbf{W}_{yx}\mathbf{W}_{xx}^{-1}\mathbf{h}_{x}.$$
(2.72)

Впрочем, эти формулы проще получить способом исключения параметров. Например, умножая первое из уравнений (2.63) слева на матрицу  $W_{xx}^{-1}$ , находим  $\hat{\mathbf{x}} = W_{xx}^{-1}\mathbf{h}_x - W_{xx}^{-1}W_{xy}\hat{\mathbf{y}}$ . Подставляя затем это выражение во второе уравнение (2.63), находим второе выражение в (2.72). Аналогичным образом получаем и первое выражение. Формулы (2.72) носят название метода исключения. Они употребляются, когда необходимо найти только один из векторов  $\hat{\mathbf{x}}$  или  $\hat{\mathbf{y}}$ , не вычисляя другого.

Введем теперь более простые обозначения:

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_{xx}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{W}_{yy}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{W}_{xy}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{h}_{x}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{h}_{y}.$$

Тогда, согласно (2.65)–(2.66), нормальная система (2.62) и ее решение примут вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix},$$
 (2.73)

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H'} & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H'})^{-1} & -(\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H'})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1} \\ -(\mathbf{G} - \mathbf{H'}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H'}\mathbf{F}^{-1} & (\mathbf{G} - \mathbf{H'}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \qquad (2.74)$$

или

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g}),$$
  

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{f}).$$
(2.75)

Тот же алгоритм исключения можно построить по схеме приближений. Найдем из первого уравнения (2.76) предварительное значение вектора х:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{f} \,. \tag{2.76}$$

Тогда из второго уравнения той же системы имеем окончательное значение вектора у:

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}'\hat{\mathbf{x}}_0)$$
 (2.77)

и, наконец, опять из первого уравнения (2.76) с учетом (2.73) находим уточненный вектор х:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{y}}.$$
 (2.78)

Что касается апостериорных ковариаций определяемых параметров, то они находятся с использованием базовых формул (2.67)-(2.69):

$$\mathbf{D}_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{V}_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')^{-1},$$
  

$$\mathbf{D}_{yy} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{V}_{yy} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1},$$
  

$$\mathbf{D}_{xy} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{V}_{xy} = -\mathbf{D}_{xx}\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1},$$
  

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{S} / (N - m - n),$$
  

$$\hat{S} = \mathbf{I}'\mathbf{P}_{yy}\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}'\mathbf{f} - \hat{\mathbf{y}}'\mathbf{g}.$$
(2.79)

#### §6. Неполные модели данных

Рассмотрим проблему влияния скрытых систематических ошибок моделей данных на МНК-оценки определяемых параметров. Пусть полная модель некоторой совокупности данных имеет вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{r},\tag{2.80}$$

где г – случайный вектор некоррелированных невязок с нулевым матожиданием и диагональной весовой матрицей  $P_{rr}$ . Будем теперь считать, что часть этой модели **b** = **By** нам неизвестна и представляет собой скрытую систематическую ошибку. Это значит, что для отыскания оценок параметров х мы пользуемся вместо (2.80) неполной моделью

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}, \tag{2.81}$$

где

$$\mathbf{w} = \mathbf{r} + \mathbf{b} \tag{2.82}$$

представляет собой вектор невязок с матожиданием, равным b. Если о существовании ошибки b нам ничего не известно, то мы вынуждены использовать весовую матрицу P<sub>r</sub>, и тогда по формуле (2.19) получаем следующую приближенную МНК-оценку искомых параметров х:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = (\mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{I}.$$
(2.83)

Между тем если бы модель систематической ошибки b = By была известна, то, применяя метод исключения (см. §5 гл. 2), мы могли бы найти по формулам (2.72) истинную оценку

$$\mathbf{\hat{x}} = (\mathbf{W}_{xx} - \mathbf{W}_{xy}\mathbf{W}_{yy}^{-1}\mathbf{W}_{yx})^{-1}(\mathbf{h}_x - \mathbf{W}_{xy}\mathbf{W}_{yy}^{-1}\mathbf{h}_y),$$

которую с помощью формул (2.64) и (2.71) можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{b}}),$$
 (2.84)

где  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{y}}$  – соответствующая оценка систематической ошибки b. Эту формулу с учетом (2.83) можно записать как

 $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_0 - \Delta \hat{\mathbf{x}}_0$ 

где

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_0 = (\mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{b}}$$
(2.85)

представляет собой смещение  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \hat{\mathbf{x}}$  приближенной оценки (2.83) относительно истинной (2.84). Это смещение равно нулю, если

$$\mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{b} = (\mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{B}) \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \qquad (2.86)$$

т.е. когда систематическая ошибка отсутствует (b = 0) или когда параметры ее линейной модели  $\hat{b} = B\hat{y}$  не коррелирует с параметрами модели  $\mathbf{a} = A\mathbf{x}$ , так как в этом случае будет выполняться приближенное равенство  $A'P_{\prime\prime}B\approx 0$ .

Ю.И.Маркузе [39, с. 56–57] вывел условие, при котором смещение  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_0$  вследствие наличия неучтенных систематических ошибок данных оказывается максимальным. Запишем выражения для невязок полной и неполной моделей данных (2.80) и (2.81) соответственно:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{l} - \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l} + \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}},$$
$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{l} - \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{l}.$$

Выясним теперь, при каких  $\hat{\mathbf{b}}$ , кроме тривиального случая  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ , эти невязки будут одинаковы. Вычитая указанные выше равенства и приравнивая результат нулю, находим

$$\hat{\mathbf{w}} - \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \qquad (2.87)$$

или

$$(\mathbf{I} - \mathbf{U})\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0},\tag{2.88}$$

где U =  $A(A'P_{,,}A)^{-1}A'P_{,,}$  – идемпотентная  $N \times N$  -матрица, поскольку  $U^2 = U$ , причем ее ранг равен m – числу независимых столбцов матрицы A (см. формулу (2.54)). Ранг  $N \times N$ -матрицы (I-U) равен (N – m), и поэтому она всегда является вырожденной. В этих условиях уравнение (2.88) допускает множество решений, которые можно представить в виде  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{X}\mathbf{d}$ , где  $\mathbf{X} - N \times m$ -матрица, которую нужно определить так, чтобы выполнялось равенство (2.88), а **d** – произвольный  $m \times l$ -вектор [39, с. 57]. Легко убедиться, что **X** = **A**, так как именно в этом случае равенство (2.88) выполняется при любом d:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{U})\mathbf{\hat{b}} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr})\mathbf{A}\mathbf{d} = (\mathbf{A} - \mathbf{A})\mathbf{d} = 0$$

Таким образом, при  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\mathbf{d}$  невязки неполной модели  $\hat{\mathbf{w}}$  оказываются равными r - невязкам полной модели, а это значит, что ощибка b полностью вошла в оценки  $\hat{\mathbf{x}}_0$ , которые поэтому оказываются максимально смещенными. И наоборот, эти оценки будут несмещенными, если невязки удовлетворяют равенству (2.82), т.е.

$$\hat{\mathbf{w}} - \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}, \qquad (2.89)$$

откуда опять получаем условие несмещенности (2.86). Рассмотрим теперь случай, когда систематическая ошибка b и ее линейная модель остаются неизвестными, но зато известна автоковариационная функция c<sub>h</sub>(k) этой ошибки. С помощью этой функции мы можем построить теплицеву ковариационную матрицу вида

$$\mathbf{Q}_{bb} = [q_{ij}], \quad q_{ij} = c_b(|i-j|) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N),$$
(2.90)

или

$$\mathbf{Q}_{bb} = \begin{bmatrix} c(0) & c(1) & c(2) & \cdots & c(N-1) \\ c(1) & c(0) & c(1) & \cdots & c(N-2) \\ c(2) & c(1) & c(0) & \cdots & c(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(N-1) & c(N-2) & c(N-3) & \cdots & c(0) \end{bmatrix}$$

откуда видно, что значения функции c<sub>b</sub>(k) (k=0,1,2,..., N-1) образуют диагонали этой матрицы. Если теперь воспользоваться весовой матрицей

$$\mathbf{P}_{ww} = \sigma_0^2 (\mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{Q}_{bb})^{-1}, \qquad (2.91)$$

то из неполной модели данных (2.81)-(2.82) получим еще одну оценку

$$\hat{\mathbf{x}}_{1} = (\mathbf{A}' \mathbf{P}_{ww} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{P}_{ww} \mathbf{I}.$$
(2.92)

В главе 4 будет показано, что именно такую оценку параметров дает метод средней квадратической коллокации, в предположении, что ошибка b является стохастическим параметром с ковариационной матрицей  $Q_{bb}$ , причем эта оценка оказывается несмещенной относительно  $\hat{x}$ , так как ее можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_{l} = (\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{P}_{rr}(\mathbf{l}-\hat{\mathbf{b}}), \qquad (2.93)$$

что полностью совпадает с (2.84). В этом выражении **b** есть коллокационная оценка ошибки b.

Покажем некоторые свойства этой оценки на примере фиктивных данных с моделью (1.33), уже рассмотренной в §4 гл. 1, а именно

$$(l_i)_s = x_s \cos\theta_i + y_s + (w_i)_s \quad (i = 1, 2, ..., N).$$
(2.94)

Будем на этот раз считать, что ошибки этой модели w кроме шума г содержат еще и скрытую систематическую компоненту b. Пусть для определенности эта компонента имеет вид синусоиды с единичной амплитудой, неизвестной частотой  $\omega$  и случайной фазой  $\varphi_s$ , меняющейся от серии к серии. Тогда ошибки модели (2.94) можно записать в виде

$$(w_i)_s = (r_i)_s + \sin(\omega t_i + \varphi_s)$$
 (s = 1, 2, ..., m). (2.95)

Полагая, как и раньше,  $\theta_i = \theta(i-1)/(N-1)$ ,  $r_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ , задаваясь частотой  $\omega$  и считая случайную фазу  $\varphi_s$  равномерно распределенной

в интервале  $[0, 2\pi)$ , вычислим по формуле (2.95) вектор  $w_s = (w_i)_s$  и составим для каждой серии *s* свою систему параметрических уравнений вида

$$(w_i)_s = x_s \cos \theta_i + y_s$$
 (*i* = 1, 2, ..., *N*). (2.96)

Количество наблюдений в каждой серии принято равным N = 100, а количество серий – m = 50. МНК-оценки параметров  $x_s$  и  $y_s$  находились в двух вариантах: с единичной весовой матрицей  $\mathbf{P}_{ww} = \mathbf{P}_{rr} =$  $= \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{rr}^{-1} = \mathbf{I}$  и полной весовой матрицей  $\mathbf{P}_{ww} = \sigma_0^2 (\mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{Q}_{bb})^{-1}$ . Здесь  $\mathbf{Q}_{bb}$  – теплицева ковариационная матрица ошибки b, определяемая формулой (2.90) с помощью автоковариационной функции этой ошибки, которая, очевидно, равна  $c_b(k, \omega) = \frac{1}{2}\cos\omega k$  и зависит от частоты  $\omega$ . Для всех серий было принято одинаковое значение частоты  $\omega = 2\pi/N$ . Результаты численного моделирования (коэффициент корреляции  $\rho_{xy}$ , СКО параметров  $\sigma_x, \sigma_y$  и СКО единицы веса  $\sigma_0$ ) для двух типов весовой матрицы  $\mathbf{P}_{ww}$  и разных значений угла  $\theta$  представлены в табл. 2.1. Оценки же самих параметров уравнений (2.96) (истинные значения которых тождественно равны нулю) показаны на рис. 2.1 в виде регрессии  $\hat{y} = f(\hat{x})$ .

Эти данные наглядно показывают, как с увеличением угла  $\theta$  падает корреляция между искомыми параметрами (прямая регрессии "ложится" на ось абсцисс). Однако при всех  $\theta$  заданная точность измерений ( $\sigma_0 = 1$ ) правильно оценивается только в случае использования полной весовой матрицы  $P_{ww}$ , хотя при этом СКО оценок искомых параметров оказываются значительно большими, чем при единичной весовой матрице  $P_{ww} = I$ . Но, как видно из рис. 2.1, сами оценки параметров при полной весовой матрице более достоверны, так как их разброс существенно меньше. Объясняется это тем, что при единичной весовой матрице и случайную фазу, может сильно возмущать оценку параметра  $\hat{x}$  и даже смещать ее среднее, если ограничить диапазон флуктуаций фазы этой ошибки, в то время как при полной весовой матрице эти возмущения практически исчезают.

Таким образом, при неполной модели данных, т.е. при наличии в них немоделируемых систематических ошибок, формальное применение традиционного МНК, использующего только диагональные весовые матрицы, как правило, приводит к недостоверным оценкам определяемых параметров и к завышению их точности. Иначе говоря,

 традиционный метод наименьших квадратов дает несмещенные оценки параметров только для полных моделей данных.



Рис. 2.1. Регрессия оценок параметров модели (2.88) при  $\theta = \pi/4$ ,  $\pi/2$ ,  $3\pi/4$ ,  $\pi$  последовательно сверху вниз (слева матрица  $P_{ww}$  – единичная, справа – полная).

| P <sub>ww</sub> | Единичная |       |          |      | Полная  |         |          |      |
|-----------------|-----------|-------|----------|------|---------|---------|----------|------|
| θ               | $\pi/4$   | π/2   | $3\pi/4$ | π    | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | π    |
| ρ <sub>xy</sub> | -1.00     | -0.90 | -0.47    | 0.00 | -1.00   | -0.96   | -0.67    | 0.00 |
| σχ              | 1.31      | 0.37  | 0.21     | 0.16 | 1.79    | 0.52    | 0.30     | 0.25 |
| σ,              | 1.18      | 0.26  | 0.13     | 0.11 | 1.61    | 0.35    | 0.13     | 0.10 |
| σ₀              | 1.16      | 1.16  | 1.15     | 1.15 | 1.00    | 1.00    | 1.00     | 1.00 |

Таблица 2.1. Точность оценивания для неполных моделей данных

Если модель данных заведомо неполная, а предполагаемая систематическая ощибка не поддается линейному моделированию, т.е. является случайной функцией, то требуется переходить к стохастическому моделированию и применять метод средней квадратической коллокации (СКК). Задача априорного оценивания ковариационных функций типичных немоделируемых случайно-систематических ошибок астрометрических наблюдений будет рассмотрена в главе 7.

# §7. Нелинейный метод наименьших квадратов

Иногда предварительные значения параметров  $p_{0j}$  бывают известны настолько грубо, что частные производные данных по этим параметрам  $c_{ij} = (\partial l_i / \partial p_j)$  в точке  $p_j = p_{0j}$ , образующие элементы матрицы плана C (см. §1 гл. 1), оказываются недостаточно точными, а значит, неточной оказывается и вся линейная модель данных типа (1.4).

Полный дифференциал непрерывной дважды дифференцируемой функции нескольких аргументов  $y = f(p_1, p_2, ..., p_m)$  можно представить отрезком ряда Тейлора [4, с. 117]:

$$dy = \frac{df}{1!} + \frac{d^2f}{2!} + \cdots,$$

где

$$df = \frac{\partial f}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial f}{\partial p_2} dp_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_m} dp_m,$$

$$d^{2}f = \left(\frac{\partial}{\partial p_{1}}dp_{1} + \frac{\partial}{\partial p_{2}}dp_{2} + \dots + \frac{\partial}{\partial p_{m}}dp_{m}\right)^{2}f.$$

Здесь все производные и значения самой функции вычисляются в точке  $P_0 = \{p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0m}\}$ . Переходя в этих формулах к конечным приращениям  $dy_i \approx \Delta y_i = y_i(P) - y_i(P_0) = l_i$ ,  $dp_j \approx \Delta p_j = p_j - p_{0j} = z_j$  и принимая во внимание, что

$$\mathbf{c}'_i = \left[\frac{\partial f_i}{\partial p_1} \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_m}\right]_{p_0}$$

есть строка матрицы плана С, получаем нелинейную модель данных

$$l_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \bigg|_{P_0} z_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f_i}{\partial p_j \partial p_k} \bigg|_{P_0} z_j z_k = \mathbf{c}_i' \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}' \mathbf{G}_i \mathbf{z}, \qquad (2.97)$$

где  $\mathbf{G}_i = [g_{jk}]_i - m \times m$ -матрица Гесса с элементами

$$g_{jk} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial p_j \partial p_k} \bigg|_{p_0}.$$

Если обозначить  $b_i = \frac{1}{2} \mathbf{z}' \mathbf{G}_i \mathbf{z}$  и ввести вектор  $\mathbf{b} = (b_i)$ , то нелинейная модель может быть представлена в следующей матричной форме:

$$l = Cz + b + r$$
,

которая отличается от (1.4) только наличием в правой части вектора b, элементы которого квадратично зависят от искомых параметров z.

Будем трактовать вектор b как неизвестную систематическую ошибку линейной модели данных, тогда, как показано в §6 гл. 2 (см. формулу (2.76)), несмещенная оценка параметров такой модели будет равна

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}'\mathbf{P}_{\prime\prime}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{\prime\prime}(1-\mathbf{b}) = \hat{\mathbf{z}}_0 - \varphi(\hat{\mathbf{z}}), \qquad (2.98)$$

где введена вектор-функция

$$\varphi(\mathbf{z}) = (\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{b}.$$

Уравнения типа (2.98) решаются методом простых итераций [36, с. 653]:

$$\hat{\mathbf{z}}_{n+1} = \hat{\mathbf{z}}_0 + \varphi(\hat{\mathbf{z}}_n).$$
 (n = 0,1,2,...), (2.99)

причем в качестве начального приближения естественно выбрать оценку

$$\hat{\mathbf{z}}_0 = (\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{I},$$

соответствующую линейной модели. Тогда процесс (2.99) принимает вид

$$\hat{\mathbf{z}}_{n+1} = \hat{\mathbf{z}}_0 - (\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\hat{\mathbf{b}}_n \quad (n = 0, 1, 2, ...),$$
 (2.100)

где  $\hat{\mathbf{b}}_n$  – оценка  $N \times \mathbf{I}$ -вектора ошибки линейной модели, элементы которого равны

$$(\hat{b}_i)_n = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}}_n \mathbf{G}_i \hat{\mathbf{z}}_n.$$

Если существует такое положительное число M<1, что

$$|\varphi(\mathbf{z}_j) - \varphi(\mathbf{z}_k)| \le M |\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k|$$

для всех точек  $\mathbf{z}_j$  и  $\mathbf{z}_k$  из некоторой области  $\mathcal{D}$  *т*-мерного линейного пространства  $\mathcal{D}^m$ , и если эта область содержит все оценки итерационного процесса (2.100) и все точки  $\hat{\mathbf{z}}$ , удовлетворяющие неравенству

$$|\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}_{n}| \le \frac{M}{1-M} |\hat{\mathbf{z}}_{n} - \hat{\mathbf{z}}_{n-1}|$$
 (2.101)

для каждого значения  $n \ge 1$ , то приближения (2.100) сходятся к некоторому решению  $\hat{z}$  уравнения (2.98), которое удовлетворяет неравенству (2.101) и является единственным в  $\mathcal{D}$ . Правая часть неравенства (2.101) дает верхнюю грань ошибки *n*-го приближения.

В задачах аппроксимации данных наблюдений нелинейными моделями (см. гл. 7) вместо изложенного выше метода простых итераций чаще используется градиентный алгоритм нелинейного метода наименьших квадратов, подробно описанный в [77, с. 540–547]. Здесь данные наблюдений  $y_i$  (i = 1, 2, ..., N) аппроксимируются нелинейной модельной функцией y = f(x, p) таким образом, чтобы оценки параметров  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$  доставляли минимум функционалу

$$\chi^{2}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N} \left[ \frac{y_{i} - f(x_{i}, \mathbf{p})}{\sigma_{i}} \right]^{2}, \qquad (2.102)$$

где  $\sigma_i$  – СКО данных  $y_i$ . Поскольку функционал  $\chi^2(\mathbf{p})$  сам является нелинейным, то его разложение в ряд Тейлора в окрестности точки *n*-го приближения  $\mathbf{p}_n = (p_{n1}, p_{n2}, ..., p_{nm})$  аналогично (2.97):

$$r_{n+1} = \mathbf{d}'_{n} \mathbf{z}_{n+1} + \frac{1}{2} \mathbf{z}'_{n+1} \mathbf{D}_{n} \mathbf{z}_{n+1}.$$
 (2.103)

Здесь  $r_{n+1} = \chi^2(\mathbf{p}_{n+1}) - \chi^2(\mathbf{p}_n)$  — приращение функционала (2.102) вследствие приращения параметров  $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n$  на (n+1)-м шаге итераций,  $\mathbf{d}_n = (d_j)_n$  (j = 1, 2, ..., m) — вектор первых производных, а  $\mathbf{D}_n = [d_{jk}]_n$  — матрица вторых производных этого функционала в точке  $\mathbf{p}_n$ :

$$(d_j)_n = \frac{\partial \chi^2}{\partial p_j} \bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_n}, \quad (d_{jk})_n = \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial p_j \partial p_k} \bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_n}$$

В области минимума функционала (2.102) его приращение (2.103) минимально, поэтому, согласно (2.16), имеем

$$\frac{\partial r_{n+1}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{d}_n + \mathbf{D}_n \mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{0},$$

откуда

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n - \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{d}_n \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$
 (2.104)

Поскольку  $\mathbf{d}_n = \nabla \chi^2(\mathbf{p}_n)$  есть градиент функционала (2.102), то, согласно формуле (2.104), каждое новое приближение параметров  $\mathbf{p}_{n+1}$ выбирается в направлении, противоположном направлению этого градиента, что и обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса к минимуму функционала.

## §8. Регуляризация метода наименьших квадратов

При обработке наблюдательных и экспериментальных данных иногда возникают так называемые некорректные задачи [13, 51, 52], решения которых классическим МНК неустойчивы даже к малым изменениям исходных данных. Рассмотрим совместную систему линейных уравнений

$$\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{z} \,, \tag{2.105}$$

где  $C = [c_{ij}]$  – прямоугольная матрица (i = 1, 2, ..., N; j = 1, 2, ..., m),  $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$  – *m*-мерный вектор неизвестных параметров. На практике элементы матрицы C и вектора I известны не точно, а лишь приближенно, т.е. вместо (2.105) мы имеем систему

$$\tilde{\mathbf{l}} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{z}, \qquad (2.106)$$

где  $\tilde{C} = [\tilde{c}_{ij}]$  – заданная матрица плана,  $\tilde{1} = (l_i)$  – вектор данных наблюдений.

Введем сферические (евклидовы) нормы [36, с. 391]

$$\left\|\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{C}\right\| = \left\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} (\bar{c}_{ij} - c_{ij})^2\right\}^{1/2},$$
(2.107)

$$\left\|\tilde{\mathbf{l}} - \mathbf{l}\right\| = \left\{\sum_{i=1}^{N} (\tilde{l}_i - l_i)^2\right\}^{1/2}$$
(2.108)

и примем, что эти нормы ограничены сверху, т. е.

$$\|\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{C}\| \le \varepsilon, \quad \|\tilde{\mathbf{l}} - \mathbf{l}\| \le \delta.$$
 (2.109)

Псевдорешением системы (2.105) называется вектор  $\hat{z}$ , минимизирующий норму невязок  $\|\mathbf{l} - \mathbf{C}\hat{z}\|$  во всем евклидовом пространстве  $\mathcal{E}^m$ *m*-мерных векторов. Если же система (2.105) вырождена, то таких решений может быть несколько. Пусть  $\mathcal{F}$  есть совокупность всех псевдорешений, а  $\hat{z}_0 -$ одно из них – начальное приближение, например, можно принять  $\hat{z}_0 = \mathbf{0}$ . Нормальным решением системы (2.105) называют псевдорешение  $\hat{z}^0$  с минимальной нормой, т.е. такое, что

$$\left\|\hat{\mathbf{z}}^{0}-\hat{\mathbf{z}}_{0}\right\|=\inf_{\mathbf{z}\in\mathcal{F}}\left\|\mathbf{z}-\hat{\mathbf{z}}_{0}\right\|.$$

Поскольку матрица С и вектор l заданы приближенно, то для известной пары чисел  $\gamma = (\varepsilon, \delta)$  требуется найти приближенные нормальные решения  $z_{\gamma}$  в классе  $Q_{\gamma}$  векторов z, сопоставимых по точности с исходными, т.е. таких, что

$$\left\| \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{z} \right\| \leq \left\| \tilde{\mathbf{I}} - \mathbf{I} \right\| + \left\| \mathbf{I} - \mathbf{C} \mathbf{z} \right\| + \left\| \mathbf{C} \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{z} \right\| \leq \delta + \mu + \varepsilon \| \mathbf{z} \|.$$

Здесь  $\mu = \inf_{z \in S^-} \|I - Cz\|$  представляет собой параметр, характеризующий разрешимость системы (2.105). Если эта система разрешима, то  $\mu = 0$  и искомые решения должны удовлетворять условию

$$\|\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{C}} \mathbf{z}_{\gamma}\| \le \delta + \varepsilon \|\mathbf{z}\|.$$
(2.110)

Однако в качестве решения  $z_{\gamma}$  нельзя брать произвольное решение из класса  $Q_{\gamma}$ , так как оно может оказаться неустойчивым к малым изменениям правой части приближенных уравнений (2.106). Необходимо отобрать из них только то, которое имеет минимальную норму. Таким образом, задача сводится к минимизации стабилизирующего функционала  $\Omega(z) = ||z||^2$  на множестве  $Q_{\gamma}$  векторов  $z_{\gamma}$ , для которых вытолняется условие (2.110). Эту задачу можно решать методом Лагранжа, т.е. в качестве оценки нормального решения  $z_{\gamma}$  нужно брать такой вектор  $z_{\gamma}^{\alpha}$ , который минимизирует более общий сглаживающий функционал

$$\boldsymbol{\Phi}^{\alpha}(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{l}}) = \left\| \tilde{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{C}} \mathbf{z} \right\|^{2} + \alpha \left\| \mathbf{z} \right\|^{2}, \quad \alpha > 0$$
(2.111)

со свободным параметром  $\alpha$ , который называется параметром регуляризации. Этот параметр должен удовлетворять равенству

$$\left\|\tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{z}_{\gamma}^{\alpha}\right\| = \delta + \varepsilon \left\|\mathbf{z}_{\gamma}^{\alpha}\right\|,\tag{2.112}$$

которое определяет так называемую обобщенную невязку данной системы уравнений.

Из условия минимума функционала (2.111) имеем

$$\partial \Phi^{\alpha} / \partial \mathbf{z}_{j}^{\alpha} = 0$$
 (j = 1, 2, ..., m),

откуда получаем систему нормальных уравнений вида

$$\alpha z_k^{\alpha} + \sum_{j=1}^m v_{kj} z_j^{\alpha} = h_k \quad (k = 1, 2, ..., m),$$
(2.113)

где

$$v_{kj} = \sum_{i=1}^{N} c_{ik} c_{ij}, \quad h_k = \sum_{i=1}^{N} c_{ik} l_i.$$

Таким образом, процедура регуляризированного метода наименьших квадратов (РМНК) состоит в следующем:

1. Зная точность задания матрицы Č и вектора l, по формулам (2.107)-(2.109) вычисляем величины ε и δ.

2. Выбираем начальное значение параметра  $\alpha_0 \ge 0$ , а затем строим последовательность  $\alpha_{\tau}$  ( $\tau = 0, 1, 2, ...$ ), например в виде  $\alpha_{\tau} = \alpha_0 10^{\tau}$ .

3. Для каждого  $\alpha_{\tau}$  решается регуляризированная система нормальных уравнений (2.113) и находится вектор оценок  $\mathbf{z}_{\tau}^{\alpha_{\tau}}$ .

4. Вычисляем сферические нормы невязок системы (2.106)  $\|\tilde{I} - \tilde{C} \mathbf{z}_{\gamma}^{\alpha_{\tau}}\|$  и вектора неизвестных  $\|\mathbf{z}_{\gamma}^{\alpha_{\tau}}\|$ , а затем проверяем условие (2.112).

5. Если условие (2.112) не выполняется, то вычисления повторяются при следующем  $\alpha_{\tau}$ . Путем последовательных приближений добиваемся выполнения условий (2.108). Соответствующее решение  $\mathbf{z}_{\gamma}^{\alpha}$  и будет искомым приближенным нормальным решением системы уравнений (2.106). Можно показать, что для любой такой системы нормальное решение существует и единственно [52, с. 123].

### §9. Оптимальное оценивание

Рассмотрим опять линейную модель данных наблюдений

$$\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{r} \,, \tag{2.114}$$

но на этот раз будем считать, что не только вектор невязок г, но и вектор искомых параметров z составлены из случайных величин, т.е. являются случайными векторами. При этом будем еще предполагать, что эти векторы имеют нулевое матожидание и для них известны априорные ковариационные матрицы:

$$E\{\mathbf{z}\} = 0, \quad E\{\mathbf{z}\mathbf{z}'\} = \mathbf{Q}_{zz},$$
  

$$E\{\mathbf{r}\} = 0, \quad E\{\mathbf{r}\mathbf{r}'\} = \mathbf{Q}_{rr}.$$
(2.115)

Отсюда вытекает, что вектор данных I тоже имеет нулевое матожидание:

$$E\{\mathbf{l}\} = \mathbf{C}E\{\mathbf{z}\} + E\{\mathbf{r}\} = 0.$$
 (2.116)

Примем еще, что векторы z и r не коррелированы:

$$E\{\mathbf{zr}'\} = 0. \tag{2.117}$$

В модели (2.114) векторы данных і и невязок г имеют, как обычно, размерность N, а вектор искомых параметров z – размерность m. Но теперь N может быть больше, меньше или равно m. Будем искать

оценку  $\hat{z}$  вектора z при условиях ее линейности, несмещенности и минимальности дисперсии ошибки оценивания  $e = z - \hat{z}$  [6, с. 49–57].

Предположение о линейности оценки  $\hat{z}$  приводит к следующему выражению:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{f} + \mathbf{G}\mathbf{I}, \qquad (2.118)$$

в котором *m*-мерный вектор **f** и  $m \times N$  -матрица **G** подлежат определению.

Требование несмещенности означает, что должно быть справедливо равенство

$$E\{\mathbf{\hat{z}}\} = \mathbf{f} + \mathbf{G}E\{\mathbf{l}\} = E\{\mathbf{z}\},\$$

откуда вытекает, что вектор f должен равняться нулю, ибо как z, так и l имеют нулевые матожидания. Поэтому выражение (2.118) приобретает форму

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{G}\mathbf{I} \,. \tag{2.119}$$

Теперь определим матрицу G из условия, что дисперсии ошибок оценивания  $e_k = z_k - \hat{z}_k$  для всех параметров  $z_k$  (k = 1, 2, ..., m) должны быть минимальны. В соответствии с (2.119), каждая компонента оценки  $\hat{z}_k$  зависит от вектора l лишь посредством k-й строки g' матрицы G, и поэтому имеем  $\hat{z}_k = g'_k l$ . Тогда упомянутое условие означает, что дисперсии

$$E\{e_k^2\} = E\{(z_k - \hat{z}_k)^2\} = E\{(z_k - \mathbf{g}'_k\mathbf{l})^2\} =$$
$$= E\{z_k^2 - 2z_k\mathbf{g}'_k\mathbf{l} + (\mathbf{g}'_k\mathbf{l})^2\} = E\{z_k^2\} - 2E\{z_k\mathbf{l}'\}\mathbf{g}_k + \mathbf{g}'_kE\{\mathbf{l}\mathbf{l}'\}\mathbf{g}_k \qquad (2.120)$$

должны быть минимальны для всех k.

В выражении (2.120) первое слагаемое не зависит от строк  $g'_k$ , а второе и третье представляют собой линейную и квадратичную формы. Необходимое условие экстремума этого выражения состоит в том, что все частные производные от него по элементам этих строк  $g_{ki}$  (k = 1, 2, ..., m; i = 1, 2, ..., N) равняются нулю:

$$\frac{\partial}{\partial g_{ki}} E\{e_k^2\} = 0. \tag{2.121}$$

При этом *m* × *N* -матрица вторых частных производных (матрица Гесса)

$$\frac{\partial^2}{\partial g_{ki}^2} E\{e_k^2\} \quad (k = 1, 2, ..., m; \ i = 1, 2, ..., N)$$
(2.122)

должна быть положительно определена.

Используя правила векторного дифференцирования (2.16), находим

$$E\{z_k \mathbf{I}'\} - \mathbf{g}'_k E\{\mathbf{I}\mathbf{I}'\} = 0.$$
(2.123)

Поскольку это условие должно выполняться для всех k, то его можно записать в виде m совместных равенств (2.19), которые затем можно записать в компактной матричной форме:

$$E\{zl'\} - GE\{ll'\} = 0.$$
 (2.124)

Соотношение (2.124) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно элементов матрицы G.

Дифференцируя повторно (2.123), получаем матрицу Гесса

$$\frac{\partial^2}{\partial g_{ki}^2} E\{e_k^2\} = E\{\mathbf{I}'\},$$
(2.125)

поэтому матрица ковариаций данных E{II'} должна быть положительно определена. Эта матрица с учетом (2.114) и (2.115) равна

$$E\{\mathbf{ll'}\} = E\{(\mathbf{Cz} + \mathbf{r})(\mathbf{Cz} + \mathbf{r})'\} =$$
  
=  $\mathbf{C}E\{\mathbf{zz'}\}\mathbf{C'} + \mathbf{C}E\{\mathbf{zr'}\} + E\{\mathbf{rz'}\}\mathbf{C'} + E\{\mathbf{rr'}\} =$   
=  $\mathbf{C}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C'} + \mathbf{Q}_{rr}.$  (2.126)

Выражение (2.124) можно записать в виде

$$E\{(\mathbf{z} - \mathbf{Gl})\mathbf{l}'\} = E\{\mathbf{el}'\} = 0, \qquad (2.127)$$

что означает, что при любой матрице G ковариация результатов наблюдений и ошибок оценивания должна быть равна нулю. Это эквивалентно некоррелированности векторов е и l, так как оба они имеют нулевые матожидания. Умножая равенство (2.127) справа на G', получаем

$$E\{\mathbf{e}\mathbf{i}'\mathbf{G}'\} = E\{\mathbf{e}\mathbf{\hat{z}}'\} = 0.$$
(2.128)

Следовательно, ошибка оценивания должна быть не коррелирована с самой оценкой. С учетом полученных выше результатов построим матрицу ковариаций ошибки оценивания:

$$\mathbf{D}_{zz} = E\{\mathbf{e}\mathbf{e'}\} = E\{\mathbf{e}(\mathbf{z} - \mathbf{\hat{z}})'\} = E\{\mathbf{e}\mathbf{z'}\} = E\{\mathbf{z}\mathbf{z'}\} = E\{\mathbf{z}\mathbf{z'}\} - \mathbf{G}E\{\mathbf{z'}\}.$$
(2.129)

Принимая во внимание, что

$$E\{\mathbf{zl'}\} = E\{\mathbf{z}(\mathbf{z'C'} + \mathbf{r'})\} = E\{\mathbf{zz'}\}\mathbf{C'} = \mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C'}, \qquad (2.130)$$

находим

$$\mathbf{D}_{zz} = E\{\mathbf{e}\mathbf{e}'\} = \mathbf{Q}_{zz} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{Q}_{zz}.$$
 (2.131)

Подставляя (2.126) и (2.130) в (2.124), получаем

$$\mathbf{G}(\mathbf{C}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'+\mathbf{Q}_{rr})=\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'.$$

Но поскольку стоящая в скобках N × N - матрица Гесса (2.125) положительно определена, то получаем окончательно

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{C}' (\mathbf{C} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{C}' + \mathbf{Q}_{rr})^{-1}.$$
 (2.132)

Подстановка (2.132) в (2.119) дает, наконец, линейную несмещенную оценку с минимальной дисперсией:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{C}' (\mathbf{C} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{C}' + \mathbf{Q}_{rr})^{-1} \mathbf{I}.$$
 (2.133)

Легко видеть, что в силу (2.116) эта оценка действительно является несмещенной:

$$E\{\hat{\mathbf{z}}\} = \mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}' + \mathbf{Q}_{rr})^{-1}E\{\mathbf{l}\} = \mathbf{0}.$$

Согласно (2.131) и (2.132), апостериорные ковариации ощибок оценки (2.133) равны

$$\mathbf{D}_{zz} = E\{\mathbf{e}\mathbf{e}'\} = \mathbf{Q}_{zz} - \mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}' + \mathbf{Q}_{rr})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Q}_{zz}.$$
 (2.134)

Полученные оценки особенно удобны, когда количество наблюдений не превышает числа неизвестных параметров ( $N \le m$ ), так как обращаемые в (2.133) и (2.134) матрицы имеют размер  $N \times N$ .

Интересный случай возникает при N = m и следующих предположениях:

(a)  $Q_{zz} = I$ , т.е. неизвестные величины  $z_k$  (k = 1, 2, ..., m) нормированы и взаимно независимы;

(б) Q<sub>11</sub> = 0, т.е. наблюдения проводятся безошибочно;

(B)  $rank(\mathbf{C}) = N$ .

Очевидно, что тогда уравнение (2.133) принимает вид

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1}$$
. (2.135)

Эта оценка представляет собой зеркальное отображение так называемой *гауссовской* МНК-оценки, получаемой из ОМНК-оценки (2.19) при равноточных и независимых наблюдениях (**P**<sub>rr</sub> = **I**):

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}'\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{I}.$$
 (2.136)

Ковариация оценки (2.135), согласно (2.134), равна

$$\mathbf{D}_{zz} = \mathbf{I} - \mathbf{C}' (\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1} \mathbf{C}.$$
 (2.137)

Рассмотрим теперь случай, когда N>m. Поскольку теперь возникает необходимость обращения больших матриц, то преобразуем оценки (2.133) и (2.134) к более удобному виду. Для этого придется принять предположение о невырожденности матриц априорных ковариаций Q<sub>17</sub> и Q<sub>27</sub>. С помощью матричного тождества (2.71) имеем

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}' + \mathbf{Q}_{rr})^{-1}\mathbf{I} =$$

$$= \mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'[\mathbf{Q}_{rr}^{-1} - \mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{Q}_{zz}^{-1})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}]\mathbf{I} =$$

$$= [\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1} - \mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{Q}_{zz}^{-1})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}]\mathbf{I} =$$

$$= [\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1} - \mathbf{Q}_{zz}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{zz}^{-1}(\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C})^{-1})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}]\mathbf{I} =$$

$$= (\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{Q}_{zz}^{-1})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}]\mathbf{I}.$$
(2.138)

Так как из (2.119) следует, что в этом случае

$$\mathbf{G} = (\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{Q}_{zz}^{-1})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1},$$

то с учетом (2.71) имеем из (2.131)

$$D_{zz} = Q_{zz} - (C'Q_{rr}^{-1}C + Q_{zz}^{-1})C'Q_{rr}^{-1}CQ_{zz} =$$
  
=  $Q_{zz} - [Q_{zz}^{-1} + Q_{zz}^{-1}(C'Q_{rr}^{-1}C)^{-1}Q_{zz}^{-1}]^{-1} =$   
=  $(C'Q_{rr}^{-1}C + Q_{zz}^{-1})^{-1}.$  (2.139)

Но поскольку матрица  $Q_{rr}$  априорных ковариаций невязок модели данных обычно является диагональной, то в формулах (2.138) и (2.139) обращению подлежит лишь одна  $m \times m$ -матрица, поэтому цель преобразования оценок (2.133) и (2.134) достигнута.

Рассмотрим теперь частный случай оценок (2.138)-(2.139), когда:

(a)  $Q_{zz} \rightarrow \infty$ , т.е.  $Q_{zz}^{-1} = 0$ ; это означает, что не имеется достоверной априорной информации об искомых величинах  $z_k$ ;
(б) rank(C) = m, т.е. должно существовать по крайней мере m линейно независимых измерений.

При этих условиях приходим к гауссовско-марковской ОМНКоценке, уже полученной в §2 настоящей главы:

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{C}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{I},$$
 (2.140)

$$\mathbf{D}_{zz} = (\mathbf{C}' \mathbf{Q}_{\prime\prime\prime}^{-1} \mathbf{C})^{-1}.$$
 (2.141)

Если, наконец, положить здесь  $Q_{rr} = I$ , то мы опять получаем гауссовскую оценку (2.136).

Сравнивая формулы (2.139) и (2.141), видим, что при любой конечной положительно определенной матрице  $Q_{zz}$  дисперсия ОМНКоценок (2.141) будет всегда больше минимальных дисперсий (2.139) (подробное доказательство см. в §3 гл. 4).

### Глава 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНИВАНИЕ

#### §1. Количество параметрической информации

Пусть  $l = (l_1, l_2, ..., l_N) - N$ -мерная векторная случайная величина, имеющая математическое ожидание  $E\{l\} = c$ . Если функция с допускает линейное параметрическое представление вида c = Cz, то задача параметрического уравнивания данных l методом наименыших квадратов (см. §2 гл.2) сводится к оцениванию параметров z. При этом удается включить в процедуру уравнивания весовую матрицу данных  $P_{rr}$  или матрицу их ковариаций  $Q_{rr} = \sigma_0^2 P_{rr}^{-1}$  в зависимости от того, какая из этих матриц известна а priori. Кроме этой информации часто бывает известен характер вероятностного распределения данных, т.е. функция плотности их распределения, или, как ее еще называют, функция правдоподобия L. Однако это обстоятельство прямо не используется в процедуре МНК, а лишь служит вероятностным обоснованием принципа наименыших квадратов. При этом оказывается возможным трактовать МНК-оценки как наиболее правдоподобные, поскольку именно они доставляют максимум функции правдоподобия.

Между тем функцию правдоподобия можно еще использовать для определения совокупного количества информации о параметрах z, содержащейся в векторе данных l, в их ковариационной матрице и линейной модели. Если модель данных имеет только один параметр z, то это количество определяется по Фишеру как [45, с. 283]

$$F(z)=E\bigg\{\frac{\partial \ln L}{\partial z}\bigg\}^2.$$

Но поскольку

$$\frac{\partial \ln L}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial z},$$

то

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial z^2} = -\left(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial z^2},$$

и тогда

$$F(z) = E\left\{-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial z^2}\right\} + E\left\{\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right\}.$$

Можно показать [38, с. 86], что второй член правой части этого равенства равен нулю, поэтому

$$F(z) = E\left\{-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial z^2}\right\} = E\left\{\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial z} \cdot \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial z}\right\}.$$

В общем случае, когда оценивается вектор параметров  $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ , совокупное количество информации об этих параметрах, содержащееся в тех же данных, представляет собой  $m \times m$ -матрицу  $F(z) = [f_{sk}]$  (s, k = 1, 2, ..., m) с элементами

$$f_{sk} = E\left\{-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial z_s \partial z_k}\right\} = E\left\{\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial z_s} \cdot \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial z_k}\right\} = \operatorname{cov}(v_s, v_k), \quad (3.1)$$

где

$$v_s = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial z_s}, \quad v_k = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial z_k}.$$

Формула (3.1) показывает, что информационная матрица F по своей природе является ковариационной. Попытаемся выяснить ее вид для случая нормального распределения данных наблюдений, когда  $\mathbf{l} \sim \mathcal{N}(\mathbf{c}, \mathbf{Q}_{tr})$ . В этом случае, согласно (2.13), имеем

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial z_s \partial z_k} = \frac{1}{2\sigma_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z_s \partial z_k} (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{z})' \mathbf{P}_{rr} (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{z}).$$
(3.2)

Квадратичную форму, стоящую в правой части (3.2), можно представить в следующем развернутом виде:

$$S = (\mathbf{l} - \mathbf{C}\mathbf{z})' \mathbf{P}_{rr}(\mathbf{l} - \mathbf{C}\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}r_{i}r_{j},$$

где

$$r_i = l_i - \sum_{s=1}^m c_{ls} \hat{z}_s, \quad r_j = l_j - \sum_{k=1}^m c_{kj} \hat{z}_k.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z_s \partial z_k} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} \left( \frac{\partial^2 r_i r_j}{\partial z_s \partial z_k} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} (c_{is} c_{jk} + c_{js} c_{ik}) = 2 \mathbf{c}'_s \mathbf{P}_{rr} \mathbf{c}_k, \quad (3.3)$$

где  $c_s, c_k$  – столбцы матрицы плана С. Учитывая (2.12), (2.23) и (3.1)–(3.3), имеем окончательно

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{C} = \mathbf{C}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{C} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{W} = \mathbf{D}_{zz}^{-1}.$$
 (3.4)

Отсюда видно, что понятие количества параметрической информации по Фишеру непосредственно связано с понятием точности оценивания параметров. Чем "больше" этой информации, тем точнее оценки параметров. Понимать это следует таким образом, что если имеются две информационные матрицы  $F_1$  и  $F_2$ , причем разность  $\Delta F = F_2 - F_1$  положительно определена, т.е. в матрице  $F_2$  содержится "больше" параметрической информации, чем в  $F_1$ , то при одной и той же точности наблюдений  $\sigma_0$  разность  $\Delta W = W_2 - W_1$  будет тоже положительно определена, и тогда

$$(\mathbf{D}_{zz})_2 = \frac{\sigma_0^2}{\mathbf{W}_2} = \frac{\sigma_0^2}{\mathbf{W}_1 + \Delta \mathbf{W}} = \frac{\sigma_0^2}{\mathbf{W}_1} \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{W}}{\mathbf{W}_1}\right) = (\mathbf{D}_{zz})_1 - \sigma_0^2 \frac{\Delta \mathbf{W}}{\mathbf{W}_1^2}$$

откуда получаем, что разность  $\Delta D_{zz} = (D_{zz})_1 - (D_{zz})_2$  положительно определена и поэтому МНК-оценки параметров, соответствующие матрице  $F_2$ , оказываются точнее оценок, соответствующих матрице  $F_1$ .

Однако возникает вопрос: нельзя ли повысить количество информации, содержащейся в матрице F или, что то же самое, в матрице нормальной системы W, еще каким-либо образом? Это можно сделать только путем учета априорной информации о самих параметрах, если такая имеется.

# §2. Уравнивание с "мягкими" условиями

Наиболее распространенной формой существования априорной информации об оцениваемых параметрах являются граничные условия, которые иногда вытекают из геометрической и физической сущности этих параметров или из их предшествующих оценок. Рассмотрим случай, когда наряду с моделью вида (2.15)

$$\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{Q}_{rr} \tag{3.5}$$

оценки искомых параметров  $\hat{z}$  должны одновременно удовлетворять и некоторым граничным условиям, которые в общем виде можно представить как дополнительную систему из *n* линейных уравнений где E – матрица коэффициентов размером  $q \times m$ , t – заданный вектор длиной q. Уравнения вида (3.6) принято называть условными, а процедуру оценивания параметров из совместного решения уравнений (3.5) и (3.6) – параметрическим уравниванием.

 $\mathbf{E}\mathbf{z} = \mathbf{t}$ .

Рассмотрим вначале случай, когда условия (3.6) являются приближенными, или мягкими. Это означает, что их можно представить в виде модели, аналогичной (3.5),

$$\mathbf{t} = \mathbf{E}\mathbf{z} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nu}}, \tag{3.7}$$

(3.6)

где v – вектор случайных невязок этой модели длиной q, а  $Q_{\nu\nu}$  – ковариационная матрица этих невязок размером  $q \times q$ . Будем считать, что вектор v имеет нормальное распределение с матожиданием  $E\{v\} = 0$  и не зависит от вектора невязок г модели (3.5). В этом случае условия (3.7) можно рассматривать как простое дополнение данных, описанных моделью (3.5), и поэтому обе эти модели можно объединить и уравнивать совместно. Вводя обозначения

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\nu\nu} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

уравнения (3.5) и (3.7) можно записать в более компактной форме:

$$\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{u}}. \tag{3.9}$$

Поскольку векторы г и v распределены нормально, то вектор и также распределен нормально и поэтому МНК-оценка параметров z может быть найдена (см. §2 гл.2) при обобщенном условии, аналогичном (2.14):

$$R_{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\mathsf{u}}' \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}}^{-1} \boldsymbol{\mathsf{u}} = \frac{1}{\sigma_{\boldsymbol{\nu}}^2} S_{\boldsymbol{\nu}} = \min$$

или

$$R_{\nu} = \mathbf{r}' \mathbf{Q}_{\prime\prime}^{-1} \mathbf{r} + \mathbf{v}' \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{-1} \mathbf{v} = R_{\prime} + R_{\nu} = \min, \qquad (3.10)$$

где

$$R_{r} = \mathbf{r}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{r} = \frac{1}{\sigma_{r}^{2}} \mathbf{r}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{r} = \frac{1}{\sigma_{r}^{2}} S_{r},$$
  

$$R_{\nu} = \mathbf{v}' \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{-1} \mathbf{v} = \frac{1}{\sigma_{\nu}^{2}} \mathbf{v}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{v} = \frac{1}{\sigma_{\nu}^{2}} S_{\nu}.$$

Вводя теперь весовую матрицу

$$\mathbf{P}_{uu} = \sigma_u^2 \mathbf{Q}_{uu}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 \mathbf{Q}_{rr}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_u^2 \mathbf{Q}_{rv}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{vv} \end{bmatrix}$$

и раскрывая экстремум (3.10), получаем по формулам (2.17) нормальную систему

$$\mathbf{G}'\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\mathbf{G}\mathbf{\hat{z}}=\mathbf{G}'\mathbf{P}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}\mathbf{f}$$
 ,

которая с учетом (2.18) и (3.8) принимает вид

$$(C'P_{\prime\prime}C + E'P_{\nu\nu}E)\hat{z} = (C'P_{\prime\prime}I + E'P_{\nu\nu}t)$$
(3.11)

или

$$(\mathbf{W}+\mathbf{R})\mathbf{\hat{z}}=(\mathbf{h}+\mathbf{b}),$$

где

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}' \mathbf{P}_{\prime\prime} \mathbf{C}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{E}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{E}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{C}' \mathbf{P}_{\prime\prime} \mathbf{I}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{E}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{t}. \tag{3.12}$$

Отсюда находим искомые оценки параметров:

$$\hat{z} = (W + R)^{-1}(h + b).$$
 (3.13)

Учитывая теперь, что, согласно (3.11) и (3.12),

$$E \{\mathbf{h}\mathbf{h}'\} = \mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}E\{\mathbf{r}\mathbf{r}'\}\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C} = \sigma_{u}^{2}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{rr}\mathbf{C} = \sigma_{u}^{2}\mathbf{W},$$
  

$$E\{\mathbf{b}\mathbf{b}'\} = \mathbf{E}'\mathbf{P}_{vv}E\{\mathbf{t}\mathbf{t}'\}\mathbf{P}_{vv}\mathbf{E} = \sigma_{u}^{2}\mathbf{E}'\mathbf{P}_{vv}\mathbf{E} = \sigma_{u}^{2}\mathbf{R},$$
(3.14)

имеем

$$\mathbf{D}_{zz} = E\{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}'\} = (\mathbf{W} + \mathbf{R})^{-1}E\{(\mathbf{h} + \mathbf{b})(\mathbf{h} + \mathbf{b})'\}(\mathbf{W} + \mathbf{R})^{-1} = \hat{\sigma}_{u}^{2}(\mathbf{W} + \mathbf{R})^{-1}.$$
 (3.15)

Согласно (2.23), (2.56) и (3.10), величина

$$\hat{\sigma}_{u}^{2} = \frac{\hat{S}_{u}}{N+q-m} = \frac{\hat{S}_{r} + \hat{S}_{v}}{N+q-m}$$
(3.16)

представляет собой оценку дисперсии невязок и модели (3.9). Заметим, что оценка параметров (3.13) остается при этом несмещенной, так как

$$E\{\hat{\mathbf{z}}\} = (\mathbf{W} + \mathbf{R})^{-1} E\{\mathbf{h} + \mathbf{b}\} = (\mathbf{W} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr} E\{\mathbf{l}\} + \mathbf{E}' \mathbf{P}_{vv} E\{\mathbf{t}\}) =$$
  
=  $(\mathbf{W} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{C}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{C} + \mathbf{E}' \mathbf{P}_{vv} \mathbf{E}) E\{\mathbf{z}\} = (\mathbf{W} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{W} + \mathbf{R}) \mathbf{z} = \mathbf{z}.$ 

Выясним теперь, какое количество параметрической информации содержится в совместной модели данных (3.9). Заметим, что при q < mранг  $m \times m$ -матрицы **R** будет равен rank(**R**) = q < m, и поэтому эта матрица хотя и вырождена, но неотрицательно определена. Если же  $q \ge m$ , то при условии независимости столбцов этой матрицы она становится невырожденной и положительно определенной, что будем записывать как **R**  $\ge 0$ . В соответствии с формулой (3.4), будем считать, что матрица

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{\hat{\sigma}_r^2} \mathbf{W},\tag{3.17}$$

где

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{\hat{S}_r}{N-m} \tag{3.18}$$

отражает количество информации о параметрах z, заключенное в модели (3.5) без учета условий (3.7). С учетом этих условий количество такой информации можно оценить матрицей

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{u}^{2}} (\mathbf{W} + \mathbf{R}). \tag{3.19}$$

Согласно формулам (3.16) и (3.18), находим

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}_0 = \frac{1}{\hat{\sigma}_u^2} (\mathbf{W} + \mathbf{R}) - \frac{1}{\hat{\sigma}_r^2} \mathbf{W} = \frac{1}{\hat{\sigma}_u^2} \mathbf{R} + \frac{\hat{\sigma}_r^2 - \hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_u^2 \hat{\sigma}_r^2} \mathbf{W}$$

Из этого выражения видно, что соотношение  $\mathbf{F} - \mathbf{F}_0 > \mathbf{0}$  будет выполняться гарантированно, если  $\hat{\sigma}_r^2 > \hat{\sigma}_u^2$  или

$$\hat{S}_{\nu} < \frac{q}{N-m} \hat{S}_{r}. \tag{3.20}$$

Таким образом, чем точнее граничные условия (3.7), тем больше дополнительной информации о параметрах они вносят в алгоритм МНК. Учитывая теперь матричное равенство (2.71), находим

$$(\mathbf{W} + \mathbf{R})^{-1} = (\mathbf{W} + \mathbf{E}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{E})^{-1} =$$
  
=  $\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' (\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' + \mathbf{P}_{\nu\nu}^{-1})^{-1} \mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} =$   
=  $\mathbf{W}^{-1} - (\mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W})^{-1} = \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{S}^{-1},$  (3.21)

 $\mathbf{S} = \mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}.$ 

Эти соотношения позволяют получить из (3.13) и (3.15) следующие полезные формулы:

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}_0 + \Delta \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{D}_{zz} = \mathbf{D}_{zz,0} - \Delta \mathbf{D}_{zz},$$
 (3.22)

где  $\hat{z}_0$ ,  $D_{zz,0}$  – оценки (2.19) и (2.23), не учитывающие условий (3.7):

$$\hat{\mathbf{z}}_{0} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{h},$$

$$\mathbf{D}_{zz,0} = \sigma_{r}^{2}\mathbf{W}^{-1}$$
(3.23)

И

$$\Delta \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{h} + \mathbf{b}),$$
  

$$\Delta \mathbf{D}_{zz} = [\hat{\sigma}_{\nu}^{2}\mathbf{S}^{-1} + (\hat{\sigma}_{r}^{2} - \hat{\sigma}_{\nu}^{2})\mathbf{W}^{-1}].$$
(3.24)

Поскольку матрица  $\mathbf{R}$  неотрицательно определена, а  $\mathbf{W}$  положительно определена и не вырождена, то матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}^{-1}$  положительно определены. По этой причине и при соблюдении условия (3.20) получаем гарантированное неравенство

$$\Delta \mathbf{D}_{zz} > \mathbf{0}$$
, или  $\mathbf{D}_{zz} < \mathbf{D}_{zz,0}$ ,

которое означает, что учет мягких граничных условий, как правило, повышает точность МНК-оценок.

### §3 Уравнивание с "жесткими" условиями

Рассмотрим теперь случай, когда условия (3.7) являются не приближенными, а точными. Это означает, что вектор невязок в уравнениях (3.7)  $v \equiv 0$  и эти уравнения принимают вид (3.6). Поскольку ковариационная матрица таких невязок является нулевой, то их весовая матрица  $P_{\nu\nu}$  становится неопределенной. Однако можно показать, что параметрическое уравнивание возможно и в этом случае.

Действительно, используя формулы (3.13) и (3.21), находим

$$\hat{\mathbf{z}} = [\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}' + \mathbf{P}_{\nu\nu}^{-1})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}]\mathbf{h} + \\ + [\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'\mathbf{P}_{\nu\nu} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}' + \mathbf{P}_{\nu\nu}^{-1})^{-1}\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'\mathbf{P}_{\nu\nu}]\mathbf{t} = \\ = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{h} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}' + \mathbf{P}_{\nu\nu}^{-1})^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{h}).$$
(3.25)

Для случая жестких условий имеем  $Q_{\nu\nu} = 0$ ,  $P_{\nu\nu}^{-1} = 0$ , поэтому

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{h} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{h}) =$$
  
=  $\hat{\mathbf{z}}_0 + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{h}) = \hat{\mathbf{z}}_0 + \Delta\hat{\mathbf{z}}.$  (3.26)

Кроме того, в этом случае имеем  $E\{tt'\}=0$ , и тогда с учетом формул (3.14) получаем

$$\mathbf{D}_{zz} = E\{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}'\} = (\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1})E\{\mathbf{h}\mathbf{h}'\}(\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1})' = \sigma_{u}^{2}(\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{T}^{-1}) = \sigma_{u}^{2}\mathbf{R}^{-1},$$
(3.27)

где обозначено:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' (\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}')^{-1} \mathbf{E} \mathbf{W}^{-1},$$
  
$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' (\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}')^{-1} \mathbf{E} \mathbf{W}^{-1}.$$
 (3.28)

Поскольку в рассматриваемом случае  $S_{\nu} = 0$ , то условие (3.20) выполняется всегда и входящая в (3.27) дисперсия данных оказывается равной

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{S}_r}{N+q-m} = \frac{N-m}{N+q-m} \hat{\sigma}_r^2 < \hat{\sigma}_r^2,$$

поэтому

$$\mathbf{D}_{zz} = \mathbf{D}_{zz,0} - \frac{\hat{\sigma}_r^2}{N+q-m} [q \mathbf{W}^{-1} + (N-m)\mathbf{T}^{-1}].$$
(3.29)

Как следует из формулы (3.28), матрица  $T^{-1}$  по крайней мере неотрицательно определена, поэтому имеем

$$\Delta \mathbf{D}_{zz} = \mathbf{D}_{zz} - \mathbf{D}_{zz,0} > 0. \tag{3.30}$$

Таким образом, учет жестких ограничений на параметры всегда повышает точность их оценивания.

Интересно сравнить приведенный выше алгоритм с методом Лагранжа, который обычно используется для оценки параметров, связанных жесткими условиями. Этот метод состоит в том, что отыскивается минимум функции Лагранжа [38, с. 213]

$$\Phi(z) = (1 - Cz)' P_{rr} (1 - Cz) + 2k' (Ez - t), \qquad (3.31)$$

где введены так называемые неопределенные множители Лагранжа  $k_j$  (j = 1, 2, ..., q), образующие вектор  $\mathbf{k} = (k_j)$ . Используя правила (2.16), найдем полный дифференциал этой функции и приравняем его к нулю:

$$d\Phi = -2d\mathbf{z}\mathbf{C}'\mathbf{P}_{\prime\prime}(\mathbf{l}-\mathbf{C}\mathbf{z}) + 2d\mathbf{z}\mathbf{E}'\mathbf{k}\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}} = 0,$$

откуда с учетом (2.18) находим

$$W\hat{z} + E'\hat{k} = h.$$

Присоединяя к этому уравнению условия (3.6), получаем разрешимую систему двух матричных уравнений, которую можно записать в блочном виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}.$$
 (3.32)

Пользуясь алгоритмом двухгруппового уравнивания (см. §6 гл.2), находим

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{zz} & \mathbf{V}_{zk} \\ \mathbf{V}_{kz} & \mathbf{V}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{V}_{zz} = \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' (\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}')^{-1} \mathbf{E} \mathbf{W}^{-1},$$
  
$$\mathbf{V}_{zk} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' (\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}')^{-1}, \quad \mathbf{V}_{kk} = -(\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}')^{-1}.$$

Множители Лагранжа обычно интереса не представляют, поэтому выпищем лишь оценки искомых параметров z:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{h} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{h}),$$
 (3.33)

что полностью совпадает с (3.26).

#### §4. Стохастическая регуляризация

Рассмотрим еще один частный случай параметрического уравнивания с мягкими условиями, а именно: будем считать, что число условных уравнений в системе (3.7) равно числу неизвестных параметров, т.е. q = m, а матрица коэффициентов этих уравнений представляет собой единичную  $m \times m$ -матрицу E = I. Вводя эти упрощения в матричное равенство (3.7), получаем

$$\mathbf{t} = \mathbf{z} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}_{\mu\nu}. \tag{3.34}$$

Это условие представляет собой вероятностное ограничение на искомые параметры  $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$  как на совокупность случайных величин. Если матрица весов  $P_{\nu\nu}$  является диагональной, то параметры z предполагаются a priori независимыми. Кроме того, поскольку мы условились считать, что в модели (3.7) вектор случайных невязок v нормально распределен и имеет нулевое матожидание, то, согласно (3.34), произвольный до сих пор случайный вектор t должен подчиняться условию  $E\{t\} = z$ , откуда следует, что этот вектор представляет собой некоторую априорную оценку параметров z.

В принципе априорная оценка параметров z может быть получена из их *прямых* измерений. Если такие измерения имеются, то окончательные оценки параметров находятся из совместной обработки прямых и косвенных измерений по формулам (3.13) и (3.15) после подстановок n = m и  $\mathbf{E} = \mathbf{I}$ , а именно;

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{W} + \mathbf{P}_{\nu\nu})^{-1} (\mathbf{h} + \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{t}), \quad \mathbf{D}_{zz} = \hat{\sigma}_{u}^{2} (\mathbf{W} + \mathbf{P}_{\nu\nu})^{-1},$$
 (3.35)

где дисперсия наблюдений с единичным весом  $\hat{\sigma}_{u}^{2}$  определяется формулой (3.16). Если данные прямых измерений t удовлетворяют условию  $E\{t\} = z$ , то

$$E\{\hat{z}\} = (W + P_{\nu\nu})^{-1}(E\{h\} + P_{\nu\nu}E\{t\}) = (W + P_{\nu\nu})^{-1}(W + P_{\nu\nu})E\{z\} = z,$$

т.е. полученные оценки параметров оказываются несмещенными.

Однако в астрометрии и космической геодезии прямые измерения искомых параметров, как правило, отсутствуют, но зато бывают известны ковариации их априорных значений [15, 18, 33, 34, 43, 44, 61, 62]. Согласно принятому в §1 гл. 1 определению вектора z, его компоненты z; представляют собой разности

$$z_j = \Delta p_j = p_j - p_{0j} \tag{3.36}$$

между истинным значением физического параметра  $p_j$  на момент наблюдений и его принятым в редукционных вычислениях (теоретическим) значением  $p_{0j}$ . В векторной форме это равенство принимает вид

$$\mathbf{z} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0. \tag{3.37}$$

Отсюда следует, что априорным значением искомых поправок z является значение  $t = \hat{z}_0 = 0$ , соответствующее равенству  $p = p_0$ , поэтому условие (3.34) можно записать в виде

$$\mathbf{0} = \mathbf{z} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}_{\mu\nu}, \tag{3.38}$$

где случайный вектор  $v = p_0 - p = -z$  имеет смысл ошибок априорных оценок  $p_0$ .

Будем в дальнейшем считать, что ошибки априорного оценивания v случайны и центрированы, т.е.  $E\{v\} = 0$ , тогда, очевидно,  $E\{z\} = 0$  и поэтому искомые поправки z представляют собой случайный центрированный вектор с автоковариационной матрицей  $P_{zz} = P_{vv}$ .

Условие (3.38) не противоречит постановке задачи параметрического уравнивания с мягкими условиями, сформулированной в §2 настоящей главы, поэтому, полагая в формулах (3.35) t = 0, получаем оценки

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{W} + \mathbf{P}_{zz})^{-1} \mathbf{h}, \quad \mathbf{D}_{zz} = \hat{\sigma}_{u}^{2} (\mathbf{W} + \mathbf{P}_{zz})^{-1}.$$
 (3.39)

Поскольку мы приняли, что

$$E\{z\} = E\{r\} = 0, \qquad (3.40)$$

то

$$E\{\hat{\mathbf{z}}\} = (\mathbf{W} + \mathbf{P}_{zz})^{-1} E\{\mathbf{h}\} = (\mathbf{W} + \mathbf{P}_{zz})^{-1} (\mathbf{W} E\{\mathbf{z}\} + E\{\mathbf{r}\}) = \mathbf{0}.$$
 (3.41)

Таким образом, полученные по формулам (3.39) оценки  $\tilde{z}$  из генеральной совокупности параметров z, удовлетворяющих условию (3.40), оказываются несмещенными. Другое дело, что каждая конкретная оценка (3.41) оказывается смещенной относительно оценки  $\tilde{z}$ , получаемой по (2.19) без учета каких-либо граничных условий. Это смещение, согласно (2.71), можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}} = [(\mathbf{W} + \mathbf{P}_{zz})^{-1} - \mathbf{W}^{-1}]\mathbf{h} = -(\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{P}_{zz}^{-1}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{h}.$$
 (3.42)

Легко убедиться, что при  $P_{zz} = 0$  это смещение равно нулю.

Учитывая формулы (3.10) и (3.16), а также равенство q = m, имеем

$$\hat{\sigma}_{u}^{2} = \frac{\hat{S}_{u}}{N},$$
(3.43)

 $\hat{S}_{u} = \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{P}_{rr} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{z}}' \mathbf{P}_{zz} \hat{\mathbf{z}}.$  (3.44)

Заметим еще, что иногда не все оцениваемые параметры  $z_1, z_2, ..., z_m$  можно трактовать как случайные и не для всех из них удается получить априорные ковариации. Пусть число случайных параметров, имеющих априорные оценки ковариаций, по-прежнему равно q, но при этом q < m. В этом случае необходимо в полной  $m \times m$ -матрице весов  $P_{zz}$  заменить нулями столбцы и строки, соответствующие неслучайным параметрам  $z_k$  (k = 1, 2, ..., (m-q)). Дисперсия наблюдений в этом случае должна вычисляться по общей формуле

$$\hat{\sigma}_{u}^{2} = \frac{\hat{S}_{u}}{N+q-m}, \quad q \le m.$$
(3.45)

Рассмотрим теперь кратко вопрос о способах априорного оценивания ковариационной матрицы  $Q_{zz}$  оцениваемых параметров  $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ . Если эти параметры оцениваются путем последовательной обработки некоторых порций данных наблюдений, то в качестве априорной матрицы  $Q_{zz}$  для каждого нового (n+1)-го этапа оценивания с помощью новых данных можно принять апостериорную матрицу ковариаций  $D_{zz}$ , полученную в результате обработки на *n*-м этапе всех предыдущих данных, т.е. положить  $(Q_{zz})_{n+1} = (D_{zz})_n$ . Если же обработка данных наблюдений только начинается, то начальную грубую оценку  $(Q_{zz})_0$  можно получить, исходя из информации о точности редукционных вычислений. Очень часто эту информацию можно представить в виде интервала возможных значений компонент вектора z. Математически это можно выразить в виде оценки вероятности

$$P\{-\varepsilon_{i} \leq z_{i} < +\varepsilon_{i}\} = P_{0}$$
(3.46)

того, что искомый параметр  $z_j$  заключен в некоторых пределах  $\pm \varepsilon_j$ . Если, для примера, эта оценка окажется равной  $P_0 = 0.997 \cong 1$ , то, по известному "правилу трех сигм", находим  $\varepsilon_j \cong 3\sigma_j$ , откуда и определяем дисперсию  $\sigma_j^2 = (\varepsilon_j / 3)^2$  параметра  $z_j$ . С помощью полученных таким образом дисперсий можно построить диагональную матрицу автоковариаций вектора z  $Q_{zz} = \text{diag}(\sigma_j^2)$  (j = 1, 2, ..., m), а затем и весовую матрицу  $P_{zz} = \sigma_0^2 Q_{zz}^{-1}$ .

Иногда информация о точности индивидуальных параметров  $z_j$ отсутствует, но известна оценка дисперсии  $\sigma_c^2$  всей систематической компоненты с вектора данных 1. Принимая приближенно, что априорная точность всех компонент вектора z одинакова и равна  $\sigma_z^2$ , по (1.6) находим

$$\sigma_c^2 = \sigma_z^2 \left\| \mathbf{C} \right\|^2 / N,$$

где

 $\left\|\mathbf{C}\right\|^{2} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{2}$ 

представляет собой квадрат евклидовой нормы матрицы плана С [2, с.391]. Отсюда находим оценку

 $\sigma_z^2 = \sigma_c^2 N / \left\| \mathbf{C} \right\|^2,$ 

с помощью которой получаем простейшие матрицы априорных ковариаций и весов

$$\mathbf{Q}_{zz} = \sigma_z^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}_{zz} = (\sigma_0^2 / \sigma_z^2) \mathbf{I}, \tag{3.47}$$

где I – единичная *т×т-*матрица. Этот подход впервые применен в [63].

Сравнивая этот алгоритм с методом регуляризации, изложенным в §8 гл.2, видим, что оба они основаны на принципе минимума квадратичной формы общего вида

$$S = \mathbf{r}' \mathbf{P}_{\mu} \mathbf{r} + \mathbf{z}' \mathbf{P}_{\mu} \mathbf{z}. \tag{3.48}$$

Действительно, функционал (2.107) превращается в (3.48) после очевидных замен

$$\mathbf{r} = \mathbf{\hat{l}} - \mathbf{\bar{C}}\mathbf{z}, \quad \mathbf{P}_{rr} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}_{zz} = \alpha \mathbf{I}.$$

Что касается условия  $\mathbf{P}_{rr} = \mathbf{I}$ , то оно для метода регуляризации не имеет существенного значения, так как если данные наблюдений неравноточные, то их модель всегда можно привести к виду (2.102) с помощью процедуры, изложенной в §3 гл. 2. Более важным является различие в том, что в методе регуляризации Тихонова матрица априорных весов искомых параметров имеет простейший вид  $\mathbf{P}_{zz} = \alpha \mathbf{I}$ , в то время как в обобщенном алгоритме МНК она может быть диагональной  $\mathbf{P}_{zz} = \sigma_0^2 \operatorname{diag}(\sigma_j^{-2})$  (j = 1, 2, ..., m) или даже полной  $m \times m$ матрицей. На этом основании метод регуляризации можно рассматривать как частный случай обобщенного метода наименьших квадратов. При этом параметр регуляризации  $\alpha$  можно трактовать как априорную оценку среднего веса оцениваемых параметров. Действительно, если принять  $\sigma_j = \sigma_z = \text{const}$  для всех j = 1, 2, ..., m, то априорная весовая матрица параметров будет равна  $\mathbf{P}_{zz} = (\sigma_0^2 / \sigma_z^2) \mathbf{I}$  и тогда

$$\alpha = (\sigma_0^2 / \sigma_z^2) = p_z. \tag{3.49}$$

Таким образом, матрицу P<sub>zz</sub> можно назвать обобщенным параметром стохастической регуляризации.

#### §5. Многогрупповое уравнивание

Рассмотрим проблему уравнивания одной серии наблюдений на инструменте, система которого неустойчива во времени. Разобьем данные наблюдений такой серии на короткие фрагменты (группы) продолжительностью  $\Delta T_k$  (k = 1, 2, ..., M), в каждом из которых содержится  $N_k$  наблюдений. Продолжительность фрагментов подберем так, чтобы внутри них неустойчивые параметры  $y_k$  можно было считать постоянными. Будем считать, что все векторы  $y_k$  состоят из одинакового числа *п* разноименных неустойчивых параметров. Остальные параметры будем считать устойчивыми, т.е. общими для всей серии и не зависящими от номера фрагмента k. Объединим их в вектор х длиной *m*. Таким образом получаем многогрупповую модель данных вида (1.26):

$$\mathbf{I}_{k} = \mathbf{A}_{k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{k}\mathbf{y}_{k} + \mathbf{r}_{k} \quad (k = 1, 2, \dots, M), \tag{3.50}$$

где матрицы  $A_k, B_k$  имеют размерность  $N_k \times m$  и  $N_k \times n$  соответственно. Структурная схема такой модели показана на рис. 1.2.

С помощью обозначений (1.27)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} \\ \mathbf{A}_{2} \\ \dots \\ \mathbf{A}_{M} \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \mathbf{B} = \operatorname{diag}(\mathbf{B}_{1}, \mathbf{B}_{2}, \dots, \mathbf{B}_{M}), \\ \mathbf{y} = (\mathbf{y}_{1}, \mathbf{y}_{2}, \dots, \mathbf{y}_{M}), \\ \mathbf{l} = (\mathbf{l}_{1}, \mathbf{l}_{2}, \dots, \mathbf{l}_{M}), \\ \mathbf{r} = (\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{2}, \dots, \mathbf{r}_{M}) \end{array}$$

совокупность *М* матричных уравнений (3.50) можно записать в стандартной двухгрупповой форме (2.60):

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{r}.$$
 (3.51)

Будем для общности считать, что весовые матрицы наблюдений каждой такой серии данных являются полными матрицами и состоят из  $M \times M$  блоков, поэтому  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_{ks}](k, s = 1, 2, ..., M)$ . Тогда, применяя

обозначения (2.64) и (2.73), соответствующую нормальную систему можно записать в форме (2.74):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \qquad (3.52)$$

или

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H}_{1} & \mathbf{H}_{2} & \mathbf{H}_{M} & \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_{1}' & \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{1M} \\ \mathbf{H}_{2}' & \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{M}' & \mathbf{G}_{M1} & \mathbf{G}_{M2} & \cdots & \mathbf{G}_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}}_{1} \\ \hat{\mathbf{y}}_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{1} \\ \mathbf{g}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{M} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

где

$$\mathbf{F} = \sum_{s=i}^{M} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{A}'_{k} \mathbf{P}_{ks} \mathbf{A}_{s}, \quad \mathbf{f} = \sum_{s=i}^{M} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{A}'_{k} \mathbf{P}_{ks} \mathbf{I}_{s},$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_{ks}], \quad \mathbf{G}_{ks} = \mathbf{B}'_{k} \mathbf{P}_{ks} \mathbf{B}_{s} \quad (k, s = 1, 2, ..., M),$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_{k}], \quad \mathbf{H}_{k} = \sum_{s=1}^{M} \mathbf{A}'_{s} \mathbf{P}_{ks} \mathbf{B}_{k} \quad (k = 1, 2, ..., M),$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{g}_{k}), \quad \mathbf{g}_{k} = \sum_{s=1}^{M} \mathbf{B}'_{s} \mathbf{P}_{ks} \mathbf{I}_{k} \quad (k = 1, 2, ..., M).$$
(3.54)

Количество наблюдений в одной непрерывной серии всегда ограничено, поэтому число фрагментов M не может быть слишком большим. Это позволяет уравнивать фрагменты серий с помощью двухгрупповой модели (3.51) методом исключения. Этот метод, согласно (2.75), дает

$$(\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g},$$
  

$$(\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{g} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{f}.$$
(3.55)

При этом оказывается возможным использовать полную весовую матрицу данных  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_{ks}](k, s = 1, 2, ..., M)$ , не накладывая на нее каких-либо ограничений. Это может иметь важное практическое значение, так как ошибки модели данных внутри каждой серии наблюдений часто бывают коррелированными.

Если требуется найти оценки всех параметров, то из (3.55) имеем

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g}),$$
  

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{f}).$$
(3.56)

Апостериорные ковариации этих оценок, согласно (2.66)-(2.69), равны

$$D_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 (F - HG^{-1}H')^{-1}, \quad D_{xy} = -F^{-1}HD_{yy'},$$
  
$$D_{yy} = \hat{\sigma}_0^2 (G - H'F^{-1}H)^{-1},$$
 (3.57)

где

$$\hat{\sigma}_{0}^{2} = \frac{\hat{S}}{N - (m + nM)},$$
(3.58)

$$\hat{S} = \mathbf{i}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{i} - \hat{\mathbf{x}}' \mathbf{f} - \hat{\mathbf{y}}' \mathbf{g}. \tag{3.59}$$

Здесь  $\hat{\sigma}_0^2 - внутренняя$  оценка дисперсии наблюдений с единичным весом, относящаяся к данной серии наблюдений, n -количество разноименных параметров, образующих векторы  $y_1, y_2, ..., y_M$  (одинаковое для всех фрагментов k = 1, 2, ..., M).

Рассмотрим теперь случай, когда параметры модели (3.50) связаны между собой *q* мягкими условиями вида (3.7):

$$\mathbf{t} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N}\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}_{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}}.$$
 (3.60)

Очевидно, что в частном случае отдельные столбцы матриц М и N, обе эти матрицы целиком или одна из них могут быть нулевыми. Для построения системы нормальных уравнений воспользуемся полученным в §2 настоящей главы выражением (3.11). Очевидно, что для двухгрупповой модели это выражение можно представить в форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\tilde{F}} & \mathbf{\tilde{H}} \\ \mathbf{\tilde{H}}' & \mathbf{\tilde{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{x}} \\ \mathbf{\hat{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\tilde{f}} \\ \mathbf{\tilde{g}} \end{bmatrix},$$
(3.61)

где

$$\mathbf{f} = \mathbf{f} + \mathbf{M}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{t}, \quad \mathbf{\tilde{g}} = \mathbf{g} + \mathbf{N}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{t},$$
  
$$\mathbf{\tilde{F}} = \mathbf{F} + \mathbf{M}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{M}, \quad \mathbf{\tilde{G}} = \mathbf{G} + \mathbf{N}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{N}, \quad \mathbf{\tilde{H}} = \mathbf{H} + \mathbf{M}' \mathbf{P}_{\nu\nu} \mathbf{N}.$$
  
(3.62)

Аналогично равенствам (3.55) и (3.56) находим

$$(\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}')\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\tilde{\mathbf{g}},$$
  
$$(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{H}}'\tilde{\mathbf{F}}^{-1}\tilde{\mathbf{H}})\hat{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}'\tilde{\mathbf{F}}^{-1}\tilde{\mathbf{f}},$$
(3.63)

$$\hat{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}')^{-1}(\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\tilde{\mathbf{g}}),$$

$$\hat{\mathbf{y}} = (\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{H}}'\tilde{\mathbf{F}}^{-1}\tilde{\mathbf{H}})^{-1}(\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}'\tilde{\mathbf{F}}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}).$$
(3.64)

Апостериорные ковариации этих оценок находятся по формулам (3.57), причем, согласно (3.16) и (3.58), в этих формулах нужно использовать следующую дисперсию единицы веса:

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{\bar{S}}{N+q-(m+nM)},$$

где q – число условных уравнений (3.60),

$$\tilde{S} = \mathbf{l}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{l} + \mathbf{t}' \mathbf{P}_{vv} \mathbf{t} - \hat{\mathbf{x}}' \tilde{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{y}}' \tilde{\mathbf{g}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда параметры двухгрупповой модели связаны жесткими условиями общего вида

$$\mathbf{t} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{N}\hat{\mathbf{y}}.\tag{3.65}$$

Тогда, вводя, согласно (3.32), неопределенные множители Лагранжа, получаем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} & \mathbf{M}' \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} & \mathbf{N}' \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}.$$
 (3.66)

Если теперь обозначить

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

то систему матричных уравнений (3.66) можно опять привести к двухгрупповому виду (3.32):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \qquad (3.68)$$

откуда по формуле (3.33) находим

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{h} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{h}) = \hat{\mathbf{z}}_0 + \Delta\hat{\mathbf{z}}, \qquad (3.69)$$

где  $\hat{z}_0$  – оценка параметров, не связанных условиями (3.65). Эта оценка, согласно (3.56) и (2.75), равна

$$\hat{\mathbf{z}}_{0} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{0} \\ \hat{\mathbf{y}}_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g}) \\ (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{f}) \end{bmatrix},$$
(3.70)

а  $\Delta \hat{z}$  – ее поправка за счет использования этих условий:

$$\Delta \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}} \\ \Delta \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \\ \times \left( \mathbf{t} - \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \right).$$
(3.71)

Формулы (3.70)–(3.71) позволяют получить оценки постоянных и неустойчивых параметров раздельно. Действительно, вводя  $q \times q$ -матрицу

$$\mathbf{K} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

и  $q \times l$ -вектор

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} - \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

и обозначая

$$f_0 = \mathbf{f} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g}, \quad \Delta \mathbf{f} = \mathbf{M}'\mathbf{K}\tilde{\mathbf{t}},$$
  
$$g_0 = \mathbf{g} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{f}, \quad \Delta \mathbf{g} = \mathbf{N}'\mathbf{K}\tilde{\mathbf{t}},$$
 (3.72)

находим

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 + \Delta \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}}_0 + \Delta \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')^{-1}(\mathbf{f}_0 + \Delta \mathbf{f}) \\ (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{g}_0 + \Delta \mathbf{g}) \end{bmatrix}.$$
(3.73)

Апостериорные ковариации полученных оценок находятся по формуле (3.27), которая принимает вид

$$\mathbf{D}_{zz} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' (\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}')^{-1} \mathbf{E} \mathbf{W}^{-1}) = \mathbf{D}_{zz,0} - \Delta \mathbf{D}_{zz}, \qquad (3.74)$$

где в качестве дисперсии единицы веса, согласно (3.29), следует принять

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{S}}{N+q-(m+nM)}$$

причем

$$\ddot{S} = \mathbf{l}' \mathbf{P}_{rr} \mathbf{l} - \hat{\mathbf{x}}' \bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{y}}' \bar{\mathbf{g}}.$$

Учитывая обозначения (3.67), имеем

$$\mathbf{D}_{zz,0} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{W}^{-1}, \tag{3.75}$$

где

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')^{-1} & -(\mathbf{F} - \mathbf{H}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}')^{-1}\mathbf{H}\mathbf{G}^{-1} \\ -(\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1} & (\mathbf{G} - \mathbf{H}'\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Если обозначить  $\mathbf{K} = \mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'$ , то

$$\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{E}'\mathbf{K}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{N}' \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}'\mathbf{K}\mathbf{M} & \mathbf{M}'\mathbf{K}\mathbf{N} \\ \mathbf{N}'\mathbf{K}\mathbf{M} & \mathbf{N}'\mathbf{K}\mathbf{N} \end{bmatrix},$$

поэтому

$$\Delta \mathbf{D}_{zz} = \mathbf{D}_{zz,0} \begin{bmatrix} \mathbf{M}' \mathbf{K} \mathbf{M} & \mathbf{M}' \mathbf{K} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' \mathbf{K} \mathbf{M} & \mathbf{N}' \mathbf{K} \mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{W}^{-1}.$$
 (3.76)

На этом процедура внутреннего многогруппового уравнивания одной серии наблюдений на одном инструменте заканчивается. Результатом этой процедуры, во-первых, являются оценки неустойчивых параметров ŷ, для всех фрагментов данной серии наблюдений k = 1, 2, ..., M. Из формул (3.64) и (3.73) видно, что эти оценки можно получить только в том случае, если матрицы вида F и (G - H'F<sup>-1</sup>H) являются невырожденными. Ясно, что чем меньше выбранная продолжительность фрагментов  $\Delta T_{\mu}$ , тем точнее линейная модель данных (3.50), но вместе с тем возрастает вероятность того, что указанные матрицы окажутся вырожденными. Если неустойчивые параметры изменяются во времени слишком быстро и являются, по сути дела, случайными последовательностями, то для сохранения точности модели необходимо использовать как можно более короткие фрагменты данных, для которых указанные матрицы оказываются почти всегда вырожденными. Это противоречие между точностью моделирования и возможностью оценивания неустойчивых параметров является основным недостатком МНК. Этот недостаток полностью устраняется только применением стохастического или динамического моделирования данных и использованием методов средней квадратической коллокации и фильтрации Калмана (см. гл. 4-6).

Правда, иногда неустойчивые параметры, связанные, как правило, с системой инструмента, не представляют научного интереса и их можно вообще не оценивать. В подобных случаях основной интерес представляют собой параметры вектора  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m)$ , которые можно считать постоянными на всем интервале одной серии наблюдений. Однако эти параметры обычно неоднородны. Среди них есть такие, которые изменяются (иногда скачком) от серии к серии, а другие остаются постоянными на протяжении всего цикла наблюдений. Чтобы разделить их по этому признаку, представим вектор х в виде составного вектора  $x_s = (u, v_s)$ , где индекс *s* означает номер серии наблюдений. Поскольку в состав вектора х, входит группа постоянных параметров и, не зависящая от номера серии, то оценивать эти параметры, а значит, и весь вектор х, по наблюдениям только одной серии не имеет смысла. Для этой цели целесообразно использовать весь наблюдательный материал. Это значит, что из обработки только одной серии наблюдений можно вообще не находить оценок (3.64) или (3.74) и в результате избежать условия невырожденности не только матриц F и (G – H'F<sup>-1</sup>H), но и матрицы (F – HG<sup>-1</sup>H').

Таким образом, основным результатом внутреннего уравнивания является нормальная система уравнений для устойчивых параметров х, которую можно записать в следующем стандартном виде:

$$\mathbf{W}_{s}\hat{\mathbf{x}}_{s} = \mathbf{h}_{s}. \tag{3.77}$$

Матрица  $W_s$  и вектор  $h_s$  этой системы существенно зависят от того, мяткие или жесткие условия использовались в процессе внутреннего многогруппового уравнивания. В первом случае они определяются формулами (3.62)–(3.63), а во втором – формулами (3.72)–(3.73). Однако в любом случае матрица  $W_s$  имеет одну и ту же структуру:

$$\mathbf{W}_{s} = \mathbf{F}_{s} - \mathbf{H}_{s}\mathbf{G}_{s}^{-1}\mathbf{H}_{s}', \qquad (3.78)$$

из которой видно, что процедура внутреннего уравнивания должна обеспечивать невырожденность только одной матрицы G, определенной формулами (3.54). В заключение заметим, что если в модели (3.50) неустойчивых параметров нет, то внутреннее уравнивание сводится к построению двухгрупповой нормальной системы уравнений вида (2.61), как это описано в §5 гл. 2, и к исключению тех инструментальных и локальных параметров, которые не требуется уравнивать совместно с другими сериями данных. В итоге мы опять получаем нормальную систему вида (3.77). Обработку данных нескольких серий наблюдений, представленных моделью (3.77), будем называть глобальным уравниванием.

# §6. Глобальное уравнивание

Пусть мы имеем несколько серий наблюдений, которые необходимо уравнять совместно. Предположим, что все они уже обработаны описанным выше способом внутреннего уравнивания. В результате мы имеем совокупность систем нормальных уравнений вида (3.77):

$$\mathbf{W}_{s}\hat{\mathbf{x}}_{s} = \mathbf{h}_{s} (s = 1, 2, ..., K),$$
 (3.79)

которые содержат уже только устойчивые параметры  $x_s$ , постоянные внутри каждой серии. Учитывая, что здесь вектор  $x_s = (u, v_s)$  состоит из двух групп параметров, одна из которых (u) не зависит от номера серии, пересортируем столбцы матрицы  $W_s$  так, чтобы привести их в соответствие с новым порядком параметров в этом составном векторе. Чтобы эта матрица оставалась симметричной, при обмене местами любой пары столбцов нужно менять и соответствующие строки этой матрицы, а также и элементы вектора  $h_s$ . После этой операции нормальную систему уравнений (3.79) можно записать в двухгрупповом виде

$$\mathbf{A}_{s}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_{s}\hat{\mathbf{v}}_{s} = \mathbf{h}_{s}, \qquad (3.80)$$

где  $A_s, B_s$  – прямоугольные блоки пересортированной квадратной матрицы  $W_s$ . Если векторы искомых параметров и и  $v_s$  имеют длину *m* и *n* соответственно, то матрицы  $A_s, B_s$  будет иметь размерность  $N \times m$  и $N \times n$  соответственно, а вектор  $h_s - N \times 1$ , где N = m + n.

Согласно (3.62)–(3.63) и (3.72)–(3.73),компоненты вектора  $h_s$  представляют собой линейные комбинации случайных величин, образующих вектор данных  $l_s$ , и поэтому сами являются случайными величинами. Если в качестве истинных оценок параметров уравнений (3.80) подставить оценки, которые мы собираемся получить из совместного уравнивания всех имеющихся серий данных (будем обозначать их как  $\bar{u}$  и  $\bar{v}_s$ ), то эти уравнения будут иметь случайные невязки  $w_s$ . Тогда совместную систему уравнений (3.81) можно записать в следующей многогрупповой форме:

$$\mathbf{A}_{s}\mathbf{\overline{u}} + \mathbf{B}_{s}\mathbf{\overline{v}}_{s} + \mathbf{w}_{s} = \mathbf{h}_{s} \quad (s = 1, 2, \dots, K)$$
(3.81)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} \\ \mathbf{A}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{K} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{2} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{v}}_{1} \\ \overline{\mathbf{v}}_{2} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{v}}_{K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1} \\ \mathbf{w}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{1} \\ \mathbf{h}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{K} \end{bmatrix}.$$
(3.82)

-93-

или

Введем теперь априорную ковариационную матрицу невязок w этой модели. Для этого допустим, во-первых, что ошибки наблюдений отдельных серий между собой не коррелированы. Для серий данных, полученных на разных инструментах, это предположение кажется очевидным, а поскольку неустойчивые и стохастические инструментальные параметры уже исключены, то оно будет справедливо и для серий, полученных на одном и том же инструменте в разное время. Это означает, что ковариационную матрицу невязок совместной системы (3.82) можно представить в диагональном виде

$$\mathbf{Q}_{ww} = \text{diag}(\mathbf{Q}_{s}) \quad (s = 1, 2, \dots, K),$$
 (3.83)

где Q<sub>5</sub> – матрица априорных ковариаций невязок w<sub>5</sub>.

Так как  $W_s \hat{x}_s = h_s$ , а  $W_s \bar{x}_s + w_s = h_s$ , то  $w_s = h_s - W_s \bar{x}_s = W_s (\hat{x}_s - \bar{x}_s)$ , то, принимая оценки  $\bar{x}_s$  за истинные, находим

$$\mathbf{Q}_{s} = E\{\mathbf{w}_{s}\mathbf{w}_{s}'\} = \mathbf{W}_{s}E\{(\hat{\mathbf{x}}_{s} - \overline{\mathbf{x}}_{s})(\hat{\mathbf{x}}_{s} - \overline{\mathbf{x}}_{s})'\}\mathbf{W}_{s}' = \mathbf{W}_{s}\mathbf{D}_{xx,s}\mathbf{W}_{s}', \qquad (3.84)$$

где  $\mathbf{D}_{xx,s} = \hat{\sigma}_s^2 \mathbf{W}_s^{-1}$  – апостериорные ковариации оценок  $\hat{\mathbf{x}}_s$ .

Введем теперь весовую матрицу

$$\mathbf{P}_{ww} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ww}^{-1} = \text{diag}(\sigma_0^2 \mathbf{Q}_s^{-1}) = \text{diag}(\mathbf{P}_s) \quad (s = 1, 2, ..., K), \quad (3.85)$$

где  $\sigma_0^2$  – пока неизвестная дисперсия единицы веса, общая для всех серий. Учитывая теперь, что  $W_s$  – симметричная невырожденная матрица, находим по (3.84)–(3.85)

$$\mathbf{P}_{s} = \sigma_{0}^{2} \mathbf{Q}_{s}^{-1} = \sigma_{0}^{2} (\mathbf{W}_{s} \mathbf{D}_{xx,s} \mathbf{W}_{s}')^{-1} = \frac{\sigma_{0}^{2}}{\hat{\sigma}_{s}^{2}} (\mathbf{W}_{s} \mathbf{W}_{s}^{-1} \mathbf{W}_{s})^{-1} = \frac{\sigma_{0}^{2}}{\hat{\sigma}_{s}^{2}} \mathbf{W}_{s}^{-1}.$$
 (3.86)

Будем теперь рассматривать уравнения (3.82) как обыкновенные параметрические уравнения в матричной форме с ковариационной матрицей (3.83). Число неизвестных в ней равно m+nK, а число уравнений – (m+n)K, так что эта система уравнений всегда является избыточной. Согласно принципу минимума квадратичной формы

$$S_{w} = \mathbf{w}' \mathbf{P}_{ww} \mathbf{w} = \sum_{s=1}^{K} \mathbf{w}'_{s} \mathbf{P}_{s} \mathbf{w}_{s} = \min, \qquad (3.87)$$

получаем следующую нормальную систему:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H}_{1} & \mathbf{H}_{2} & \cdots & \mathbf{H}_{K} \\ \mathbf{H}_{1}' & \mathbf{G}_{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{2}' & \mathbf{0} & \mathbf{G}_{2} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{K}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{G}_{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}} \\ \overline{\mathbf{v}}_{1} \\ \overline{\mathbf{v}}_{2} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{v}}_{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g}_{1} \\ \mathbf{g}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{K} \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

где

И

$$\mathbf{f} = \sum_{s=1}^{K} \mathbf{A}'_{s} \mathbf{P}_{s} \mathbf{h}_{s}, \quad \mathbf{g}_{s} = \mathbf{B}'_{s} \mathbf{P}_{s} \mathbf{h}_{s},$$

$$\mathbf{F} = \sum_{s=1}^{K} \mathbf{A}'_{s} \mathbf{P}_{s} \mathbf{A}_{s}, \quad \mathbf{H}_{s} = \mathbf{A}'_{s} \mathbf{P}_{s} \mathbf{B}_{s}, \quad \mathbf{G}_{s} = \mathbf{B}'_{s} \mathbf{P}_{s} \mathbf{B}_{s}.$$
(3.89)

Если теперь обозначить

 $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{H}_K], \quad \mathbf{G} = \operatorname{diag}(\mathbf{G}_s)$ 

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{g}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{K} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{v}}_{\mathbf{I}} \\ \overline{\mathbf{v}}_{2} \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{v}}_{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{w}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{K} \end{bmatrix},$$

то систему (3.88) можно записать в двухгрупповой форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\overline{u}} \\ \mathbf{\overline{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}.$$
 (3.90)

Локальные параметры разных серий данных могут быть связаны условными уравнениями как между собой, так и с глобальными параметрами. Эти условия можно учесть только в процессе совместного уравнивания всех серий. Характерный пример в этом отношении дают нам РСДБ-наблюдения. Здесь единичным инструментом является однобазовый радиоинтерферометр, а единичной серией данных – результаты наблюдений на нем в течение одних суток. Однако в настоящее время астрометрические и геодезические наблюдения этим методом ведутся, как правило, на региональных или глобальных РСДБ-комплексах, включающих несколько наблюдательных пунктов и образующих сразу несколько баз, а значит, и несколько инструментов, действующих одновременно в течение всей суточной серии наблюдений. Очевидно, что в этих условиях локальные параметры, относящиеся к какому-либо пункту, например его координаты, должны быть одинаковыми для моделей данных, полученных на всех базах, исходящих из этого пункта. Кроме того, для фиксирования системы координат полюса требуется фиксация в теле Земли системы отсчета, связанной с положениями нескольких опорных станций. Поэтому будем считать, что все параметры модели (3.90) связаны между собой q жесткими условиями вида

$$\mathbf{t} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{u}} + \sum_{s=1}^{K} \mathbf{N}_{s} \overline{\mathbf{v}}_{s} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{N}\overline{\mathbf{v}}, \qquad (3.91)$$

где обозначено  $N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_K \end{bmatrix}$ . Здесь М и  $N_s$  – матрицы коэффициентов размерностью  $q \times m$  и  $q \times n$  соответственно. Учитывая это условие по методу Лагранжа, получаем следующую нормальную систему для всей совокупности серий:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} & \mathbf{M}' \\ \mathbf{H}' & \mathbf{G} & \mathbf{N}' \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\bar{u}} \\ \mathbf{\bar{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \qquad (3.92)$$

аналогичную системе (3.68), которая была получена в §5 настоящей главы при внутреннем уравнивании одной серии. Используя эту аналогию и применяя обозначения (3.69), получаем двухгрупповую систему вида (3.70)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix},$$
 (3.93)

решение которой дается формулами (3.71)–(3.74). Апостериорные ковариации полученных таким образом оценок  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$  определяются по формулам (3.75)–(3.77):

$$\mathbf{D}_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' (\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}')^{-1} \mathbf{E} \mathbf{W}^{-1}) = \mathbf{D}_{xx,0} - \Delta \mathbf{D}_{xx}, \qquad (3.94)$$

где, согласно (3.87), имеем

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{S}_w}{N_0 + q - (m + nM)},$$

 $\hat{S}_{w} = \mathbf{h}' \mathbf{P}_{ww} \mathbf{h} - \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{h} ,$ 

а  $N_0 = \sum_{s=1}^{K} N_s$  – суммарное количество наблюдений.

На этом процедура глобального уравнивания заканчивается, если все глобальные параметры вектора и постоянны на всем интервале наблюдений  $\Delta T$ . Предположим, однако, что это условие не выполняется. Пусть часть глобальных параметров р постоянна на всем  $\Delta T$ , а другая часть  $\mathbf{q}_k$  – только на более коротких интервалах  $\Delta T_k$ . Тогда имеющиеся данные наблюдений l придется разбить на фрагменты  $\mathbf{l}_k$ , соответствующие интервалам  $\Delta T_k$ , и каждый такой фрагмент уравнивать описанным выпле способом раздельно. Поскольку формулы (3.92) позволяют для каждого интервала  $\Delta T_k$  оценить глобальные и локальные параметры раздельно, то для дальнейшего уравнивания мы можем выделить из (3.92) только оценку глобальных параметров, точнее, соответствующую им часть нормальной системы

$$\mathbf{W}_{k} \,\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{h}_{k}, \tag{3.95}$$

где индексом k отмечен тот факт, что эта система относится к интервалу  $\Delta T_k$  и данным  $\mathbf{l}_k$ . Если разделить теперь компоненты вектора и на две группы р и  $\mathbf{q}_k$  и пересортировать соответствующим образом столбцы матрицы  $\mathbf{W}_k$ , то вместо (3.95) опять получим двухгрупповую модель

$$A_k p + B_k q_k + w_k = h_k \quad (k = 1, 2, ...).$$
 (3.96)

Примером параметров р могут служить числа Лява, гармоники reonoreнциала, постоянная тяготения, координаты ВР и проч., а параметров q<sub>k</sub> – координаты полюса, всемирное время, элементы орбит ИСЗ и т.д.

Вид модели (3.96) полностью совпадает с моделью (3.82), поэтому для оценивания уточненных значений параметров ( $\mathbf{p}, \mathbf{q}_k$ ) по всей совокупности данных, полученных за время  $\Delta T = \sum_k \Delta T_k$ , можно ис-

пользовать изложенный выше алгоритм глобального уравнивания.

## §7. Метод обобщенного среднего

Одним из основных понятий теории вероятностей является математическое ожидание (вероятностное среднее) случайной величины. Рассмотрим дискретную случайную челичину x, которая может принимать m значений:  $x_1, x_2, ..., x_m$ . Проведем N независимых испытаний (измерений) этой величины и обозначим через  $n_i$  число случаев появления события  $x = x_i$ . Тогда вероятностное среднее значение дискретной случайной величины x (се матожидание) определяется формулой

$$\overline{x} = E\{x\} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} x_i n_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \lim_{N \to \infty} \frac{n_i}{N}.$$

При увеличении числа испытаний относительная частота  $n_i/N$  появления события  $x = x_i$  стремится к его вероятности

$$P_i = \lim_{N \to \infty} \frac{n_i}{N},$$

поэтому

$$\overline{x} = E\{x\} = \sum_{i=1}^{m} x_i P_i.$$
(3.97)

Очевидно, что  $0 \le P_i \le 1$  и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} n_i = \frac{N}{N} = 1.$$
 (3.98)

Рассмотрим теперь задачу практического оценивания матожидания случайной величины x, когда она задана совокупностью неравноточных оценок  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_m$ , полученных, однако, из *m* серий равноточных изверений с постоянной дисперсией  $\sigma_0^2$ . Иначе говоря, будем считать, что величины  $\hat{x}_i$  представляют собой простые арифметические средние

$$\hat{x}_i = M\{x_{ij}\} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} x_{ij}$$
(3.99)

из разного количества  $n_i$  равноточных измерений  $x_{ij}$  и поэтому они имеют разную дисперсию  $\sigma_i^2 = \sigma_0^2 / n_i$ . Если теперь вместо неизвестных вероятностей  $P_i$  в выражение (3.97) ввести априорные нормированные веса

$$p_{i} = \frac{1}{N} \frac{\sigma_{0}^{2}}{\sigma_{i}^{2}} = \frac{n_{i}}{N}, \qquad (3.100)$$

где  $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$ , то получаем следующую оценку матожидания:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i p_i \,, \tag{3.101}$$

или формулу взвешенного среднего. Очевидно, что веса  $p_i$ , как и вероятности  $P_i$ , заключены в интерале [0, 1] и удовлетворяют условию нормировки (3.98). Если имеется возможность использовать всю совокупность данных равноточных измерений  $x_{ij}$  (i = 1, 2, ..., m;  $j = 1, 2, ..., n_i$ ), то, подставляя (3.99) и (3.100) в (3.101), находим

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right) \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}.$$
(3.102)

Таким образом, матожиданием (вероятностным средним) равноточных случайных величин является их простое арифметическое среднее (3.102), а неравноточных – взвешенное среднее (3.101).

Вернемся теперь снова к задаче глобального уравнивания и покажем, что в случае, когда оцениваемые параметры не связаны условиями, она может быть решена более простым способом. Пусть мы имеем M серий наблюдений (k = 1, 2, ..., M) и пусть для каждой из них после внутреннего уравнивания (см. §5 наст. гл.) уже получена система нормальных уравнений вида (3.80). При этом будем для простоты считать, что все неизвестные параметры этой системы являются глобальными, т.е. эта система имеет вид

$$\mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_k \ (k = 1, 2, \dots, M).$$
 (3.103)

Если все матрицы  $W_k$  не вырождены, то индивидуальные оценки параметров  $\hat{\mathbf{x}}_k$  существуют и равны

$$\hat{\mathbf{x}}_{k} = \mathbf{W}_{k}^{-1} \mathbf{f}_{k} \ (k = 1, 2, ..., M).$$
 (3.104)

Требуется найти усредненную оценку  $\hat{\mathbf{x}}$  этого вектора по всем сериям наблюдений. Как показано в п. 4 §4 гл. 2, каждая из индивидуальных оценок представляет собой *т*-мерный случайный нормальный вектор. Тогда совокупность таких векторов  $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, ..., \hat{\mathbf{x}}_M$  можно рассматривать как набор случайных элементов (точек) *т*-мерного евклидового пространства. Плотность вероятности их совместного нормального распределения можно записать в виде, аналогичном развернутой формуле (2.11) для скалярных случайных величин, а именно

$$L(\hat{\mathbf{x}}_{1},\hat{\mathbf{x}}_{2},\ldots,\hat{\mathbf{x}}_{M}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{M}(\hat{\mathbf{x}}_{k}-\mathbf{x})'\check{\mathbf{D}}_{xx}^{ks}(\hat{\mathbf{x}}_{s}-\mathbf{x})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^{mM}\det[\mathbf{D}_{xx}^{ks}]}}$$

где  $\mathbf{x} = E\{\hat{\mathbf{x}}_k\}$  – матожидание оценок  $\hat{\mathbf{x}}_k$ ,  $\mathbf{D}_{xx}^{ks} = \operatorname{cov}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_s)$  $(k, s = 1, 2, ..., M) - m \times m$ -матрицы взаимных апостериорных ковариаций этих оценок, образующие в общем случае полную блочную  $mM \times mM$ -матрицу вида

$$\mathbf{D}_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx}^{ks} \end{bmatrix} (k, s = 1, 2, \dots, M),$$

а  $\tilde{\mathbf{D}}_{xx}^{ks} - m \times m$ -блоки обратной матрицы этих ковариаций

$$\breve{\mathbf{D}}_{xx} = \mathbf{D}_{xx}^{-1} = \left[\breve{\mathbf{D}}_{xx}^{ks}\right] (k, s = 1, 2, \dots, M).$$

Оценим теперь вектор матожидания х, пользуясь методом максимального правдоподобия (см. §2 гл. 2). Для этого необходимо найти минимум квадратичной формы

$$R_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} (\hat{\mathbf{x}}_{k} - \mathbf{x})' \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}^{ks} (\hat{\mathbf{x}}_{s} - \mathbf{x})$$

как функции х. Согласно правилам векторного дифференцирования (2.16), имеем

$$\frac{\partial R_x}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} (-\mathbf{\breve{D}}_{xx}^{ks} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{\breve{D}}_{xx}^{ks} \hat{\mathbf{x}}_s + 2\mathbf{\breve{D}}_{xx}^{ks} \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

откуда

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[\sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \bar{\mathbf{D}}_{xx}^{ks}\right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \bar{\mathbf{D}}_{xx}^{ks} \hat{\mathbf{x}}_{k}\right].$$
(3.105)

Если теперь ввести весовую матрицу

$$\mathbf{W}_{xx} = \sigma_0^2 \mathbf{D}_{xx}^{-1} = \sigma_0^2 \breve{\mathbf{D}}_{xx} = \left[ \mathbf{W}_{xx}^{kx} \right] (k, s = 1, 2, ..., M),$$

и в формуле (3.105) заменить матрицы  $\tilde{D}_{xx}^{ks}$  на соответствующие матрицы  $\sigma_0^{-2} W_{xx}^{ks}$ , то эта формула примет вид

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[\sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \mathbf{W}_{xx}^{ks}\right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \mathbf{W}_{xx}^{ks} \hat{\mathbf{x}}_{k}\right].$$
(3.106)

Выражение (3.106) будем называть формулой обобщенного среднего, так как она дает оценку матожидания  $\hat{\mathbf{x}}$  коррелированных оценок  $\hat{\mathbf{x}}_k$  с обобщенными весами в виде матриц  $\mathbf{W}_{xx}^{k_3}$ .

В частном случае, когда m = 1, векторы  $\hat{\mathbf{x}}_k$  превращаются в скаляры и формула (3.106) дает способ усреднения коррелированных случайных величин  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_M$  с весовой матрицей  $\mathbf{W}_{xx} = [w_{ks}]$  (k, s = 1, 2, ..., M):

$$\hat{x} = \left(\sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} w_{ks}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} w_{ks} \hat{x}_{k}\right),$$
(3.107)

которая является обобщением формулы (3.101). Если же скалярные величины  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_M$  не коррелированы, т.е.

$$w_{ks} = \begin{cases} w_k \text{ при } k = s, \\ 0 \text{ при } k \neq s, \end{cases}$$

то из (3.107) получаем общеизвестную формулу вычисления среднего взвешенного:

$$\hat{x} = \left(\sum_{k=1}^{M} w_{k}\right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{M} w_{k} \hat{x}_{k}\right).$$
(3.108)

Если теперь вместо wk ввести нормированные веса

$$p_k = \left(\sum_{k=1}^m w_k\right)^{-1} w_k = \frac{w_k}{w},$$

то формула (3.108) переходит в (3.101):

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^{M} p_k \hat{x}_k \, .$$

Рассмотрим теперь вместо случайных величин  $x_1, x_2, ..., x_M$  совокупность некоррелированных случайных векторов  $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, ..., \hat{\mathbf{x}}_M$ , тогда

$$\mathbf{W}_{xx}^{ks} = \begin{cases} \mathbf{W}_{xx}^{kk} \text{ при } k = s, \\ \mathbf{0} \text{ при } k \neq s, \end{cases}$$

где весовая матрица  $W_{xx}^{kk} = W_k$  есть матрица нормальной системы (3.103), и поэтому формула обобщенного среднего (3.106) примет вид

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[\sum_{k=1}^{M} \mathbf{W}_{k}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{W}_{k} \hat{\mathbf{x}}_{k}, \qquad (3.109)$$

или с учетом (3.104)

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[\sum_{k=1}^{M} \mathbf{W}_{k}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{f}_{k} .$$
(3.110)

Из формулы (3.110) видно, что для оценивания среднего некоррелированных векторов не требуется вычислять индивидуальные оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , поэтому матрицы  $\mathbf{W}_k$  могут быть вырожденными, лишь бы их простая сумма

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{W}_{k}$$

оказалась невырожденной матрицей. Это обстоятельство имеет важное практическое значение, так как позволяет вести обработку данных короткими сериями, из которых часто невозможно найти индивидуальные оценки глобальных параметров.

Применим теперь метод обобщенного среднего к задаче глобального уравнивания, рассмотренной в §6 настоящей главы. Особенность этой задачи состоит в том, что из внутреннего уравнивания отдельных серий наблюдений мы получаем не систему нормальных уравнений (3.103), а двухгрупповую систему вида (2.74)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_k & \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}'_k & \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{\mathbf{y}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{g}_k \end{bmatrix}, \quad (3.111)$$

где вектор

$$\hat{\mathbf{z}}_{k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k} \\ \hat{\mathbf{y}}_{k} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, M), \tag{3.112}$$

представляет собой совокупность индивидуальных оценок глобальных  $(\hat{\mathbf{x}}_k)$  и локальных  $(\hat{\mathbf{y}}_k)$  параметров. Поскольку истинные значения глобальных параметров, по определению, не зависят от номера серии k, то из совместной обработки всех имеющихся серий требуется найти оценку среднего  $\hat{\mathbf{x}} = E\{\hat{\mathbf{x}}_k\}$  и уточнить оценки  $\hat{\mathbf{y}}_k$ .

Если бы внедиагональные блоки H<sub>k</sub> в нормальных системах (3.111) были нулевыми, то мы имели бы оценки

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{f}_k, \quad \hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{g}_k, \tag{3.113}$$

не коррелированные между собой, и тогда оценку х можно было бы найти по формуле обобщенного среднего (3.109)

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[\sum_{k=1}^{M} \mathbf{F}_{k}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{F}_{k} \hat{\mathbf{x}}_{k} , \qquad (3.114)$$

а уточнять оценки  $\hat{\mathbf{y}}_k$  вообще не требовалось бы. Однако в действительности матрицы  $\mathbf{H}_k$ , как правило, ненулевые, и поэтому оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$  и  $\hat{\mathbf{y}}_k$  следует находить по общей формуле двухгруппового МНК (2.74):

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k} \\ \hat{\mathbf{y}}_{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k} & \mathbf{H}_{k} \\ \mathbf{H}'_{k} & \mathbf{G}_{k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{k} \\ \mathbf{g}_{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_{k} - \mathbf{H}_{k} \mathbf{G}_{k}^{-1} \mathbf{H}'_{k})^{-1} & -(\mathbf{F}_{k} - \mathbf{H}_{k} \mathbf{G}_{k}^{-1} \mathbf{H}'_{k})^{-1} \mathbf{H}_{k} \mathbf{G}_{k}^{-1} \\ -(\mathbf{G}_{k} - \mathbf{H}'_{k} \mathbf{F}_{k}^{-1} \mathbf{H}_{k})^{-1} \mathbf{H}'_{k} \mathbf{F}_{k}^{-1} & (\mathbf{G}_{k} - \mathbf{H}'_{k} \mathbf{F}_{k}^{-1} \mathbf{H}_{k})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{k} \\ \mathbf{g}_{k} \end{bmatrix}, \quad (3.115)$$

откуда видно, что эти оценки оказываются коррелированными. Это обстоятельство, с одной стороны, затрудняет оценивание  $\hat{x}$ , а с другой,позволяет уточнить оценки  $\hat{y}_k$ .

Благодаря условию (3.83) все серии наблюдений являются независимыми, поэтому любые пары оценок  $(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{y}}_k)$  и  $(\hat{\mathbf{x}}_s, \hat{\mathbf{y}}_s)$  (k, s = 1, 2, ..., M) тоже независимы. Это позволяет записать условие МНК в виде

$$S_{z} = \sum_{k=1}^{M} (\hat{\mathbf{z}}_{k} - \overline{\mathbf{z}}_{k})' \mathbf{W}_{k} (\hat{\mathbf{z}}_{k} - \overline{\mathbf{z}}_{k}) = \min, \qquad (3.116)$$

где

$$\mathbf{W}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k} & \mathbf{H}_{k} \\ \mathbf{H}_{k}' & \mathbf{G}_{k} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{z}}_{k} = \begin{bmatrix} E\{\hat{\mathbf{x}}_{k}\} \\ E\{\hat{\mathbf{y}}_{k}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{y}}_{k} \end{bmatrix}.$$
(3.117)

Подставляя (3.112) и (3.117) в (3.116) и учитывая (3.111), находим

$$S_{z} = \sum_{k=1}^{M} [(\hat{\mathbf{x}}_{k}'\mathbf{F}_{k}\hat{\mathbf{x}}_{k} + \hat{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{H}_{k}'\hat{\mathbf{x}}_{k} + \hat{\mathbf{x}}_{k}'\mathbf{H}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k} + \hat{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{G}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k}) - (\hat{\mathbf{x}}_{k}'\mathbf{F}_{k}\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{H}_{k}'\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}_{k}'\mathbf{H}_{k}\bar{\mathbf{y}}_{k} + \hat{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{G}_{k}\bar{\mathbf{y}}_{k}) - (\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{F}_{k}\hat{\mathbf{x}}_{k} + \bar{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{H}_{k}'\hat{\mathbf{x}}_{k} + \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{H}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k} + \bar{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{G}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k}) - (\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{F}_{k}\bar{\mathbf{x}}_{k} + \bar{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{H}_{k}'\hat{\mathbf{x}}_{k} + \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{H}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k} + \bar{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{G}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k}) + (\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{F}_{k}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{H}_{k}'\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{H}_{k}\bar{\mathbf{y}}_{k} + \bar{\mathbf{y}}_{k}'\mathbf{G}_{k}\bar{\mathbf{y}}_{k})].$$
(3.118)

Тогда оценку

$$\hat{\overline{\mathbf{z}}}_{k} = \begin{bmatrix} \hat{\overline{\mathbf{x}}} \\ \hat{\overline{\mathbf{y}}}_{k} \end{bmatrix}$$
(3.119)

можно найти из следующих условий минимума квадратичной формы (3.118):

$$\frac{\partial S_z}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}},\,\mathbf{y}_k=\hat{\mathbf{y}}_k}=\mathbf{0},\quad \frac{\partial S_z}{\partial \mathbf{y}_k}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}},\,\mathbf{y}_k=\hat{\mathbf{y}}_k}=\mathbf{0},$$

которые при k = 1, 2, ..., M дают M + 1 матричных уравнений вида

$$\left(\sum_{k=1}^{M} \mathbf{F}_{k}\right) \hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{M} [\mathbf{F}_{k} \hat{\mathbf{x}}_{k} + \mathbf{H}_{k} (\hat{\mathbf{y}}_{k} - \hat{\mathbf{y}}_{k})],$$

$$\mathbf{G}_{k} (\hat{\mathbf{y}}_{k} - \hat{\mathbf{y}}_{k}) = \mathbf{H}_{k}' (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_{k}) \quad (k = 1, 2, \dots, M).$$
(3.120)

Если матрица  $G_k$  не вырождена, то из второго уравнения (3.120) находим

$$(\hat{\mathbf{y}}_{k} - \hat{\overline{\mathbf{y}}}_{k}) = \mathbf{G}_{k}^{-1} \mathbf{H}_{k}' (\hat{\overline{\mathbf{x}}} - \hat{\mathbf{x}}_{k}) \quad (k = 1, 2, \dots, M).$$
(3.121)

Подставляя это выражение в первое уравнение (3.120), получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{M} (\mathbf{F}_{k} - \mathbf{H}_{k} \mathbf{G}_{k}^{-1} \mathbf{H}_{k}')\right) \hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{M} (\mathbf{F}_{k} - \mathbf{H}_{k} \mathbf{G}_{k}^{-1} \mathbf{H}_{k}') \hat{\mathbf{x}}_{k}.$$
 (3.122)

Обозначая

$$\mathbf{W}_{xx,k} = \mathbf{F}_{k} - \mathbf{H}_{k}\mathbf{G}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k}', \quad \mathbf{W}_{xx} = \sum_{k=1}^{M}\mathbf{W}_{xx,k},$$
 (3.123)

запишем формулу (3.122) более кратко:

$$\hat{\overline{\mathbf{x}}} = \mathbf{W}_{xx}^{-1} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{W}_{xx,k} \hat{\mathbf{x}}_{k}.$$
(3.124)

Как видим, это выражение полностью эквивалентно формуле обобщенного среднего (3.110), полученной для совокупности независимых случайных оценок  $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, ..., \hat{\mathbf{x}}_M$ .

Используя эту оценку глобальных параметров, по формуле (3.121) уточняем локальные параметры:

$$\hat{\overline{\mathbf{y}}}_{k} = \hat{\mathbf{y}}_{k} - \mathbf{G}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k}'(\hat{\overline{\mathbf{x}}} - \hat{\mathbf{x}}_{k}) \quad (k = 1, 2, \dots, M).$$
(3.125)

В силу взаимной независимости пар индивидуальных оценок  $(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{y}}_k)$ , согласно (3.115), находим апостериорные ковариации:

$$D_{xx,k} = \operatorname{cov}(\hat{\mathbf{x}}_{k}, \hat{\mathbf{x}}_{k}) = E\{\hat{\mathbf{x}}_{k}\hat{\mathbf{x}}_{k}'\} = \sigma_{k}^{2}W_{xx,k}^{-1} = \sigma_{k}^{2}(\mathbf{F}_{s} - \mathbf{H}_{k}\mathbf{G}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k}')^{-1}, D_{yy,k} = \operatorname{cov}(\hat{\mathbf{y}}_{k}, \hat{\mathbf{y}}_{k}) = E\{\hat{\mathbf{y}}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k}'\} = \sigma_{k}^{2}W_{yy,k}^{-1} = \sigma_{k}^{2}(\mathbf{G}_{k} - \mathbf{H}_{k}'\mathbf{F}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k})^{-1}, (3.126)$$
$$D_{xy,k} = \operatorname{cov}(\hat{\mathbf{x}}_{k}, \hat{\mathbf{y}}_{k}) = E\{\hat{\mathbf{x}}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k}'\} = -\sigma_{k}^{2}W_{xx,k}^{-1}\mathbf{H}_{k}\mathbf{G}_{k}^{-1},$$

откуда получаем соотношение  $\mathbf{G}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k}' = -\mathbf{D}_{yx,k}\mathbf{D}_{xx,k}^{-1}$ , поэтому формула (3.125) принимает следующий вид:

$$\hat{\bar{\mathbf{y}}}_{k} = \hat{\mathbf{y}}_{k} + \mathbf{D}_{yx,k} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} (\hat{\bar{\mathbf{x}}} - \hat{\mathbf{x}}_{k}) \quad (k = 1, 2, \dots, M).$$
(3.127)

В формулах (3.126) фигурирует оценка дисперсии с единичным весом  $\sigma_k^2$ , соответствующая серии с номером k. Она определяется формулой (2.68):

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\hat{S}_k}{N_k - (m+n)},$$

rдe

$$\hat{S}_k = \mathbf{l}'_k \mathbf{P}_k \mathbf{l}_k - \hat{\mathbf{x}}'_k \mathbf{f}_k - \hat{\mathbf{y}}'_k \mathbf{g}_k.$$

Здесь  $N_k$  – количество наблюдений в k-й серии, а m, n – количество глобальных и локальных параметров соответственно.

Автоковариации глобальных параметров (3.124) с учетом (3.126) будут равны

$$\overline{\mathbf{D}}_{xx} = \operatorname{cov}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{x}}) =$$

$$= \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{M} \mathbf{W}_{xx,k} E\{\widehat{\mathbf{x}}_{k} \widehat{\mathbf{x}}_{k}'\} \mathbf{W}_{xx,k} \right) \mathbf{W}_{xx}^{-1} =$$

$$= \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{M} \sigma_{k}^{2} \mathbf{W}_{xx,k} \right) \mathbf{W}_{xx}^{-1}.$$
(3.128)

Если точность данных наблюдений во всех сериях одинакова, т.е.  $\sigma_k^2 = \sigma_0^2 = \text{const}$ , то последняя формула принимает более простой вид

$$\overline{\mathbf{D}}_{xx} = \sigma_0^2 \mathbf{W}_{xx}^{-1}. \tag{3.129}$$

Автоковариации новых оценок локальных параметров, согласно (3.127), равны

$$\overline{\mathbf{D}}_{yy,k} = \operatorname{cov}(\hat{\mathbf{y}}_{k}, \hat{\mathbf{y}}_{k}) = E\{\hat{\mathbf{y}}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k}'\} = E\{\hat{\mathbf{y}}_{k}\hat{\mathbf{y}}_{k}'\} + E\{\hat{\mathbf{y}}_{k}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_{k})'\}\mathbf{D}_{xx,k}^{-1}\mathbf{D}_{xy,k} + \mathbf{D}_{yx,k}\mathbf{D}_{xx,k}^{-1}E\{(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_{k})\hat{\mathbf{y}}_{k}'\} + \mathbf{D}_{yx,k}\mathbf{D}_{xx,k}^{-1}E\{(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_{k})(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_{k})'\}\mathbf{D}_{xx,k}^{-1}\mathbf{D}_{xy,k}.$$
(3.130)

Но, как легко показать,

$$\operatorname{cov}(\hat{\overline{\mathbf{x}}}, \hat{\mathbf{x}}_{k}) = \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{M} \mathbf{W}_{xx,k} E\{ \hat{\mathbf{x}}_{k} \hat{\mathbf{x}}_{k}' \} \right) = \left( \sum_{k=1}^{M} \sigma_{k}^{2} \right) \mathbf{W}_{xx}^{-1}, \quad (3.131)$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\bar{\mathbf{x}}}, \hat{\mathbf{y}}_k) = \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left( \sum_{k=1}^M \mathbf{W}_{xx,k} E\{ \hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{y}}_k' \} \right) = \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left( \sum_{k=1}^M \sigma_k^2 \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{D}_{xy,k} \right), \quad (3.132)$$

поэтому

$$\overline{\mathbf{D}}_{yy,k} = \mathbf{D}_{yy,k} + \left(\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 \mathbf{D}_{yx,k} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1}\right) \mathbf{W}_{xx}^{-1} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{D}_{xy,k} + \mathbf{D}_{yx,k} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{D}_{xy,k}\right) - \mathbf{D}_{yx,k} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{D}_{xy,k} - \mathbf{D}_{yx,k} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \left[2 \left(\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2\right) \mathbf{I} - \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 \mathbf{W}_{xx,k}\right)\right] \mathbf{W}_{xx}^{-1} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{D}_{xy,k}.$$
 (3.133)

Осталось определить взаимные ковариации окончательных оценок глобальных и локальных параметров. Согласно (3.137), имеем

$$\overline{\mathbf{D}}_{xy,k} = \operatorname{cov}(\widehat{\bar{\mathbf{x}}}, \widehat{\bar{\mathbf{y}}}_k) = E\{\widehat{\bar{\mathbf{x}}}\,\widehat{\bar{\mathbf{y}}}_k'\} = E\{\widehat{\bar{\mathbf{x}}}[\widehat{\mathbf{y}}_k + \mathbf{D}_{yx,k}\mathbf{D}_{xx,k}^{-1}(\widehat{\bar{\mathbf{x}}} - \widehat{\mathbf{x}}_k)]'\} = E\{\widehat{\bar{\mathbf{x}}}\widehat{\mathbf{y}}_k'\} + [E\{\widehat{\bar{\mathbf{x}}}\,\widehat{\bar{\mathbf{x}}}'\} - E\{\widehat{\bar{\mathbf{x}}}\widehat{\mathbf{x}}_k'\}]\mathbf{D}_{xx,k}^{-1}\mathbf{D}_{xy,k}.$$
(3.134)

Используя теперь формулы (3.128), (3.131) и (3.132), находим

$$\overline{\mathbf{D}}_{xy,k} = \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{D}_{xy,k} \right) - \left[ \left( \sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 \right) \mathbf{I} - \mathbf{W}_{xx}^{-1} \left( \sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 \mathbf{W}_{xx,k} \right) \right] \mathbf{W}_{xx}^{-1} \mathbf{D}_{xx,k}^{-1} \mathbf{D}_{xy,k}.$$
(3.135)

## §8. Рекуррентное уравнивание

Построим процедуру метода наименьших квадратов, приспособленную для последовательной обработки любого количества серий данных  $l_1, l_2, \ldots$  Необходимость в такой процедуре возникает, когда данные наблюдений поступают на обработку не все сразу, а последовательными порциями (сериями, фрагментами) и требуется иметь оценки текущих значений параметров, меняющихся во времени.

Возъмем первый вектор данных  $l_1$  длиной  $N_1$  и представим его линейной моделью с постоянными параметрами

$$\mathbf{l}_{1} = \mathbf{A}_{1}\mathbf{x} + \mathbf{r}_{1}, \quad \mathbf{Q}_{1}, \tag{3.136}$$

где  $Q_i = \text{cov}(r_i, r_i)$  – априорная автоковариационная матрица центрированных невязок  $r_i$ ,  $A_i$  – матрица плана, х – вектор неизвестных постоянных параметров. МНК-оценка этих параметров по первой порции данных имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{1} = (\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1})^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{1}^{-1}\mathbf{I}_{1}.$$
(3.137)

Теперь возьмем новую серию данных  $l_2$ , зависящих от тех же неизвестных параметров х. Их можно представить моделью, аналогичной (3.136):

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{Q}_2,$$

где  $\mathbf{Q}_2 = \text{cov}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)$ . Попытаемся оценить вектор x из совместной обработки обеих серий данных так, чтобы новая оценка  $\hat{\mathbf{x}}_2$  представляла собой уточнение предыдущей оценки  $\hat{\mathbf{x}}_1$ .

Будем решать эту задачу при условии, что новые данные не зависят от предыдущих, т.е. матрица их совместных ковариаций является блочно-диагональной:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}.$$

Объединяя данные  $l_1$  и  $l_2$  в составной вектор и обозначая

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix},$$

представим всю имеющуюся информацию в виде модели
$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{x} + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{R}_2.$$

Тогда искомую оценку параметров можно записать в форме

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = (\mathbf{B}_2' \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}_2)^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{f}_2.$$
(3.138)

Если обозначить

$$\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{R}_1 \equiv \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{f}_1 \equiv \mathbf{I}_1,$$

то формулу (3.138) можно представить в общем виде [48, с. 241-243]

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{B}_{k+1}' \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{B}_{k+1})^{-1} \mathbf{B}_{k+1}' \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{f}_{k+1}, \qquad (3.139)$$

где

$$\mathbf{B}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{l}_{k+1} \end{bmatrix}.$$
(3.140)

Заметим, что здесь и в дальнейшем индекс k обозначает номер серии данных и одновременно номер шага рекуррентного процесса. Хотя это создает определенные трудности понимания формул, но вместе с тем позволяет существенно упростить их запись.

Формула (3.139) справедлива для любого шага уравнивания k = 1, 2, ..., причем при k = 1 имеем начальную оценку (3.137). Остается выразить оценку  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  через  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , т.е. представить формулу (3.139) в рекуррентном виде. Для этого обозначим

$$\mathbf{D}_{k+1} = (\mathbf{B}_{k+1}' \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{B}_{k+1})^{-1}.$$
(3.141)

Тогда равенство (3.139) можно записать в форме

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{B}_{k+1}' \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{f}_{k+1}.$$
(3.142)

Предыдущая оценка, очевидно, имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{B}'_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{f}_k \,. \tag{3.143}$$

Теперь, учитывая обозначения (3.140), имеем

$$\mathbf{D}_{k+1} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{k+1}' & \mathbf{A}_{k+1}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{k} \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left( \mathbf{B}_{k}' \mathbf{R}_{k}^{-1} \mathbf{B}_{k} + \mathbf{A}_{k+1}' \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \right)^{-1} = \left( \mathbf{D}_{k}^{-1} + \mathbf{A}_{k+1}' \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \right)^{-1}, \quad (3.144)$$

где по аналогии с (3.141) обозначено

$$\mathbf{D}_{k} = (\mathbf{B}_{k}^{\prime} \mathbf{R}_{k}^{-1} \mathbf{B}_{k})^{-1}.$$
 (3.145)

Пользуясь матричным тождеством (2.71), находим из (3.144)

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_{k} - \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k}.$$
(3.146)

Подставляя это равенство в (3.142) и учитывая (3.140), получаем

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{D}_{k+1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_{k} & \mathbf{A}'_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{k} \\ \mathbf{I}_{k+1} \end{bmatrix} = \\ = \mathbf{D}_{k+1} (\mathbf{B}'_{k} \mathbf{R}_{k}^{-1} \mathbf{f}_{k} + \mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \mathbf{I}_{k+1}) = \mathbf{D}_{k} \mathbf{B}'_{k} \mathbf{R}_{k}^{-1} \mathbf{f}_{k} + \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \mathbf{I}_{k+1} - \\ -\mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{B}'_{k} \mathbf{R}_{k}^{-1} \mathbf{f}_{k} - \\ -\mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \mathbf{I}_{k+1}.$$
(3.147)

Введем так называемую матрицу усиления

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}_{k+1}' \overline{\mathbf{Q}}_{k+1}^{-1}, \qquad (3.148)$$

где

$$\overline{\mathbf{Q}}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{D}_k\mathbf{A}'_{k+1}.$$

Тогда с учетом (3.143) выражение (3.147) примет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}) \hat{\mathbf{x}}_{k} + \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}_{k+1}' [\mathbf{Q}_{k+1}^{-1} - (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}_{k+1}')^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}_{k+1}' \mathbf{Q}_{k+1}^{-1}] \mathbf{I}_{k+1}.$$

Поскольку матрицы  $Q_{k+1}$  и  $A_{k+1}D_kA'_{k+1}$  имеют полный ранг, то выражение в квадратных скобках предыдущего равенства преобразуется с помощью (2.71) к виду

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}_{k+1}^{-1} - (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{D}_{k}\mathbf{A}'_{k+1})^{-1}\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{D}_{k}\mathbf{A}'_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}^{-1}] &= \\ &= \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} - [\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{Q}_{k+1}(\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{D}_{k}\mathbf{A}'_{k+1})^{-1}\mathbf{Q}_{k+1}]^{-1} &= \\ &= (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\mathbf{D}_{k}\mathbf{A}'_{k+1})^{-1} = \overline{\mathbf{Q}}_{k+1}^{-1}, \end{aligned}$$
(3.149)

и поэтому с учетом (3.148) окончательно имеем [48, с. 243]

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{I}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k}) \quad (k = 1, 2, ...).$$
(3.150)

Можно показать, что матрица  $K_{k+1}$ , определяемая соотношением (3.148), может быть представлена также в виде

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}' \mathbf{Q}_{k+1}^{-1}, \qquad (3.151)$$

что легко проверяется подстановкой сюда выражения (3.146) и использованием (3.149). Действительно,

$$\mathbf{K}_{k+1} = [\mathbf{D}_{k} - \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k}] \mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} = \\ = \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} [\mathbf{Q}_{k+1}^{-1} - (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}^{-1}] = \\ = \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1})^{-1} = \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}'_{k+1} \overline{\mathbf{Q}}_{k+1}^{-1},$$

что полностью совпадает с (3.148). Учитывая (3.151), выражение (3.150) можно представить в несколько другой форме:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k} + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}' \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} (\mathbf{I}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1}' \hat{\mathbf{x}}_{k}) \quad (k = 1, 2, ...).$$
(3.152)

Формулы (3.150) или (3.152) дают искомый рекуррентный алгоритм последовательного уравнивания данных наблюдений методом наименыших квадратов. Здесь новое значение оценки параметров  $\hat{x}_{k+1}$ определяется путем прибавления к старому значению  $\hat{x}_k$  поправки

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{I}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_k), \qquad (3.153)$$

зависящей от разности  $(l_{k+1} - A_{k+1}\hat{x}_k)$  между новыми данными  $l_{k+1}$  и их прогнозом  $A_{k+1}\hat{x}_k$  с помощью старой оценки параметров  $\hat{x}_k$ .

Рекуррентное соотношение для апостериорных ковариаций последовательных оценок параметров дается формулой (3.146), которая с учетом (3.148) принимает более простой вид:

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_k - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_k.$$
(3.154)

Собирая формулы (3.150), (3.154) и (3.148) вместе, получаем для k = 1, 2,... следующий рекуррентный алгоритм:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{I}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k}), \qquad (3.155)$$

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_k - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_k, \qquad (3.156)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}_{k+1}' (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{A}_{k+1}')^{-1}$$
(3.157)

$$\hat{\mathbf{x}}_{1} = (\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1})^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{1}^{-1}\mathbf{I}_{1}, \qquad (3.158)$$

$$\mathbf{D}_{1} = (\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1})^{-1}.$$
 (3.159)

Рассмотрим теперь случай, когда новая порция данных представляет собой не вектор  $l_{k+1}$ , а скаляр  $l_{k+1}$ . Тогда матрица  $A_{k+1}$  становится строкой  $a'_{k+1}$  длиной m, матрица априорных ковариаций  $Q_{k+1}$  – скаляром  $q_{k+1}$ , а матрица усиления  $K_{k+1} - m \times 1$ -вектором-столбцом. В результате рекуррентный алгоритм (3.155)–(3.157) с теми же начальными условиями (3.158)–(3.159) принимает более простой вид:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k} + \mathbf{k}_{k+1} (l_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1}' \hat{\mathbf{x}}_{k}), \qquad (3.160)$$

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_k - \mathbf{k}_{k+1} \mathbf{a}'_{k+1} \mathbf{D}_k, \qquad (3.161)$$

$$\mathbf{k}_{k+1} = \mathbf{D}_k \mathbf{a}_{k+1} (q_{k+1} + \mathbf{a}'_{k+1} \mathbf{D}_k \mathbf{a}_{k+1})^{-1}.$$
 (3.162)

В этом алгоритме обращению подлежит лишь скалярная величина, заключенная в скобки в правой части равенства (3.162). Рекуррентные формулы (3.155)–(3.157) и (3.160)–(3.162) будем называть соответственно последовательным и пошаговым МНК.

Выясним теперь связь полученного рекуррентного алгоритма МНК с методом обобщенного среднего, изложенным в предыдущем параграфе. Рекуррентный алгоритм позволяет последовательно уравнять любое количество серий или фрагментов данных. Будем считать это количество переменной (возрастающей) величиной k. Для некоторого фиксированного количества серий, равного k+1, совместную модель всех обрабатываемых данных можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q}_{k+1} \end{bmatrix},$$

где, согласно принятому в начале параграфа условию о независимости невязок отдельных серий, матрица их совместных ковариаций имеет блочно-диагональный вид. Если эту модель записать в более компактном виде

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{Q}, \tag{3.163}$$

то полученная выше рекуррентная оценка (3.155) для последнего (k+1)-го шага уравнивания, очевидно, должна равняться

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l} = \\ = \left[\sum_{i=1}^{k+1} (\mathbf{A}'_{i}\mathbf{Q}_{i}^{-1}\mathbf{A}_{i})\right]^{-1}\sum_{i=1}^{k+1} (\mathbf{A}'_{i}\mathbf{Q}_{i}^{-1}\mathbf{l}_{i}) = \left[\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{P}_{i}\right]^{-1}\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{f}_{i} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{f}$$
(3.164)

и иметь апостериорную ковариацию

$$\mathbf{D}_{k+1} = \left[\sum_{i=1}^{k+1} (\mathbf{A}_i' \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{A}_i)\right]^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{P}_i\right]^{-1} = \mathbf{P}^{-1}.$$
 (3.165)

Формулы (3.164)–(3.165) проце формул (3.155)–(3.157), так как требуют лишь суммирования симметричных матриц  $P_i$  размером  $m \times m$  и векторов  $f_i$  длиной m. Но главным преимуществом формулы (3.164) является то, что она не требует вычисления каких-либо промежуточных оценок параметров, необходимых в рекуррентном процессе (3.155)–(3.157).

Кроме того, формулу (3.164) можно обобщить на случай, когда невязки разных серий данных между собой коррелированы и матрица их взаимных ковариаций есть полная блочная симметричная матрица  $\mathbf{Q}_{k+1} = [\mathbf{Q}_{ij}]$  (*i*, *j* = 1, 2, ..., *k* + 1). Если эта матрица не вырождена и существует обратная матрица  $\mathbf{Q}_{k+1}^{-1} = \mathbf{\breve{Q}}_{k+1} = [\mathbf{\breve{Q}}_{ij}]$  (*i*, *j* = 1, 2, ..., *k* + 1), то выражение (3.164) принимает вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{A}' \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} \mathbf{I} =$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} (\mathbf{A}'_i \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{A}_j) \right]^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} (\mathbf{A}'_i \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{I}_j) =$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \mathbf{P}_{ij} \right]^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}.$$
(3.166)

Формула (3.166) представляет собой алгоритм обобщенного среднего, рассмотренный в §7 настоящей главы. Основное неудобство этого алгоритма состоит в том, что с ростом переменной k возрастает и порядок матрицы  $Q_{k+1}$ , которую необходимо обращать на каждом шаге уравнивания. Для устранения этой трудности построим рекуррентную процедуру обращения блочных матриц, воспользовавшись методом окаймления [10, с. 214]. Пусть  $\mathbf{F}_k$  – некоторая невырожденная симметричная матрица размером  $n_k \times n_k$ . Рассмотрим окаймленную симметричную матрицу размером  $n_{k+1} \times n_{k+1} = (n_k + N_{k+1}) \times (n_k + N_{k+1})$ :

$$\mathbf{F}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k & \mathbf{H}_{k+1} \\ \mathbf{H}'_{k+1} & \mathbf{G}_{k+1} \end{bmatrix},$$

где блоки  $\mathbf{H}_{k+1}$  и  $\mathbf{G}_{k+1}$  имеют размер  $n_k \times N_k$  и  $N_k \times N_k$  соответственно. Если построенная таким образом матрица тоже не вырождена, то, согласно правилу обращения блочных матриц [36, с. 666] и тождеству (2.71), имеем

$$\mathbf{F}_{k+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k}^{-1} + \mathbf{F}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\overline{\mathbf{G}}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}'\mathbf{F}_{k}^{-1} & -\mathbf{F}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}\overline{\mathbf{G}}_{k+1}^{-1} \\ -\overline{\mathbf{G}}_{k+1}^{-1}\mathbf{H}_{k+1}'\mathbf{F}_{k}^{-1} & \overline{\mathbf{G}}_{k+1}^{-1} \end{bmatrix},$$
(3.167)

где

$$\overline{\mathbf{G}}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1} - \mathbf{H}'_{k+1} \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{H}_{k+1}$$
(3.168)

есть симметричная невырожденная  $N_{k+l} \times N_{k+l}$ -матрица.

Таким образом, если матрица  $\mathbf{F}_{k}^{-1}$  получена на предыдущем шаге уравнивания, то для вычисления новой матрицы  $\mathbf{F}_{k+1}^{-1}$  необходимо обращение только одной  $N_{k+1} \times N_{k+1}$ -матрицы  $\overline{\mathbf{G}}_{k+1}$ .

Применим теперь этот алгоритм к обращению ковариационной матрицы  $Q_{k+1}$ . Учитывая, что на (k+1)-м шаге уравнивания эта матрица является окаймленной:

$$\mathbf{Q}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & \mathbf{Q}_{k,k+1} \\ \mathbf{Q}_{k+1,k} & \mathbf{Q}_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$$

находим

$$\breve{\mathbf{Q}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{Q}}_{k} + \breve{\mathbf{Q}}_{k} \mathbf{Q}_{k,k+1} \overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1}^{-1} \mathbf{Q}_{k+1,k} \breve{\mathbf{Q}}_{k} & -\breve{\mathbf{Q}}_{k} \mathbf{Q}_{k,k+1} \overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1}^{-1} \\ -\overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1}^{-1} \mathbf{Q}_{k+1,k} \breve{\mathbf{Q}}_{k} & \overline{\mathbf{Q}}_{k-1}^{-1} \\ -\overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1}^{-1} \mathbf{Q}_{k+1,k} \breve{\mathbf{Q}}_{k} & \overline{\mathbf{Q}}_{k-1,k+1}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.169)$$

где

$$\overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1} = \mathbf{Q}_{k+1,k+1} - \mathbf{Q}_{k+1,k} \widetilde{\mathbf{Q}}_{k} \mathbf{Q}_{k,k+1}.$$
(3.170)

В дальнейшем будет показано (см. гл. 5 и 6), что рекуррентный алгоритм МНК тесно связан с алгоритмами последовательной коллокации и фильтрации Калмана.

## Глава 4. СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧЕСКАЯ КОЛЛОКАЦИЯ

#### §1. Линейные гильбертовы пространства

Конечные евклидовы пространства  $\mathcal{E}^N$  легко обобщаются на бесконечномерные векторные пространства, называемые гильбертовыми [36, с. 418]. Для этого введем случайные последовательности (векторы) бесконечной длины  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...)$  и определим базис такого пространства как бесконечную последовательность базисных векторов  $\{e\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ...\}$ . Тогда по аналогии с (2.1) имеем разложение произвольного вектора в гильбертовом пространстве по его базису

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{e}_i. \tag{4.1}$$

Взаимное линейное преобразование двух векторов в гильбертовом пространстве аналогично преобразованию (2.2) и может быть представлено в виде

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$$
 (*i* = 1, 2, ...), (4.2)

при условии, что этот ряд сходится. Вводя бесконечную матрицу  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  (*i*, *j* = 1, 2, ...), преобразование (4.2) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
.

Скалярное произведение векторов в гильбертовом пространстве определим по аналогии с (2.7) с помощью необходимо сходящегося ряда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{y} = P(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$
(4.3)

где элементы бесконечной матрицы P = [ p<sub>ij</sub> ] представляют собой скалярные произведения базисных векторов

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = p_{ij} \quad (i = 1, 2, ...; j = 1, 2, ...).$$
 (4.4)

Если Р есть бесконечная единичная матрица

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

то базисные векторы, согласно (4.4), оказываются ортонормированными и такое гильбертово пространство также называется *ортонормированным*.

Из (4.3) непосредственно вытекает обобщение евклидовой нормы в бесконечномерном гильбертовом пространстве (гильбертова норма):

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}x_ix_j\right)^{1/2}.$$

Таким образом, из определения скалярного произведения (4.3) видно, что ядром гильбертова пространства является некоторая бесконечная матрица Р. Такие пространства обычно называют унитарными гильбертовыми пространствами последовательностей, чтобы подчеркнуть их дискретность. Мы будем обозначать их как  $\mathcal{H}_s$ (индекс s соответствует слову sequence – последовательность). Обычно употребляемое обозначение таких пространств –  $l_2$ .

В скалярном произведении (4.3) первому сомножителю ( векторустолбцу х) присвоим индекс k и этим же индексом пометим результат – скаляр z<sub>k</sub>. Тогда (4.3) можно записать в виде

$$(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{jk} x_{ki} y_j = \mathbf{x}'_k \mathbf{P} \mathbf{y} = z_k$$

Очевидно, что совокупность столбцов  $\mathbf{x}_k$  (k = 1, 2, ...) образует матрицу  $\mathbf{X} = [x_{ik}]$ , а совокупность таких скалярных произведений – вектор  $\mathbf{z} = (z_k)$ , что можно записать в виде

$$\mathbf{z} = (\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \mathbf{X}' \mathbf{P} \mathbf{y}. \tag{4.5}$$

Рассмотрим еще один пример гильбертовых пространств – пространство непрерывных и квадратично-интегрируемых функций. Такие пространства иногда называют функциональными. Мы будем обозначать их  $\mathcal{H}_f$ , где индекс f соответствует слову function – функция (обычное обозначение –  $L_2$ ). В таком пространстве конечные векторы  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$  евклидового пространства  $\mathcal{E}^N$  заменяются непрерывными функциями x(t), заданными на ограниченном или неограниченном интервале  $V \equiv (a, b)$ .

Введем последовательность базисных функций  $\{u\} = \{u_1(t), u_2(t), ...\}$ . Тогда каждую функцию пространства  $\mathcal{H}_f$  можно представить в виде разложения по этому базису

$$x(t) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i u_i(t),$$
 (4.6)

где знаком ⇔ обозначено равенство "в среднем", что надо понимать как сходимость "в среднем" этого ряда. Такая сходимость означает, что частные суммы этого ряда

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^n x_i u_i(t)$$

имеют предел s(1) такой, что [36, с. 458]

$$\|s_n(t) - s(t)\|^2 = \int_a^b h(t) |s_n(t) - s(t)|^2 dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$
 (4.7)

Здесь h(t) – некоторая квадратично-интегрируемая неотрицательная "весовая" функция.

Функции, обладающие свойством сходимости (4.7), называют квадратично-интегрируемыми. Это свойство вытекает из метрики пространства  $H_f$ , которая задается нормой

$$||f(t)-g(t)|| = \left(\int_{a}^{b} h(t)|f(t)-g(t)|^{2} dt\right)^{1/2},$$

определяющей среднее квадратическое расстояние между функциями f и g. В этой метрике линейное преобразование (4.2) имеет вид [36, с. 461]

$$y(t) = \mathbf{A}x(r) = \int_{a}^{b} a(t, r)x(r)dr,$$
 (4.8)

где функция x(r) соответствует вектору  $\mathbf{x} = (x_j)$  (j = 1, 2, ...), аргумент

*r* – индексу *j*, а интеграл  $\int_{a}^{b} dr$  – сумме  $\sum_{j=1}^{N}$ . Оба аргумента *i* и *r* меняются

в одном и том же промежутке  $a \le t, r \le b$ . Выражение (4.8) называют линейным интегральным оператором; этот оператор преобразует функцию x в другую функцию y в том же базисе. Двумерная функция a(t,r) называется ядром оператора. Покажем, что этот оператор можно представить в матричной форме.

Действительно, базисные функции  $u_i(r)$  (i = 1, 2, ...), как и всякие другие, можно подвергнуть действию интегрального оператора **А**. Полученные новые функции  $v_i(t) = \mathbf{A}u_i(r)$  можно снова разложить по тому же базису  $\{u\}$ , пользуясь (4.6). Таким способом мы получим

$$v_j(t) = \mathbf{A}u_j(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}u_i(t) \quad (j = 1, 2, ...),$$
(4.9)

где коэффициенты  $a_{ij}$  (i, j = 1, 2, ...) составляют некоторую бесконечную матрицу  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ . Ее столбцы есть координаты функций  $v_j(l)$  в заданном базисе  $\{u\}$  в смысле разложения (4.6). Учитъвая также, что

$$x(r) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i u_i(r), \quad y(t) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} y_i u_i(t),$$

получаем по (4.8)

$$y(t) = \mathbf{A}x(r) \Leftrightarrow \mathbf{A}\sum_{j=1}^{\infty} x_j u_j(r) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mathbf{A}u_j(r) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} x_j \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} u_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\right) u_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i u_i(t) \Leftrightarrow y(t),$$

откуда видно, что координаты функций x(r) и y(t), отнесенные к общему базису  $\{u\}$ , удовлетворяют равенству

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$$
 (*i* = 1, 2, ...).

Это означает, что если ввести бесконечные векторы-столбцы  $x = (x_1, x_2,...)$  и  $y = (y_1, y_2,...)$ , составленные из координат этих функций, то интегральный оператор (4.8) можно представить в матричной форме

Можно также показать, что ядро интегрального оператора (4.8), т.е. двумерная функция a(t, r), связано с коэффициентами  $a_{ij}$  матрицы А следующими взаимно обратными преобразованиями [36, с. 462]:

$$a(t,r) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} u_i(t) u_j(r),$$

$$a_{ij} = \int_{a}^{b} \int_{a}^{b} u_i(t) a(t,r) u_j(r) dt dr.$$
(4.10)

Определим теперь скалярное произведение двух функций в  $\partial e \tilde{u}$ ствительном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_f$ . По аналогии с (4.3) имеем [36, с. 457]

$$(x, y) = \int_{a}^{b} h(t)x(t)y(t)dt \Leftrightarrow \int_{a}^{b} h(t) \left( \sum_{i=1}^{\infty} x_{i}u_{i}(t) \sum_{j=1}^{\infty} y_{j}u_{j}(t) \right) dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{i}y_{j} \int_{a}^{b} h(t)u_{i}(t)u_{j}(t)dt \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{lj}x_{i}y_{j} = \mathbf{x}\mathbf{P}\mathbf{y},$$
(4.11)

где

$$p_{ij} = \int_{a}^{b} h(t)u_i(t)u_j(t)dt = (u_i, u_j) \quad (i, j = 1, 2, ...)$$
(4.12)

И

$$\mathbf{P} = [p_{ij}], \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots).$$

Из (4.11) вытекает, что норма функции в пространстве  $\mathcal{H}_f$  есть число

$$\|x(t)\| = \sqrt{(x,x)} = \left(\int_{a}^{b} h(t) |x(t)|^{2} dt\right)^{2} \Leftrightarrow \sqrt{(\mathbf{x} \mathbf{P} \mathbf{x})}.$$

Вернемся теперь к разложению (4.6) и определим его коэффициенты x<sub>1</sub> как скалярные произведения

$$x_{i} = (u_{i}, x) = \int_{a}^{b} h(t) u_{i}(t) x(t) dt$$
  
-118-

Если вместо функции x(t), находящейся под знаком интеграла, подставить разложение (4.6) и учесть (4.12), то получим

$$x_{l} \Leftrightarrow \int_{a}^{b} h(t)u_{i}(t) \left( \sum_{j=1}^{\infty} x_{j}u_{j}(t) \right) dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} x_{j} \int_{a}^{b} h(t)u_{i}(t)u_{j}(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}x_{j} \quad (i = 1, 2...).$$
(4.13)

Результат (4.11) имеет принципиально важное значение для теории средней квадратической коллокации (СКК), поскольку он показывает, что скалярное произведение непрерывных функций в функциональном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_f$  может быть представлено в матричной форме, т.е. оно вычисляется точно так же, как и скалярное произведение бесконечных векторов в дискретном векторном пространстве Н, если только эти функции являются квадратичноинтегрируемыми и определены их координаты в одном и том же базисе пространства  $\mathcal{H}_f$ . Бесконечная матрица P, элементы которой определяются по формуле (4.12), по-прежнему играет роль порождающей матрицы, или ядра этого пространства, так как она непосредственно связана с его базисом. Легко показать, что при переходе к другому базису эта матрица изменяется по правилу, аналогичному (2.9), только матрица преобразования Т в пространстве H ( становится бесконечной. При этом само скалярное произведение (4.11) остается по-прежнему инвариантным и не зависит от изменений базиса (см. §1 гл. 2).

Другой важной особенностью унитарного бесконечномерного гильбертова пространства  $\mathcal{H}_s$  со скалярным произведением (4.11) и порождающей матрицей Р является возможность его "аппроксимации" конечномерным евклидовым пространством  $\mathcal{E}^N$ , т.е. возможность перехода от бесконечных матриц и векторов пространства  $\mathcal{H}_s$  к матрицам и векторам ограниченной размерности пространства  $\mathcal{H}_s$ . Эта возможность заключена в определении метрики пространства  $\mathcal{H}_s$ . Действительно, в силу условия сходимости "в среднем" (4.7) для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое N, что

$$\|s_n(t) - s(t)\| \le \varepsilon \quad \text{при} \quad n \ge N. \tag{4.14}$$

Величина в левой части этой формулы представляет собой норму погрешности средней квадратической аппроксимации функций путем их разложения по базису пространства  $\mathcal{H}_{f}$ . Задаваясь приемлемой

величиной этой нормы, не равной нулю, можно найти такую минимальную размерность N пространства  $\mathcal{E}^N$ , при которой сходимость "в среднем" будет обеспечена с необходимой точностью.

Введем теперь понятие воспроизводящего ядра гильбертова пространства. Под этим, вообще говоря, понимают двумерную функцию q(R,S) пары точек, принадлежащих некоторой области трехмерного евклидова пространства  $\mathcal{E}^3$ , которая удовлетворяет следующим условиям [41, с. 155]:

$$q(R,S) \in \mathcal{H}_f$$
для фиксированной точки S, (4.15)

$$f(S) = (f(R), q(R, S))_R$$
 для любой  $f \in \mathcal{H}_f$ . (4.16)

Первое из этих условий утверждает, что q(R,S) как функция только одной переменной принадлежит гильбертову пространству  $\mathcal{H}_f$ , а второе соотношение утверждает, что скалярное произведение произвольной функции этого пространства f на функцию q, вычисленное в точке R, дает значение функции f в другой точке S.

Легко показать [41, с. 155–156], что воспроизводящее ядро является симметричной положительно определенной функцией, т.е.

$$q(R,S) = q(S,R)$$
 (4.17)

И

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \lambda_j q(R_i, R_j) \ge 0$$
(4.18)

при любых константах  $\lambda_i, \lambda_j$ . Бесконечная матрица

$$\mathbf{Q} = [q(R_i, R_j)] \ (i, j = 1, 2, ...), \tag{4.19}$$

составленная из дискретных значений воспроизводящего ядра пространства  $\mathcal{H}_f$ , является воспроизводящим ядром пространства  $\mathcal{H}_s$ . В силу условия (4.18) эта матрица всегда является положительно определенной, а в силу свойства (4.17) – симметричной.

В конечномерном евклидовом пространстве матрица (4.19) становится конечной и тоже является его воспроизводящим ядром. Воспроизводящее свойство (4.16) такого ядра с учетом (4.5) можно записать в виде

$$\mathbf{x} = (\mathbf{Q}, \mathbf{x}), \tag{4.20}$$

где х – произвольный вектор евклидова пространства.

Легко видеть, что свойству (4.20) удовлетворяет только такая матрица  $\mathbf{Q}$ , которая равна обратной матрице  $\mathbf{P}$ , являющейся в свою очередь порождающей матрицей евклидова пространства. Действительно, полагая  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$  и вспоминая определение (2.7) скалярного произведения в этом пространстве, имеем

$$\mathbf{x} = (\mathbf{Q}, \mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

#### §2. Случайные процессы и последовательности

Случайным (стохастическим) процессом называют непрерывную функцию  $f(\mu, \omega)$  двух независимых переменных  $\mu \in \mathbf{M}, \omega \in \Omega$ . Первая переменная  $\mu$  представляет собой текущую точку обычного 4-мерного физического пространства-времени  $\mathbf{M}$ , в котором производятся все реальные измерения, которое в связи с этим называют пространством измерений. Вторая переменная  $\omega$  представляет собой точку так называемого "вероятностного пространства"  $\Omega$  и вводится для описания случайного характера функции  $f(\mu, \omega)$ .

Переменная  $\mu$  может означать текущее время *t* или любую другую одномерную величину – расстояние, координату и т.п. В таком случае мы имеем простейший одномерный случайный процесс. Но переменная  $\mu$  может быть определена и как точка  $\mu = (u, v)$  какой-либо *двумерной* области физического пространства, например плоскости или сферы единичного радиуса и т. д. Тогда мы получаем двумерный процесс  $f(u, v; \omega)$ , который называют случайным полем. В самом общем случае стохастический процесс можно определить как случайную 4-мерную пространственно-временную функцию вида  $f(u, v, w, t; \omega)$ , зависящую от трех пространственных координат *u*, *v*, *w* и от времени *t*.

Формальная переменная  $\omega$  определяет случайный выбор функции  $f(\mu, \omega)$  в том смысле, что всякая величина, зависящая от этой переменной, является случайной. Вероятностное пространство  $\Omega$ , где определена эта переменная, иногда называют фазовым пространство  $\Omega$ , где определена эта переменная, иногда называют фазовым пространством, а саму переменную  $\omega - \phi$ азовой переменной. С помощью фазовой переменной одну случайную функцию  $f(\mu, \omega_1)$  как выборку (реализацию) процесса  $f(\mu, \omega)$  отличают от другой функции (выборки)  $f(\mu, \omega_2)$ . При этом обе эти выборочные функции уже зависят только от переменной  $\mu$ , так как в них  $\omega_1$  и  $\omega_2$  являются как бы "константами". По этой причине переменную  $\mu$  часто называют выборочный пространство М – выборочным пространством.

Важнейшими характеристиками случайных процессов являются математическое ожидание и ковариационная функция. Математическим ожиданием случайной функции называется се интеграл по фазовому пространству:

$$E\{f(\mu,\omega)\} = \int_{\Omega} f(\mu,\omega) d\Omega = g(\mu).$$
(4.21)

Рассмотрим теперь в пространстве измерений M две произвольные точки  $\mu u \mu + \psi$ , где  $\psi$  означает относительное координатновременное смещение (сдвиг) этих точек, и определим в них значения одной и той же случайной функции  $f(\mu,\omega)$  и  $f(\mu+\psi,\omega)$ , соответствующей выборке с фазовой переменной  $\omega$ . Тогда интеграл от произведения  $f(\mu,\omega)f(\mu+\psi,\omega)$  по всему фазовому пространству

$$q(\psi,\mu) = E\{f(\mu,\omega)f(\mu+\psi,\omega)\} = \int_{\Omega} f(\mu,\omega)f(\mu+\psi,\omega)d\Omega \qquad (4.22)$$

будет определять истинную ковариационную функцию процесса  $f(\mu, \omega)$ . Выражения (4.21) и (4.22) называют фазовым средним.

Однако на практике мы всегда имеем ограниченное количество выборок случайного процесса, и поэтому фазовое пространство  $\Omega$  оказывается дискретным и содержащим счетное множество значений фазовой переменной  $\omega = \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ . Заменяя в формулах (4.21) и (4.22) интегралы суммами, получим следующие приближенные эмпирические оценки:

$$\bar{g}_n(\mu) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_j(\mu),$$
(4.23)

$$\tilde{q}_n(\psi,\mu) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_j(\mu) f_j(\mu+\psi), \qquad (4.24)$$

В этих формулах (и далее) индекс *j* означает номер выборки и заменяет фазовую переменную  $\omega_j$ , т.е.  $f_j(\mu) = f(\mu, \omega_j)$ . С увеличением объема выборки (*n*) оценки (4.23) и (4.24) сходятся по вероятности к функциям (4.21) и (4.22) соответственно:

$$g(\mu) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(\mu), \quad q(\psi,\mu) = \lim_{n\to\infty} \tilde{q}_n(\psi,\mu).$$

Выборка бесконечного объема называется генеральной совокупностью.

К сожалению, часто бывает известна всего лишь одна реализация случайного процесса

$$f(\mu) = f(\mu, \omega), \quad \omega = \text{const}$$

и поэтому эмпирические фазовые средние (4.23)-(4.24) вычислить вообще невозможно. В этом случае вместо них приходится пользоваться другими, так называемыми выборочными, оценками:

$$\hat{g} = M\{f(\mu)\} = \int_{\mathbf{M}} f(\mu) d\mathbf{M}, \qquad (4.25)$$

$$\hat{q}(\psi) = M\{f(\mu)f(\mu+\psi)\} = \int_{M} f(\mu)f(\mu+\psi)d\mathbf{M},$$
 (4.26)

где интегрирование по фазовому пространству Ω заменено интегрированием по пространству измерений M.

Возникает вопрос: насколько правомочна такая замена и если она возможна, то в каких случаях? В этой связи заметим, что истинная ковариационная функция, определяемая формулой (4.22), и ее приближенная эмпирическая оценка (4.24) в общем случае могут зависеть от двух переменных – от смещения  $\psi$  и от выборочной переменной  $\mu$ . В то же время выборочная оценка этой функции (4.24) зависит только от переменной  $\psi$ . Случайные процессы, ковариационная функция которых зависит только от смещения  $\psi$ , называются стационарными процессами. Отсюда следует, что только для таких процессов мы и можем пользоваться выборочными оценками ковариационных функций. Однако такие оценки должны быть несмещенными относительно истинных. Это последнее условие можно гарантировать только для так называемых эргодических стационарных случайных процессов, так как именно для них выборочное среднее  $M\{\cdot\}$  в пределе совпадает с фазовым средним  $E\{\cdot\}$ . Это следует понимать так, что

$$q(\psi) = E\{\hat{q}(\psi, \omega)\} = E\{M\{f(\mu, \omega) | f(\mu + \psi, \omega)\}\},$$
(4.27)

т. е. для эргодических случайных процессов математическое ожидание выборочной ковариационной функции равно истинной ковариационной функции. А это и означает, что для таких процессов эмпирическая ковариационная функция служит несмещенной оценкой истинной ковариационной функции.

Заметим еще, что истинное матожидание (4.21) и его эмпирическая оценка (4.23) являются функциями переменной µ, в то время как выборочная оценка матожидания (4.25) есть просто число – интегральное среднее случайного процесса по пространству измерений.

Рассмотренные выпе непрерывные случайные функции  $f(\mu, \omega)$ могут быть заданы дискретно в счетных точках  $\mu = \mu_1, \mu_2, ..., \mu_N$  дискретного пространства М. Заданные таким образом случайные функции обычно называют случайными последовательностями. Совокупность из *n* выборок (реализаций) таких последовательностей можно представить в виде

$$f_{ij} = f_j(\mu_i) = f(\mu_i, \omega_j) \ (i = 1, 2, ..., N; j = 1, 2, ..., n).$$

В этом случае вместо непрерывной переменной сдвига  $\psi$  мы должны ввести дискретную переменную  $\psi_k = \mu_{i+k} - \mu_i$ , поэтому

$$f_i = f(\mu_i), \ f_{i+k} = f(\mu_{i+k}) = f(\mu_i + \psi_k).$$

Истинные матожидания и ковариационные функции случайных последовательностей определяются по формулам, аналогичным (4.21) и (4.22), а их эмпирические оценки можно найти по формулам (4.23) и (4.24):

$$\bar{g}_i \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij} , \qquad (4.28)$$

$$\tilde{q}_{lk} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} f_{l+k,j}.$$
(4.29)

Для эргодических случайных последовательностей можно для каждой отдельной реализации получить по формулам (4.25) и (4.26) следующие эмпирические оценки:

$$\hat{g} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i , \qquad (4.30)$$

$$\hat{q}_k \approx \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} f_i f_{i+k}$$
 (k = 0,1,2,...,N-1). (4.31)

В последней формуле для каждого индекса сдвига k суммируется N-k произведений случайной функции, поскольку предполагается, что дискретное пространство измерений M, в котором она задана, ограничено и содержит только N точек  $\mu_i$ .

#### §3. Основная задача коллокации

"Средняя квадратическая коллокация представляет собой метод определения аномального гравитационного поля путем комбинации геодезических измерений различных видов". Такое определение метода СКК дается в книге Г. Морица "Современная физическая геодезия" [41, с. 62]. Из него видно, что этот метод первоначально был предназначен для объединения разнообразных данных наблюдений, в которых проявляется действие земного тяготения, с целью уточнения характеристик (параметров) глобального поля силы тяжести. Эта процедура, собственно, и называется коллокацией. Но, как легко заметить, подобные задачи встречаются не только в физической геодезии, но и повсюду, где требуется уточнить физическое явление (причину) по многочисленным его проявлениям (следствиям), т.е. при анализе любых косвенных измерений. В астрометрии, например, такая задача называется совместным уравниванием данных. Однако отличительной чертой коллокации является то, что она имеет дело не с функциональной связью между причиной и следствием, как это имеет место в уравнительных вычислениях методом наименьших квадратов, а с неустойчивой (стохастической) связью между ними, которую можно описать соответствующей ковариационной функцией.

Рассмотрим два множества случайных величин: множество "измерений", образующих *N*-мерный вектор-столбец  $l = (l_1, l_2, ..., l_N)$ , и множество "сигналов", которые образуют *p*-мерный вектор-столбец  $s = (s_1, s_2, ..., s_p)$ . Предполагается, что обе эти векторные величины центрированы, т.е.

$$E\{\mathbf{l}\} = 0, \quad E\{\mathbf{s}\} = 0.$$
 (4.32)

Введем теперь ковариационные матрицы

$$Q_{ll} = cov(l, l) = E\{ll'\},Q_{sl} = cov(s, l) = E\{sl'\},Q_{ss} = cov(s, s) = E\{ss'\},$$
(4.33)

где  $Q_{ll}$  и  $Q_{ss}$  – автоковариационные матрицы векторов l и s соответственно,  $Q_{sl}$  – матрица взаимных ковариаций между l и s. Предполагается, что эти матрицы имеют полный ранг (говорят, что  $k \times m$ матрица A имеет полный ранг, если rank(A) равен меньшему из чисел k и m).

Будем считать, что вектор данных I известен и требуется оценить вектор сигнала s, если известны ковариации (4.33). Именно таким образом ставится основная задача в методе СКК. Будем искать оценку сигнала s в классе линейных оценок вида

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{H}\mathbf{l},$$
 (4.34)

где **H** – некоторая матрица размером  $N \times p$ . Иначе говоря, каждая компонента вектора **s** аппроксимируется линейной комбинацией компонент вектора данных l.

Вектор ошибок оценивания е определяется соотношением  $e = \hat{s} - s$ , а его ковариационная матрица имеет вид

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\ell}\boldsymbol{\ell}} = \operatorname{cov}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^{\prime}\} = E\{(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})^{\prime}\}.$$
(4.35)

Диагональные элементы этой матрицы представляют собой дисперсии компонент оцениваемого сигнала

$$\sigma_j^2 = E\{e_j^2\} = E\{(\hat{s}_j - s_j)^2\} \quad (j = 1, 2, ..., p).$$
(4.36)

Согласно общей теории статистического оценивания, наилучшей оценкой сигнала s по данным l является несмещенная линейная оценка вида (4.34) с минимальной дисперсией. Усредняя по реализациям выражение (4.34) и принимая во внимание (4.32), находим

$$E\{\mathbf{\hat{s}}\} = \mathbf{H}E\{\mathbf{l}\} = \mathbf{0} = E\{\mathbf{s}\},\$$

поэтому оценка (4.34) является несмещенной при любой матрице Н.

Попытаемся теперь определить эту матрицу так, чтобы дисперсии ошибок оценивания сигнала (4.36) были минимальны. Ковариационная матрица этих ошибок при произвольной матрице H, в соответствии с (4.33)–(4.35), имеет вид

$$\mathbf{Q}_{ee} = E\{\mathbf{ee'}\} = E\{(\mathbf{Hl} - \mathbf{s})(\mathbf{Hl} - \mathbf{s})'\} =$$
  
=  $\mathbf{H}E\{\mathbf{ll'}\}\mathbf{H'} - E\{\mathbf{sl'}\}\mathbf{H'} - \mathbf{H}E\{\mathbf{ls'}\} + E\{\mathbf{ss'}\} =$   
=  $\mathbf{H}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{H'} - \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{H'} - \mathbf{H}\mathbf{Q}_{ls} + \mathbf{Q}_{ss}.$  (4.37)

Так как матрица  $Q_{ll}$  имеет полный ранг и поэтому существует обратная ей матрица  $Q_{ll}^{-1}$ , то непосредственной проверкой убеждаемся, что выражение (4.37) эквивалентно следующему:

$$\mathbf{Q}_{tt} = \mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{Q}_{ls} + (\mathbf{H} - \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1}) \mathbf{Q}_{ll} (\mathbf{H} - \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1})'.$$
(4.38)

Таким образом, матрица Q,, есть сумма двух матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{Q}_{ls} \quad \mathbf{H} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{H} - \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1}) \mathbf{Q}_{ll} (\mathbf{H} - \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1})'.$$

Первая из них не зависит от матрицы Н и поэтому одинакова для всех возможных линейных оценок сигнала, а матрицу В можно сделать нулевой, если принять

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1}. \tag{4.39}$$

Покажем, что если равенство (4.39) не удовлетворяется, то диагональные элементы матрицы В всегда будут положительными. Действительно, возьмем произвольную *i*-ю строку матрицы ( $\mathbf{H} - \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{Q}_{ll}^{-1}$ ) и обозначим ее через b'. Тогда *i*-й диагональный элемент матрицы В будет, очевидно, представлять собой квадратичную форму b' $\mathbf{Q}_{ll}$ b. Но поскольку ковариационная матрица  $\mathbf{Q}_{ll}$ , по определению, не вырождена и положительно определена, то она порождает положительно определенные квадратичные формы (см. §1 гл. 2), поэтому b' $\mathbf{Q}_{ll}$ b  $\geq 0$ при любом векторе b, причем знак равенства справедлив, только если b = 0, т.е. при выполнении соотношения (4.39). Таким образом, диагональные элементы матрицы  $\mathbf{Q}_{ee} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , которые являются дисперсиями оценок сигнала, всегда больше диагональных элементов матрицы A, если B  $\neq 0$ , т.е. когда не выполняется равенство (4.39). Подставляя это равенство в (4.34), находим

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{I}, \tag{4.40}$$

что и дает наилучшую (несмещенную и с минимальной дисперсией) линейную оценку сигнала s в виде явной функции исходных данных l. При B = 0 формула (4.38) принимает вид

$$\mathbf{D}_{ss} = \mathbf{Q}_{ee} = \mathbf{A} = \mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{Q}_{ls}, \qquad (4.41)$$

где **D**<sub>33</sub> представляет теперь *апостериорную* оценку ковариационной матрицы найденного сигнала.

Формулы (4.40)–(4.41) дают полное решение основной задачи коллокации. Заметим, что при их выводе не делалось никаких предположений о количестве "сигналов" p и количестве данных N и поэтому они справедливы при любых p и N. Это означает, что мы можем с помощью формулы (4.40) оценить любое (в принципе неограниченное) количество сигналов  $s_1, s_2, \ldots$  по конечному числу данных, если, конечно, для всех этих сигналов а ргіогі известна ковариационная

матрица  $Q_{sl}$ . При p < N формула (4.40) дает сигналы в промежуточных точках между моментами наблюдений и ее называют средней квадратической интерполяцией. Если же p = N, то процедура (4.40) определяет сигналы в моменты наблюдений, и поэтому она, по сути дела, является фильтрацией данных, особенно в случае, когда они отягощены случайными ошибками наблюдений (см. §2 наст. гл.). И наконец, когда p > N, мы имеем дело с вычислением новых сигналов, т.е. прогнозом.

Докажем теперь инвариантность основной формулы СКК (4.40) относительно линейных преобразований сигнала и данных. Пусть вместо N данных  $l_i$ , образующих вектор l, имеем другие N данных  $h_i$ , образующих вектор h, который связан с вектором l линейными преобразованиями вида

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h},$$

где А – невырожденная N × N -матрица. Тогда

$$\mathbf{Q}_{sh} = E\{\mathbf{sh'}\} = E\{\mathbf{sl'A'}\} = E\{\mathbf{sl'}\}\mathbf{A'} = \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{A'}$$
(4.42)

и аналогично

$$\mathbf{Q}_{hh} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{A}'. \tag{4.43}$$

Применим теперь формулу (4.40) для выделения сигнала из данных h:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{sh}\mathbf{Q}_{hh}^{-1}\mathbf{h}.$$

Но с учетом формул (4.42)-(4.43) это выражение принимает вид

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{I},$$

поэтому

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{sh}\mathbf{Q}_{hh}^{-1}\mathbf{h} = \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{l},$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь кроме *p*-мерного сигнала s требуется оценить еще один *q*-мерный сигнал t, связанный с предыдущим линейным преобразованием вида t = Bs, где B – произвольная  $q \times p$ -матрица. Учитывая, что

$$\mathbf{Q}_{tl} = E\{\mathbf{tl}'\} = E\{\mathbf{Bsl}'\} = \mathbf{B}E\{\mathbf{sl}'\} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{sl},$$

имеем

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{tl}\mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{l} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{sl}\mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{l} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}},$$

что и доказывает инвариантность формулы (4.40) относительно линейных преобразований сигнала.

На практике часто приходится иметь дело не с произвольным множеством случайных величин, а с упорядоченными по времени случайными последовательностями (временными рядами). Пусть мы имеем несколько векторов  $l_k = (l_i)_k$  (i = 1, 2, ..., N; k = 1, 2, ..., m) данных наблюдений  $l_{ik}$ , выполненных в одни и те же последовательные моменты времени  $T_i$  (i = 1, 2, ..., N). Предположим, что в этих данных проявляется некоторый интересующий нас сигнал s, представляющий собой случайную функцию s(T). Обозначим последовательность значений этой функции в дискретные моменты наблюдений вектором  $t = (t_i) = s(T_i)$ , тогда простейшую модель таких данных можно представить в виде

$$\mathbf{l}_{k} = \mathbf{t} + \mathbf{r}_{k}, \qquad (4.44)$$

где  $\mathbf{r}_k = (r_i)_k$  – векторы (последовательности) случайных ошибок наблюдений. Предполагается, что все случайные последовательности модели (4.44) центрированы, т.е. имеют нулевое матожидание.

В общем случае искомый сигнал s(T) рассматривается как непрерывная случайная функция времени, определенная и за пределами интервала наблюдений  $\Delta T = T_N - T_1$ . Это значит, что дискретное представление этого сигнала имеет вид последовательности случайных величин (стохастического вектора) произвольной длины p:

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N, s_{N+1}, \dots, s_p) =$$
  
=  $(t_1, t_2, \dots, t_N; f_1, f_2, \dots, f_M) = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}.$  (4.45)

Геометрическая интерпретация этой модели дана на рис. 4.1.



Рис. 4.1. Модель данных коллокации.

Хотя компоненты всех трех стохастических векторов линейной модели (4.44) отнесены к одним и тем же точкам пространства измерений (времени), но как случайные величины они распределены в разных пространствах. Вектор t не зависит от номера серии k и представляет собой случайную последовательность, не зависящую от фазовой переменной  $\omega_k$ , поэтому компоненты этого вектора (как и всего вектора сигнала s) распределены только в пространстве измерений (компоненты векторов  $r_k$ ) распределены одновременно как в пространстве измерений M, так и в вероятностном пространстве  $\Omega$ . Если в модели (4.44) нет трендов, то из сказанного выше следует:

$$M\{t\} = 0, M\{s\} = 0, M\{r\} = 0, E\{t\} = t, E\{s\} = s, E\{r\} = 0.$$
(4.46)

Введем теперь понятие общего среднего  $G = EM\{\cdot\}$ , которое представляет собой одновременное усреднение по пространствам **М** и  $\Omega$ :

$$G\{f(\mu,\omega)\} = EM\{f(\mu,\omega)\} = \iint_{\Omega M} f(\mu,\omega) d\mathbf{M} d\Omega.$$

Тогда с учетом (4.46) имеем

$$G\{\mathbf{r}\} = G\{\mathbf{t}\} = G\{\mathbf{s}\} = 0, \ G\{\mathbf{l}\} = G\{\mathbf{t}\} + G\{\mathbf{r}\} = 0.$$
(4.47)

Эти выражения являются условиями центрированности случайных величин, одновременно распределенных в пространствах Ми  $\Omega$ . Ковариации таких случайных величин определяются формулами

$$\mathbf{Q}_{ss} = G\{\mathbf{ss'}\} = EM\{\mathbf{ss'}\} = E\{M\{\mathbf{ss'}\}\} = M\{\mathbf{ss'}\},$$

$$\mathbf{Q}_{tt} = G\{\mathbf{tt'}\} = EM\{\mathbf{tt'}\} = E\{M\{\mathbf{tt'}\}\} = M\{\mathbf{tt'}\},$$

$$\mathbf{Q}_{rr} = G\{\mathbf{rr'}\} = EM\{\mathbf{rr'}\} = E\{\mathbf{rr'}\},$$

$$\mathbf{Q}_{tr} = G\{\mathbf{tr'}\} = EM\{\mathbf{tr'}\} = M\{\mathbf{t}\}E\{\mathbf{r'}\} = 0.$$
(4.48)

Здесь последняя формула означает, что в среднем по обоим пространствам сигнал и шум не коррелированы. С учетом (4.47)-(4.48) находим

$$Q_{tt} = G\{ll'\} = G\{(t+r)(t'+r')\} = G\{tt'\} + G\{tr'\} + G\{rt'\} + G\{rt'\} + G\{rt'\} + G\{rt'\} = Q_{tt} + Q_{tr} + Q_{rt} + Q_{rr} = Q_{tt} + Q_{rr},$$

$$Q_{st} = G\{sl'\} = G\{s(t'+r)'\} = G\{st'\} + G\{sr'\} = Q_{st},$$

$$Q_{tl} = G\{tl'\} = G\{t(t'+r)'\} = G\{tt'\} + G\{tr'\} = Q_{tt}.$$
(4.49)

Подставляя (4.49) в основную формулу коллокации (4.40), получаем

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{I} = \mathbf{Q}_{sl} (\mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{Q}_{rr})^{-1} \mathbf{I}, \qquad (4.50)$$

# §4. Объединение случайных последовательностей

Пусть имеется *m* случайных последовательностей данных  $l_k$  (k = 1, 2, ..., m), заданных в одни и те же моменты времени и описываемых моделью (4.44). Образуем из них составной вектор  $l = (l_k)$ , имеющий длину mN, и попытаемся оценить сигнал t с известной а priori автоковариационной матрицей  $Q_{ll}$  путем линейного преобразования  $\hat{t} = Hl$  так, чтобы минимизировать дисперсию разностей  $e = \hat{t} - t$ . Эту задачу будем называть объединением временных рядов. Для ее решения воспользуемся первой частью формулы (4.50), т.е. формулой (4.40). Полагая в ней s = t, находим

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{II} \mathbf{Q}_{II}^{-1} \mathbf{I}. \tag{4.51}$$

Здесь  $\mathbf{Q}_{tl}$  есть  $N \times mN$ -матрица ковариаций искомого сигнала t и данных l,  $\mathbf{Q}_{tl}$  – матрица ковариаций данных размером  $mN \times mN$ .

Если ошибки r<sub>k</sub> не коррелируют между собой и с сигналом t, то, согласно формулам (4.50), будем иметь

$$\mathbf{Q}_{ll} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ll} & \mathbf{Q}_{ll} & \cdots & \mathbf{Q}_{ll} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{M}_{MATPHIL}$$
$$\mathbf{Q}_{ll} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{ll} & \cdots & \mathbf{Q}_{ll} \\ \mathbf{Q}_{ll} & \mathbf{Q}_{22} & \cdots & \mathbf{Q}_{ll} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{ll} & \mathbf{Q}_{ll} & \cdots & \mathbf{Q}_{mm} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{Q}_{kk}$   $(k = 1, 2, ..., m) - N \times N$ -матрицы автоковариаций данных  $\mathbf{l}_k$ , определяемые (4.49):

$$\mathbf{Q}_{kk} = \mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{Q}_{lr}^{kk} \, .$$

Поскольку матрица  $Q_{ii}$  известна, а  $Q_{kk}$  может быть вычислена, то можно найти матрицу автоковариаций ошибок наблюдений:

$$\mathbf{Q}_{rr}^{kk} = \mathbf{Q}_{kk} - \mathbf{Q}_{tt}$$

Вводя блочную матрицу-строку размером N × mN

 $\mathbf{J'} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix},$ 

состоящую из m обыкновенных единичных матриц размером  $N \times N$ , и блочно-диагональную матрицу размером  $mN \times mN$ 

$$Q_{rr} = diag(Q_{rr}^{kk}) \ (k = 1, 2, ..., m),$$

а также учитывая, что  $\mathbf{l} = (\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, ..., \mathbf{l}_m)$  есть составной  $mN \times 1$ -вектор, перепишем формулу (4.51) в виде

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{u} \mathbf{J}' (\mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{J} \mathbf{Q}_{u} \mathbf{J}')^{-1} \mathbf{I} =$$

$$= \mathbf{Q}_{u} \mathbf{J}' [\mathbf{Q}_{rr}^{-1} - \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{J} \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{J} + \mathbf{Q}_{u}^{-1})^{-1} \mathbf{J}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{I} =$$

$$= \mathbf{Q}_{u} [\mathbf{I} - \mathbf{J}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{J}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{J} + \mathbf{Q}_{u}^{-1})^{-1} ]\mathbf{J}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{I}.$$

Обозначая

$$\mathbf{R} = \mathbf{J}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{J} = \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{Q}_{rr}^{kk})^{-1},$$
  
$$\mathbf{h} = \mathbf{J}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{l} = \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{Q}_{rr}^{kk})^{-1}\mathbf{l}_{k},$$

получаем

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{tt} [\mathbf{I} - \mathbf{R} (\mathbf{Q}_{tt}^{-1} + \mathbf{R})^{-1}] \mathbf{h} =$$
  
=  $\mathbf{Q}_{tt} (\mathbf{Q}_{tt} + \mathbf{R}^{-1})^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h} = (\mathbf{Q}_{tt}^{-1} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{h}.$  (4.52)

Ведем теперь весовые матрицы

$$\mathbf{P}_{tt} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{tt}^{-1}, \quad \mathbf{P}_{rr}^{kk} = \sigma_0^2 (\mathbf{Q}_{rr}^{kk})^{-1}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_{tt} + \sum_{k=1}^m \mathbf{P}_{rr}^{kk}.$$

Тогда выражение (4.52) можно преобразовать к виду

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{Q}_{ll}^{-1} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{h} = \left(\mathbf{P}_{ll} + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}_{rr}^{kk}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}_{rr}^{kk} \mathbf{l}_{k} = \mathbf{P}^{-1} \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}_{rr}^{kk} \mathbf{l}_{k}.$$

Если теперь ввести обобщенные нормированные веса

$$\mathbf{W}_{k} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}_{rr}^{kk} = \left(\mathbf{Q}_{tt}^{-1} + \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{Q}_{rr}^{kk})^{-1}\right)^{-1} (\mathbf{Q}_{rr}^{kk})^{-1} = \left(\mathbf{Q}_{rr}^{kk}\mathbf{Q}_{tt}^{-1} + m\mathbf{I}\right)^{-1} = \frac{1}{m}\mathbf{I} - \frac{1}{m^{2}}\mathbf{Q}_{rr}^{kk} (\mathbf{Q}_{tt} + \mathbf{Q}_{rr}^{kk})^{-1},$$

то получим

$$\hat{\mathbf{t}} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{W}_k \mathbf{l}_k \,. \tag{4.53}$$

Таким образом, объединение рядов  $l_k$  (k = 1, 2, ..., m) методом СКК с целью выделения из них сигнала t с известной ковариационной матрицей  $Q_{ll}$  сводится к суммированию этих рядов с нормированными весами  $W_k$ . Причем главная часть оценки сигнала представляет собой простое *арифметическое* среднее

$$\hat{\mathbf{t}}_0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{l}_k \; ,$$

а поправка к нему

$$\Delta \hat{\mathbf{t}}_0 = -\frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \mathbf{Q}_{rr}^{kk} \left( \mathbf{Q}_{tt} + \mathbf{Q}_{rr}^{kk} \right)^{-1} \mathbf{l}_k$$

имеет относительный порядок 1/*m* и поэтому при ограниченных автоковариациях сигнала и шума уменьшается с увеличением числа объединяемых рядов *m*. Этот факт можно считать обобщением закона больших чисел на случай коррелированных случайных последовательностей.

Апостериорные ковариации **D**<sub>11</sub> объединенного ряда оценок сигнала t определяются формулой, аналогичной (4.41), поэтому, используя введенные выше обозначения, находим:

$$D_{tt} = Q_{tt} - Q_{tt}Q_{tt}^{-1}Q_{tt} = Q_{tt} - Q_{tt}J'[Q_{rr} + JQ_{tt}J']^{-1}LQ_{tt} = = Q_{tt} - Q_{tt}(R^{-1} + Q_{tt})^{-1}Q_{tt} = (Q_{tt}^{-1} + R)^{-1}.$$
 (4.54)

Если данные  $l_k$  содержат компоненту некоррелированного белого шума  $n_k$ , то модель (4.44) принимает вид  $l_k = t + r_k + n_k$ . Очевидно, что в этом случае диагональные элементы матрицы  $Q_{ll}$  будут равны

$$\mathbf{Q}_{kk} = \mathbf{Q}_{ii} + \mathbf{Q}_{rr}^{kk} + \mathbf{Q}_{nn}^{kk},$$

где  $\mathbf{Q}_{nn}^{kk} = \operatorname{cov}(\mathbf{n}_k, \mathbf{n}_k) = E(\mathbf{n}_k \mathbf{n}'_k) = \sigma_k^2 \mathbf{I}$  представляет собой  $N \times N$ матрицу автоковариаций белого шума  $\mathbf{n}_k$  с дисперсией  $\sigma_k^2$ . В остальном вышеизложенный алгоритм объединения рядов сохраняется.

В практике срочной службы вращения Земли необходимо объединять непрерывно поступающие скалярные оценки ПВЗ  $l_1, l_2, ..., l_m$ . В этом случае имеем N = 1 и формула (4.53) принимает вид

$$\hat{l} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} l_k - \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{q_{rr}^{kk} l_k}{q_{ll} + q_{rr}^{kk}},$$

где  $q_{ll}$  и  $q_{rr}^{kk}$  представляют собой оценки априорных дисперсий сигнала t и ошибок новых данных  $l_k$ . Такой процесс объединения случайных последовательностей не требует накопления данных и может протекать непрерывно в реальном времени (см. также §8 наст. гл.).

Рассмотрим теперь случай, когда априорная информация о ковариациях искомого сигнала отсутствует и матрица  $\mathbf{Q}_{ll}$  неизвестна. По сути дела это означает, что априорный вес сигнала мы должны принять равным нулю, т.е.  $\mathbf{P}_{ll} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ll}^{-1} = \mathbf{0}$ . Казалось бы, в этих условиях для получения оценки  $\hat{\mathbf{t}}$  достаточно в формуде (4.52) положить  $\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{0}$ . Однако оказывается, что матрицу  $\mathbf{R}$  и вектор  $\mathbf{h}$  вычислить нельзя, поскольку они зависят от автоковариаций ошибок  $\mathbf{Q}_{lr}^{kk}$ , которые при неизвестной матрице  $\mathbf{Q}_{ll}$  оценить невозможно. Мы можем вычислить ковариации данных  $\mathbf{Q}_{ks} = \operatorname{cov}(\mathbf{l}_k, \mathbf{l}_s)$  и образовать из них матрицу  $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_{ks}]$ . Если теперь вычислить обратную матрицу этих ковариаций  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{\breve{Q}} = [\mathbf{\breve{Q}}_{ks}]$ , то оценку  $\hat{\mathbf{t}}$  можно получить методом обобщенного среднего, изложенным в §7 гл. 3. В соответствии с формулой (3.105), адаптированной к принятым выше обозначениям, имеем

$$\hat{\mathbf{t}} = \left[\sum_{k=1}^{M} \sum_{s=l}^{M} \bar{\mathbf{Q}}_{ks}\right]^{-1} \left[\sum_{k=l}^{M} \sum_{s=l}^{M} \bar{\mathbf{Q}}_{ks} \mathbf{l}_{k}\right].$$

Подставляя в это выражение формулу (4.44), находим

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t} + \left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\mathbf{W}_{ks}\right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\mathbf{W}_{ks}\mathbf{r}_{k}\right],$$

откуда видно, что полученная оценка сигнала будет несмещенной, если обобщенное среднее коррелированных ошибок г<sub>к</sub> равно нулю. Такое условие используется обычно при совместной обработке так называемых абсолютных наблюдений, когда не принято делать какие-либо предположения об определяемом сигнале t.

Используя введенные выше обозначения и полагая

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \breve{\mathbf{Q}}_{ks} = \mathbf{J} \, \breve{\mathbf{Q}} \mathbf{J} = \mathbf{S}, \quad \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \breve{\mathbf{Q}}_{ks} \mathbf{l}_{k} = \mathbf{J} \, \breve{\mathbf{Q}} \mathbf{l} = \mathbf{f},$$

находим следующее матричное выражение для формулы обобщенного среднего:

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{J}' \mathbf{\tilde{Q}} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}' \mathbf{\tilde{Q}} \mathbf{I} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{f} \,. \tag{4.55}$$

Апостериорная ковариация этой оценки имеет вид

$$\mathbf{D}_{II} = \mathbf{S}^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \mathbf{\tilde{Q}}_{ks}\right)^{-1}.$$

Выясним теперь, как полученный алгоритм (4.55) согласуется с изложенным выше алгоритмом коллокации (4.52). Для этого рассмотрим взаимные ковариации данных:

$$\mathbf{Q}_{ks} = \operatorname{cov}(\mathbf{l}_k, \mathbf{l}_s) = E\{\mathbf{l}_k\mathbf{l}'_s\} = E\{(\mathbf{t} + \mathbf{r}_k)(\mathbf{t} + \mathbf{r}_s)'\} = E\{\mathbf{t}\mathbf{t}'\} + E\{\mathbf{r}_k\mathbf{t}'\} + E\{\mathbf{r}_k\mathbf{t}'\} + E\{\mathbf{r}_k\mathbf{t}'\}.$$

В сформулированных выше условиях коллокации, когда ошибки r<sub>k</sub> взаимно независимы и не коррелируют с сигналом t, т.e.

$$E\{\mathbf{tr}_{s}'\} = E\{\mathbf{r}_{k}\mathbf{t}'\} = \mathbf{0}, \quad E\{\mathbf{r}_{k}\mathbf{r}_{s}'\} = \begin{cases} \mathbf{Q}_{rr}^{kk} \text{ при } k = s, \\ \mathbf{0} \text{ при } k \neq s, \end{cases}$$

а автоковариационная матрица сигнала  $Q_{II} = E\{tt'\}$  известна, алгоритм обобщенного среднего (4.56) принимает вид

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{f} = (\mathbf{J}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l} =$$

$$= [\mathbf{J}'(\mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{J}')^{-1}\mathbf{J}]^{-1}\mathbf{J}'(\mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{J}')^{-1}\mathbf{l} =$$

$$= [\mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{J} - \mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{Q}_{rr}^{-1} + \mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{J}]^{-1} \times$$

$$\times [\mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{l} - \mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{Q}_{rr}^{-1} + \mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{l}] =$$

$$= [\mathbf{R} - \mathbf{R}(\mathbf{Q}_{rr}^{-1} + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}]^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{R}(\mathbf{Q}_{rr}^{-1} + \mathbf{R})^{-1}]\mathbf{h} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{h}.$$

Сравнивая это выражение с (4.52), видим, что при одинаковых условиях методы коллокации и обобщенного среднего дают разные алгоритмы объединения временных рядов, а значит, и разные результаты. В методе коллокации матрица  $Q_{II}^{-1}$  используется как матрица регуляризации сигнала (см. §4 гл. 3), в то время как метод обобщенного среднего эту регуляризацию не использует.

#### §5. Интерполяция, фильтрация и прогноз

Рассмотрим вначале задачу фильтрации случайных последовательностей (временных рядов). Пусть дана равноотстоящая последовательность прямых измерений или косвенных оценок некоторой стохастической величины (сигнала) s в виде *N*-мерного вектора  $l = (l_i)$  (i = 1, 2, ..., N). Будем считать, что сигнал s проявляется в этих данных в виде *N*-мерного вектора t, смещанного со случайными коррелированными ошибками  $\mathbf{r} = (r_i)$ , т.е.

$$\mathbf{l} = \mathbf{t} + \mathbf{r}.\tag{4.56}$$

Требуется из данных l выделить сигнальную часть t, т.е. отфильтровать шум r.

Если сигнал и шум между собой не коррелированы и а priori известна автоковариационная матрица шума  $Q_{rr}$ , то эта задача решается с помощью второго варианта основной формулы СКК (4.50), которая при s = t принимает вид, аналогичный (4.51):

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{I}, \qquad (4.57)$$

где  $\mathbf{Q}_{ll}$  – автоковариационная матрица данных размером  $N \times N$ . Если рассматриваемый временной ряд данных  $\mathbf{l} = (l_i)$  (i = 1, 2, ..., N) является равноотстоящим, стационарным и эргодическим, то его ковариационная матрица  $\mathbf{Q}_{ll}$  является теплицевой и для ее вычисления достаточно найти автоковариационную функцию данного ряда  $q_l(\tau)$ , так как элементы  $q_{ij}$  этой матрицы в этом случае будут равны  $q_{ij} = q(|\tau_{ij}|)$ . Вычислив таким образом матрицу  $\mathbf{Q}_{ll}$ , по формуле (4.49) находим ковариационную матрицу искомого сигнала

$$\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{rr}.\tag{4.58}$$

Апостериорные ковариации **D**<sub>11</sub> выделенного сигнала  $\hat{t}$  определяются формулой, аналогичной (4.41):

$$\mathbf{D}_{ll} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{Q}_{ll}.$$
(4.59)

В рассмотренном случае шум г является коррелированным (иногда говорят – "цветным") и для его фильтрации необходимо знать а priori матрицу  $Q_{rr}$ . Если же мы имеем дело с некоррелированным белым шумом  $\mathbf{r} = \mathbf{n}$ , то модель данных (4.56) принимает вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{t} + \mathbf{n}. \tag{4.60}$$

В этом случае задача выделения сигнала t называется задачей  $\phi$  ильтрации белого шума и для ее решения не требуется никакой априорной информации. Действительно, при s = t матрицы  $Q_{sl}$  и  $Q_{ll}$  в (4.50) равны

$$\mathbf{Q}_{ll} = G\{\mathbf{tl'}\} = G\{\mathbf{tt'}\} + G\{\mathbf{tn'}\} = G\{\mathbf{tt'}\} = \mathbf{Q}_{ll},$$
$$\mathbf{Q}_{ll} = G\{\mathbf{ll'}\} = G\{\mathbf{tt'}\} + G\{\mathbf{nn'}\} = \mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{Q}_{nn},$$

поэтому формулы фильтрации (4.57) и (4.59) сохраняют свой вид, но в них в силу специфики белого шума вместо (4.58) имеем

$$\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{nn} = \mathbf{Q}_{ll} - \sigma_n^2 \mathbf{I}, \qquad (4.61)$$

где  $N \times N$ -матрица автоковариаций белого шума  $\mathbf{Q}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$  зависит только от его дисперсии  $\sigma_n^2$ . В §4 гл. 7 будет подробно показано, как оценить дисперсию  $\sigma_n^2$ , а значит, и матрицу  $\mathbf{Q}_{nn}$  по скачку автоковариационной функции данных  $q_l(\tau)$  в точке  $\tau = 0$ , после чего матрица автоковариаций сигнала  $\mathbf{Q}_{n}$  легко находится по формуле (4.61).

В описанном выше процессе фильтрации сигнал t оценивался для тех же моментов времени, для которых был задан вектор l. Однако особенностью метода СКК является возможность оценить такой сигнал s, который существует и вне области задания данных. При i=1,2,...,N он совпадает c t, a при i=N+1, N+2,...,N+M является его прогнозом (см. выражение (4.45)). Для этого необходимо знать лишь автоковариационную функцию сигнала  $q_s(\tau)$ .

Обозначим продолжение (прогноз) сигнала t через f и будем считать длину этого вектора равной M, так что  $f_1 = t_{N+1}, f_2 = t_{N+2}, ..., f_M = t_{N+M}$ . Тогда, согласно основной формуле коллокации (4.40), имеем выражение для одновременного оценивания векторов t и f:

$$\hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tl} \\ \mathbf{Q}_{fl} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tl} \\ \mathbf{Q}_{fl} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{I}.$$
(4.62)

Здесь  $Q_{ii}$  есть уже знакомая нам  $N \times N$ -матрица автоковариаций сигнала t, имеющего длину N, а  $Q_{fi}$  есть  $M \times N$ -матрица ковариаций прогноза и сигнала. По сути дела эта матрица является продолжением "вниз" симметричной матрицы  $Q_{ii}$ , так что обе они являются блоками единой теплицевой матрицы  $Q_{sl} = Q_{si}$  размером  $(N+M) \times N = p \times N$ , которую можно построить с помощью одной и той же ковариационной функции сигнала  $q_i(\tau)$ .

Выделяя из (4.62) процесс прогноза и используя (4.57), находим

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{Q}_{fl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{Q}_{fl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \hat{\mathbf{t}}, \qquad (4.63)$$

т.е. этот процесс может использовать как "сырые" данные наблюдений l, так и выделенный из них сигнал t. Внутреннюю точность этого прогноза можно оценить по общей формуле апостериорных ковариаций (4.30), которая в случае модели сигнала (4.62) принимает вид

$$\mathbf{D}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{tt} & \mathbf{D}_{tf} \\ \mathbf{D}_{ft} & \mathbf{D}_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tt} & \mathbf{Q}_{tf} \\ \mathbf{Q}_{ft} & \mathbf{Q}_{ff} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tt} \\ \mathbf{Q}_{ft} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tt} & \mathbf{Q}_{tf} \end{bmatrix}$$

откуда

$$\mathbf{D}_{ff} = \mathbf{Q}_{ff} - \mathbf{Q}_{fl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{Q}_{lf},$$

где Q<sub>ff</sub> – априорная автоковариационная матрица прогнозируемой части сигнала.

Из сравнения формул (4.57) и (4.63) видно, что для фильтрации данных необходимо знать максимум N первых значений автоковариационной функции искомого сигнала, в то время как для его прогноза – еще как минимум М ее значений. Таким образом, для прогноза сигнала необходим прогноз его ковариационной функции. В тех случаях, когда такой прогноз невозможен, применяются другие методы стохастического прогноза, основанные, например, на авторегрессии [5]. Однако в нашем распоряжении обычно имеются результаты предыдущих оценок сигнала (его "предыстория"), и поэтому мы имеем возможность оценить априорную ковариационную функцию нужной длины. Но при этом мы должны быть уверены, что статистические свойства сигнала, а именно его матожидание и автоковариационная функция, являются неизменными. Иначе говоря, метод СКК имеет дело со стационарными сигналами. Наиболее удобным методом прогноза эмпирических оценок автоковариационных функций является их аппроксимация параметрической моделью. Этот метод будет подробно описан в главе 7.

### §6. Коллокация с параметрами

Реальные данные наблюдений I кроме стохастических сигналов t и ошибок наблюдений r, как правило, содержат еще и систематические компоненты (тренды), которые можно представить линейной моделью a = Ax с постоянными параметрами x. Таким образом, обобщенная линейная модель данных наблюдений имеет вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t} + \mathbf{r}, \tag{4.64}$$

где  $l = N \times 1$ -вектор данных,  $x = m \times 1$ -вектор неизвестных постоянных параметров,  $A = N \times m$ -матрица коэффициентов (частных производных  $\partial l / \partial x$ ), t =стохастический вектор длиной N, представляющий собой "сигнальную часть" данных,  $r = N \times 1$ -вектор "шума" – квазислучайных (коррелированных) ошибок наблюдений и невязок модели данных.

Введем в модель (4.64) дискретно заданную совокупность случайных величин, образующих вектор стохастического "сигнала"  $s = (s_1, s_2, ..., s_p)$  произвольной длины *p*. Будем считать, что векторы t и s связаны между собой линейно, т.е.

$$\mathbf{t} = \mathbf{U}\mathbf{s}.\tag{4.65}$$

Если компоненты сигнала представляют собой последовательность  $s_1, s_2, \ldots, s_p$  (p > N), упорядоченную по времени или по какойлибо другой переменной, то матрица U в общем случае имеет блочный вид

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix},\tag{4.66}$$

где **D** – диагональная  $N \times N$ -матрица, составленная из производных  $\partial l_i / \partial t_i$  (i = 1, 2, ..., N), **0** – нулевая матрица размером  $N \times (p - N)$ . Если же компоненты сигнала **s** образуют некоторое ограниченное *множе*ство случайных величин, действующих на результаты наблюдений одновременно, то

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{Np} \end{bmatrix}$$
(4.67)

есть полная  $N \times p$ -матрица частных производных  $\partial l_i / \partial s_i$  (i = 1, 2, ..., N;

j = 1, 2, ..., p). Подставляя (4.65) в (4.64), получаем модель коллокации с параметрами

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r}, \qquad (4.68)$$

которая содержит сигнал s в явном виде. На рис. 4.2 представлена геометрическая интерпретация модели (4.68) для случая, когда сигнал s представляет собой временную последовательность, непосредственно влияющую на данные наблюдений, т.е.  $U = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ . Такая модель отличается от модели коллокации без параметров, показанной на рис. 4.1, только наличием систематического тренда **Ах.** 





В соответствии с (4.65), автоковариационная матрица сигнальной части данных наблюдений имеет вид

$$\mathbf{Q}_{II} = \mathbf{U}\mathbf{Q}_{ss}\mathbf{U}',\tag{4.69}$$

где  $Q_{ss}$  – известная а priori ковариационная матрица сигнала размером  $p \times p$ .

Как уже говорилось, сигнал s может иметь произвольный размер p. Если это временная последовательность, то p означает ее длину, если же это множество, то p есть количество элементов этого множества. Любое ограничение на величину p не является принципиальным, и оно связано только с одним обстоятельством – знанием априорной автоковариационной функции (матрицы) сигнала. Чем больше значений этой функции мы знаем, тем больший размер будет иметь матрица  $Q_{ss}$  и тем больше сигналов  $s_j$  (j = 1, 2, ..., p) можно оценить методом СКК. Будем в дальнейшем считать, что случайные векторы s и r независимы и центрированы. Тогда по аналогии с (4.47)–(4.49) имеем

$$M{s} = 0, E{s} = s, G{s} = 0,$$
  
 $M{r} = r, E{r} = 0, G{r} = 0.$ 

Тогда

$$\mathbf{Q}_{ss} = G\{\mathbf{ss'}\} = M\{\mathbf{ss'}\}, \quad \mathbf{Q}_{rr} = G\{\mathbf{rr'}\} = E\{\mathbf{rr'}\}, \\ \mathbf{Q}_{sr} = G\{\mathbf{sr'}\} = E\{M\{\mathbf{sr'}\}\} = M\{\mathbf{s}\}E\{\mathbf{r'}\} = \mathbf{0}.$$

Имея N данных l и указанные выше ковариации  $Q_{ss}$  и  $Q_{rr}$ , требуется оценить все неизвестные параметры модели (4.55), т.е. m компонент вектора х и p компонент вектора s – всего p+m величин. Такую задачу называют средней квадратической коллокацией с параметрами, или смешанной задачей оценивания.

Подобная задача уже рассматривалась в теории ОМНК (см. § 2 и 4 гл.3). Фактически она сводится к уравниванию модели (4.68) с мягкими условиями:

$$l = Ax + Us + r, \quad cov(r, r) = Q_{rr},$$
  

$$s = s, \qquad cov(s, s) = Q_{sr}.$$
(4.70)

По аналогии с (3.8) образуем составные векторы и матрицы

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{zz} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz} \end{bmatrix}.$$
(4.71)

Тогда модель (4.70) можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{h} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{s} + \mathbf{z}, \quad \operatorname{cov}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \mathbf{Q}_{zz}. \tag{4.72}$$

В этой модели сигналы  $s = (s_1, s_2, ..., s_p)$  выступают в роли определяемых параметров и одновременно входят в состав нового вектора невязок z. Если сигналы s и невязки r центрированы и распределены нормально, то и новые невязки z тоже будут центрированы и распределены нормально с плотностью вероятности (см. §2 гл. 2)

$$L(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathbf{Q}_{zz}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\mathbf{z}\right\}.$$

Учитывая независимость векторов r и s, согласно последней из формул (4.71), имеем

$$\mathbf{Q}_{zz}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{zz}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \end{bmatrix},$$

поэтому условие максимального правдоподобия оценок параметров модели (4.72) приводит к условию минимума квадратичной формы невязок этой модели

$$R_z = \hat{\mathbf{z}}' \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{s}}' \mathbf{Q}_{ss}^{-1} \hat{\mathbf{s}} = R_r + R_s = \min.$$
(4.73)

Дифференцирование квадратичной формы (4.73) по всем параметрам модели (4.72) с использованием правил векторно-матричного дифференцирования (2.16) и учетом обозначений (4.70)–(4.72) дает

$$\frac{\partial R_z}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}},\,\mathbf{s}=\hat{\mathbf{s}}} = -\mathbf{A}'\mathbf{Q}_{\prime\prime}^{-1}\mathbf{l} + \mathbf{A}'\mathbf{Q}_{\prime\prime}^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}'\mathbf{Q}_{\prime\prime}^{-1}\mathbf{U}\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial R_z}{\partial \mathbf{s}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}},\mathbf{s}=\hat{\mathbf{s}}} = -\mathbf{U}'\mathbf{Q}_{\prime\prime}^{-1}\mathbf{l} + \mathbf{U}'\mathbf{Q}_{\prime\prime}^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{U}'\mathbf{Q}_{\prime\prime}^{-1}\mathbf{U}\hat{\mathbf{s}} + \mathbf{Q}_{ss}^{-1}\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0},$$

что можно записать в виде двухгрупповой системы матричных уравнений вида (2.63)

$$V_{xx}\hat{\mathbf{x}} + V_{xs}\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{h}_{x},$$
  

$$V_{sx}\hat{\mathbf{x}} + V_{ss}\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{h}_{s},$$
(4.74)

где

$$\mathbf{h}_{x} = \mathbf{A}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{I}, \ \mathbf{h}_{s} = \mathbf{U}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{I},$$

$$\mathbf{V}_{xx} = \mathbf{A}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{A}, \ \mathbf{V}_{xs} = \mathbf{V}_{sx}' = \mathbf{A}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{U}, \ \mathbf{V}_{ss} = \mathbf{U}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{Q}_{ss}^{-1}.$$
(4.75)

Учитывая обозначения (4.66) и (4.67), видим, что *р*×*р*-матрица

$$\mathbf{V}_{ss} = \mathbf{U}'\mathbf{Q}_{ss}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{Q}_{ss}^{-1}$$

является неособенной, поэтому для решения системы нормальных уравнений (4.74) можно применить метод исключения (см. §5 гл. 2). Из первого уравнения системы (4.74) находим

$$(\mathbf{V}_{xx} - \mathbf{V}_{xs}\mathbf{V}_{ss}^{-1}\mathbf{V}_{sx})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{h}_{x} - \mathbf{V}_{xs}\mathbf{V}_{ss}^{-1}\mathbf{h}_{s}.$$

Обозначая

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}_{rr}^{-1} - \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{V}_{ss}^{-1} \mathbf{U}' \mathbf{Q}_{rr}^{-1}$$
(4.76)

и подставляя сюда выражения (4.75), находим вектор постоянных параметров

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{I}.$$
 (4.77)

Теперь из второго уравнения (4.74) получаем оценку сигнала

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{V}_{ss}^{-1}(\mathbf{h}_s - \mathbf{V}_{sx}\hat{\mathbf{x}}).$$

Подставляя сюда (4.75) и принимая во внимание (4.76), (4.69) и (2.71), имеем

$$Q = Q_{rr} + UQ_{ss}U' = Q_{rr} + Q_{ll}, \qquad (4.78)$$

после несложных преобразований находим

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{Q}_{st}(\mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{Q}_{tl})^{-1}\mathbf{Q}_{ts})\mathbf{U}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.79)$$

где

$$\mathbf{Q}_{st} = \mathbf{Q}_{st} \mathbf{U}'. \tag{4.80}$$

Найдем теперь оценки невязок г. Учитывая (4.77) и (4.79), получаем из (4.68)

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{rr}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}).$$
(4.81)

Группа формул (4.77)-(4.81) полностью решает задачу смешанного оценивания. Выпишем эти формулы совместно:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{I},$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{st}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{tt}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}_{rr}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{rr}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{Q}_{r$$

Из этих формул следуют также соотношения:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{st} \mathbf{Q}_{tt}^{-1} \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{st} \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \hat{\mathbf{r}},$$
  

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{U} \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{tt} \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \hat{\mathbf{r}},$$
  

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}_{rr} \mathbf{Q}_{u}^{-1} \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{rr} \mathbf{Q}_{u}^{-1} \mathbf{U} \hat{\mathbf{s}}.$$
(4.83)
Модель данных вида (4.70) с мяткими условиями является моделью ОМНК, так как она позволяет оценить все параметры этой модели, не выходя за рамки метода максимального правдоподобия. Но поскольку эта модель позволяет наряду с постоянными параметрами х оценивать и сигналы s, то она одновременно является и моделью коллокации. Действительно, при отсутствии постоянных параметров и при единичной матрице U третья формула (4.82) дает оценку сигнала

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{tt} (\mathbf{Q}_{tt} + \mathbf{Q}_{tt})^{-1} \mathbf{I},$$

которая полностью совпадает с формулой СКК-фильтрации (4.56).

Попробуем теперь получить оценки постоянных параметров и сигналов модели (4.68), не прибегая к мягким условиям, а значит, и к универсальной модели (4.70). Представим модель (4.68) в виде

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w},\tag{4.84}$$

где в качестве невязок введена линейная комбинация случайных векторов

$$\mathbf{w} = \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r} = \mathbf{t} + \mathbf{r} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x} \, .$$

Будем, как обычно, считать, что модель (4.71) является полной, а компоненты случайных векторов г и s центрированы и нормально распределены. Тогда невязки w также будут распределены нормально с плотностью вероятности [38, с. 54–55; 8, с. 381]

$$L(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathbf{Q}_{ww}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{w}' \mathbf{Q}_{ww}^{-1} \mathbf{w}\right\},\,$$

где

$$\mathbf{Q}_{\textit{\tiny VVW}} = \mathbf{Q}_{\textit{\tiny II}} = \mathbf{Q}_{\textit{\tiny II}} + \mathbf{Q}_{\textit{\tiny rr}} = \mathbf{U}\mathbf{Q}_{\textit{\tiny SS}}\mathbf{U}' + \mathbf{Q}_{\textit{\it rr}} = \mathbf{Q}.$$

Очевидно, что при заданных а priori ковариациях Q<sub>33</sub> и Q<sub>11</sub> максимум функции правдоподобия L(w) достигается при условии

$$R_{\mathbf{w}} = \mathbf{w}' \mathbf{Q}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}^{-1} \mathbf{w} = (\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x})' \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \min.$$
(4.85)

Раскрывая этот экстремум, находим

$$\frac{\partial R_{w}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

откуда получаем оценку постоянных параметров

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l},$$

которая в точности совпадает с первой из формул (4.82).

Однако, как легко убедиться, условие (4.85) не позволяет прямо оценить сигнал s, так как последний не входит в число параметров модели (4.84), а является лишь одной из составляющих вектора невязок w. Оценка этого вектора имеет вид

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}.$$

Чтобы выделить из него сигнал s, воспользуемся формулой фильтрации (4.57):

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{II}\mathbf{Q}_{ww}^{-1}\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{Q}_{II}\mathbf{Q}^{-1}\hat{\mathbf{w}},$$

откуда, учитывая (4.65) и (4.69), находим

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}' \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}),$$

что полностью совпадает со второй из формул (4.82).

Таким образом, только линейная модель данных с мяткими условиями вида (4.70) является универсальной моделью ОМНК в том смысле, что она позволяет рассматривать среднюю квадратическую коллокацию с параметрами как частный случай оценивания обобщенным методом наименьших квадратов. Если такой моделью не пользоваться, то стохастический сигнал методом ОМНК оценить невозможно, его приходится специально выделять из невязок путем их фильтрации. Впрочем, это замечание относится лишь к области методологии и практического значения не имеет, так как оба подхода приводят к одним и тем же формулам оценивания.

Пусть теперь на данные наблюдений одновременно влияют не один, а несколько разноименных стохастических параметров (сигналов) s<sub>1</sub>, s<sub>2</sub>,..., s<sub>M</sub>, каждый из которых имеет длину *p*. Тогда вместо (4.68) имеем следующую линейную модель:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{M} \mathbf{U}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{r}.$$
 (4.86)

Обозначим априорные ковариации между сигналами  $\mathbf{s}_k$  и  $\mathbf{s}_j$  через  $\mathbf{Q}_{ss}^{kj}$  (k, j = 1, 2, ..., M) и введем составной вектор-столбец  $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_M)$  длиной pM и блочные матрицы

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \dots & \mathbf{U}_M \end{bmatrix}, \tag{4.87}$$

$$\mathbf{Q}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ss}^{11} & \mathbf{Q}_{ss}^{12} & \mathbf{Q}_{ss}^{1M} \\ \mathbf{Q}_{ss}^{21} & \mathbf{Q}_{ss}^{22} & \mathbf{Q}_{ss}^{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{ss}^{M1} & \mathbf{Q}_{ss}^{M2} & \cdots & \mathbf{Q}_{ss}^{MM} \end{bmatrix}.$$
(4.88)

Тогда систему уравнений (4.86) можно привести к стандартному виду (4.68), и поэтому процедура оценивания параметров ничем не будет отличаться от описанной выше. При этом важно отметить, что размерность обращаемой матрицы Q не зависит от числа стохастических параметров M и всегда равна  $N \times N$ . Действительно, пользуясь обозначениями (4.87)–(4.88), получаем  $N \times N$ -матрицу

$$\mathbf{Q}_{tt} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \mathbf{U}_k \mathbf{Q}_{ss}^{kj} \mathbf{U}_j',$$

откуда и следует, что матрица Q, определяемая формулой (4.78), имеет тот же размер.

Докажем теперь, что условие (4.73) действительно выполняется при найденных оценках параметров [41, с. 95]. Рассмотрим случайный вектор

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что оценки х̂и ẑ удовлетворяют уравнению (4.68), которое принимает вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\,\hat{\mathbf{z}}\,,\tag{4.89}$$

где  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{U} \end{bmatrix} -$ блочная матрица.

Рассмотрим теперь любые другие оценки  $\bar{x}$  и  $\bar{z}$ , которые также удовлетворяют этому уравнению:

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\overline{\mathbf{z}} \,. \tag{4.90}$$

Положим

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{\hat{x}} + \mathbf{x}_1, \quad \overline{\mathbf{z}} = \mathbf{\hat{z}} + \mathbf{z}_1.$$

Тогда, вычитая из обеих частей уравнения (4.89) соответствующие части уравнения (4.90), получим

$$Ax_{1} + Cz_{1} = 0. (4.91)$$

Составим теперь квадратичную форму

$$\vec{z}' \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \vec{z} = (\hat{z} + z_1)' \mathbf{Q}_{zz}^{-1} (\hat{z} + z_1) =$$
  
=  $\hat{z}' \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \hat{z} + \hat{z}' \mathbf{Q}_{zz}^{-1} z_1 + z_1' \mathbf{Q}_{zz}^{-1} \hat{z} + z_1' \mathbf{Q}_{zz}^{-1} z_1$  (4.92)

и докажем, что она не может быть меньше квадратичной формы (4.73), т.е.

$$\overline{\mathbf{z}}'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}} \ge \hat{\mathbf{z}}'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\hat{\mathbf{z}}.$$
(4.93)

Сначала убедимся, что в (4.92)

$$\hat{\mathbf{z}}'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\hat{\mathbf{z}} = 0.$$
 (4.94)

Действительно, в силу независимости г и ѕ имеем

$$\mathbf{Q}_{zz}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rr}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{ss}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Теперь, пользуясь (4.80) и (4.82), находим

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{C}' \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}),$$

и поэтому

$$\mathbf{z}_{1}'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\hat{\mathbf{z}}=\mathbf{z}_{1}'\mathbf{C}'\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{l}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}).$$

Из уравнения (4.91) следует, что  $z'_iC' = -x'_iA'$ , откуда, учитывая первую из формул (4.82), получаем

$$z'_{l}Q_{zz}^{-1}\hat{z} = -x'_{l}A'Q^{-1}(l-A\hat{x}) = -x'_{l}A'Q^{-1}(l-A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}l) =$$
  
= -x'\_{l}(A'Q^{-1}l-A'Q^{-1}A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}l) = 0,

что и доказывает равенства (4.94). Теперь формулу (4.92) можно записать в следующем виде:

$$\overline{\mathbf{z}}'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\overline{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{z}_1'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\mathbf{z}_1.$$

Из положительной определенности матриц  $Q_{ss}$  и  $Q_{rr}$  следует положительная определенность матрицы  $Q_{zz}^{-1}$ , поэтому любая порождаемая ею квадратичная форма положительна. По этой причине имеем  $z'_{1}Q_{zz}^{-1}z_{1} \ge 0$ , откуда сразу следует (4.93).

Наконец, рассмотрим задачу фильтрации и прогноза временных рядов для модели колдокации с параметрами. Пусть случайный сигнал s представляет собой случайную последовательность (временной ряд) произвольной длины p. Обозначим значения этого сигнала в моменты наблюдений вектором  $\mathbf{t} = (t_i)$  (i = 1, 2, ..., N) длиной N, а его продолжение в будущее (прогноз) – вектором **f** длиной (p - N). Тогда модель коллокации с параметрами (4.68) можно записать в виде

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} + \mathbf{r},$$

где **D** – произвольная диагональная матрица частных производных  $\partial l_i / \partial t_i$  (*i* = 1, 2, ..., *N*), **0** – нулевая матрица размером  $N \times (p - N)$ . Обозначая

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix},$$

приходим к общей модели коллокации с параметрами вида (4.68):

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r} \,.$$

Если полная ковариационная матрица сигнала

$$\mathbf{Q}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ll} & \mathbf{Q}_{lf} \\ \mathbf{Q}_{fl} & \mathbf{Q}_{ff} \end{bmatrix}$$

известна, то для его оценки (фильтрации и прогноза) можно воспользоваться общей формулой (4.79):

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{st} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}).$$

Используя введенные выше обозначения, находим

$$\mathbf{Q}_{st} = \mathbf{Q}_{ss}\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1t} & \mathbf{Q}_{tf} \\ \mathbf{Q}_{ft} & \mathbf{Q}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tt}\mathbf{D}' \\ \mathbf{Q}_{ft}\mathbf{D}' \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{U}\mathbf{Q}_{ss}\mathbf{U}' + \mathbf{Q}_{rr} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tt}\mathbf{D}' \\ \mathbf{Q}_{ft}\mathbf{D}' \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_{rr} = \mathbf{D}\mathbf{Q}_{tt}\mathbf{D}' + \mathbf{Q}_{rr},$$

поэтому

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{tt} \mathbf{D}' \\ \mathbf{Q}_{ft} \mathbf{D}' \end{bmatrix} (\mathbf{D} \mathbf{Q}_{tt} \mathbf{D}' + \mathbf{Q}_{rr})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}).$$
(4.95)

Если сигнал действует на данные наблюдений непосредственно, то

$$\mathbf{D} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{Q}_{ll}$$

и тогда

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{II} \\ \mathbf{Q}_{fI} \end{bmatrix} (\mathbf{Q}_{II} + \mathbf{Q}_{II})^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}).$$

Последняя формула отличается от (4.62) только тем, что вектор данных I предварительно центрируется поправкой  $A\hat{x}$ , причем оценка постоянных параметров х по-прежнему находится по первой из формул (4.82).

### §7. Свойства коллокационных оценок

Исследуем вначале основное свойство СКК-оценок – их несмещенность – и покажем, как оно связано с алгебраической формой самих оценок. Для этого рассмотрим смешанную модель данных вида (4.64):

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{Q}_{\prime\prime\prime}, \mathbf{Q}_{ss}. \tag{4.96}$$

Введем произвольные линейные оценки параметров этой модели вида

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{I} + \mathbf{a},\tag{4.97}$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{N}\mathbf{l} + \mathbf{b}.\tag{4.98}$$

Здесь I – N-мерный вектор данных, х – m-мерный вектор постоянных параметров, s – p-мерный вектор стохастического сигнала,  $M - m \times N$ -матрица, a – m-мерный вектор,  $N - p \times N$ -матрица, b – p-мерный вектор. Предполагается, что матрицы M и N, а также векторы a и b не зависят от данных l.

Естественно потребовать, чтобы эти оценки удовлетворяли тем же уравнениям (4.83), что и истинные значения, поэтому имеем

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{U}\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{r}}.$$
 (4.99)

Истинные значения параметров модели (4.96) являются неслучайными величинами, причем, как и ранее (см. §4 наст. гл.), будем считать, что истинный вектор стохастических сигналов s центрирован. Тогда, используя свойства обобщенного матожидания (4.69), имеем

$$G\{\mathbf{x}\} = \mathbf{x}, \ G\{\mathbf{s}\} = \mathbf{0}, \ G\{\mathbf{r}\} = \mathbf{0}.$$
 (4.100)

Подставляя (4.96) в (4.98), находим

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{N}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r}) + \mathbf{b}.$$

Потребуем теперь, чтобы эта оценка была несмещенной, тогда с учетом (4.100) получим

$$G\{\mathbf{\hat{s}}\} = \mathbf{NAx} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Вектор b не может зависеть от неизвестного вектора x, поэтому последнее равенство будет всегда справедливо, только если

$$NA = 0, b = 0.$$
 (4.101)

Таким образом, требование несмещенности оценок ŝ приводит к условию (4.101). Действуя подобным же образом, подставим выражение (4.96) в формулу (4.97):

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r}) + \mathbf{a}$$
.

Вспомним теперь свойства простого матожидания (см. формулы (4.69)):

$$E\{x\} = x, E\{s\} = 0, E\{r\} = 0$$

и потребуем, чтобы оценка х тоже была несмещенной, тогда

$$E\{\hat{\mathbf{x}}\} = \mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a},$$

откуда опять в силу независимости векторов х и а находим

$$MA = I, a = 0.$$
 (4.102)

Итак, согласно (4.97)--(4.98) и (4.101)--(4.102), несмещенными оценками будут

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M} \mathbf{I} \quad \mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{4.103}$$

$$\hat{s} = NI \text{ при } NA = 0.$$
 (4.104)

Заметим теперь, что при произвольной *p* × *N* -матрице Н выполняется соотношение

$$\mathbf{N} = \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{M}), \tag{4.105}$$

для которого автоматически выполняется условие (4.104). Действительно, поскольку, согласно (4.103), MA = I, то

$$\mathbf{N}\mathbf{A} = \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{A}(\mathbf{M}\mathbf{A}) = \mathbf{H}\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Отсюда следует, что, согласно формуле (4.103), оценка (4.104) принимает вид

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{N}\mathbf{l} = \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{l} = \mathbf{H}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{l}) = \mathbf{H}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}).$$

Таким образом, мы нашли, что условие несмещенности приводит к следующему общему виду линейных оценок:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M} \mathbf{I}, \tag{4.106}$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}), \tag{4.107}$$

где H – любая  $p \times N$ -матрица, а  $m \times N$ -матрица M должна удовлетворять условию

$$\mathbf{MA} = \mathbf{I}.\tag{4.108}$$

Сравнивая эти оценки с оценками СКК (4.82), находим

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}, \qquad (4.109)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}' \mathbf{Q}^{-1}, \qquad (4.110)$$

$$N = Q_{ss}U'Q^{-1}[I - A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}], \qquad (4.111)$$

откуда видно, что условие (4.108) выполняется.

-151-

Рассмотрим теперь вопрос о точности несмещенных линейных оценок. Истинные ощибки этих оценок с учетом (4.108) равны

$$\mathbf{e}_{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{I} - \mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r}) - \mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{w}, \qquad (4.112)$$

$$e_s = \hat{s} - s = Nl - s = N(Ax + Us + r) - s = Nw - s,$$
 (4.113)

где для краткости обозначено

$$w = Us + r.$$
 (4.114)

Ковариации этих ошибок равны

$$\mathbf{D}_{xx} = G\{\mathbf{e}_{x}\,\mathbf{e}_{x}'\} = G\{\mathbf{M}\mathbf{w}\mathbf{w}'\mathbf{M}'\},\tag{4.115}$$

$$\mathbf{D}_{ss} = G\{\mathbf{e}_{s}\mathbf{e}_{s}'\} = G\{(\mathbf{Nw} - \mathbf{s})(\mathbf{Nw} - \mathbf{s})'\} = G\{\mathbf{Nww'N'} - \mathbf{Nws'} - \mathbf{sw'N'} + \mathbf{ss'}\}.$$
(4.116)

Принимая во внимание, что векторы s и r независимы, вспоминая, что  $G\{rr'\} = Q_{rr}$  и  $G\{ss'\} = Q_{ss}$ , и учитывая формулы (4.78) и (4.114), находим

$$G\{\mathbf{ws'}\} = G\{(\mathbf{Us} + \mathbf{r})\mathbf{s'}\} = G\{\mathbf{Uss'} + \mathbf{rs'}\} = \mathbf{UQ}_{ss} = \mathbf{Q}_{u},$$
$$G\{\mathbf{sw'}\} = G\{\mathbf{s}(\mathbf{Us} + \mathbf{r})'\} = G\{\mathbf{ss'U'} + \mathbf{sr'}\} = \mathbf{Q}_{ss}\mathbf{U'} = \mathbf{Q}_{st},$$
$$G\{\mathbf{ww'}\} = G\{(\mathbf{Us} + \mathbf{r})(\mathbf{Us} + \mathbf{r})'\} = G\{\mathbf{Uss'U'} + \mathbf{Usr'} + \mathbf{rs'U'} + \mathbf{rr'}\} = G\{\mathbf{ws'}\} = G\{(\mathbf{us} + \mathbf{r})(\mathbf{us} + \mathbf{r})'\} = G\{\mathbf{uss'U'} + \mathbf{usr'} + \mathbf{rs'U'} + \mathbf{rr'}\} = G\{\mathbf{uss'U'} + \mathbf{usr'} + \mathbf{usr'} + \mathbf{usr'}\} = G\{\mathbf{uss'U'} + \mathbf{usr'} + \mathbf{usr'}\} = G\{\mathbf{uss'U'} + \mathbf{usr'}\} = G\{\mathbf{uss'$$

$$= \mathbf{U}\mathbf{Q}_{ss}\mathbf{U}' + \mathbf{Q}_{rr} = \mathbf{Q}_{tt} + \mathbf{Q}_{rr} = \mathbf{Q}.$$

Подставляя эти формулы в (4.115) и (4.116), получаем

$$\mathbf{D}_{xx} = \mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}',\tag{4.117}$$

$$D_{ss} = Q_{ss} + NQN' - NUQ_{ss} - Q_{ss}U'N'.$$
(4.118)

Остается получить взаимные ковариации постоянных параметров и сигнала:

$$\mathbf{D}_{xs} = G\{\mathbf{e}_{x}\mathbf{e}_{s}'\} = G\{\mathbf{Mw}(\mathbf{Nw} - \mathbf{s})'\} =$$
$$= G\{\mathbf{Mww}'\mathbf{N}' - \mathbf{Mws}'\} = \mathbf{M}(\mathbf{QN}' - \mathbf{UQ}_{ss}). \tag{4.119}$$

Таковы апостериорные ковариации несмещенных линейных оценок. Подставляя в формулы (4.117)-(4.119) выражения (4.105), (4.109)-(4.111), находим соответствующие ковариации СКК-оценок:

$$\mathbf{D}_{xx} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1},$$

$$D_{ss} = Q_{ss} + Q_{ss}U'Q^{-1}[I - A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}]Q[I - Q^{-1}A(A'Q^{-1}A)^{-1}A']Q^{-1}UQ_{ss} - Q_{ss}U'Q^{-1}[I - A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}]UQ_{ss} - Q_{ss}U'[I - Q^{-1}A(A'Q^{-1}A)^{-1}A']Q^{-1}UQ_{ss}.$$

Замечая, что матрица  $[I - A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}]$  идемпотентна, имеем далее

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ss} &= \mathbf{Q}_{ss} + \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}' \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1}]^2 \mathbf{U} \mathbf{Q}_{ss} - \\ &- \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}' \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1}] \mathbf{U} \mathbf{Q}_{ss} - \\ &- \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}' [\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}'] \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{Q}_{ss} = \\ &= \mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}' \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1}] \mathbf{U} \mathbf{Q}_{ss} = \\ &= \mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{N} \mathbf{U} \mathbf{Q}_{ss} = (\mathbf{I} - \mathbf{N} \mathbf{U}) \mathbf{Q}_{ss}. \end{aligned}$$

Взаимные ковариации параметров и сигнала равны

$$D_{xs} = M(QN' - UQ_{ss}) =$$

$$= M[Q(I - Q^{-1}A(A'Q^{-1}A)^{-1}A')Q^{-1}UQ_{ss} - UQ_{ss}] =$$

$$= M[(I - A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1})UQ_{ss} - UQ_{ss}] =$$

$$= -(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}[A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}UQ_{ss}] =$$

$$= -(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}UQ_{ss} = -MUQ_{ss} = -D_{xx}A'Q^{-1}UQ_{ss}$$

С учетом выражений (4.69), (4.78) и (4.80) получаем окончательно

$$\mathbf{D}_{xx} = (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1}, \qquad (4.120)$$

$$\mathbf{D}_{ss} = \mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}_{ts} + \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}_{xx} \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}_{ts}, \qquad (4.121)$$

$$\mathbf{D}_{xx} = -\mathbf{D}_{xx}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}_{tx}.$$
 (4.122)

Второй член в (4.121) представляет собой уточнение априорной ковариации  $Q_{ss}$  за счет новых данных наблюдений, а последний выражает влияние ошибок оценивания постоянных параметров. При их отсутствии этот член равен нулю, и тогда

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}=\mathbf{Q}_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}-\mathbf{Q}_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}.$$

Здесь везде матрица Q определяется формулой (4.78).

Действуя подобным образом, получим ковариации невязок модели (4.68). Согласно формулам (4.81), (4.112) и (4.113), имеем

$$\mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{s}}) - (\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{U}\mathbf{s}) =$$
$$= -\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) - \mathbf{U}(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}) = -\mathbf{A}\mathbf{e}_x - \mathbf{U}\mathbf{e}_s,$$

поэтому

$$\mathbf{D}_{rr} = G\{\mathbf{e}_{r}\mathbf{e}_{r}'\} = G\{(\mathbf{A}\mathbf{e}_{x} + \mathbf{U}\mathbf{e}_{s})(\mathbf{A}\mathbf{e}_{x} + \mathbf{U}\mathbf{e}_{s})'\} =$$
  
=  $G\{\mathbf{A}\mathbf{e}_{x}\mathbf{e}_{x}'\mathbf{A}' + \mathbf{A}\mathbf{e}_{x}\mathbf{e}_{s}'\mathbf{U}' + \mathbf{U}\mathbf{e}_{s}\mathbf{e}_{x}'\mathbf{A}' + \mathbf{U}\mathbf{e}_{s}\mathbf{e}_{s}'\mathbf{U}'\} =$   
=  $\mathbf{A}\mathbf{D}_{xx}\mathbf{A}' + \mathbf{A}\mathbf{D}_{xs}\mathbf{U}' + \mathbf{U}\mathbf{D}_{sx}\mathbf{A}' + \mathbf{U}\mathbf{D}_{ss}\mathbf{U}'.$  (4.123)

Подставляя сюда (4.120)-(4.122), находим

$$\mathbf{D}_{tt} = \mathbf{Q}_{tt} - \mathbf{Q}_{tt} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}_{tt} + (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{tt} \mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{A} \mathbf{D}_{xx} \mathbf{A}' (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{tt} \mathbf{Q}^{-1})'.$$
(4.124)

Аналогичным образом получаем

$$\mathbf{D}_{rx} = G\{\mathbf{e}_{r}\mathbf{e}_{x}'\} = G\{(-\mathbf{A}\mathbf{e}_{x} - \mathbf{U}\mathbf{e}_{s})\mathbf{e}_{x}'\} = -\mathbf{A}\mathbf{D}_{xx} - \mathbf{U}\mathbf{D}_{sx}, \qquad (4.125)$$

$$\mathbf{D}_{ss} = G\{\mathbf{e}_{s}, \mathbf{e}_{s}'\} = G\{(-\mathbf{A}\mathbf{e}_{s} - \mathbf{U}\mathbf{e}_{s})\mathbf{e}_{s}'\} = -\mathbf{A}\mathbf{D}_{ss} - \mathbf{U}\mathbf{D}_{ss}.$$
 (4.126)

Подставляя сюда выражения (4.120)-(4.122), находим

$$\mathbf{D}_{rx} = -(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{tt}\mathbf{Q}^{-1})\mathbf{A}\mathbf{D}_{xx}, \qquad (4.127)$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{r}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{tt}\mathbf{Q}^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1})\mathbf{Q}_{ts}.$$
 (4.128)

Докажем теперь, что СКК-оценки наиболее эффективны, т. е. имеют наивысшую точность в классе несмещенных линейных оценок. Выше было показано (см. (4.103)–(4.105)), что несмещенность линейных оценок приводит их к следующему виду:

 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M}, \tag{4.129}$ 

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{N} \mathbf{I} \tag{4.130}$$

$$\mathbf{MA} = \mathbf{I},\tag{4.131}$$

$$NA = 0,$$
 (4.132)

$$\mathbf{N} = \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{M}). \tag{4.133}$$

при условиях

Для СКК-оценок имеем (см. (4.109)-(4.111))

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1}, \qquad (4.134)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}_{st} \mathbf{Q}^{-1}, \qquad (4.135)$$

$$N = Q_{st}Q^{-1}[I - A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}].$$
 (4.136)

Предположим, что существует какой-либо другой метод несмещенного линейного оценивания, который характеризуется матрицами  $\overline{M}$  и  $\overline{N}$ , удовлетворяющими условиям (4.129)–(4.133). Положим также, что

$$\mathbf{M} = \mathbf{M} + \mathbf{V},\tag{4.137}$$

$$\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} + \mathbf{W}, \tag{4.138}$$

где V и W – некоторые произвольные матрицы. Тогда

$$\mathbf{V}\mathbf{A} = (\overline{\mathbf{M}} - \mathbf{M})\mathbf{A} = \overline{\mathbf{M}}\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{0}, \qquad (4.139)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = (\overline{\mathbf{N}} - \mathbf{N})\mathbf{A} = \overline{\mathbf{N}}\mathbf{A} - \mathbf{N}\mathbf{A} = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}. \tag{4.140}$$

Согласно формулам (4.117) и (4.118), ковариации произвольных несмещенных линейных оценок имеют вид

$$\overline{\mathbf{D}}_{xx} = \overline{\mathbf{M}} \mathbf{Q} \overline{\mathbf{M}}' = (\mathbf{M} + \mathbf{V}) \mathbf{Q} (\mathbf{M}' + \mathbf{V}') =$$
$$= \mathbf{M} \mathbf{Q} \mathbf{M}' + \mathbf{M} \mathbf{Q} \mathbf{V}' + \mathbf{V} \mathbf{Q} \mathbf{M}' + \mathbf{V} \mathbf{Q} \mathbf{V}',$$

$$\overline{\mathbf{D}}_{ss} = \mathbf{Q}_{ss} + \overline{\mathbf{N}} \mathbf{Q} \overline{\mathbf{N}'} - \overline{\mathbf{N}} \mathbf{Q}_{ts} - \mathbf{Q}_{st} \overline{\mathbf{N}'} =$$

$$= \mathbf{Q}_{ss} + (\mathbf{N} + \mathbf{W}) \mathbf{Q} (\mathbf{N}' + \mathbf{W}') - (\mathbf{N} + \mathbf{W}) \mathbf{Q}_{ts} - \mathbf{Q}_{st} (\mathbf{N}' + \mathbf{W}') =$$

$$= \mathbf{Q}_{ss} + \mathbf{N} \mathbf{Q} \mathbf{N}' + \mathbf{N} \mathbf{Q} \mathbf{W}' + \mathbf{W} \mathbf{Q} \mathbf{N}' + \mathbf{W} \mathbf{Q} \mathbf{W}' -$$

$$- \mathbf{N} \mathbf{Q}_{ts} - \mathbf{W} \mathbf{Q}_{ts} - \mathbf{Q}_{st} \mathbf{N}' + \mathbf{Q}_{st} \mathbf{W}'$$

или

$$\overline{\mathbf{D}}_{xx} = \mathbf{D}_{xx} + \mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{V}' + \mathbf{V}\mathbf{Q}\mathbf{M}' + \mathbf{V}\mathbf{Q}\mathbf{V}', \qquad (4.141)$$

$$\overline{\mathbf{D}}_{ss} = \mathbf{D}_{ss} + (\mathbf{W}\mathbf{Q}\mathbf{N}' - \mathbf{W}\mathbf{Q}_{ss}) + (\mathbf{N}\mathbf{Q}\mathbf{W}' - \mathbf{Q}_{ss}\mathbf{W}') + \mathbf{W}\mathbf{Q}\mathbf{W}'.$$
(4.142)

Здесь  $D_{xx}$  и  $D_{ss}$  означают ковариационные матрицы СКК-оценок, определяемые по формулам (4.120) и (4.121).

С учетом формулы (4.119) и транспонированной формулы (4.139) имеем

$$MQV' = (A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}QV' = (A'Q^{-1}A)^{-1}A'V' = 0.$$

Транспонируя это выражение, находим VQM' = 0. В результате вместо (4.141) имеем

$$\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} + \mathbf{V}\mathbf{Q}\mathbf{V}'. \tag{4.143}$$

Перейдем теперь к вычислению **D**<sub>n</sub>. Учитывая (4.111), имеем

$$NQW' = Q_{st}Q^{-1}[I - A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'Q^{-1}]QW' =$$
  
= Q\_{st}W' - Q\_{st}Q^{-1}A(A'Q^{-1}A)^{-1}A'W' = Q\_{st}W',

так как, согласно (4.140), A'W' = 0. Аналогичным образом находим WQN' = WQ<sub>1s</sub>, и поэтому формула (4.142) принимает вид

$$\overline{\mathbf{D}}_{ss} = \mathbf{D}_{ss} + \mathbf{W}\mathbf{Q}\mathbf{W}'.$$

Дисперсии оцениваемых параметров определяются диагональными элементами их автоковариационных матриц. Рассмотрим для примера *j*-ю компоненту вектора х. Дисперсия ее оценки определяется, согласно (4.143), выражением

$$\overline{\sigma}_{j}^{2} = \sigma_{j}^{2} + \mathbf{v}_{j}^{\prime} \mathbf{Q} \mathbf{v}_{j}, \qquad (4.144)$$

где v<sub>j</sub>-j-й столбец матрицы V.

Поскольку ковариационная матрица **Q** положительно определена, то она всегда порождает положительные квадратичные формы (см. §1 гл.2), поэтому  $v'_i \mathbf{Q} v_i \ge 0$ , но тогда из (4.144) следует  $\overline{\sigma}_i^2 \ge \sigma_i^2$ .

Таким образом, средняя квадратическая ошибка  $\sigma_j$ , соответствующая оценке методом СКК, действительно является наименьшей из всех возможных несмещенных линейных оценок для любой компоненты вектора постоянных параметров х. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что это относится и к стохастическому вектору s. Отсюда имеем следующее основное свойство средней квадратической коллокации:  в классе линейных оценок и стационарных стохастических моделей метод СКК оптимален в том смысле, что он дает наиболее точные результаты по сравнению с любыми другими решениями, которые можно получить на основе имеющихся исходных данных.

## §8. Двухгрупповая коллокация

Пусть мы имеем вектор данных I длиной N. Линейную модель этих данных представим в форме (4.68)

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{Q}_{ss}, \mathbf{Q}_{tt}, \tag{4.145}$$

где  $x - m \times 1$ -вектор постоянных параметров,  $A - N \times m$ -матрица частных производных  $\partial l / \partial x$ ,  $s - p \times 1$ -вектор стохастического сигнала,  $U - N \times p$ -матрица, определяемая формулами (4.66) или (4.67) в зависимости от типа сигнала,  $r - N \times 1$ -вектор случайных невязок модели данных. Будем считать, что сигнал s и шум r взаимно независимы и имеют известные а priori автоковариационные матрицы  $Q_{st}$  и  $Q_{rr}$  размерностью  $p \times p$  и  $N \times N$  соответственно.

Уравнения наблюдений, соответствующие этой модели, имеют вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t} + \mathbf{r}, \tag{4.146}$$

где

$$t = Us.$$
 (4.147)

СКК-оценки постоянных и стохастических параметров модели (4.145) даются формулами (4.82):

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l},$$
 (4.148)

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{st} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}), \tag{4.149}$$

где

$$Q = Q_{rr} + Q_{tt}, \quad Q_{tt} = UQ_{ss}U', \quad Q_{st} = Q_{ss}U'.$$
 (4.150)

Сравнивая (4.149) с (4.62), видим, что формула (4.149) представляет собой фильтрацию и прогноз стохастического вектора

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{r}}. \tag{4.151}$$

Разделим теперь данные I на две группы  $I_1$  и  $I_2$ , первая из которых представляет собой вектор длиной  $N_1$ , а вторая – длиной  $N_2$ , так

что  $N = N_1 + N_2$ . В результате вектор **1** и матрицы **A** и **U** можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$

Тогда модель (4.145) примет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \mathbf{s} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}.$$
 (4.152)

Будем считать, что невязки обеих частей модели а priori между собой независимы, тогда ковариационные матрицы Q,, и Q,, примут вид

$$\mathbf{Q}_{rr} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{rr}^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{rr}^{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{11} & \mathbf{Q}_{11}^{12} \\ \mathbf{Q}_{11}^{21} & \mathbf{Q}_{12}^{22} \end{bmatrix}.$$
(4.153)

Очевидно, что матрицы Q и Q<sub>и</sub> также разбиваются на блоки:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{s1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.154)$$

где

$$Q_{11} = Q_{rr}^{11} + Q_{tt}^{11}, \quad Q_{12} = Q_{tt}^{12},$$

$$Q_{21} = Q_{tt}^{21}, \quad Q_{22} = Q_{rr}^{22} + Q_{tt}^{22},$$

$$Q_{1} = Q_{ss}U_{1}', \quad Q_{2} = Q_{ss}U_{2}'.$$
(4.155)

Введем в дальнейшее употребление следующие обозначения:

x, s – истинные значения параметров и сигнала;

 $\hat{x}_{1}, \hat{s}_{1}$  – их оценки по первой группы данных  $I_{1}$ ;

 $\hat{x}_2, \hat{s}_2$  – их уточненные оценки с учетом обеих групп данных (второе приближение); если данных больше нет, то эти оценки принимаются за истинные  $\hat{x}_2 \approx \hat{x}$ ,  $\hat{s}_2 \approx \hat{s}$ ;

t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub> – истинные значения сигнальной части обеих групп данных, соответствующие истинному сигналу s;

 $\hat{\mathbf{t}}_{11}, \hat{\mathbf{t}}_{21}$  – оценки сигнальной части, соответствующие  $\hat{\mathbf{s}}_1;$ 

 $\hat{t}_{21}, \hat{t}_{22}$  – оценки сигнальной части, соответствующие  $\hat{s}_{2};$ 

r<sub>1</sub>, r<sub>2</sub> – истинные значения невязок обеих частей модели, соответствующие истинному сигналу s;

 $\hat{\mathbf{r}}_{11}, \hat{\mathbf{r}}_{21}$  – оценки невязок, соответствующие  $\hat{\mathbf{s}}_1;$  $\hat{\mathbf{r}}_{21}, \hat{\mathbf{r}}_{22}$  – оценки невязок, соответствующие  $\hat{\mathbf{s}}_2;$ 

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\hat{t}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{t}}_{11} \\ \mathbf{\hat{t}}_{21} \end{bmatrix}, \ \mathbf{\hat{t}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{t}}_{12} \\ \mathbf{\hat{t}}_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\hat{r}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{r}}_{11} \\ \mathbf{\hat{r}}_{21} \end{bmatrix}, \ \mathbf{\hat{r}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{\hat{r}}_{12} \\ \mathbf{\hat{r}}_{22} \end{bmatrix}.$$

Вычислим теперь обратную матрицу [36, с. 666]

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix},$$
(4.156)

где

$$\mathbf{R}_{22} = (\mathbf{Q}_{22} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12})^{-1},$$
  

$$\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12}\mathbf{R}_{22}, \quad \mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{22}\mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1},$$
  

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{Q}_{11}^{-1} - \mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12}\mathbf{R}_{21} = \mathbf{Q}_{11}^{-1} + \mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12}\mathbf{R}_{22}\mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}.$$
  
(4.157)

Используя эти соотношения, находим

$$\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{1} & \mathbf{A}'_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} \\ \mathbf{A}_{2} \end{bmatrix} = \\ = \mathbf{A}'_{1} \mathbf{R}_{11} \mathbf{A}_{1} + \mathbf{A}'_{1} \mathbf{R}_{12} \mathbf{A}_{2} + \mathbf{A}'_{2} \mathbf{R}_{21} \mathbf{A}_{1} + \mathbf{A}'_{2} \mathbf{R}_{22} \mathbf{A}_{2} = \\ = \mathbf{A}'_{1} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{1} + (\mathbf{A}'_{2} - \mathbf{A}'_{1} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_{12}) \mathbf{R}_{22} (\mathbf{A}_{2} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{1}).$$
(4.158)

С помощью обозначений

$$\overline{\mathbf{A}}_{2} = \mathbf{A}_{2} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{1}, \qquad (4.159)$$

$$\mathbf{P}_{1} = \mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1} \tag{4.160}$$

выражение (4.158) преобразуется к виду

$$\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{P}_1+\overline{\mathbf{A}}_2'\mathbf{R}_{22}\overline{\mathbf{A}}_2,$$

откуда, по правилу (2.71), находим

$$(\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{P}_{1}^{-1} - \mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}'(\mathbf{R}_{22}^{-1} + \overline{\mathbf{A}}_{2}\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}')^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}\mathbf{P}_{1}^{-1}.$$
 (4.161)

Учитывая теперь первую из формул (4.157) и обозначая

$$\overline{\mathbf{Q}}_{22} = \mathbf{Q}_{22} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12} + \overline{\mathbf{A}}_{2}\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}', \qquad (4.162)$$

формулу (4.161) преобразуем к виду

$$(\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{P}_{1}^{-1} - \mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}'\overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}\mathbf{P}_{1}^{-1}.$$
 (4.163)

Используя теперь соотношения (4.157) и (4.159), имеем

$$\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1}' & \mathbf{A}_{2}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{1} \\ \mathbf{l}_{2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{1}'\mathbf{R}_{11}\mathbf{l}_{1} + \mathbf{A}_{1}'\mathbf{R}_{12}\mathbf{l}_{2} + \mathbf{A}_{2}'\mathbf{R}_{21}\mathbf{l}_{1} + \mathbf{A}_{2}'\mathbf{R}_{22}\mathbf{l}_{2} = \mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{l}_{1} + \overline{\mathbf{A}}_{2}'\mathbf{R}_{22}(\mathbf{l}_{2} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{l}_{1}).$$
(4.164)

Наконец, подставляя (4.163) и (4.164) в формулу (4.148), находим оценку параметров х с учетом обеих групп данных:

$$\hat{\mathbf{x}}_{2} = \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{I}_{1} - \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}' \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{I}_{1} + (\mathbf{P}_{1}^{-1} - \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}' \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{P}_{1}^{-1}) \overline{\mathbf{A}}_{2}' \mathbf{R}_{22} (\mathbf{I}_{2} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{I}_{1}).$$
(4.165)

Первый член этого выражения с учетом (4.160) равен

$$\hat{\mathbf{x}}_{1} = \mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{I}_{1} = (\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1})^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{I}_{1}$$
(4.166)

и представляет собой СКК-оценку вектора х на основе только первой части данных наблюдений l<sub>1</sub>. Последний член в правой части формулы (4.165) может быть преобразован с использованием соотношений (4.157) следующим образом:

$$(\mathbf{P}_{1}^{-1} - \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime} \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{P}_{1}^{-1}) \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime} \mathbf{R}_{22} = \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime} (\mathbf{I} - \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime}) \mathbf{R}_{22} \approx$$

$$= \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime} \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} (\overline{\mathbf{Q}}_{22} - \overline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime}) \mathbf{R}_{22} = \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime} \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \mathbf{R}_{22} = \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime} \mathbf{Q}_{22}^{-1}. \quad (4.167)$$

Подставляя (4.166) и (4.167) в (4.165), находим окончательно

$$\hat{\mathbf{x}}_{2} = \hat{\mathbf{x}}_{1} + \mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime} \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} (\mathbf{I}_{2} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{I}_{1} - \overline{\mathbf{A}}_{2} \hat{\mathbf{x}}_{1}).$$
(4.168)

Второй член правой части этой формулы выражает уточнение оценки  $\hat{x}_1$  за счет использования дополнительных данных  $I_2$ .

Выполним подобные вычисления для оценки сигнала. Учитывая (4.151)-(4.152) и полагая

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_1 \\ \hat{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 - \mathbf{A}_1\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{l}_2 - \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \qquad (4.169)$$

а также используя формулы (4.150)-(4.153), получаем из (4.149)

$$\hat{\mathbf{s}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_1 \\ \hat{\mathbf{w}}_2 \end{bmatrix}, \qquad (4.170)$$

откуда, согласно (4.157), находим

$$\hat{\mathbf{s}}_{2} = \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{w}}_{1} + (\mathbf{Q}_{2} - \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12})\mathbf{R}_{22}(\hat{\mathbf{w}}_{2} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{w}}_{1}).$$
(4.171)

В соответствии с формулами (4.169) и (4.159), имеем далее

$$\hat{\mathbf{w}}_{1} = \mathbf{l}_{1} - \mathbf{A}_{1}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l}_{1} - \mathbf{A}_{1}\hat{\mathbf{x}}_{1} - \mathbf{A}_{1}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_{1}), \qquad (4.172)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{2} = \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{w}}_{1} = \mathbf{I}_{2} - \mathbf{A}_{2}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{I}_{1} + \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{I}_{2} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{I}_{1} - \overline{\mathbf{A}}_{2}\hat{\mathbf{x}}_{1} - \overline{\mathbf{A}}_{2}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_{1}).$$
(4.173)

Заметим, что

$$\hat{\mathbf{s}}_{1} = \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}(\mathbf{l}_{1} - \mathbf{A}_{1}\hat{\mathbf{x}}_{1})$$
 (4.174)

представляет собой оценку сигнала s на основе только первой части вектора данных l<sub>1</sub>. Теперь с помощью формул (4.172)–(4.174) выражение (4.171) можно привести к виду

$$\hat{\mathbf{s}}_2 = \hat{\mathbf{s}}_1 - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1 (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_1) + (\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_{12}) \mathbf{R}_{22} (\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{I}_1 - \overline{\mathbf{A}}_2 \hat{\mathbf{x}}_1) - (\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_{12}) \mathbf{R}_{22} \overline{\mathbf{A}}_2 (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_1).$$

Заменим здесь разность  $\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_1$  на  $\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1$  с учетом (4.168). Тогда

$$\hat{\mathbf{s}}_{2} = \hat{\mathbf{s}}_{1} + [(\mathbf{Q}_{2} - \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12})\mathbf{R}_{22}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_{2}\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}'\overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}) - \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1}\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}'\overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}](\mathbf{I}_{2} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{I}_{1} - \overline{\mathbf{A}}_{2}\hat{\mathbf{x}}_{1}) = \\ = \hat{\mathbf{s}}_{1} + \mathbf{Z}\overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}(\mathbf{I}_{2} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{I}_{1} - \overline{\mathbf{A}}_{2}\hat{\mathbf{x}}_{1}), \qquad (4.175)$$

где

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_{12}) \mathbf{R}_{22} (\overline{\mathbf{Q}}_{22} - \overline{\mathbf{A}}_2 \mathbf{P}_1^{-1} \overline{\mathbf{A}}_2') - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1^{-1} \overline{\mathbf{A}}_2'.$$

Из формул (4.157) и (4.162) находим

 $\mathbf{R}_{22}(\overline{\mathbf{Q}}_{22}-\overline{\mathbf{A}}_{2}\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}')=\mathbf{I},$ 

поэтому

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_{12} - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1^{-1} \overline{\mathbf{A}}_2'.$$

Подставляя это выражение в (4.175), получаем окончательно

$$\hat{\mathbf{s}}_{2} = \hat{\mathbf{s}}_{1} + (\mathbf{Q}_{2} - \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12} - \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1}\mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{\overline{A}}_{2}')\overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}(\mathbf{l}_{2} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{l}_{1} - \mathbf{\overline{A}}_{2}\hat{\mathbf{x}}_{1}).$$
(4.176)

Если теперь обозначить

$$\bar{\mathbf{l}}_2 = \mathbf{l}_2 - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{l}_1 - \overline{\mathbf{A}}_2\hat{\mathbf{x}}_1, \qquad (4.177)$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_{2} = \mathbf{Q}_{2} - \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12} - \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1}\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime}$$
(4.178)

и принять во внимание сокращения (4.159), (4.160) и (4.162), то оценки (4.168) и (4.176) можно записать в более краткой форме:

$$\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1 = \Delta \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{P}_1^{-1} \overline{\mathbf{A}}_2' \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_2, \qquad (4.179)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_2 - \hat{\mathbf{s}}_1 = \Delta \hat{\mathbf{s}}_2 = \overline{\mathbf{Q}}_2 \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_2, \qquad (4.180)$$

где

$$\hat{\mathbf{x}}_{1} = \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{I}_{1}, \qquad (4.181)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{1} = \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}(\mathbf{l}_{1} - \mathbf{A}_{1}\hat{\mathbf{x}}_{1}). \tag{4.182}$$

Если требуется оценить не сигнал s, а только сигнальную часть данных наблюдений t, то по формуле (4.147) находим

$$\hat{\mathbf{t}}_{2} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}}_{12} \\ \hat{\mathbf{t}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1} \hat{\mathbf{s}}_{2} \\ \mathbf{U}_{2} \hat{\mathbf{s}}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1} \hat{\mathbf{s}}_{1} + \mathbf{U}_{1} \Delta \hat{\mathbf{s}}_{2} \\ \mathbf{U}_{2} \hat{\mathbf{s}}_{1} + \mathbf{U}_{2} \Delta \hat{\mathbf{s}}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}}_{11} + \Delta \hat{\mathbf{t}}_{12} \\ \hat{\mathbf{t}}_{21} + \Delta \hat{\mathbf{t}}_{22} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{t}}_{1} + \Delta \hat{\mathbf{t}}_{2}.$$
(4.183)

Поскольку, согласно (4.180), вектор  $\Delta \hat{\mathbf{s}}_2 = \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}_1$  представляет собой поправку к первоначальной оценке сигнала  $\hat{\mathbf{s}}_1$ , то в формуле (4.183) векторы  $\Delta \hat{\mathbf{t}}_{12}$  и  $\Delta \hat{\mathbf{t}}_{22}$  есть поправки к оценкам  $\hat{\mathbf{t}}_{11}, \hat{\mathbf{t}}_{21}$ , соответствующим  $\hat{\mathbf{s}}_1$ , причем  $N_2 \times 1$ -вектор  $\hat{\mathbf{t}}_{21} = \mathbf{U}_2 \hat{\mathbf{s}}_1$  представляет собой экстраполяцию сигнала  $\hat{\mathbf{s}}_1$  на данные  $\mathbf{l}_2$ .

Аналогичным образом получаем оценки невязок двухгрупповой модели (4.152):

$$\hat{\mathbf{r}}_{2} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{12} \\ \hat{\mathbf{r}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{1} - \mathbf{A}_{1} \hat{\mathbf{x}}_{2} - \mathbf{U}_{1} \hat{\mathbf{s}}_{2} \\ \mathbf{l}_{2} - \mathbf{A}_{2} \hat{\mathbf{x}}_{2} - \mathbf{U}_{2} \hat{\mathbf{s}}_{2} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{1} \\ \mathbf{l}_{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} & \mathbf{U}_{1} \\ \mathbf{A}_{2} & \mathbf{U}_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{2} \\ \hat{\mathbf{s}}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{11} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{12} \\ \hat{\mathbf{r}}_{21} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{22} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{r}}_{1} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{2}.$$
(4.184)

Здесь с учетом (4.179) и (4.180) имеем

$$\hat{\mathbf{f}}_{11} = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{U}_1 \hat{\mathbf{s}}_1), \quad \Delta \hat{\mathbf{f}}_{12} = -(\mathbf{A}_1 \Delta \hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{U}_1 \Delta \hat{\mathbf{s}}_2), \hat{\mathbf{f}}_{21} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{U}_2 \hat{\mathbf{s}}_1), \quad \Delta \hat{\mathbf{f}}_{22} = -(\mathbf{A}_2 \Delta \hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{U}_2 \Delta \hat{\mathbf{s}}_2).$$

$$(4.185)$$

Вектор  $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{l}_2 - \mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{U}_2 \hat{\mathbf{s}}_1$  тоже представляет собой результат экстраполяции оценок  $\hat{\mathbf{x}}_1$  и  $\hat{\mathbf{s}}_1$  на новую группу данных  $\mathbf{l}_2$ , а  $\Delta \hat{\mathbf{r}}_{22}$  – уточнение этой экстраполяции.

## §9. Точность двухгрупповой коллокации

Выведем теперь формулы для оценок точности групповой коллокации [41, с. 118–123]. Начнем наш анализ с вектора сигнала. Заметим, что формула (4.180) представляет собой точный аналог основной формулы коллокации (4.29) для оценивания стохастического сигнала  $\Delta \hat{s}_2 = s - \hat{s}_1$  по данным  $\bar{l}_2$  в случае отсутствия постоянных параметров. Чтобы убедиться в этом, необходимо, во-первых, показать, что  $G\{\bar{l}_2\} = 0$ . Действительно, учитывая обозначения (4.159), (4.177) и (4.181), получаем

$$\tilde{\mathbf{l}}_{2} = \mathbf{l}_{2} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{l}_{1} - (\mathbf{A}_{2} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{1}) \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{l}_{1}.$$
(4.186)

Если параметрическая модель Ах является полной, то

$$G\{\mathbf{t}_1\} := \mathbf{0}, G\{\mathbf{t}_2\} = \mathbf{0}, \quad G\{\mathbf{r}_1\} = \mathbf{0}, G\{\mathbf{r}_1\} = \mathbf{0},$$
 (4.187)

поэтому

$$G\{\mathbf{l}_1\} = \mathbf{A}_1 G\{\hat{\mathbf{x}}\} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}, \quad G\{\mathbf{l}_2\} = \mathbf{A}_2 G\{\hat{\mathbf{x}}\} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}, \quad (4.188)$$

где х – истинный вектор постоянных параметров. Следовательно,

$$G\{\overline{I}_{2}\} = [A_{2} - Q_{21}Q_{11}^{-1}A_{1} - (A_{2} - Q_{21}Q_{11}^{-1}A_{1})P_{1}^{-1}A_{1}'Q_{11}^{-1}A_{1}]\mathbf{x} =$$
  
=  $[(A_{2} - Q_{21}Q_{11}^{-1}A_{1}) - (A_{2} - Q_{21}Q_{11}^{-1}A_{1})]\mathbf{x} = 0,$  (4.189)

что и требовалось доказать.

Введем теперь по примеру (4.151) центрированные данные наблюдений

$$\mathbf{w}_{1} = \mathbf{l}_{1} - \mathbf{A}_{1}\mathbf{x}, \quad \mathbf{w}_{2} = \mathbf{l}_{2} - \mathbf{A}_{2}\mathbf{x}, \tag{4.190}$$

которые, согласно равенствам (4.188), удовлетворяют условиям

$$G\{\mathbf{w}_1\} = \mathbf{0}, \quad G\{\mathbf{w}_2\} = \mathbf{0}.$$
 (4.191)

Тогда формула (4.186) с учетом обозначений (4.190) примет вид

$$\bar{\mathbf{l}}_{2} = \mathbf{w}_{2} + \mathbf{A}_{2}\mathbf{x} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}(\mathbf{w}_{1} + \mathbf{A}_{1}\mathbf{x}) - (\mathbf{A}_{2} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1})\mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}(\mathbf{w}_{1} + \mathbf{A}_{1}\mathbf{x}) = \\ = \mathbf{w}_{2} - (\mathbf{Q}_{21} + \overline{\mathbf{A}}_{2}\mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1}')\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{w}_{1}.$$
(4.192)

С использованием этого выражения легко находим

$$\begin{split} \tilde{l}_{2}\tilde{l}'_{2} &= w_{2}w'_{2} - (Q_{21} + \overline{A}_{2}P_{1}^{-1}A'_{1})Q_{11}^{-1}w_{1}w'_{2} - w_{2}w'_{1}Q_{11}^{-1}(Q_{12} + A_{1}P_{1}^{-1}\overline{A}'_{2}) + \\ &+ (Q_{21} + \overline{A}_{2}P_{1}^{-1}A'_{1})Q_{11}^{-1}w_{1}w'_{1}Q_{11}^{-1}(Q_{12} + A_{1}P_{1}^{-1}\overline{A}'_{2}). \end{split}$$

Принимая во внимание, что

$$G\{\mathbf{w}_{1}\mathbf{w}_{1}'\} = G\{(\mathbf{t}_{1} + \mathbf{r}_{1})(\mathbf{t}_{1} + \mathbf{r}_{1})'\} = \mathbf{Q}_{11} \quad \mathbf{\mu} \text{ T. } \mathbf{\pi}_{.}, \qquad (4.193)$$

получаем с учетом (4.160)

$$G\{\overline{\mathbf{l}}_{2}\overline{\mathbf{l}}_{2}'\} = \mathbf{Q}_{22} - \mathbf{Q}_{21}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{12} + \overline{\mathbf{A}}_{2}\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}' = \overline{\mathbf{Q}}_{22}.$$

Это и доказывает, что  $\overline{\mathbf{Q}}_{22}$  является автоковариационной матрицей для вектора  $\overline{\mathbf{I}}_{2}$ .

Подобным же образом убеждаемся, что матрица  $\overline{Q}_2$ , определяемая формулой (4.178), представляет собой матрицу ковариаций между векторами (s –  $\hat{s}_1$ ) и  $\bar{l}_2$ . Действительно,

$$(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}_1)\bar{\mathbf{l}}_2 = \mathbf{s}\bar{\mathbf{l}}_2 - \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_{11}^{-1}(\mathbf{l}_1 - \mathbf{A}_1\hat{\mathbf{x}}_1)\bar{\mathbf{l}}_2.$$

Но с учетом формулы (4.190) имеем

$$\begin{split} \mathbf{I}_{1} - \mathbf{A}_{1} \hat{\mathbf{x}}_{1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{1} \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1}) \mathbf{I}_{1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{1} \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1}) \mathbf{w}_{1} + \\ &+ (\mathbf{A}_{1} - \mathbf{A}_{1} \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{1}) \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{1} \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1}) \mathbf{w}_{1}, \end{split}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}_1) \bar{\mathbf{l}}_2' &= \mathbf{s} \mathbf{w}_2' - \mathbf{s} \mathbf{w}_1' \mathbf{Q}_{11}^{-1} (\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1^{-1} \overline{\mathbf{A}}_2') - \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_1' \mathbf{Q}_{11}^{-1}) \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2' + \\ &+ \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_{11}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A}_1' \mathbf{Q}_{11}^{-1}) \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1' \mathbf{Q}_{11}^{-1} (\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1^{-1} \overline{\mathbf{A}}_2'). \end{aligned}$$

Применяя оператор матожидания к левой и правой частям этого равенства, а также замечая, что

$$E\{\mathbf{sw}_{1}'\} = E\{\mathbf{s}(\mathbf{t}_{1} + \mathbf{r}_{1})'\} = E\{\mathbf{s}\mathbf{t}_{1}'\} = \mathbf{Q}_{1}, E\{\mathbf{sw}_{2}'\} = E\{\mathbf{s}(\mathbf{t}_{2} + \mathbf{r}_{2})'\} = E\{\mathbf{s}\mathbf{t}_{2}'\} = \mathbf{Q}_{2},$$
(4.194)

и принимая еще во внимание выражение (4.177), убеждаемся, что  $E\{(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}_1) \hat{\mathbf{l}}_2\} = \overline{\mathbf{Q}}_2$ .

Таким образом, мы доказали, что выражение (4.180) является частным случаем основной формулы коллокации (4.42). Убедимся теперь, что и выражение (4.179) также является частным случаем формулы коллокации. Для этого достаточно показать, что обобщенное матожидание G вектора ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_1$ ) равно нулю, а матрица  $\mathbf{P}_1^{-1}\overline{\mathbf{A}}_2'$  есть не что иное, как ковариация между этим вектором и  $\bar{\mathbf{I}}_2$ . Действительно, с учетом (4.181), (4.190) и (4.191) имеем

$$G\{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{1}\} = G\{\mathbf{x} - \mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}(\mathbf{w}_{1} + \mathbf{A}_{1}\mathbf{x})\} = -\mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}G\{\mathbf{w}_{1}\} = \mathbf{0}.$$

Далее,

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{1})\overline{\mathbf{l}}_{2}' = -\mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{w}_{1}\mathbf{w}_{2}' + \mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{w}_{1}\mathbf{w}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}(\mathbf{Q}_{12} + \mathbf{A}_{1}\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}').$$

Применяя оператор G и учитывая (4.69), (4.181) и (4.190)–(4.191), находим после некоторых преобразований

$$G\{(\mathbf{x}-\mathbf{\hat{x}}_1)\mathbf{\bar{l}}_2'\}=\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{\bar{A}}_2',$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, формулы (4.179) и (4.180) представляют собой аналог основной формулы коллокации (4.42):

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{I}, \tag{4.195}$$

и поэтому для вычисления соответствующих anocmepuophux ковариаций можно воспользоваться формулой (4.43):

$$\mathbf{D}_{ss} = \mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{Q}_{ls}.$$
 (4.196)

Действительно, сравнивая (4.195) с (4.194), видим, что имеют место следующие соответствия:

$$\hat{\mathbf{s}} \sim \Delta \hat{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{l} \sim \overline{\mathbf{l}}_2, \quad \mathbf{Q}_{sl} \sim \mathbf{P}_1^{-1} \overline{\mathbf{A}}_2', \quad \mathbf{Q}_{ll} \sim \overline{\mathbf{Q}}_{22}.$$

Подставляя теперь эти соотношения в формулу (4.196) и замечая, что входящая в нее матрица априорных ковариаций сигнала Q<sub>35</sub> в нашем случае представляет собой апостериорную ковариацию D<sub>xx1</sub> оценок  $\hat{\mathbf{x}}_1$ , полученных на основе первой части данных, а именно:

$$\mathbf{D}_{xx,1} = \mathbf{P}_{i}^{-1} = (\mathbf{A}_{i}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1})^{-1}, \qquad (4.197)$$

находим

$$\mathbf{D}_{xx,2} = \mathbf{D}_{xx,1} + \Delta \mathbf{D}_{xx,2},\tag{4.198}$$

гле

$$\Delta \mathbf{D}_{xx,2} = -\mathbf{P}_{1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2}^{\prime} \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{P}_{1}^{-1}$$
(4.199)

есть поправка ковариаций (4.197) за счет использования новых данных.

Далее, из сравнения (4.195) с (4.180) видим, что

$$\hat{\mathbf{s}} \sim \Delta \hat{\mathbf{s}}_2, \quad \mathbf{l} \sim \mathbf{l}_2, \quad \mathbf{Q}_{sl} \sim \overline{\mathbf{Q}}_2, \quad \mathbf{Q}_{ll} \sim \overline{\mathbf{Q}}_{22},$$
  
 $\mathbf{D}_{ss,2} = \mathbf{D}_{ss,1} + \Delta \mathbf{D}_{ss,2}, \quad (4.200)$ 

поэтому

$$\mathbf{D}_{ss,2} = \mathbf{D}_{ss,1} + \Delta \mathbf{D}_{ss,2}, \qquad (4.200)$$

где, согласно (4.121),

$$D_{ss,1} = Q_{ss} - Q_1 Q_{11}^{-1} Q_1' + Q_1 Q_{11}^{-1} A_1 P_1^{-1} A_1' Q_{11}^{-1} Q_1' = = Q_{ss} - Q_1 Q_{11}^{-1} [I - A_1 (A_1' Q_{11}^{-1} A_1)^{-1} A_1' Q_{11}^{-1}] Q_1', \qquad (4.201)$$

$$\Delta \mathbf{D}_{ss,2} = -\overline{\mathbf{Q}}_2 \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}_2'. \tag{4.202}$$

Для смешанных ковариаций двух сигналов g и h, полученных методом СКК из одних и тех же данных I, соотношение (4.196) принимает вид

$$\mathbf{D}_{gh} = \mathbf{Q}_{gh} - \mathbf{Q}_{gl}\mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{Q}_{lh},$$

поэтому с учетом (4.122) имеем

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}\mathbf{r},\mathbf{2}} = \mathbf{D}_{\mathbf{x}\mathbf{r},\mathbf{1}} + \Delta \mathbf{D}_{\mathbf{x}\mathbf{r},\mathbf{2}},\tag{4.203}$$

$$\mathbf{D}_{xs,1} = -\mathbf{P}_{1}^{-1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{1}', \quad \Delta \mathbf{D}_{xs,2} = -\mathbf{P}_{1}^{-1}\overline{\mathbf{A}}_{2}'\overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1}\overline{\mathbf{Q}}_{2}'. \tag{4.204}$$

Рассмотрим теперь оценки невязок, определяемые формудой (4.184). Если в этой формуле обозначить

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix}, \quad (4.205)$$

то получим

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{i} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{y}}.\tag{4.206}$$

Сравнивая теперь (4.206) с общей формулой оценивания невязок (4.81), а затем используя выражения (4.123), (4.125) и (4.126) для их апостериорных ковариаций, находим

$$\mathbf{D}_{rr} = \mathbf{B}\mathbf{D}_{yy}\mathbf{B}', \quad \mathbf{D}_{ry} = -\mathbf{B}\mathbf{D}_{yy}, \tag{4.207}$$

где

 $\mathbf{D}_{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}} = \operatorname{cov}(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}) = G\{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}'\}.$ 

С учетом обозначений (4.205) для второго шага коллокации имеем

$$\mathbf{D}_{yy,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx,2} & \mathbf{D}_{xs,2} \\ \mathbf{D}_{sx,2} & \mathbf{D}_{ss,2} \end{bmatrix},$$
(4.208)

где матрицы  $D_{xx,2}$ ,  $D_{xx,2}$  и  $D_{xx,2}$  определяются формулами (4.198), (4.200) и (4.203) соответственно. Учитывая вид этих формул, находим

$$\mathbf{D}_{yy,2} = \mathbf{D}_{yy,1} + \Delta \mathbf{D}_{yy,2}, \tag{4.209}$$

где

$$\mathbf{D}_{yy,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx,1} & \mathbf{D}_{xx,1} \\ \mathbf{D}_{xx,1} & \mathbf{D}_{xx,1} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{D}_{yy,2} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D}_{xx,2} & \Delta \mathbf{D}_{xx,2} \\ \Delta \mathbf{D}_{xx,2} & \Delta \mathbf{D}_{xx,2} \end{bmatrix}.$$
(4.210)

Таким образом, ковариации (4.207) для невязок, полученных на втором шаге коллокации, равны

$$\mathbf{D}_{rr,2} = \mathbf{B}\mathbf{D}_{yy,2}\mathbf{B}', \ \mathbf{D}_{ry,2} = -\mathbf{B}\mathbf{D}_{yy,2}.$$
 (4.211)

С учетом обозначений (4.205) эти формулы можно представить в развернутом виде:

$$\mathbf{D}_{rr,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{yy,2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1' & \mathbf{B}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}_1' & \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}_2' \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}_1' & \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{rr,2}^{11} & \mathbf{D}_{rr,2}^{12} \\ \mathbf{D}_{rr,2}^{21} & \mathbf{D}_{rr,2}^{22} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{D}_{ry,2} = -\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{D}_{yy,2} = -\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{yy,2} \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{yy,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ry,2}^{(1)} \\ \mathbf{D}_{ry,2}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

### §10. Нелинейная коллокация

На практике часто встречается случай (см. гл. 7), когда а ргіогі известна не ковариационная функция сигнала  $q_s(\tau)$ , а корреляционная функция, представляющая собой нормализованную ковариационную функцию

$$c_s(\tau) = q_s(\tau) / q_s(0),$$

где дисперсия сигнала  $q_s(0) = \sigma_s^2$  остается неизвестной. В терминах матричной алгебры это означает, что вместо ковариационной матрицы сигнала  $Q_{ss}$ , соответствующей функции  $q_s(\tau)$ , нам известна "нормализованная" матрица  $C_{ss}$ , образованная с помощью функции  $c_s(\tau)$ . Очевидно, что эти матрицы связаны между собой соотношением

$$\mathbf{Q}_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}=\sigma_{\mathfrak{s}}^{2}\mathbf{C}_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}}.$$

Если ввести по обычному правилу априорную весовую матрицу сигнала, то окажется, что эта матрица равна обратной матрице корреляций:

$$\mathbf{P}_{ss} = \sigma_s^2 \mathbf{Q}_{ss}^{-1} = \mathbf{C}_{ss}^{-1}. \tag{4.212}$$

Аналогичным образом может обстоять дело и с невязками модели (случайными ошибками наблюдений) г, когда вместо обычной матрицы автоковариаций Q,, нам известна "нормализованная" матрица C,, или обратная ей весовая матрица P,,:

$$\mathbf{P}_{rr} = \sigma_r^2 \mathbf{Q}_{rr}^{-1} = \mathbf{C}_{rr}^{-1}, \qquad (4.213)$$

где дисперсия  $q_r(0) = \sigma_r^2$  также а priori неизвестна.

В этих условиях задача коллокации ставится таким образом: имея данные наблюдений  $\mathbf{l} = (l_i)$  (i = 1, 2, ..., N) и их стохастическую модель

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{C}_{\mu}, \mathbf{C}_{ss} \tag{4.214}$$

с известными корреляционными матрицами  $C_n$  и  $C_m$ , оценить *m* параметров вектора **x**, *p* сигналов вектора **s** и дисперсии  $\sigma_s^2$  и  $\sigma_r^2$ .

Для решения этой задачи воспользуемся методом максимального правдоподобия. Как показано в §4 настоящей главы, функция правдоподобия представляет собой плотность вероятности совместного распределения N + p случайных компонент составного вектора z = (r, s) и имеет вид

$$L(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathbf{Q}_{zz}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{Q}_{zz}^{-1}\mathbf{z}\right\}.$$

В силу независимости сигнала и ошибок наблюдений имеем

$$\mathbf{Q}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{II} \end{bmatrix},$$

поэтому

$$L(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N} \det \mathbf{Q}_{rr} \det \mathbf{Q}_{ss}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}'\mathbf{Q}_{rr}^{-1}\mathbf{r} + \mathbf{s}'\mathbf{Q}_{ss}^{-1}\mathbf{s})\right\}.$$
 (4.215)

Используя (4.212) и (4.213) и обозначая  $u = \sigma_r^2$ ,  $v = \sigma_s^2$ , находим

$$L(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N u^N v^P \det \mathbf{C}_{rr} \det \mathbf{C}_{ss}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{r}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \mathbf{r}}{u} + \frac{\mathbf{s}' \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s}}{v}\right)\right\}, \quad (4.216)$$

где *p* – размерность сигнала (длина вектора s), *N* – количество наблюдений. Натуральный логарифм этой функции равен

$$\ln L = -\frac{1}{2} \ln \left( (2\pi)^{N} \det \mathbf{C}_{rr} \det \mathbf{C}_{ss} \right) - \frac{N}{2} \ln u - \frac{p}{2} \ln v - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{r}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \mathbf{r}}{u} + \frac{\mathbf{s}' \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s}}{v} \right),$$

### а условия его экстремума имеют вид

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\hat{u}} (-\mathbf{A}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \mathbf{l} + \mathbf{A}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \mathbf{U} \hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{s}} = \frac{1}{\hat{u}} (-\mathbf{U}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \mathbf{l} + \mathbf{U}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{U}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \mathbf{U} \hat{\mathbf{s}}) + \frac{1}{\hat{v}} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial u} = -\frac{N}{2\hat{u}} + \frac{\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \hat{\mathbf{r}}}{2\hat{u}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial v} = -\frac{p}{2\hat{v}} + \frac{\hat{\mathbf{s}}' \mathbf{C}_{ss}^{-1} \hat{\mathbf{s}}}{2\hat{v}^2} = 0.$$
(4.217)

Из первых двух уравнений (4.217) получаем оценки параметров

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{I}$$
 (4.218)

и сигнала

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}' \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}), \qquad (4.219)$$

которые полностью совпадают с (4.82), но здесь

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{U}\mathbf{Q}_{ss}\mathbf{U}' = \hat{\boldsymbol{u}}\mathbf{C}_{rr} + \hat{\boldsymbol{v}}\mathbf{C}_{rr},$$
  
$$\mathbf{Q}_{ss} = \hat{\boldsymbol{v}}\mathbf{C}_{ss}, \quad \mathbf{C}_{rr} = \mathbf{U}\mathbf{C}_{ss}\mathbf{U}'.$$
  
(4.220)

Из двух последних формул (4.217) находим оценки дисперсий:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \hat{\mathbf{r}}}{N}, \quad \hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\hat{\mathbf{s}}' \mathbf{C}_{ss}^{-1} \hat{\mathbf{s}}}{p}. \tag{4.221}$$

Согласно (4.82), имеем также оценки невязок модели (4.214):

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{rr}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}). \tag{4.222}$$

Однако оценки дисперсий (4.221) являются смещенными, так как векторы  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{s}}$ , определяемые формулами (4.222) и (4.219), являются (N-m)-мерными вырожденными векторами. Действительно, с учетом (4.218) вектор

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{I} = (\mathbf{I} - \mathbf{V})\mathbf{I}$$
 (4.223)

выражается через идемпотентную матрицу

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{Q}^{-1},$$

имеющую ранг, равный m (см. §4 гл. 2). Тогда rank(I - V) = N - m, и поэтому  $\hat{w}$  есть (N - m)-мерный вырожденный вектор. Учитывая теперь, что произведение двух невырожденных матриц  $Q_{rr}Q^{-1}$  есть невырожденная квадратная матрица размером  $N \times N$ , убеждаемся [45, с. 43], что

$$\operatorname{rank}(\mathbf{Q}_{\prime\prime}\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{V}))=N-m,$$

а это и значит, что определяемый по формуле (4.222) вектор невязок  $\hat{\mathbf{r}}$  есть (N-m)-мерный вырожденный вектор. Но при  $p \ge N$  ранг матрицы U, определяемой формулами (4.66) или (4.67), всегда равен N, поэтому

$$\operatorname{rank}(\mathbf{Q}_{ss}\mathbf{U}'\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{V}))=N-m$$

и оценка сигнала ŝ тоже есть (N – m)-мерный вырожденный вектор.

Теперь ясно, что  $\chi_k^2$ -распределение квадратичных форм  $\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{C}_m^{-1} \hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{s}}' \mathbf{C}_{ss}^{-1} \hat{\mathbf{s}}$  имеет одинаковое число степеней свободы, равное k = N - m, поэтому несмещенные оценки дисперсий невязок и сигнала будут равны

$$\hat{u} = \frac{\hat{\mathbf{r}}' \mathbf{C}_{rr}^{-1} \hat{\mathbf{r}}}{N-m}, \quad \hat{v} = \frac{\hat{\mathbf{s}}' \mathbf{C}_{ss}^{-1} \hat{\mathbf{s}}}{N-m}.$$
(4.224)

С учетом (4.218)-(4.219) и (4.222)-(4.223) эти формулы принимают вид

$$\hat{u} = \frac{N-m}{R(\hat{u},\hat{v})}, \quad \hat{v} = \frac{N-m}{S(\hat{u},\hat{v})}, \quad (4.225)$$

где введены новые квадратичные формы

$$R(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{\mathbf{w}}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_{tt} \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{w}},$$
$$S(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{\mathbf{w}}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_{tt} \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{w}},$$

нелинейно зависящие от скалярных параметров  $(\hat{u}, \hat{v})$ .

Таким образом, для определения коллокационных оценок  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$  необходимо предварительно найти параметры  $(\hat{u}, \hat{v})$ , решив систему нелинейных уравнений (4.225). Для этого можно воспользоваться методом простых итераций [46, с. 191], в котором каждое новое приближение находится на основании предыдущего по формулам

$$\hat{u}_{k+1} = \frac{N-m}{R(\hat{u}_k, \hat{v}_k)}, \quad \hat{v}_{k+1} = \frac{N-m}{S(\hat{u}_k, \hat{v}_k)} \quad (k = 0, 1, ...). \quad (4.226)$$

Для ускорения сходимости этого итерационного процесса можно оценку  $\hat{u}_{k+1}$ , найденную из первого уравнения, использовать при решении второго уравнения. Тогда получим процесс

$$\hat{u}_{k+1} = \frac{N-m}{R(\hat{u}_k, \hat{v}_k)}, \quad \hat{v}_{k+1} = \frac{N-m}{S(\hat{u}_{k+1}, \hat{v}_k)} \quad (k = 0, 1, ...). \quad (4.227)$$

Итерационный процесс заканчивается, когда разности  $|\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k|$  и  $|\hat{v}_{k+1} - \hat{v}_k|$  становятся достаточно малыми. Тогда последнее приближение принимается за окончательные оценки дисперсий  $(\hat{u}, \hat{v})$ , с которыми по формулам (4.220) вычисляются ковариационные матрицы  $Q_{rr}, Q_{ss}$  и Q, а затем по формулам (4.218)–(4.219) находятся окончательные оценки параметров и сигнала. Однако сходимость метода простых двумерных итераций, вообще говоря, не гарантируется и существенно зависит от того, насколько точно выбрано начальное приближение ( $\hat{u}_0, \hat{v}_0$ ). Описание более сложных методов итераций можно найти в специальной литературе по численным методам.

Следует заметить, что коллокационные оценки невязок и сигнала, согласно (4.83), связаны между собой соотношениями, аналогичными стандартной формуле фильтрации (4.57):

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}_{rr} \mathbf{Q}_{u}^{-1} \hat{\mathbf{t}} = \frac{\hat{u}}{\hat{v}} \mathbf{C}_{rr} \mathbf{C}_{u}^{-1} \hat{\mathbf{t}},$$
 (4.228)

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{tt} \mathbf{Q}_{rr}^{-1} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\hat{v}}{\hat{u}} \mathbf{C}_{tt} \mathbf{C}_{rr}^{-1} \hat{\mathbf{r}},$$
 (4.229)

где  $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{s}}$  – стохастический вектор, отражающий влияние сигнала на данные наблюдений. Из выражения (4.229) ясно видно, что при постоянной дисперсии невязок  $\hat{\mathbf{u}}$  уровень (размах) оценки сигнала  $\hat{\mathbf{t}}$ пропорционален априорной оценке его дисперсии  $\hat{\mathbf{v}}$ . Это наводит на мысль о возможности упрощения описанного выше итерационного процесса. Действительно, в случае, когда модель (4.214) достаточно полная, невязки г можно отождествить со случайными некоррелированными ошибками наблюдений, дисперсия которых, как правило, оценивается по разбросу индивидуальных отсчетов в процессе каждого наблюдения (измерения). Эти оценки отражают так называемую аппаратурную, или внутреннюю, точность наблюдений. Очевидно, что это позволяет построить диагональную матрицу априорных ковариаций ошибок наблюдений вида  $\mathbf{Q}_{ii} = \text{diag}(\hat{u}_i), i = 1, 2, ..., N$ , поэтому определению подлежит лишь дисперсия сигнала  $\hat{v}$ , которую можно найти из итерационного процесса вида

$$\hat{v}_{k+1} = \frac{N-m}{S(\hat{v}_k)}$$
 (k = 0,1,...), (4.230)

где

$$S(\hat{v}_k) = \hat{\mathbf{w}}_k' \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{C}_{ii} \mathbf{Q}_k^{-1} \hat{\mathbf{w}}_k,$$
$$\hat{\mathbf{w}}_k = \mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}' \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{A}' \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{I},$$
$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{ii} + v_k \mathbf{C}_{ii}.$$

По-видимому, этот одномерный процесс будет сходиться лучше, чем двумерный процесс (4.226).

# Глава 5. КОЛЛОКАЦИОННОЕ УРАВНИВАНИЕ

### §1. Рекуррентная коллокация

Описанный в §8 и 9 предыдущей главы алгоритм двухгрупповой коллокации выгодно применять в двух случаях:

(а) когда размер обращаемой ковариационной матрицы Q, равный  $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$ , оказывается слишком большим, так как в двухгрупповом методе обращаются матрицы Q<sub>11</sub> и  $\overline{Q}_{22}$ , имеющие меньшие размеры  $N_1 \times N_1$  и  $N_2 \times N_2$  соответственно;

(б) когда данные наблюдений поступают в обработку последовательными порциями (фрагментами) и требуется непрерывно уточнять начальные оценки параметров по мере поступления новых данных. Такую процедуру будем называть рекуррентной коллокацией. Рассмотрим ее подробнее в общем виде.

Пусть требуется обработать совместно некоторую совокупность независимых серий наблюдений с номерами k = l, 2, ..., данные которых представляют собой последовательность векторов  $l_1, l_2, ...,$  имеющих длину  $N_1, N_2, ...$  соответственно. Предположим также, что данные каждой такой серии зависят только от глобальных параметров и сигналов, т.е. их стохастическая модель имеет вид

$$\mathbf{l}_{k} = \mathbf{A}_{k}\mathbf{x} + \mathbf{U}_{k}\mathbf{s} + \mathbf{r}_{k}, \quad \mathbf{Q}_{ss}, \mathbf{Q}_{rr}^{kk} \quad (k = 1, 2, \dots),$$
(5.1)

где  $x - m \times 1$ -вектор постоянных глобальных параметров, общих для всех серий,  $A_k - N_k \times m$ -матрица частных производных  $\partial l_k / \partial x$ ,  $s - p \times 1$ -вектор стохастического глобального "сигнала", общего для всех серий наблюдений,  $U_k - N_k \times p$ -матрица производных  $\partial l_k / \partial s$ , имеющая вид (4.53) или (4.54) в зависимости от типа сигнала (см. §4 гл. 4),  $r_k - N_k \times 1$ -вектор случайных невязок модели данных. Будем считать, что сигнал s и невязки  $r_k$  взаимно независимы и имеют известные а priori автоковариационные матрицы  $Q_{ss}$  и  $Q_{rr}^{kk}$  размерностью  $p \times p$ и  $N_k \times N_k$  соответственно.

Рассмотрим первую серию данных I. Их модель будет иметь вид

$$\mathbf{I}_{1} = \mathbf{A}_{1}\mathbf{x} + \mathbf{U}_{1}\mathbf{s} + \mathbf{r}_{1}, \quad \mathbf{Q}_{ss}, \mathbf{Q}_{ss}^{11}.$$
 (5.2)

СКК-оценки постоянных и стохастических параметров этой модели даются формулами (4.181) и (4.182):

$$\hat{\mathbf{x}}_{1} = \mathbf{P}_{1}^{-1} \mathbf{A}_{1}' \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{I}_{1}, \qquad (5.3)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{1} = \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}(\mathbf{I}_{1} - \mathbf{A}_{1}\hat{\mathbf{x}}_{1}), \qquad (5.4)$$

$$\mathbf{P}_{1} = \mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1}, \qquad (5.4)$$

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{rr}^{11} + \mathbf{Q}_{11}^{11}, \qquad (5.4)$$

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{rr}^{11} + \mathbf{Q}_{11}^{11}, \qquad (5.4)$$

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{rr}^{11} + \mathbf{Q}_{11}^{11}, \qquad (5.4)$$

Апостериорные ковариации оценок (5.3)-(5.4), определяемые формулами (4.197), (4.201) и (4.204), равны

$$\mathbf{D}_{xx,1} = \mathbf{P}_{1}^{-1} = (\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1})^{-1},$$
  

$$\mathbf{D}_{xx,1} = \mathbf{Q}_{xx} - \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{1}' + \mathbf{Q}_{1}\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{1}\mathbf{D}_{xx,1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{1}',$$
  

$$\mathbf{D}_{xx,1} = -\mathbf{D}_{xx,1}\mathbf{A}_{1}'\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_{1}'.$$
(5.5)

Пусть теперь мы имеем возможность к известному ранее вектору данных  $l_1$  длиной  $N_1$  *добавить* новый вектор  $l_2$  длиной  $N_2$ . Как показано в §8 гл. 4, с помощью новых данных можно получить уточненные оценки постоянных параметров и сигнала

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{x}}_1 + \Delta \hat{\mathbf{x}}_2, \quad \hat{\mathbf{s}}_2 = \hat{\mathbf{s}}_1 + \Delta \hat{\mathbf{s}}_2. \tag{5.6}$$

Поправки  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_2$  и  $\Delta \hat{\mathbf{y}}_2$  к первоначальным оценкам  $\hat{\mathbf{x}}_1$  и  $\hat{\mathbf{y}}_1$ , полученным по предыдущим данным  $\mathbf{l}_1$ , даются выражениями (4.179) и (4.180), которые с учетом (4.197) можно записать в виде

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{D}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_1} \overline{\mathbf{A}}_2 \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_2, \quad \Delta \hat{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}_1 = \overline{\mathbf{Q}}_2 \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_2. \tag{5.7}$$

Апостериорные ковариации новых оценок (5.6) даются формулами (4.184)-(4.192):

$$\mathbf{D}_{xx,2} = \mathbf{D}_{xx,1} + \Delta \mathbf{D}_{xx,2},$$
  

$$\mathbf{D}_{ss,2} = \mathbf{D}_{ss,1} + \Delta \mathbf{D}_{ss,2},$$
  

$$\mathbf{D}_{xs,2} = \mathbf{D}_{xs,1} + \Delta \mathbf{D}_{xs,2},$$
(5.8)

$$\Delta \mathbf{D}_{xx,2} = -\mathbf{D}_{xx,1} \overline{\mathbf{A}}_{2}' \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{D}_{xx,1},$$
  

$$\Delta \mathbf{D}_{xx,2} = -\overline{\mathbf{Q}}_{2} \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}_{2}',$$
  

$$\Delta \mathbf{D}_{xx,2} = -\mathbf{D}_{xx,1} \overline{\mathbf{A}}_{2}' \overline{\mathbf{Q}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}_{2}'.$$
(5.9)

Здесь, согласно обозначениям (4.155), (4.159), (4.162), (4.177) и (4.178), имеем

$$\overline{\mathbf{A}}_{2} = \mathbf{A}_{2} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{1},$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_{22} = \mathbf{Q}_{22} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_{12} + \overline{\mathbf{A}}_{2} \mathbf{D}_{xx,1} \overline{\mathbf{A}}_{2}',$$

$$\overline{\mathbf{I}}_{2} = \mathbf{I}_{2} - \mathbf{Q}_{21} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{I}_{1} - \overline{\mathbf{A}}_{2} \hat{\mathbf{x}}_{1},$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_{2} = \mathbf{Q}_{2} - \mathbf{Q}_{1} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_{12} - \mathbf{Q}_{1} \mathbf{Q}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{1} \mathbf{D}_{xx,1} \overline{\mathbf{A}}_{2}',$$

$$\mathbf{Q}_{22} = \mathbf{Q}_{rr}^{22} + \mathbf{U}_{2} \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}_{2}',$$

$$\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{Q}_{11}^{12} = \mathbf{U}_{1} \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}_{2}',$$

$$\mathbf{Q}_{2} = \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}_{2}'.$$
(5.10)

Здесь матрица  $\mathbf{Q}_2$  имеет размер  $p \times N_2$ , позтому и матрица  $\overline{\mathbf{Q}}_2$  будет иметь такой же размер. Это значит, что с помощью новых данных  $\mathbf{l}_2$  уточняется весь вектор сигнала  $\hat{\mathbf{s}}$ .

Формулы (5.6)–(5.10) легко обобщаются для любого шага рекуррентной коллокации. Заменяя в них индексы і и 2 соответственно на *k* и *k*+1, получаем

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \quad \hat{\mathbf{s}}_{k+1} = \hat{\mathbf{s}}_k + \Delta \hat{\mathbf{s}}_{k+1}.$$
(5.11)

Здесь  $\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{s}}_k$  – оценки, полученные на предыдущем шаге коллокации на основе всех предпествующих данных  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, ..., \mathbf{l}_k$   $(k \ge 1)$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k} = (\mathbf{A}_{k}' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{A}_{k})^{-1} \mathbf{A}_{k}' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{I}_{k},$$
  
$$\hat{\mathbf{s}}_{k} = \mathbf{Q}_{k} \mathbf{Q}_{kk}^{-1} (\mathbf{I}_{k} - \mathbf{A}_{k} \hat{\mathbf{x}}_{k}),$$
  
(5.12)

а  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ ,  $\Delta \hat{\mathbf{s}}_{k+1}$  – поправки за счет использования новых данных  $\mathbf{I}_{k+1}$ :

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{D}_{xx,k} \overline{\mathbf{A}}_{k+1}' \overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_{k+1},$$

$$\Delta \hat{\mathbf{s}}_{k+1} = \overline{\mathbf{Q}}_{k+1} \overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_{k+1}.$$
(5.13)

$$\mathbf{D}_{xx, k+1} = \mathbf{D}_{xx, k} + \Delta \mathbf{D}_{xx, k+1},$$
  

$$\mathbf{D}_{ss, k+1} = \mathbf{D}_{ss, k} + \Delta \mathbf{D}_{ss, k+1},$$
  

$$\mathbf{D}_{xs, k+1} = \mathbf{D}_{xs, k} + \Delta \mathbf{D}_{xs, k+1},$$
(5.14)

$$\Delta \mathbf{D}_{xx, k+1} = -\mathbf{D}_{xx, k} \overline{\mathbf{A}}_{k+1}' \overline{\mathbf{Q}}_{k+1, k+1}^{-1} \overline{\mathbf{A}}_{k+1} \mathbf{D}_{xx, k},$$

$$\Delta \mathbf{D}_{ss, k+1} = -\overline{\mathbf{Q}}_{k+1} \overline{\mathbf{Q}}_{k+1, k+1}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}_{k+1}',$$

$$\Delta \mathbf{D}_{xs, k+1} = -\mathbf{D}_{xx, k} \overline{\mathbf{A}}_{k+1}' \overline{\mathbf{Q}}_{k+1, k+1}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}_{k+1}',$$
(5.15)

$$\mathbf{D}_{xx,k} = (\mathbf{A}'_{k}\mathbf{Q}^{-1}_{k,k}\mathbf{A}_{k})^{-1},$$
  

$$\mathbf{D}_{ss,k} = \mathbf{Q}_{ss} - \mathbf{Q}_{k}\mathbf{Q}^{-1}_{k,k}\mathbf{Q}'_{k} + \mathbf{Q}_{k}\mathbf{Q}^{-1}_{k,k}\mathbf{A}_{k}\mathbf{D}_{xx,k}\mathbf{A}'_{k}\mathbf{Q}^{-1}_{k,k}\mathbf{Q}'_{k},$$
  

$$\mathbf{D}_{xs,k} = -\mathbf{D}_{xx,k}\mathbf{A}'_{k}\mathbf{Q}^{-1}_{k,k}\mathbf{Q}'_{k}.$$
(5.16)

При этом обозначения (5.10) принимают вид

$$\overline{\mathbf{A}}_{k+1} = \mathbf{A}_{k+1} - \mathbf{Q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{A}_{k},$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1} = \mathbf{Q}_{k+1,k+1} - \mathbf{Q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{Q}_{k,k+1} + \overline{\mathbf{A}}_{k+1} \mathbf{D}_{xx,k} \overline{\mathbf{A}}_{k+1}',$$

$$\overline{\mathbf{I}}_{k+1} = \mathbf{I}_{k+1} - \mathbf{Q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{I}_{k} - \overline{\mathbf{A}}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k},$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1} - \mathbf{Q}_{k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{Q}_{k,k+1} - \mathbf{Q}_{k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{A}_{k} \mathbf{D}_{xx,k} \overline{\mathbf{A}}_{k+1}',$$

$$\mathbf{Q}_{k+1,k+1} = \mathbf{Q}_{rr}^{k+1,k+1} + \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}_{k+1}',$$

$$\mathbf{Q}_{k,k+1} = \mathbf{U}_{k} \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}_{k+1}' = \mathbf{Q}_{k+1,k}',$$

$$\mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}_{k+1}'.$$
(5.17)

Выражение для  $\bar{I}_{k+1}$  из (5.17) с учетом (5.12) принимает вид

$$\bar{\mathbf{l}}_{k+1} = \mathbf{l}_{k+1} - \mathbf{Q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{l}_{k} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k} + \mathbf{Q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{A}_{k} \hat{\mathbf{x}}_{k} = 
= (\mathbf{l}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k}) - \mathbf{Q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} (\mathbf{l}_{k} - \mathbf{A}_{k} \hat{\mathbf{x}}_{k}) = 
= \mathbf{l}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k} - \mathbf{U}_{k+1} \hat{\mathbf{s}}_{k},$$
(5.18)

откуда видно, что этот вектор представляет собой прогноз невязки новых данных наблюдений l<sub>k+1</sub>, полученный с помощью предыдущих оценок параметров и сигналов. Вводя теперь  $m \times N_k$ -матрицу усиления (см. также формулу (3.148) в §8 гл. 3)

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{D}_{xx,k} \overline{\mathbf{A}}_{k+1}' \overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1}^{-1}, \qquad (5.19)$$

процедуру рекуррентной коллокации для постоянных параметров можно представить в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{I}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k} - \mathbf{U}_{k+1} \hat{\mathbf{s}}_{k}).$$
(5.20)

Аналогичную формулу можно получить и для рекуррентного оценивания сигнала. Используя (5.11)–(5.13) и вводя соответствующую матрицу усиления размерностью  $p \times N_k$ 

$$\mathbf{M}_{k+1} = \overline{\mathbf{Q}}_{k+1} \overline{\mathbf{Q}}_{k+1,k+1}^{-1}, \qquad (5.21)$$

имеем

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1} = \hat{\mathbf{s}}_{k} + \mathbf{M}_{k+1} (\mathbf{I}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k} - \mathbf{U}_{k+1} \hat{\mathbf{s}}_{k}).$$
(5.22)

Формулы для апостериорных ковариаций (5.14)–(5.16) тоже можно представить в рекуррентном виде. Учитывая обозначения (5.17) и формулы (5.16), убеждаемся, что

$$\overline{\mathbf{Q}}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1} - \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{Q}_{k,k+1} + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{D}_{xx,k} \mathbf{A}'_k \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{Q}_{k,k+1} - -\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{A}_k \mathbf{D}_{xx,k} \mathbf{A}'_k = \mathbf{D}_{ss,k} \mathbf{U}'_{k+1} + \mathbf{D}_{sx,k} \mathbf{A}'_{k+1}.$$
(5.23)

После этого путем простых преобразований формул (5.14)-(5.15) находим

$$D_{xx,k+1} = D_{xx,k} - K_{k+1} (A_{k+1} D_{xx,k} + U_{k+1} D_{sx,k}),$$
  

$$D_{ss,k+1} = D_{ss,k} - M_{k+1} (A_{k+1} D_{xs,k} + U_{k+1} D_{ss,k}),$$
  

$$D_{xs,k+1} = D_{xs,k} - K_{k+1} (A_{k+1} D_{xs,k} + U_{k+1} D_{ss,k}).$$
(5.24)

Перейдем теперь к оцениванию невязок модели данных. На *k*-м шаге уравнивания эти невязки, согласно (4.184)–(4.185), имеют вид

$$\hat{\mathbf{r}}_{k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{1k} \\ \hat{\mathbf{r}}_{2k} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{11} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{12} + \dots + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{1k} \\ \hat{\mathbf{r}}_{21} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{22} + \dots + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{2k} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_{k1} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{k2} + \dots + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{kk} \end{bmatrix}.$$
(5.25)

Отсюда видно, что *j*-я компонента вектора невязок на *k*-м шаге уравнивания равна

$$\hat{\mathbf{r}}_{j,k} = \hat{\mathbf{r}}_{j,1} + \sum_{i=2}^{k} \Delta \hat{\mathbf{r}}_{j,i} \quad (j = 1, 2, ..., k),$$
 (5.26)

где

$$\hat{\mathbf{r}}_{j,l} = \mathbf{l}_j - \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{x}}_l - \mathbf{U}_j \hat{\mathbf{s}}_l, \qquad (5.27)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{r}}_{j,i} = -\mathbf{A}_j \Delta \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{U}_j \Delta \hat{\mathbf{s}}_i.$$
 (5.28)

На (k+i)-м шаге все предыдущие компоненты вектора невязок (5.25) с номерами j = 1, 2, ..., k уточняются поправками  $\Delta \hat{\mathbf{r}}_{j,k+1}$  и к ним добавляется новая компонента  $\hat{\mathbf{r}}_{k+1,k+1}$ , поэтому

$$\hat{\mathbf{r}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{1,k+1} \\ \hat{\mathbf{r}}_{2,k+1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_{k,k+1} \\ \hat{\mathbf{r}}_{k+1,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_{11} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{12} + \ldots + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{1k} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{1,k+1} \\ \hat{\mathbf{r}}_{21} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{22} + \ldots + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{2,k} + \Delta \hat{\mathbf{r}}_{2,k+1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_{k+1,k+1} \\ \hat{\mathbf{r}}_{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$
(5.29)

В этом случае выражение (5.26) принимает вид

$$\hat{\mathbf{r}}_{j,k+1} = \hat{\mathbf{r}}_{j,1} + \sum_{i=2}^{k+1} \Delta \hat{\mathbf{r}}_{j,i} \quad (j = 1, 2, \dots, k+1),$$
(5.30)

а выражения (5.27)-(5.28) сохраняют свою форму.

Для оценки автоковариаций полученных невязок обобщим формулы (4.206)–(4.209) и (4.213)–(4.215) на случай последовательной коллокации. На (k+1)-м шаге уравнивания, очевидно, имеем

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} & \mathbf{U}_{1} \\ \mathbf{A}_{2} & \mathbf{U}_{2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k+1} & \mathbf{U}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} \\ \mathbf{B}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{k+1} \end{bmatrix},$$

поэтому

$$\mathbf{D}_{rr,k+1} = \mathbf{B}\mathbf{D}_{yy,k+1}\mathbf{B}',$$

#### что можно записать в развернутом виде
$$\mathbf{D}_{tr,k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{1} & \mathbf{B}_{1} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{2} & \mathbf{B}_{1} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{k+1} \\ \mathbf{B}_{2} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{1} & \mathbf{B}_{2} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{2} & \mathbf{B}_{1} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{1} & \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{2} & \cdots & \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{D}_{yy,2} \mathbf{B}'_{k+1} \end{bmatrix}$$

или

$$\mathbf{D}_{rr,k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{rr,2}^{11} & \mathbf{D}_{rr,2}^{12} & \cdots & \mathbf{D}_{rr,2}^{1,k+1} \\ \mathbf{D}_{rr,2}^{21} & \mathbf{D}_{rr,2}^{22} & \cdots & \mathbf{D}_{rr,2}^{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{rr,2}^{k+1,1} & \mathbf{D}_{rr,2}^{k+1,2} & \cdots & \mathbf{D}_{rr,2}^{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$

В эти формулы входит матрица апостериорных автоковариаций искомых параметров и сигнала

$$\mathbf{D}_{yy,k+l} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx,k+l} & \mathbf{D}_{xs,k+l} \\ \mathbf{D}_{sx,k+l} & \mathbf{D}_{ss,k+l} \end{bmatrix},$$
(5.31)

элементы которой определяются формулами (5.14)-(5.15). Эту матрицу можно представить в виде

$$\mathbf{D}_{yy,k+1} = \mathbf{D}_{yy,k} + \Delta \mathbf{D}_{yy,k+1} \quad (k \ge 1),$$
(5.32)

где матрица

$$\mathbf{D}_{yy,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx,k} & \mathbf{D}_{xs,k} \\ \mathbf{D}_{sx,k} & \mathbf{D}_{ss,k} \end{bmatrix}$$

#### находится на предыдущем шаге уравнивания, а матрица

$$\Delta \mathbf{D}_{yy,k+1} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D}_{xx,k+1} & \Delta \mathbf{D}_{xs,k+1} \\ \Delta \mathbf{D}_{sx,k+1} & \Delta \mathbf{D}_{ss,k+1} \end{bmatrix}$$

с элементами (5.15) представляет собой ее уточнение на следующем шаге.

Размер матрицы (5.31) равен  $(m+p) \times (m+p)$  и не зависит от номера шага уравнивания. Однако матрица В с каждым новым шагом уравнивания увеличивает свою длину на  $N_{k+1}$  строк при фиксированном количестве столбцов, равном (m+p). Отсюда следует, что растет и размер матрицы ковариаций невязок  $D_{m,k+1}$ . Аналогичным образом, обобщая формулы (4.214) и (4.216), находим ковариации невязок с параметрами и сигналом. На (*k*+1)-м шаге уравнивания эти ковариации примут вид

$$\mathbf{D}_{\mathbf{y},\mathbf{k}+\mathbf{l}} = -\mathbf{B}\mathbf{D}_{\mathbf{y},\mathbf{k}+\mathbf{l}}.$$
 (5.33)

В развернутой форме это выражение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{D}_{ry,k+l} = -\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{l} \mathbf{D}_{ry,k+l} \\ \mathbf{B}_{2} \mathbf{D}_{ry,k+l} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{k+l} \mathbf{D}_{ry,k+l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ry,k+l}^{(1)} \\ \mathbf{D}_{ry,k+l}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{ry,k+l}^{(k+l)} \end{bmatrix}.$$
 (5.34)

## §2. Последовательная коллокация

Изложенный выше алгоритм рекуррентной коллокации можно применять даже в том случае, когда новые данные представляют собой не вектор  $l_{k+1}$ , а только одно наблюдение в виде скаляра  $l_{k+1}$ . Такой алгоритм будем называть последовательной коллокацией. Очевидно, что в этом случае  $N_{k+1} = 1$ , и поэтому матрицы  $A_{k+1}$  и  $U_{k+1}$  становятся строками

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+1}', \quad \mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1}'$$

длиной т и р соответственно. Тогда формулы (5.17) примут вид

$$\overline{\mathbf{a}}_{k+1}' = \mathbf{a}_{k+1}' - \mathbf{q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{A}_{k},$$

$$\overline{q}_{k+1,k+1} = q_{k+1,k+1} - \mathbf{q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{q}_{k,k+1} + \overline{\mathbf{a}}_{k+1}' \mathbf{D}_{xx,k} \overline{\mathbf{a}}_{k+1},$$

$$\overline{l}_{k+1} = l_{k+1} - \mathbf{q}_{k+1,k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{l}_{k} - \overline{\mathbf{a}}_{k+1}' \widehat{\mathbf{x}}_{k},$$

$$\overline{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{Q}_{k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{q}_{k,k+1} - \mathbf{Q}_{k} \mathbf{Q}_{k,k}^{-1} \mathbf{A}_{k} \mathbf{D}_{xx,k} \overline{\mathbf{a}}_{k+1},$$

$$q_{k+1,k+1} = q_{rr}^{k+1,k+1} + \mathbf{u}_{k+1}' \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{u}_{k+1},$$

$$q_{k,k+1} = \mathbf{U}_{k} \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{u}_{k+1},$$

$$q_{k+1} = \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{u}_{k+1}.$$
(5.35)

В этих условиях рекуррентное оценивание выполняется по следующим формулам:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{k}_{k+1} (l_{k+1} - \mathbf{a}'_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{u}'_{k+1} \hat{\mathbf{s}}_k), \qquad (5.36)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1} = \hat{\mathbf{s}}_{k} + \mathbf{m}_{k+1} (I_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1}' \hat{\mathbf{x}}_{k} - \mathbf{u}_{k+1}' \hat{\mathbf{s}}_{k}), \qquad (5.37)$$

$$D_{xx,k+1} = D_{xx,k} - k_{k+1} (a'_{k+1}D_{xx,k} + u'_{k+1}D_{sx,k}),$$
  

$$D_{ss,k+1} = D_{ss,k} - m_{k+1} (a'_{k+1}D_{xs,k} + u'_{k+1}D_{ss,k}),$$
  

$$D_{xs,k+1} = D_{xs,k} - k_{k+1} (a'_{k+1}D_{xs,k} + u'_{k+1}D_{ss,k}),$$
(5.38)

где

$$\mathbf{k}_{k+1} = \mathbf{D}_{xx,k} \overline{\mathbf{a}}_{k+1} \overline{g}_{k+1,k+1}^{-1}, \tag{5.39}$$

$$\mathbf{m}_{k+1} = \overline{\mathbf{q}}_{k+1} \overline{q}_{k+1,k+1}^{-1}.$$
(5.40)

В формулах (5.35)–(5.40), как обычно, курсивом обозначены скаляры, строчными полужирыми буквами – векторы, а прописными полужирными буквами – матрицы. В частности, вектор-столбец  $q_{k+1}$  имеет длину *p*. Такую же длину имеет и вектор  $\overline{q}_{k+1}$ , поэтому даже с помощью только одного нового наблюдения  $l_{k+1}$  уточняется весь вектор сигнала s. То же относится и к вектору параметров x. Заметим также, что все матрицы, входящие в эти формулы и помеченные индексом *k*, вычисляются на предыдущем шаге коллокации.

Длина  $N_1$  первого вектора данных  $l_1$ , с помощью которого по формулам (5.3)–(5.4) находятся начальные СКК-оценки  $\hat{\mathbf{x}}_1$  и  $\hat{\mathbf{s}}_1$ , должна быть не меньше числа постоянных параметров *m*, входящих в вектор х. Только в этом случае матрица  $\mathbf{P}_1$  будет иметь полный ранг и можно вычислить обратную ей матрицу  $\mathbf{P}_1^{-1}$ , используемую в (5.3). Когда новые данные наблюдений включаются в процедуру последовательной коллокации поодиночке, то, как видно из формул (5.35)– (5.40), никаких новых обращений матриц уже не требуется.

Из формул (5.25)–(5.30) видно, что при любой рекуррентной процедуре коллокации начальная компонента вектора невязок, соответствующая первой группе данных **l**<sub>1</sub>, остается вектором постоянной длины N<sub>1</sub> на всех шагах уравнивания:

$$\hat{\mathbf{r}}_{l,k+1} = \hat{\mathbf{r}}_{l\,l} + \sum_{i=2}^{k+1} \Delta \hat{\mathbf{r}}_{l,i} , \qquad (5.41)$$

так как

$$\hat{\mathbf{r}}_{11} = \mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{U}_1 \hat{\mathbf{s}}_1$$
(5.42)

И

$$\Delta \hat{\mathbf{r}}_{1,i} = -\mathbf{A}_1 \Delta \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{U}_1 \Delta \hat{\mathbf{s}}_i \tag{5.43}$$

являются векторами длиной N<sub>1</sub>. Поскольку при последовательной коллокации имеем

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{a}_2' & \mathbf{u}_2' \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{k+1}' & \mathbf{u}_{k+1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{b}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{k+1}' \end{bmatrix},$$
(5.44)

где a', u', - векторы-строки длиной m и p, то все остальные компоненты вектора невязок  $\hat{\mathbf{r}}_{k+1}$  в формуле (5.29) являются скалярами

$$\hat{r}_{j,k+1} = \hat{r}_{j,1} + \sum_{i=2}^{k+1} \Delta \hat{r}_{j,i} \quad (j = 2, 3, \dots, k+1),$$
(5.45)

так как при  $j \ge 2$  величины

$$\hat{\mathbf{r}}_{j,1} = l_j - \mathbf{a}'_j \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{u}'_j \hat{\mathbf{s}}_1, \qquad (5.46)$$

$$\Delta \hat{r}_{j,l} = -\mathbf{a}'_j \Delta \hat{\mathbf{x}}_l - \mathbf{u}'_j \Delta \hat{\mathbf{s}}_i \tag{5.47}$$

тоже становятся скалярами.

Что касается апостериорных автоковариаций этих оценок, то с учетом (5.44) их можно представить в виде симметричной матрицы

$$\mathbf{D}_{rr,k+1} = \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{D}_{yy,k+1} \mathbf{B}_{k+1}' = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{rr,k+1}^{11} & \mathbf{d}_{rr,k+1}^{12} & \cdots & \mathbf{d}_{rr,k+1}^{1,k+1} \\ \mathbf{d}_{rr,k+1}^{21} & \mathbf{d}_{rr,k+1}^{22} & \cdots & \mathbf{d}_{rr,k+1}^{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{d}_{rr,k+1}^{k+1,1} & \mathbf{d}_{rr,k+1}^{k+1,2} & \cdots & \mathbf{d}_{rr,k+1}^{k+1,k+1} \end{bmatrix},$$
(5.48)

где

$$\mathbf{D}_{rr,k+1}^{11} = \mathbf{B}_{1}\mathbf{D}_{rr,k+1}\mathbf{B}_{1}^{\prime}$$
(5.49)

.. ...

представляет собой  $N_1 \times N_1$ -матрицу,

$$\mathbf{d}_{rr,k+1}^{1,j} = \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{yy,k+1} \mathbf{b}_j \quad (j = 2, 3, \dots, k+1)$$
(5.50)

суть векторы-столбцы длиной N<sub>1</sub>,

$$\mathbf{d}_{rr,k+1}^{i,1} = (\mathbf{d}_{rr,k+1}^{1,l})' = \mathbf{b}_i' \mathbf{D}_{yy,k+1} \mathbf{B}_1' \quad (i = 2, 3, \dots, k+1)$$
(5.51)

суть векторы-строки той же длины, а

$$d_{rr,k+1}^{i,j} = \mathbf{b}_i' \mathbf{D}_{yy,k+1} \mathbf{b}_j \quad (i, j = 2, 3, \dots, k+1)$$
(5.52)

являются скалярами.

Для вычисления ковариаций невязок с параметрами и сигналом воспользуемся формулами (5.33)–(5.34):

$$\mathbf{D}_{ry,k+1} = -\mathbf{B}_{k+1}\mathbf{D}_{yy,k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ry,k+1}^{(1)} \\ \mathbf{d}_{ry,k+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{ry,k+1}^{(k+1)} \end{bmatrix},$$
(5.53)

где

$$\mathbf{D}_{y,k+1}^{(1)} = -\mathbf{B}_{1}\mathbf{D}_{yy,k+1}$$
(5.54)

есть  $N_1 \times (m+p)$ -матрица, а

$$\mathbf{d}_{\mathbf{y},\mathbf{k}+1}^{(j)} = -\mathbf{b}_{j}^{\prime} \mathbf{D}_{\mathbf{y},\mathbf{y},\mathbf{k}+1} \quad (j = 2, 3, \dots, k+1)$$
(5.55)

суть векторы-строки длиной (m + p).

#### §3. Многогрупповая коллокация

Изложенный в §1 настоящей главы рекуррентный метод коллокации служит для оценивания только глобальных параметров и сигналов, общих для всех серий наблюдений. Рассмотрим теперь случай многогрупповой коллокации, когда модель данных содержит несколько групп параметров – глобальные параметры х, локальные параметры у<sub>k</sub> и локальные сигналы s<sub>k</sub>, зависящие от номера серии k. Такую модель можно записать в виде

$$\mathbf{I}_{k} = \mathbf{A}_{k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{k}\mathbf{y}_{k} + \mathbf{U}_{k}\mathbf{s}_{k} + \mathbf{r}_{k}, \quad \mathbf{Q}_{ss}^{kk}, \mathbf{Q}_{rr}^{kk} \quad (k = 1, 2, ...),$$
 (5.56)

где  $\mathbf{l}_k, \mathbf{x}, \mathbf{y}_k, \mathbf{s}_k, \mathbf{r}_k$  – векторы длиной  $N_k, m, n_k, p_k$  и  $N_k$  соответственно.

Будем считать, что сигналы s<sub>k</sub> и невязки r<sub>k</sub> по-прежнему независимы, поэтому их ковариации удовлетворяют следующим условиям:

$$\operatorname{cov}(\mathbf{s}_{i}, \mathbf{s}_{j}) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{ss}^{kk} & \operatorname{при} i = j = k, \\ \mathbf{0} & \operatorname{прu} i \neq j, \end{cases}$$
$$\operatorname{cov}(\mathbf{r}_{i}, \mathbf{r}_{j}) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{rr}^{kk} & \operatorname{прu} i = j = k, \\ \mathbf{0} & \operatorname{прu} i \neq j, \end{cases}$$
$$\operatorname{cov}(\mathbf{s}_{i}, \mathbf{r}_{j}) = \mathbf{0} \text{ при всех } i, j = 1, 2, \dots. \end{cases}$$
(5.57)

Поскольку векторы параметров х и у<sub>к</sub> в выражении (5.56) не являются случайными, то из условий (5.57) следует также

$$\operatorname{cov}(\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{kk} & \text{при } i = j = k, \\ \mathbf{0} & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$
(5.58)

где

$$\mathbf{Q}_{kk} = \mathbf{Q}_{\prime\prime}^{kk} + \mathbf{U}_k \mathbf{Q}_{ss}^{kk} \mathbf{U}_k^{\prime}, \qquad (5.59)$$

поэтому данные наблюдений разных серий являются независимыми. Если теперь ввести составной вектор параметров

$$\mathbf{z}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_{k} \end{bmatrix}, \tag{5.60}$$

то модель (5.56) можно записать в более компактном виде:

$$\mathbf{I}_{k} = \mathbf{C}_{k} \mathbf{z}_{k} + \mathbf{U}_{k} \mathbf{s}_{k} + \mathbf{r}_{k}, \quad \mathbf{Q}_{ss}^{kk}, \mathbf{Q}_{rr}^{kk} \quad (k = 1, 2, \dots),$$
(5.61)

где  $\mathbf{C}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k} & \mathbf{B}_{k} \end{bmatrix}$  есть блочная матрица размером  $N_{k} \times (m + n_{k})$ .

Предположим вначале, что мы имеем возможность оценить параметры  $z_k$  и сигналы  $s_k$  из обработки каждой серии наблюдений. Тогда по формулам (4.82) имеем приближенные оценки

$$\bar{\mathbf{z}}_k = \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{C}_k' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{I}_k, \qquad (5.62)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_{k} = \mathbf{Q}_{k} \mathbf{Q}_{kk}^{-1} (\mathbf{l}_{k} - \mathbf{C}_{k} \tilde{\mathbf{z}}_{k}), \qquad (5.63)$$

где

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{C}_k' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{C}_k, \qquad (5.64)$$

$$\mathbf{Q}_{k} = \mathbf{Q}_{ss}^{kk} \mathbf{U}_{k}^{\prime}. \tag{5.65}$$

Апостериорные ковариации предварительных оценок (5.62)–(5.63) определяются формулами (5.5):

$$\tilde{\mathbf{D}}_{zz,k} = \mathbf{P}_{k}^{-1} = (\mathbf{C}_{k}' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{C}_{k})^{-1}, \qquad (5.66)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{ss,k} = \mathbf{Q}_{ss}^{kk} - \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{Q}'_k + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{D}}_{zz,k} \mathbf{C}'_k \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{Q}'_k, \qquad (5.67)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{zs,k} = -\tilde{\mathbf{D}}_{zz,k} \mathbf{C}'_{k} \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{Q}'_{k}.$$
(5.68)

Из формулы (5.62) видно, что оценки параметров  $\tilde{z}_k$  зависят не от самих сигналов  $s_k$ , а только от их априорных автоковариаций  $Q_{ss}^{kk}$ , поэтому дальнейшее уравнивание параметров и сигналов можно выполнять совершенно независимо. Более того, на первом зтапе оценки сигналов  $\tilde{s}_k$  можно вообще не вычислять.

Получим теперь предварительные оценки глобальных и локальных параметров раздельно. Согласно формуле (5.64), имеем

$$\mathbf{P}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k}' \\ \mathbf{B}_{k}' \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k} & \mathbf{B}_{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k}' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{A}_{k} & \mathbf{A}_{k}' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{B}_{k} \\ \mathbf{B}_{k}' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{A}_{k} & \mathbf{B}_{k}' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{B}_{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k} & \mathbf{H}_{k} \\ \mathbf{H}_{k}' & \mathbf{G}_{k} \end{bmatrix}.$$
(5.69)

поэтому, учитывая формулы (5.60) и (5.62) и используя алгоритм (2.75)–(2.76) двухгруппового МНК (см. §5 гл. 2), находим

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k} = (\mathbf{F}_{k} - \mathbf{H}_{k}\mathbf{G}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k}')^{-1}(\mathbf{f}_{k} - \mathbf{H}_{k}\mathbf{G}_{k}^{-1}\mathbf{g}_{k}), \qquad (5.70)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{G}_k^{-1}(\mathbf{g}_k - \mathbf{H}'_k \bar{\mathbf{x}}_k), \qquad (5.71)$$

где

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{A}'_k \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{l}_k, \quad \mathbf{g}_k = \mathbf{B}'_k \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{l}_k. \tag{5.72}$$

Апостериорная ковариация предварительной оценки глобальных параметров (5.70), очевидно, равна

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx},k} = (\mathbf{F}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{H}_k')^{-1}.$$
 (5.73)

Далее, в соответствии с формулами (5.66) и (5.69), находим

$$\tilde{\mathbf{D}}_{zz,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k & \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}'_k & \mathbf{G}_k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{H}'_k)^{-1} & -(\mathbf{F}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{H}'_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{G}_k^{-1} \\ -(\mathbf{G}_k - \mathbf{H}'_k \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}'_k \mathbf{F}_k^{-1} & (\mathbf{G}_k - \mathbf{H}'_k \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \end{bmatrix},$$

откуда по формулам (2.75) и (2.71) получаем

$$\tilde{\mathbf{D}}_{zz,k} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{xx,k} & \tilde{\mathbf{D}}_{xy,k} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{yx,k} & \tilde{\mathbf{D}}_{yy,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{xx,k} & -\tilde{\mathbf{D}}_{xx,k} \mathbf{H}_k \mathbf{G}_k^{-1} \\ -\mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{H}_k' \bar{\mathbf{D}}_{xx,k} & \mathbf{G}_k^{-1} + \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{H}_k' \bar{\mathbf{D}}_{xx,k} \mathbf{H}_k \mathbf{G}_k^{-1} \end{bmatrix}.$$
(5.74)

Апостериорные автоковариации оценок сигналов и их ковариации с оценками параметров (5.70) и (5.71) по-прежнему вычисляются по формулам (5.67) и (5.68) с учетом (5.74).

Поскольку, согласно (5.58), данные наблюдений разных серий независимы, то и полученные по эти данным оценки  $\bar{x}_k$  глобальных параметров х тоже являются независимыми. Это значит, что для их дальнейшего уравнивания можно применить рекуррентный алгоритм последовательного МНК (см. §8 гл. 3). Для этого необходимо, чтобы существовала хотя бы одна начальная оценка  $\bar{x}_k$  (например, для k=1). Тогда, согласно формулам (3.155)–(3.157), имеем следующий рекуррентный процесс:

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{l}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \bar{\mathbf{x}}_k), \qquad (5.75)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{xx,k+1} = \tilde{\mathbf{D}}_{xx,k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1} \tilde{\mathbf{D}}_{xx,k}, \qquad (5.76)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \bar{\mathbf{D}}_{xx,k} \mathbf{A}'_{k+1} (\mathbf{Q}_{k+1,k+1} + \mathbf{A}_{k+1} \bar{\mathbf{D}}_{xx,k} \mathbf{A}'_{k+1})^{-1}.$$
 (5.77)

Начальная матрица апостериорных ковариаций глобальных параметров  $\tilde{\mathbf{D}}_{xx,k}$  может быть получена в процессе оценивания их начальных значений  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  по формуле (5.73), а матрица априорных ковариаций текущих данных  $\mathbf{Q}_{k+1,k+1}$  определяется по формуле (5.59):

$$\mathbf{Q}_{k+1,k+1} = \mathbf{Q}_{rr}^{k+1,k+1} + \mathbf{U}_{k+1}\mathbf{Q}_{ss}^{k+1,k+1}\mathbf{U}_{k+1}' .$$
(5.78)

Если количество серий данных ограничено и равно M, то, повторяя подобные итерации до k+1 = M, находим окончательную оценку глобальных параметров  $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_M$ . Используя ее вместо предварительных оценок  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ , сначала по формуле (5.71) получаем все локальные параметры

$$\hat{\mathbf{y}}_{k} = \mathbf{G}_{k}^{-1}(\mathbf{g}_{k} - \mathbf{H}_{k}'\hat{\mathbf{x}}), \qquad (5.79)$$

а затем по формуле (5.63) – и все локальные сигналы

$$\hat{\mathbf{s}}_{k} = \mathbf{Q}_{k} \mathbf{Q}_{kk}^{-1} (\mathbf{l}_{k} - \mathbf{A}_{k} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}_{k} \hat{\mathbf{y}}_{k}).$$
(5.80)

Поскольку апостериорная автоковариация окончательной оценки глобальных параметров  $\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_M$ , определяемая вместе с ней в конце рекуррентного процесса по формуле (5.76), равна  $\mathbf{D}_{xx} = \tilde{\mathbf{D}}_{xx,M}$ , то ковариации окончательных оценок локальных параметров и сигналов, согласно формулам (5.74) и (5.67)–(5.68), будут иметь вид

$$\mathbf{D}_{zz,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx} & \mathbf{D}_{xy,k} \\ \mathbf{D}_{yx,k} & \mathbf{D}_{yy,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{xx} & -\mathbf{D}_{xx}\mathbf{H}_{k}\mathbf{G}_{k}^{-1} \\ -\mathbf{G}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k}'\mathbf{D}_{xx} & \mathbf{G}_{k}^{-1} + \mathbf{G}_{k}^{-1}\mathbf{H}_{k}'\mathbf{D}_{xx}\mathbf{H}_{k}\mathbf{G}_{k}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

$$\mathbf{D}_{ss,k} = \mathbf{Q}_{ss}^{kk} - \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{Q}_k' + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{D}_{zz,k} \mathbf{C}_k' \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{Q}_k', \qquad (5.82)$$

$$\mathbf{D}_{zs,k} = -\mathbf{D}_{zz,k} \mathbf{C}'_k \mathbf{Q}_{kk}^{-1} \mathbf{Q}'_k.$$
(5.83)

Если все локальные сигналы  $s_k$  имеют общую природу и одну и ту же матрицу априорных автоковариаций  $Q_{ss}$ , то во всех предыдущих формулах можно положить  $Q_{ss}^{kk} = Q_{ss}$ .

Однако используемое выше предположение о возможности предварительного оценивания глобальных параметров по данным хотя бы только одной единственной серии наблюдений является весьма проблематичным, что объясняется самой природой этих параметров, обычно связанных с глобальными системами отсчета на небе и на Земле, а также спецификой (ограниченностью зоны обзора) наземных наблюдений, особенно в оптической астрометрии.

В связи с этим рассмотрим далее более общий случай, когда все без исключения матрицы

$$\mathbf{P}_{xx,k} = (\mathbf{F}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{H}_k') \quad (k = 1, 2, ...)$$
(5.84)

плохо обусловлены и поэтому невозможно получить ни одной предварительной оценки  $\tilde{x}_k$ , а значит, невозможно воспользоваться и описанным выше рекуррентным процессом. Для решения этой более сложной проблемы применим метод обобщенного среднего, изложенный в §7 и 8 гл. 3.

Примем матрицы  $P_{xx,k}$  в качестве веса гипотетически возможных оценок  $\bar{x}_k$ . Тогда, учитывая, что все эти оценки независимы, по формулам (3.164)–(3.165) получим следующую среднюю взвешенную оценку для произвольного количества серий данных:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \left[\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{P}_{xx,i}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{P}_{xx,i} \tilde{\mathbf{x}}_{i} = \left[\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{P}_{xx,i}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{h}_{i}, \qquad (5.85)$$

где, согласно (5.70),

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{g}_i. \tag{5.86}$$

Формула (5.85) справедлива при любом  $k \ge 1$  и поэтому может использоваться в режиме последовательного уравнивания. Эта формула не требует обращения плохо обусловленных индивидуальных весовых матриц  $\mathbf{P}_{xx,i}$ . Только в самом конце процесса уравнивания, когда индекс k+1 достигает максимального значения M, равного суммарному количеству имеющихся серий данных, необходимо выполнить обращение суммарной матрицы, которая всегда имеет лучшую обусловленность. Полагая в формуле (5.85) k+1=M, находим окончательную оценку глобальных параметров

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{\mathcal{M}} = \left[\sum_{i=1}^{M} \mathbf{P}_{\mathbf{x}\mathbf{x},i}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{M} \mathbf{h}_{i} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{h}$$
(5.87)

и ее апостериорную автоковариацию

$$\mathbf{D}_{xx} = \left[\sum_{i=1}^{M} \mathbf{P}_{xx,i}\right]^{-1} = \mathbf{P}^{-1}.$$
 (5.88)

### §4. Глобальная коллокация

Рассмотрим теперь наиболее общий случай коллокационного уравнивания, когда данные наблюдений зависят как от локальных, так и от глобальных параметров и сигналов. Линейную модель таких данных можно представить в виде

$$\mathbf{l}_{k} = \mathbf{A}_{k}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{k}\mathbf{y}_{k} + \mathbf{C}_{k}\mathbf{u} + \mathbf{D}_{k}\mathbf{v}_{k} + \mathbf{r}_{k}, \quad \mathbf{Q}_{uu}, \mathbf{Q}_{vv}^{kk}, \mathbf{Q}_{rr}^{kk}, \quad (5.89)$$

где  $l_k = (l_i)_k$   $(i = 1, 2, ..., N_k)$  – вектор данных k-й серии наблюдений, x –  $m \times 1$ -вектор постоянных глобальных параметров,  $A_k - N_k \times m$ матрица частных производных  $\partial l_k / \partial x$ ,  $y_k - n_k \times 1$ -вектор постоянных локальных параметров,  $B_k - N_k \times n_k$ -матрица частных производных  $\partial l_k / \partial y_k$ ,  $u - p \times 1$ -вектор глобального стохастического сигнала,  $v_k - q_k \times 1$ -вектор локального стохастического сигнала,  $C_k - N_k \times p$ - матрица частных производных  $\partial l_k / \partial u$ ,  $D_k - N_k \times q_k$ -матрица частных производных  $\partial l_k / \partial v_k$ ,  $r_k - N_k \times l$ -вектор случайных невязок модели данных. Вид матриц  $C_k$  и  $D_k$  определяется формулами (4.66) или (4.67) в зависимости от типа соответствующих сигналов (см. §5 гл. 4).

Будем считать, что сигналы и,  $v_k$  и невязки  $r_k$  (k = 1, 2, ...) не зависят друг от друга, поэтому их априорные взаимные ковариации отсутствуют, а матрицы априорных автоковариаций  $Q_{uu}, Q_{vv}^{kk}$  и  $Q_{rr}^{kk}$ имеют размеры  $p \times p$ ,  $q_k \times q_k$  и  $N_k \times N_k$  соответственно. Естественно, что матрица  $Q_{uu}$ , как и сам глобальный сигнал, не зависит от номера серии k. Эти условия можно записать в следующей форме:

$$\operatorname{cov}(\mathbf{r}_{k},\mathbf{r}_{j}) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{rr}^{kk} & \operatorname{при} k = j, \\ 0 & \operatorname{прu} k \neq j, \end{cases} \quad \operatorname{cov}(\mathbf{v}_{k},\mathbf{v}_{j}) = \begin{cases} \mathbf{Q}_{vv}^{kk} & \operatorname{прu} k = j, \\ 0 & \operatorname{пpu} k \neq j, \end{cases}$$
$$\operatorname{cov}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \mathbf{Q}_{uu}, \quad \operatorname{cov}(\mathbf{v}_{k},\mathbf{r}_{j}) = \operatorname{cov}(\mathbf{u},\mathbf{r}_{k}) = \operatorname{cov}(\mathbf{u},\mathbf{v}_{k}) = \mathbf{0}$$
$$\operatorname{прu} \operatorname{Bcex} k, j = 1, 2, \dots \end{cases}$$
(5.90)

Попробуем найти строгое решение задачи глобаљной коллокации для ограниченного количества серий данных, равного *М.* Для этого рассмотрим ковариационную матрицу всей совокупности данных. Поскольку векторы х и у<sub>k</sub> в модели (5.89) не являются случайными, то из условий (5.90) следует, что эта матрица является полной и имеет вид

$$\operatorname{cov}(\mathbf{I}_{k},\mathbf{I}_{j}) = \mathbf{Q}_{ll} = \left[\mathbf{Q}_{ll}^{kj}\right],$$
(5.91)

где

$$\mathbf{Q}_{ll}^{kk} = \mathbf{Q}_{ll}^{kk} + \mathbf{C}_k \mathbf{Q}_{\mu\nu} \mathbf{C}_k' + \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_{\mu\nu}^{kk} \mathbf{D}_k' \quad (k = j)$$
(5.92)

И

$$\mathbf{Q}_{ll}^{kj} = \mathbf{C}_k \mathbf{Q}_{uu} \mathbf{C}_j \quad (k \neq j).$$
(5.93)

Отсюда следует, что данные, зависящие от глобального стохастического сигнала, перестают быть независимыми. В этом и состоит основная особенность и трудность задачи глобальной коллокации.

Вычислим сначала обратную матрицу  $\mathbf{Q}_{ll}^{-1}$ . Для упроцения записи введем в употребление следующие обозначения:

$$\mathbf{Q}_{rr} = \operatorname{diag}(\mathbf{Q}_{rr}^{kk}), \quad \mathbf{Q}_{\nu\nu} = \operatorname{diag}(\mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk}),$$
$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\mathbf{D}_{k}), \quad N = \sum_{k=1}^{M} N_{k},$$
(5.94)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_M \end{bmatrix}.$$
(5.95)

Тогда, согласно (5.90)–(5.93), ковариационную матрицу данных можно представить в виде

$$\mathbf{Q}_{ll} = (\mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{D}\mathbf{Q}_{vv}\mathbf{D}') + \mathbf{C}\mathbf{Q}_{uu}\mathbf{C}' = \mathbf{R} + \mathbf{S}, \qquad (5.96)$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{rr} + \mathbf{D}\mathbf{Q}_{vv}\mathbf{D}' = \operatorname{diag}[\mathbf{R}_{kk}] \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$
(5.97)

есть блочно-диагональная матрица размером N × N с элементами

$$\mathbf{R}_{kk} = \mathbf{Q}_{rr}^{kk} + \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk} \mathbf{D}'_k, \qquad (5.98)$$

а

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{Q}_{uu}\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \mathbf{Q}_{uu}\mathbf{C}'_j \end{bmatrix}$$
(5.99)

представляет собой полную блочную симметричную матрицу того же размера. Учитывая теперь обозначения (5.96) и (5.99), находим

$$\mathbf{Q}_{ll}^{-1} = (\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{Q}_{uu}\mathbf{C}')^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{Q}_{uu}^{-1} + \mathbf{C}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{R}^{-1}.$$
 (5.100)

Если теперь ввести еще невырожденную *p* × *p*-матрицу

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_{uu}^{-1} + \mathbf{C}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{Q}_{uu}^{-1} + \sum_{k=1}^{M} \mathbf{C}'_{k} \mathbf{R}_{kk}^{-1} \mathbf{C}_{k} , \qquad (5.101)$$

то формула (5.100) примет более простой вид:

$$\mathbf{Q}_{ll}^{-1} = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{L}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}', \qquad (5.102)$$

где

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{1} \\ \mathbf{L}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{C}_{1} \\ \mathbf{R}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{MM}^{-1}\mathbf{C}_{M} \end{bmatrix}.$$
 (5.103)

Легко видеть, что матрица  $\mathbf{LT}^{-1}\mathbf{L}'$  в выражении (5.102) является полной блочной матрицей, поэтому и обратная матрица ковариаций данных  $\mathbf{Q}_{ll}^{-1} = \mathbf{\tilde{Q}}_{ll} = [\mathbf{\tilde{Q}}_{ll}^{kj}]$  будет полной матрицей размером  $NM \times NM$ , состоящей из блоков размером  $N_k \times N_j$ , имеющих вид

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{ll}^{kj} = \begin{cases} \mathbf{R}_{kk}^{-1} - \mathbf{L}_k \mathbf{T}^{-1} \mathbf{L}'_k \text{ при } k = j, \\ \mathbf{L}_k \mathbf{T}^{-1} \mathbf{L}'_j \text{ при } k \neq j. \end{cases}$$
(5.104)

Как следует из формул (5.96)–(5.99), при увеличении количества серий M матрица ковариаций  $Q_{ll}$  липъ расширяется, т.е. окаймляется справа новым блок-вектором, а снизу – новой блок-строкой. Остальные ее элементы, вычисленные на предыдущем шаге, остаются без изменений. В то же время, как видно из (5.104) и (5.101), обратная ей матрица  $\tilde{Q}_{ll}$  при этом не только окаймляется, но в ней меняются все ранее вычисленные элементы, так как с ростом M меняется матрица Т. К счастью, эта матрица имеет размер  $p \times p$  и ее обращения достаточно для вычисления всех элементов матрицы  $\tilde{Q}_{ll}$ .

Сгруппируем теперь отдельно глобальные и локальные параметры модели (5.89) и запишем се в виде

$$\mathbf{l}_{k} = \mathbf{M}_{k}\mathbf{z} + \mathbf{N}_{k}\mathbf{w}_{k} + \mathbf{r}_{k}, \quad \mathbf{Q}_{zz}, \mathbf{Q}_{ww}^{kk}, \mathbf{Q}_{rr}^{kk} \quad (k = 1, 2, ...), \quad (5.105)$$

где

$$\mathbf{M}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k} & \mathbf{C}_{k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{k} & \mathbf{D}_{k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k} \\ \mathbf{v}_{k} \end{bmatrix}, \quad (5.106)$$

$$\mathbf{Q}_{zz} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{uu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{ww}^{kk} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{vv}^{kk} \end{bmatrix}.$$
(5.107)

Вектор z длиной q = (m + p) включает в себя только постоянные параметры, поэтому для его предварительного оценивания по данным произвольной серии  $l_k$  можно воспользоваться первой из формул коллокации (4.82):

$$\tilde{\mathbf{z}}_{k} = [\mathbf{M}_{k}'(\mathbf{Q}_{ll}^{kk})^{-1}\mathbf{M}_{k}]^{-1}\mathbf{M}_{k}'(\mathbf{Q}_{ll}^{kk})^{-1}\mathbf{I}_{k}.$$
(5.108)

Апостериорная автоковариация этой оценки, очевидно, равна

$$\mathbf{D}_{zz}^{kk} = [\mathbf{M}_{k}'(\mathbf{Q}_{ll}^{kk})^{-1}\mathbf{M}_{k}]^{-1}.$$
 (5.109)

Легко видеть, что в общем случае взаимные ковариации таких оценок для разных серий  $l_k$  и  $l_j$  не равны нулю и имеют вид

$$\mathbf{D}_{zz}^{kj} = E\{\hat{\mathbf{z}}_{k}\hat{\mathbf{z}}_{j}^{k}\} = \mathbf{D}_{zz}^{kk}\mathbf{M}_{k}^{\prime}(\mathbf{Q}_{ll}^{kk})^{-1}\mathbf{Q}_{ll}^{kj}(\mathbf{Q}_{ll}^{jj})^{-1}\mathbf{M}_{j}\mathbf{D}_{zz}^{jj}.$$
(5.110)

Здесь априорные ковариации данных  $\mathbf{Q}_{ll}^{kj}$  вычисляются по формулам (5.91)-(5.93). При k = j имеем  $\mathbf{Q}_{ll}^{kj} = \mathbf{Q}_{ll}^{kk}$  и формула (5.110) переходит в (5.109).

Таким образом, оценки (5.108) в рассматриваемом случае являются коррелированными, и поэтому для определения усредненной по всему наблюдательному материалу оценки  $\hat{z}$  воспользуемся формулой обобщенного среднего (3.105):

$$\hat{\mathbf{z}} = \left[\sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \mathbf{\tilde{D}}_{zz}^{kj}\right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \mathbf{\tilde{D}}_{zz}^{kj} \mathbf{\tilde{z}}_{j}\right],$$
(5.111)

которую, согласно (4.55), можно представить также в матричном виде

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{J}' \, \mathbf{\breve{D}}_{zz} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}' \, \mathbf{\breve{D}}_{zz} \mathbf{\ddot{z}}, \qquad (5.112)$$

где  $\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix} -$ блочная матрица-строка, состоящая из M одинаковых единичных матриц размером  $q \times q$ ,  $\mathbf{\bar{z}} = (\mathbf{\bar{z}}_1, \mathbf{\bar{z}}_2, \dots, \mathbf{\bar{z}}_M) -$ составной вектор-столбец длиной qM, а

$$\check{\mathbf{D}}_{zz} = \mathbf{D}_{zz}^{-1} = \left[\check{\mathbf{D}}_{zz}^{kj}\right]$$
(5.113)

представляет собой обратную матрицу апостериорных ковариаций размером  $qM \times qM$ .

Введем диагональную несимметричную блочную матрицу размером  $qM \times N$ :

$$\mathbf{M} = \operatorname{diag}(\mathbf{M}_k) \tag{5.114}$$

и диагональные симметричные матрицы

$$\mathbf{V} = \text{diag}[(\mathbf{Q}_{ll}^{kk})^{-1}], \ \mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{D}_{zz}^{kk}),$$
(5.115)

тогда, пользуясь выражениями (5.96) и (5.110), находим следующее выражение для полной матрицы апостериорных ковариаций предварительных оценок глобальных параметров и сигналов:

$$\mathbf{D}_{\tau\tau} = \mathbf{W}\mathbf{M}'\mathbf{V}(\mathbf{R} + \mathbf{S})\mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{W}.$$
 (5.116)

Из формул (5.96)-(5.99) видно, что

$$\mathbf{R} + \mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1} + (\mathbf{S} - \mathbf{U}),$$

где

$$\mathbf{U} = \operatorname{diag}(\mathbf{C}_{k}\mathbf{Q}_{uu}\mathbf{C}_{k}'), \qquad (5.117)$$

поэтому с учетом (5.115) имеем

$$\mathbf{D}_{zz} = \mathbf{W}(\mathbf{M}'\mathbf{V}\mathbf{M})\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{M}'\mathbf{V}(\mathbf{S}-\mathbf{U})\mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{W} =$$
  
= (\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{M}'\mathbf{V}\mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{W} = \mathbf{Z} + \mathbf{Y}\mathbf{Q}\_{uu}\mathbf{Y}', (5.118)

где

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{M}'\mathbf{V}\mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{W} = \operatorname{diag}(\mathbf{Z}_{kk}) \quad (k = 1, 2, \dots, M) \quad (5.119)$$

представляет собой симметричную блочно-диагональную матрицу размером  $qM \times qM$  с элементами

$$\mathbf{Z}_{kk} = \mathbf{D}_{zz}^{kk} - \mathbf{D}_{zz}^{kk} \mathbf{M}'_{k} (\mathbf{Q}_{ll}^{kk})^{-1} \mathbf{C}_{k} \mathbf{Q}_{uu} \mathbf{C}'_{k} (\mathbf{Q}_{ll}^{kk})^{-1} \mathbf{M}_{k} \mathbf{D}_{zz}^{kk}, \qquad (5.120)$$

а

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{zz}^{11} \mathbf{M}_{1}^{\prime} (\mathbf{Q}_{ll}^{11})^{-1} \mathbf{C}_{1} \\ \mathbf{D}_{zz}^{22} \mathbf{M}_{2}^{\prime} (\mathbf{Q}_{ll}^{22})^{-1} \mathbf{C}_{2} \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{zz}^{MM} \mathbf{M}_{M}^{\prime} (\mathbf{Q}_{ll}^{MM})^{-1} \mathbf{C}_{M} \end{bmatrix}$$
(5.121)

есть блочная матрица-столбец размером  $qM \times p$ . Используя тождество (2.71), получаем по (5.118):

$$\mathbf{D}_{zz}^{-1} = \breve{\mathbf{D}}_{zz} = (\mathbf{Z} + \mathbf{Y}\mathbf{Q}_{uu}\mathbf{Y}')^{-1} = \mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{Z}^{-1}, \qquad (5.122)$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}^{-1} + \mathbf{Y}'\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}$$
(5.123)

представляет собой полную невырожденную симметричную  $p \times p$ матрицу. Только эту матрицу и диагональную **Z** требуется обращать для вычисления всех элементов обратной матрицы апостериорных ковариаций  $\mathbf{D}_{zz}^{-1}$ . В соответствии с (5.123) и (5.121), матрица **K** равна

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}_{uu}^{-1} + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{C}_{i}'(\mathbf{Q}_{ll}^{ii})^{-1} \mathbf{M}_{i} \mathbf{D}_{zz}^{li} \mathbf{M}_{i}'(\mathbf{Q}_{ll}^{li})^{-1} \mathbf{C}_{i}.$$
(5.124)

Из этой формулы видно, что матрица К зависит от количества серий M, а через нее (и только через нее) зависят от M и все элементы матрицы  $\tilde{\mathbf{D}}_{zz} = \mathbf{D}_{zz}^{-1}$ . Формулы (5.120)–(5.124) показывают также, что для вычисления этой матрицы требуются только диагональные элементы ковариационной матрицы данных  $\mathbf{Q}_{ll}^{kk}$ , определяемые формулой (5.92). Подставляя блочные элементы матрицы  $\tilde{\mathbf{D}}_{zz}$  в формулу (5.111), находим окончательную оценку  $\hat{\mathbf{z}}$  глобальных параметров и сигналов, а также ее апостериорную ковариацию

$$\hat{\mathbf{D}}_{zz} = \left[\sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \vec{\mathbf{D}}_{zz}^{kj}\right]^{-1} = (\mathbf{J}' \vec{\mathbf{D}}_{zz} \mathbf{J})^{-1}.$$
(5.125)

Глобальные параметры и/или сигналы, как правило, бывают связаны между собой жесткими условиями вида

$$Ez = t$$
, (5.126)

где Е – произвольная  $d \times q$ -матрица, t – известный  $d \times l$ -вектор.

Перепишем уравнение (5.112) в виде

$$\mathbf{W}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}, \tag{5.127}$$

где

$$\mathbf{W} = (\mathbf{J}' \mathbf{\tilde{D}}_{zz} \mathbf{J}), \quad \mathbf{h} = \mathbf{J}' \mathbf{\tilde{D}}_{zz} \mathbf{\tilde{z}}. \tag{5.128}$$

Совместная обработка уравнений вида (5.127) и (5.126) уже рассматривалась нами в §3 гл. 3, поэтому остается только воспользоваться готовыми формулами. Учитывая, что матрица  $\mathbf{W} = \hat{\mathbf{D}}_{zz}^{-1}$  не вырождена, по (3.26)–(3.28) имеем окончательные оценки глобальных параметров и сигналов, связанных условиями (5.126), и их ковариации:

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1})\mathbf{h} + \mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}'(\mathbf{E}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{E}')^{-1}\mathbf{t}, \qquad (5.129)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{zz} = \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}' (\mathbf{E} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{E}')^{-1} \mathbf{E} \mathbf{W}^{-1}.$$
(5.130)

Перейдем теперь к оцениванию локальных параметров и сигналов. Для этого подставим найденную оценку глобальных параметров и сигналов (5.111) или (5.129) в уравнение модели (5.105). В результате находим

$$\mathbf{f}_{k} = \mathbf{B}_{k}\mathbf{y}_{k} + \mathbf{D}_{k}\mathbf{v}_{k} + \mathbf{r}_{k}, \quad \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk}, \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk}, \quad (5.131)$$

где

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{I}_k - \mathbf{M}_k \hat{\mathbf{z}}. \tag{5.132}$$

Если теперь принять оценку ž за истинную, то

$$\mathbf{Q}_{ff}^{kk} = \mathbf{Q}_{rr}^{kk} + \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk} \mathbf{D}'_k, \qquad (5.133)$$

и тогда по формулам (4.82) имеем

$$\hat{\mathbf{y}}_{k} = [\mathbf{B}'_{k} (\mathbf{Q}_{ff}^{kk})^{-1} \mathbf{B}_{k}]^{-1} \mathbf{B}'_{k} (\mathbf{Q}_{ff}^{kk})^{-1} \mathbf{f}_{k}, \qquad (5.134)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{k} = \mathbf{Q}_{\nu\nu} \mathbf{D}_{k}' (\mathbf{Q}_{ff}^{kk})^{-1} (\mathbf{f}_{k} - \mathbf{B}_{k} \hat{\mathbf{y}}_{k}).$$
(5.135)

Апостериорные ковариации этих оценок определяются формулами (4.120)-(4.121):

$$\hat{\mathbf{D}}_{yy,k} = [\mathbf{B}'_k (\mathbf{Q}^{kk}_{ff})^{-1} \mathbf{B}_k]^{-1}, \qquad (5.136)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{\nu\nu,k} = \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk} - \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk} \mathbf{D}'_{k} (\mathbf{Q}_{ff}^{kk})^{-1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk} + \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk} \mathbf{D}'_{k} (\mathbf{Q}_{ff}^{kk})^{-1} \mathbf{B}_{k} \hat{\mathbf{D}}_{\nu\nu,k} \mathbf{B}'_{k} (\mathbf{Q}_{ff}^{kk})^{-1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{Q}_{\nu\nu}^{kk}, \qquad (5.137)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{yv,k} = -\hat{\mathbf{D}}_{yy,k} \mathbf{B}'_{k} (\mathbf{Q}_{ff}^{kk})^{-1} \mathbf{D}_{k} \mathbf{Q}_{vv}^{kk}.$$
(5.138)

## §5. Случайные поля на сфере

Ошибки каталожных координат звезд или ВР можно интерпретировать как двумерные случайные поля, заданные на небесной сфере. Линейную стохастическую модель такого поля можно представить в виде

$$F(\theta, \alpha) = T(\theta, \alpha) + R(\theta, \alpha), \qquad (5.139)$$

где  $T(\theta, \alpha)$  – поле коррелированных ошибок каталога,  $R(\theta, \alpha)$  – поле некоррелированных ошибок (двумерный белый шум),  $\theta$  – полярное расстояние,  $\alpha$  – прямое восхождение точки небесной сферы. Будем в дальнейшем считать, что поле  $T(\theta, \alpha)$  определено непрерывно на всей небесной сфере, а шум  $R(\theta, \alpha)$  задан дискретно в точках, где расположены "объекты" каталога – звезды или ВР. В СКК поле  $T(\theta, \alpha)$  трактуется как двумерная случайная функция, которая может быть задана соответствующей ковариационной функцией.

В общем случае ковариационная функция сферического поля является двумерной функцией вида [41, с. 67, 225–231; 23]

$$q_T(X,Y) = q_T(\psi,\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi 2\pi} \int_0^{\pi 2\pi} T(X)T(Y)\sin\theta d\theta d\alpha, \qquad (5.140)$$

где  $X(\theta, \alpha)$  и  $Y(\theta', \alpha')$  – две произвольные точки небесной сферы (см. рис. 5.1),  $\psi$  и  $\varphi$  – их взаимное угловое расстояние и относительный азимут, связанные с координатами этих точек соотношениями

$$\cos \psi = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\alpha' - \alpha),$$
  

$$\sin \psi \sin \phi = \sin \theta' \sin(\alpha' - \alpha),$$
  

$$\sin \psi \cos \phi = \cos \theta' \sin \theta - \sin \theta' \cos \theta \cos(\alpha' - \alpha).$$

Далее мы будем иметь дело только с изотропными (стационарными) полями. Для них автоковариационная функция определяется интегрированием правой части (5.140) по азимуту  $\varphi$  и поэтому она становится одномерной функцией расстояния  $\psi$ :

$$q_T(X,Y) = q_T(\psi) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi 2\pi} T(X)T(Y)\sin\theta d\theta d\alpha d\phi.$$
 (5.141)



Введем также нормированные (корреляционные) функции  $c_T(\psi) = q_T(\psi)/q_T(0)$ , где число  $\sigma_T^2 = q_T(0)$  называется дисперсией случайного поля  $T(\theta, \alpha)$ . Что касается белого шума  $R(\theta, \alpha)$ , то он полностью описывается своей дисперсией  $\sigma_R^2 = q_R(0)$ , так как  $q_R(\psi) = 0$  при всех  $\psi \neq 0$ .

Рис. 5.1. Полярный сферический треугольник.

Аргумент  $\psi$  ковариационной функции (5.141) строго ограничен  $0 \le \psi \le \pi$ , поэтому при равномерном задании поля эта функ-

ция может быть аппроксимирована разложением в ряд по обыкновенным полиномам Лежандра [41, с.68]:

$$q_T(\Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n P_n(\cos \Psi).$$
 (5.142)

Можно показать, что определенная таким образом ковариационная функция изотропного поля  $T(\theta, \alpha)$  является его воспроизводящим ядром и однозначно определяет систему базисных функций для оптимальной аппроксимации этого поля. Для этого необходимо доказать, что эта функция может быть разложена в ряд по произведениям какой-либо ортонормированной системы функций  $f_i = f_i(\theta, \alpha)$ :

$$q_T(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(X) f_i(Y).$$
(5.143)

Если такое разложение возможно, то такая функция будет удовлетворять свойству воспроизводящего ядра (4.16) (см. §1 гл. 4):

$$T(Y) = (T(X), q_T(X, Y))_X,$$
(5.144)

где справа стоит скалярное произведение

$$(T(X),q_T(X,Y))_X = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} T(\theta,\alpha) q_T(\psi) d\tau$$

причем

$$\iint_{\tau}(\cdot)d\tau = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} (\cdot)\sin\theta d\theta d\alpha$$

представляет собой интеграл по единичной сфере,  $d\tau = \sin \theta d\theta d\alpha$  – элемент поверхности этой сферы. Действительно, разложим функцию T(X) по базису  $f_i$ :

$$T(X) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i f_i(X), \qquad (5.145)$$

## где коэффициенты h<sub>i</sub> являются скалярными произведениями

$$h_i = (T(X), f_i(X))_X = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} T(\theta, \alpha) f_i(\theta, \alpha) d\tau.$$
 (5.146)

Подставляя (5.143) и (5.145) в правую часть (5.144) и учитывая (5.146), получаем

$$T(Y) = (T(X), \sum_{i=1}^{\infty} f_i(X) f_i(Y)_X =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(Y) (T(X), f_i(X))_X = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(Y) h_i = T(Y).$$

что и доказывает свойство (5.144).

Покажем теперь, что ковариационную функцию изотропного случайного поля действительно можно разложить в ряд (5.143). Это утверждение прямо следует из теоремы сложения ортонормированных сферических функций [41, с. 23]:

$$P_n(\cos \psi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^{n} [\overline{C}_{nm}(\theta, \alpha) \overline{C}_{nm}(\theta', \alpha') + \overline{S}_{nm}(\theta, \alpha) \overline{S}_{nm}(\theta', \alpha')], \quad (5.147)$$

где

$$\overline{C}_{nm}(\theta,\alpha) = \sqrt{\frac{4\pi}{\chi_{nm}}} P_{nm}(\cos\theta) \cos m\alpha,$$

$$\overline{S}_{nm}(\theta,\alpha) = \sqrt{\frac{4\pi}{\chi_{nm}}} P_{nm}(\cos\theta) \sin m\alpha,$$

$$\chi_{n0} = \frac{4\pi}{2n+1}, \quad \chi_{nm} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \operatorname{прu} m \neq 0,$$
(5.148)

 $P_{nm}(\theta, \alpha)$  – обыкновенные присоединенные функции Лежандра первого рода. Условие нормировки функций  $\overline{C}_{nm}$ ,  $\overline{S}_{nm}$  выбраны-так, чтобы

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} \overline{C}_{nm}^2 d\tau = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} \overline{S}_{nm}^2 d\tau = 1.$$
(5.149)

Если теперь образовать множество (систему) функций

$$f_i(\theta, \alpha) = \left\{ \sqrt{\frac{k_n}{2n+1}} \overline{C}_{nm}, \sqrt{\frac{k_n}{2n+1}} \overline{S}_{nm} \right\}$$

$$(n = 2, 3, \dots, m = 0, 1, \dots, n)$$

$$(5.150)$$

и подставить их в (5.143), то с учетом (5.147) мы получим ряд (5.142):

$$q_{T}(X,Y) = q_{T}(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} k_{n} P_{n}(\cos\psi) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{k_{n}}{2n+1} [\overline{C}_{nm}(\theta,\alpha)\overline{C}_{nm}(\theta',\alpha') + \overline{S}_{nm}(\theta,\alpha)\overline{S}_{nm}(\theta',\alpha')].$$
(5.151)

Таким образом, функции (5.150) представляют собой полную ортонормированную систему базисных функций, порожденных воспроизводящим ядром (5.142) изотропного случайного поля на сфере. С помощью этих функций такое поле может быть аппроксимировано рядом

$$\mathcal{T}(\theta,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\overline{C}_{nm}(\theta,\alpha) + b_{nm}\overline{S}_{nm}(\theta,\alpha)), \qquad (5.152)$$

коэффициенты которого равны

$$a_{nm} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} T(\theta, \alpha) \overline{C}_{nm}(\theta, \alpha) d\tau, \quad b_{nm} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} T(\theta, \alpha) \overline{S}_{nm}(\theta, \alpha) d\tau. \quad (5.153)$$

Воспроизводящиее ядро  $q_T(X,Y) = q_T(\psi)$ , допускающее разложение (5.151), называется гармоническим. Из формул (5.150) видно, что все коэффициенты этого разложения  $k_n$  (n = 0, 1, 2, ...), называемые спектром гармонического ядра, должны быть положительными. Таким образом, воспроизводящее ядро изотропного случайного поля на сфере будет гармоническим, если оно положительно определено, т.е. его спектр положителен. Заметим, что случайное поле  $T(\theta, \alpha)$  допускает разложение (5.152) и поэтому является гармоническим и положительно определено. Отсюда интуитивно следует, что между спектром  $k_n$  и коэффициентами  $a_{nm}, b_{nm}$  должна быть какая-то связь. Эта связь определяется формулой [66, с. 255–259]

$$k_n = \sum_{m=0}^n (a_{nm}^2 + b_{nm}^2).$$
 (5.154)

Рассмотрим какую-либо гармонику разложения поля (5.152)

$$T_{nm}(\theta,\alpha) = a_{nm}\overline{C}_{nm}(\theta,\alpha) + b_{nm}\overline{S}_{nm}(\theta,\alpha)$$
(5.155)

и оценим ее дисперсию [66, с. 252]

$$\sigma_{nm}^2 = M\{T_{nm}^2\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} T_{nm}^2 d\tau = a_{nm}^2 + b_{nm}^2.$$
 (5.156)

Для зональных гармоник поля, зависящих только от n, имеем

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) = k_n.$$
 (5.157)

# §6. Плотность ошибок координат на сфере

Коррелированные ошибки координат звезд вида Δα cosδ и Δδ принято после работы П. Броше [57] представлять раздельно для обеих координат гармоническими разложениями вида (5.152)

$$A(\theta,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (\beta_{nm} \overline{C}_{nm}(\theta,\alpha) + \gamma_{nm} \overline{S}_{nm}(\theta,\alpha)), \qquad (5.158)$$

$$D(\theta, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (\xi_{nm} \overline{C}_{nm}(\theta, \alpha) + \eta_{nm} \overline{S}_{nm}(\theta, \alpha)), \qquad (5.159)$$

Такое независимое представление обеих координат возникло естественным образом благодаря тому обстоятельству, что подавляющее большинство абсолютных и относительных определений координат в наземной оптической астрометрии велось и ведется до сих пор с помощью меридианных инструментов *ортогонального* типа, когда измерения производятся раздельно и независимо по двум взаимно ортогональным направлениям – меридиану и параллели.

Однако принцип ортогональности наблюдений нарушается уже в случае использования для каталожных работ астролябии А. Данжона, так как направление измерений в нем (нормаль к альмукантарату) не совпадает ни с меридианом, ни с параллелью и меняется от звезды к звезде. Подобная картина имеет место и в РСДБ. В космической астрометрии система сканирования неба также неортогональна [56, с.87]. Характерной особенностью таких неортогональных измерений является то, что ошибки обеих координат наблюдаемого объекта (звезды или ВР) влияют на данные непосредственных измерений совместно, в линейной комбинации, причем степенъ влияния каждой из них зависит от направления измерений в экваториальной системе координат. Отсюда следует, что далеко не для всех объектов наблюдательной программы с помощью немеридианных инструментов можно определить обе координаты с одинаковой точностью и независимым образом. Покажем, что этот недостаток можно устранить, если вместо двух случайных полей  $A(\theta, \alpha)$  и  $D(\theta, \alpha)$  ввести новое обобщающее поле  $T(\theta, \alpha)$  в виде плотности ошибок координат на сфере.

Рассмотрим непрерывное случайное поле  $T(\theta, \alpha)$  на сфере единичного радиуса как плотность простого слоя [16, с. 101–107]. Будем считать, что это поле имеет гармоническое ядро и представимо разложением (5.152), которое запишем в виде ряда Лапласа [2, с. 51]

$$\mathcal{T}(\theta, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, \alpha), \qquad (5.160)$$

где

$$T_n(\theta, \alpha) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} \overline{C}_{nm}(\theta, \alpha) + b_{nm} \overline{S}_{nm}(\theta, \alpha)).$$
(5.161)

Силовая функция (потенциал) такого простого слоя для произвольной точки сферы X(θ,α) имеет вид [29, с. 260]

$$U(\theta, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\theta, \alpha), \qquad (5.162)$$

где

$$U_n(\theta, \alpha) = \frac{4\pi}{2n+1} T_n(\theta, \alpha).$$
 (5.163)

Введем теперь прямоугольную систему координат с началом в точке сферы  $M = M(\theta, \alpha)$ . Ось z направим по нормали к небесной сфере, ось y - по касательной к меридиану MP на север, ось x - по касательной к параллели на восток. Дифференциалы вдоль этих осей, очевидно, равны  $dx = \sin \theta d\alpha$ ,  $dy = d\delta$ . Тогда, согласно основному свойству потенциала, имеем

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n} \, \vec{n} = \frac{\partial U}{\partial x} \, \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \, \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \, \vec{k} \, .$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы (орты) координатных осей x, y, z соответственно,  $\vec{n}$  – орт нормали к уровенной поверхности потенциала U(x, y, z) = const, или орт его градиента. Производная этого потенциала по произвольному направлению  $\vec{r}$ , лежащему в плоскости (x,y), будет равна

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(\vec{r}, \vec{i}) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(\vec{r}, \vec{j}) = \frac{\partial U}{\partial x} \sin\gamma + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\gamma , \qquad (5.164)$$

где  $\gamma = (\vec{r}, \vec{j}) - позиционный угол направления <math>\vec{r}$  относительно направления на северный полюс мира (см. рис. 5.2).

Введем теперь обозначения

$$A(\theta, \alpha) = \frac{\partial U}{\partial x} = U_x, \quad D(\theta, \alpha) = \frac{\partial U}{\partial y} = U_y, \quad (5.165)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = U_r = U_x \sin \gamma + U_y \cos \gamma = A(\theta, \alpha) \sin \gamma + D(\theta, \alpha) \cos \gamma.$$
(5.166)



Рис. 5.2. Схема наблюдений на астролябии.



Рис. 5.3. Схема РСДБнаблюдений.

Покажем теперь, что влияние ошибок координат  $U_x$  и  $U_y$  на результаты немеридианных наблюдений действительно выражаются формулой типа (5.166). Для примера рассмотрим схему наблюдений на астролябии, изображенную на рис. 5.2. Здесь Z -зенит инструмента, P – полюс мира,  $M_0$ -эфемеридное место звезды на альмукантарате постоянного радиуса  $z_0$  в момент наблюдения, M – ее истинное место в тот же момент, смещенное по зенитному расстоянию на величину  $\Delta z = z - z_0$ , которая, согласно теории инструмента [14], равна

$$\Delta z = (\Delta \alpha \cos \delta) \sin \gamma + \Delta \delta \cos \gamma =$$
  
= U\_{-} \sin \gamma + U\_{-} \cos \gamma = U\_{-}.

В случае РСДБ-наблюдений влияние ошибок координат ВР на измеренную задержку сигнала т выражается формулой [24, с. 56]

$$c\Delta\tau / b = [(\Delta\alpha\cos\delta)\sin\gamma + \Delta\delta\cos\gamma]\sin\theta = = (U_x\sin\gamma + U_y\cos\gamma)\sin\theta = U_b\sin\theta,$$

где *b* – длина базы интерферометра, *c* – скорость света, *γ* – позиционный угол направления на полюс базы *B* (см. рис. 5.3).

Таким образом, влияние коррелированных ошибок координат небесных объектов на результаты позиционных наблюдений можно выразить или через две производные  $U_x$  и  $U_y$  потенциала U по ортогональным направлениям осей x и y, или через одну производную  $U_r$ по направлению  $\bar{r}$  от объекта наблюдений на "полюс инструмента" (для астролябии это зенит, а для РСДБ – полюс базы). Если разложение поля (5.160) дано, то с учетом (5.166), (5.162) и (5.163) получаем

$$A(\theta,\alpha) = \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=0}^{n} \left( a_{nm} \frac{\partial \overline{C}_{nm}}{\partial x} + b_{nm} \frac{\partial \overline{S}_{nm}}{\partial x} \right),$$
(5.167)

$$D(\theta, \alpha) = \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=0}^{n} \left( a_{nm} \frac{\partial \overline{C}_{nm}}{\partial y} + b_{nm} \frac{\partial \overline{S}_{nm}}{\partial y} \right).$$
(5.168)

# Учитывая выражения для сферических функций (5.148), имеем

$$\frac{\partial \overline{C}_{nm}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{C}_{nm}}{\sin \theta \partial \alpha} = -\frac{m \overline{S}_{nm}}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial \overline{S}_{nm}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{S}_{nm}}{\sin \theta \partial \alpha} = \frac{m \overline{C}_{nm}}{\sin \theta}$$
(5.169)

И

$$\frac{\partial \overline{C}_{nm}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{C}_{nm}}{\partial \delta} = \sqrt{\frac{4\pi}{\chi_{nm}}} P'_{nm}(\cos\theta) \cos m\alpha,$$

$$\frac{\partial \overline{S}_{nm}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{S}_{nm}}{\partial \delta} = \sqrt{\frac{4\pi}{\chi_{nm}}} P'_{nm}(\cos\theta) \sin m\alpha,$$
(5.170)

где производные присоединенных функций Лежандра по склонению имеют вид [29, с. 212]

$$P'_{nm} = \frac{\partial P_{nm}}{\partial \delta} = \sin \theta \frac{\partial P_{nm}(\cos \theta)}{\partial (\cos \theta)} = -m \operatorname{ctg} \theta + P_{n,m+1}(\cos \theta).$$
(5.171)

Здесь  $P_{n,m+1} \equiv 0$  при m+1 > n.

Таким образом, если коррелированные ошибки опорного каталога заданы в виде раздельных поправок экваториальных координат  $\Delta \alpha \cos \delta = A(\theta, \alpha)$  и  $\Delta \delta = D(\theta, \alpha)$ , то, подставляя эти величины в правые части уравнений (5.167)–(5.168), получаем систему избыточных уравнений для однозначного определения коэффициентов  $a_{nm}, b_{nm}$  разложения (5.160)–(5.161) поля  $T(\theta, \alpha)$ , которое будем называть полем плотности коррелированных ошибок. Те же уравнения (5.167), (5.168) можно использовать для уточнения этого поля по мере поступления новых определений экваториальных координат с помощью ортогональных инструментов. Если же новые определения ведутся с помощью неортогонального инструмента, когда координатная информация содержится в измеренных величинах  $U_r(\theta, \alpha)$ , то для уточнения коэффициентов разложения поля  $T(\theta, \alpha)$ , согласно (5.166), имеем систему

$$U_{r}(\theta,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=0}^{n} \left[ a_{nm} \left( \frac{\partial \overline{C}_{nm}}{\partial x} \sin \gamma + \frac{\partial \overline{C}_{nm}}{\partial y} \cos \gamma \right) + b_{nm} \left( \frac{\partial \overline{S}_{nm}}{\partial x} \sin \gamma + \frac{\partial \overline{S}_{nm}}{\partial y} \cos \gamma \right) \right].$$
(5.172)

## §6. Коллокация случайных полей на сфере

Из формул (5.167), (5.168) и (5.172) видно, что данные наблюдений  $l_i$ (i = 1, 2, ..., N) связаны со случайным полем на сфере  $T = T(\theta, \alpha)$  через некоторый линейный функционал  $L_i$  [12, с. 69]:

$$l_i = L_i T . \tag{5.173}$$

Обычно задача заключается в том, чтобы найти двумерную функцию *T* по *N* значениям  $L_iT$  линейных функционалов, полученных из наблюдений. Определение такой функции путем аналитической аппроксимации к определенному числу заданных значений линейных функционалов в математике называется коллокацией [35, с. 29]. Если эта аппроксимация осуществляется в среднем квадратическом смысле, т.е. с минимальной дисперсией невязок, то такую коллокацию называют средней квадратической. Эта задача уже рассматривалась нами в §3 гл. 4, и ее общее решение дается формулой (4.40), которую для модели (5.173) можно записать так:

$$\hat{T}(X) = \begin{bmatrix} q_{\lambda'1} & q_{X2} & \cdots & q_{\lambda'N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{1N} \\ q_{22} & q_{22} & q_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{N1} & q_{N2} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{bmatrix}.$$
(5.174)

Здесь  $q_{ij} = \text{cov}(l_i, l_j)$  представляют собой взаимные ковариации данных, а  $q_{Xi} = \text{cov}(T(X), l_i)$  — ковариации искомой функции с данными.

Перед вычислением этих ковариаций необходимо убедиться, что поле *T* и данные *l<sub>i</sub>* центрированы, т.е.

$$M\{T\} = 0, (5.175)$$

$$M\{l_i\} = 0. (5.176)$$

Условие (5.175) означает, что разложение поля  $T(\theta, \alpha)$  по сферическим функциям (5.160) не должно содержать гармоники нулевой степени. Второе условие (5.176) следует из (5.175) и (5.173), так как в силу коммутативности оператора усреднения M и линейных функционалов  $L_i$  имеем

$$M\{l_i\} = M\{L_iT\} = L_iM\{T\} = 0.$$
(5.177)

Используя оператор усреднения по сфере, ковариации, входящие в формулу (5.174), можно записать в следующем виде:

$$q_{\chi i} = \operatorname{cov}(T(X), l_i) = M\{T(X)l_i\}, \qquad (5.178)$$

$$q_{ij} = \operatorname{cov}(l_i, l_j) = M\{l_i l_j\}.$$
(5.179)

Применим теперь формулу (5.173) к полю *Т* как функции точечной переменной *Y*:

$$l_i = L_i^Y T(Y). (5.180)$$

Тогда с учетом коммутативности M и  $L_i$  по формулам (5.178) и (5.179) получаем

$$q_{Xi} = M\{T(X)L_i^{Y}T(Y)\} = L_i^{Y}M\{T(X)T(Y)\},$$
(5.181)

$$q_{ij} = M\{L_i^X T(X) L_j^Y T(Y)\} = L_i^X L_i^Y M\{T(X) T(Y)\}.$$
(5.182)

Но так как

$$q_T(X,Y) = M\{T(X)T(Y)\},$$
 (5.183)

то

$$q_{\chi_i} = L_i^Y q_T(X, Y),$$
 (5.184)

$$q_{ij} = L_i^X L_j^Y q_T(X, Y).$$
 (5.185)

В выражении (5.184) функционал  $L_i^{Y}$  применяется к  $q_T(X,Y)$  как функции точки Y, поэтому результат  $q_{\chi_i}$  зависит только от X. Его можно рассматривать как функцию X, к которой в формуле (5.185) применяется оператор  $L_i^X$ , который в итоге дает скаляр  $q_{ij}$ . Таким образом, выражения (5.184) и (5.185) дают возможность вычислить все необходимые ковариации, входящие в основную формулу коллокации (5.174), путем известных линейных преобразований одной и той же ковариационной функции  $q_T(X,Y)$  случайного поля T, определенной в §4 настоящей главы. Эти выражения называются формулами *преобразования ковариаций* и имеют важное значение в теории коллокации.

В формуле (5.174) поле T(X) есть непрерывная функция двумерной точечной переменной  $X = X(\theta, \alpha)$ , и поэтому эту формулу можно назвать непрерывной коллокацией. Однако изотропные гармонические поля, имеющие одномерное воспроизводящее ядро  $q_T(\psi)$ , допускают гармоническое разложение вида (5.152):

$$T(\theta, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \overline{C}_{nm}(\theta, \alpha) + b_{nm} \overline{S}_{nm}(\theta, \alpha)), \qquad (5.186)$$

поэтому непрерывная задача коллокации сводится к дискретной, так как вместо уточнения поля  $T(\theta, \alpha)$  как непрерывной функции на сфере достаточно уточнить лишь дискретное множество коэффициентов этого разложения, образующих бесконечномерный вектор сигнала:

$$\mathbf{s} = (a_{nm}, b_{nm}) \ (n = 1, 2, ...; m = 0, 1, ..., n).$$
 (5.187)

Определим теперь ковариационную матрицу этого сигнала. Используя выражения (5.153) и пользуясь формулой преобразования ковариаций (5.185), получаем

$$\operatorname{cov}(a_{nm}, a_{qp}) = \frac{1}{16\pi^2} \iint_{\tau} \iint_{\tau'} q_T(\psi) \overline{C}_{nm}(\theta, \alpha) \overline{C}_{qp}(\theta', \alpha') d\tau d\tau'.$$
(5.188)

Заменив в разложении ковариационной функции (5.151) индексы *n* и *m* на *s* и *r*, имеем

$$q_T(\psi) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \frac{k_r}{2s+1} [\overline{C}_{rs}(\theta, \alpha) \overline{C}_{rs}(\theta', \alpha') + \overline{S}_{rs}(\theta, \alpha) \overline{S}_{rs}(\theta', \alpha')].$$
(5.189)

Подставив это выражение в (5.188) и поменяв местами действия интегрирования и суммирования, получаем

$$\operatorname{cov}(a_{nm}, a_{qp}) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{s} \frac{k_{s}}{2s+1} \times \left[ \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} \overline{C}_{nm}(\theta, \alpha) \overline{C}_{sr}(\theta, \alpha) d\tau \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau'} \overline{C}_{qp}(\theta', \alpha') \overline{C}_{sr}(\theta', \alpha') d\tau' + \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau} \overline{C}_{nm}(\theta, \alpha) \overline{S}_{sr}(\theta, \alpha) d\tau \frac{1}{4\pi} \iint_{\tau'} \overline{C}_{qp}(\theta', \alpha') \overline{S}_{sr}(\theta', \alpha') d\tau' \right].$$
(5.190)

Учитывая свойство ортогональности сферических гармоник

и условие их нормировки (5.149), находим из (5.190)

$$\operatorname{cov}(a_{nm}, a_{nn}) = \frac{k_n}{2n+1},$$

$$\operatorname{cov}(a_{nm}, a_{ap}) = 0, \text{ если } n \neq q \text{ и / или } m \neq p.$$
(5.192)

Аналогичным образом находим

$$\operatorname{cov}(b_{nm}, b_{nm}) = \frac{k_n}{2n+1},$$

$$\operatorname{cov}(b_{nm}, b_{qp}) = 0, \text{ если } n \neq q \text{ и / или } m \neq p,$$

$$\operatorname{cov}(b_{nm}, b_{qp}) = 0, \text{ если } n \neq q \text{ и / или } m \neq p,$$

$$\operatorname{cov}(b_{nm}, b_{qp}) = 0, \text{ если } n \neq q \text{ и / или } m \neq p,$$

$$\operatorname{cov}(b_{nm}, b_{qp}) = 0, \text{ если } n \neq q \text{ и / или } m \neq p,$$

$$\operatorname{cov}(b_{nm}, b_{qp}) = 0, \text{ если } n \neq q \text{ и / или } m \neq p,$$

$$\operatorname{cov}(b_{nm}, b_{qp}) = 0, \text{ если } n \neq q \text{ и / или } m \neq p,$$

И

$$\operatorname{cov}(a_{nm}, b_{qp}) = 0$$
 всегда. (5.194)

Отсюда непосредственно следует, что матрица автоковариаций сигнала s, который представляет собой упорядоченное по индексам n и n1 множество (5.187) коэффициентов  $a_{nm}, b_{nm}$ , т.е.

$$\mathbf{s} = (a_{10}, b_{10}, a_{11}, b_{11}; a_{20}, b_{20}, a_{21}, b_{21}, a_{22}, b_{22}; \dots),$$
(5.195)

является бесконечной диагональной матрицей

$$cov(s, s) = Q_{ss} = diag(Q_n) \ (n = 1, 2, ...),$$
 (5.196)

составленной из диагональных блоков

$$\mathbf{Q}_n = \frac{k_n}{2n+1} \mathbf{I},\tag{5.197}$$

имеющих размер  $2(n+1) \times 2(n+1)$ . Это означает, что, ковариационная матрица сигнала (5.195) однозначно и просто выражается через коэффициенты  $k_n$  разложения (5.142) ковариационной функции  $q_T(\psi)$  для поля  $T(\theta, \alpha)$ .

Используя выражение (5.172), представим связь между данными наблюдений и параметрами сигнала (5.195) в самой общей матричной форме:

$$\mathbf{l} = \mathbf{U}\mathbf{s},\tag{5.198}$$

где I –  $N \times I$ -вектор данных (значений функционала  $U_r$ ), U – матрица коэффициентов, определяемых выражением (5.172), имеющая бесконечный размер  $N \times \infty$ . Преобразования ковариаций (5.184), (5.185) в дискретной коллокации имеют вид

$$\operatorname{cov}(\mathbf{s}, \mathbf{l}) = \mathbf{Q}_{sl} = \mathbf{Q}_{ss} \mathbf{U}', \qquad (5.199)$$

$$\operatorname{cov}(\mathbf{I}, \mathbf{I}) = \mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{U}\mathbf{Q}_{ss}\mathbf{U}', \qquad (5.200)$$

и тогда формула непрерывной коллокации (5.174) принимает вид уже известной формулы дискретной коллокации (4.40):

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{sl} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{I}. \tag{5.201}$$

С помощью (5.201) можно оценить любое количество сигналов по ограниченному количеству данных. Хотя обращаемая  $N \times N$ -матрица  $Q_{ll}$  конечна, но число строк в матрице  $Q_{sl}$  не ограничено. Апостериорные ковариации оценок сигнала  $\hat{s}$  определяются формулой (4.41). Если данные I содержат какие-либо детерминированные (неслу-

Если данные I содержат какие-либо детерминированные (неслучайные) компоненты, например функции, описывающие взаимную ориентировку индивидуальных каталогов, то их следует представить линейной моделью Ах, а затем использовать соответствующие алгоритмы средней квадратической коллокации с параметрами, описанные в §5 гл. 4. Если постоянные параметры х связаны между собой условиями, то следует пользоваться алгоритмами §4 гл. 5. Объединение и фильтрация полей осуществляется согласно рассмотренной уже теории коллокации, только нужно помнить, что сигнал s в данном случае представляет собой не временную последовательность (ряд) центрированных случайных величин, а их упорядоченное множество. Заметим, что коллокация каталогов собственных движений звезд

Заметим, что коллокация каталогов собственных движений звезд в принципе ничем не отличается от описанной выпле, за исключением того, что вектор сигналов s в этом случае будет состоять из производных по времени  $s = (\dot{a}_{nn}, \dot{b}_{nm})$  (n = 1, 2, ...; m = 0, 1, ..., n) и, кроме того, необходим учет трендов собственных движений вследствие галактического вращения и собственного движения Солнца.

В заключение рассмотрим проблему коллокации сильно разреженных дискретных случайных множеств на небесной сфере. Эта задача характерна для обработки РСДБ-наблюдений по программам IERS и NEOS. Эти наблюдения ведутся 24-часовыми сериями через каждые 5 суток, причем наблюдается небольшое число (около 40) одних и тех же радиоисточников, равномерно распределенных по небесной сфере. Очевидно, что из-за малого числа источников в этом случае нет необходимости прибегать к изложенной выше интерпретации ошибок их координат в виде разложений по сферическим функциям. Проще всего эти ошибки включить в число постоянных глобальных параметров общей модели данных (5.89) и оценивать их наравне с другими параметрами этой модели в процедуре глобальной коллокации (см. §4 гл. 5).

## Глава 6. ФИЛЬТРАЦИЯ КАЛМАНА

#### §1. Наблюдаемые динамические системы

Пусть объектом астрометрических наблюдений является некоторая динамическая система, состояние которой непрерывно меняется во времени. Будем в дальнейшем рассматривать только простейшие линейные системы, состояние которых описывается стохастическим дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t), \qquad (6.1)$$

где  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$  – неизвестный *m*-мерный случайный вектор состояния системы (его часто называют фазовым вектором),  $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), ..., v_p(t))$  – неизвестный *p*-мерный возмущающий вектор случайного входного воздействия на систему,  $\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)$  – заданные матрицы размерности  $m \times m$  и  $m \times p$  соответственно, элементы которых представляют собой функции времени *t*.

В частном случае, когда m = p = 1, векторы x(t), v(t) превращаются в скалярные величины x(t), v(t) -случайные функции времени, а матрицы F(t), G(t) -в детерминированные функции f(t), g(t), и уравнение (6.1) принимает вид

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(t)x(t) + g(t)v(t),$$

однако, за исключением специальных примеров, и в этом случае мы будем использовать векторно-матричные обозначения.

Уравнение (6.1) будем называть непрерывной моделью состояния системы (в литературе по системам управления ее называют моделью сообщения). В частном случае, когда элементы матриц F и G постоянны, динамическая система называется стационарной. Что касается входного воздействия (возмущения) v(t), то будем считать, что оно представляет собой векторный случайный процесс типа центрированного белого шума, хотя это предположение может быть снято за счет некоторого усложнения модели (6.1) (см. ниже).

Будем также предполагать, что динамическая система (6.1) наблюdaeмa, т.е. имеет *n*-мерный выходной сигнал l(*t*), который может быть измерен в любой момент и который несет в себе информацию о состоянии системы x(*t*). Будем считать, что связь между наблюдаемым выходным сигналом и вектором состояния имеет следующую линейную форму:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t), \qquad (6.2)$$

где C(t) – известная  $n \times m$ -матрица плана, r(t) – неизвестный *n*-мерный вектор невязок.

Выражение (6.2) называют моделью наблюдений. Будем считать эту модель полной, тогда невязки  $\mathbf{r}(t)$  тоже можно считать центрированным белым шумом. Следует заметить, что в астрометрии, как правило, используются одномерные инструменты и измеряются скалярные выходные сигналы, поэтому векторы  $\mathbf{l}(t) = l(t)$  и  $\mathbf{r}(t) = r(t)$  есть просто скалярные функции времени.

В теории управления и автоматического регулирования динамические модели вида (6.1) всегда относятся к объекту управления, т.е. к наблюдаемой системе. Однако понятие динамической системы можно обобщить и на измерительную (наблюдающую) систему – субъект наблюдений. Для применений в астрометрии это обобщение существенно, так как нестабильность измерительных систем вносит наиболыший вклад в ошибки наблюдений. В действительности же, как объект (о), так и субъект (с) процесса наблюдений могут представлять собой возмущаемые динамические системы вида (6.1):

$$\dot{\mathbf{x}}_{o}(t) = \mathbf{F}_{o}(t)\dot{\mathbf{x}}_{o}(t) + \mathbf{G}_{o}(t)\mathbf{v}_{o}(t),$$
  
$$\dot{\mathbf{x}}_{c}(t) = \mathbf{F}_{c}(t)\mathbf{x}_{c}(t) + \mathbf{G}_{c}(t)\mathbf{v}_{c}(t).$$

Если объединить фазовые векторы этих систем в составной вектор x(t) и так же поступить со всеми другими векторами и матрицами:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{o}(t) \\ \mathbf{x}_{c}(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{o}(t) \\ \mathbf{v}_{c}(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{o}(t) \\ \mathbf{F}_{c}(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{o}(t) \\ \mathbf{G}_{c}(t) \end{bmatrix},$$

то получим совместную многоканальную динамическую систему, которую можно описать уравнением вида (6.1).

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (6.1) имеет вид [36, с. 269]:

$$\mathbf{x}(t) = \exp\left\{\int \mathbf{F}(t)dt\right\} \left[\int \mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t)\exp\left\{-\int \mathbf{F}(t)dt\right\}dt + C\right].$$

Осюда для начального условия  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)$  при  $t = t_0$  получаем частное решение

$$\mathbf{x}(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau) d\tau\right\} \mathbf{x}(t_0) + \\ + \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau) d\tau\right\}\int_{t_0}^{t} \exp\left\{-\int_{t_0}^{\tau} \mathbf{F}(\theta) d\theta\right\} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau.$$
(6.3)

Введем понятие переходной матрицы:

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau) d\tau\right\}.$$
(6.4)

Тогда выражение (6.3), описывающее переход динамической системы из начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  в текущее состояние  $\mathbf{x}(t)$ , примет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{\Phi}(t, t_0) \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau, t_0) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau.$$
(6.5)

Если эту смену состояний системы назвать "движением", то первый член в правой части (6.5) представляет собой свободное (невозмущенное) движение, а второй, обусловленный входным воздействием v(1), является вынужденным (возмущенным) движением.

Переходная матрица  $\Phi(t, t_0)$ , как следует из формулы (6.4), полностью определяется матрицей F(t) и, как легко показать, связана с ней однородным дифференциальным уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Phi}(t,t_0) = \mathbf{F}(t) \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$$
(6.6)

с начальным условием  $\Phi(t_0, t_0) = I$ . Когда матрица F(t) задана и непрерывна, то переходная матрица  $\Phi(t, t_0)$  может быть вычислена для любого момента *t* путем численного интегрирования дифференциального уравнения (6.6). Если же матрица F(t) кусочно-непрерывна, то для решения уравнения (6.6) применяют метод Рунге-Кутта 4-го порядка [60, с. 42].

Из уравнения (6.6) и его решения (6.4) вытекают следующие свойства переходных матриц [60, с. 38)]:

(1) 
$$\Phi(t,t) = \Phi(t_0,t_0) = \mathbf{I},$$
  
(2)  $\Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau,t),$ 

(3) 
$$\mathbf{\Phi}(t,\theta)\mathbf{\Phi}(\theta,\tau) = \mathbf{\Phi}(t,\tau),$$
  
(4)  $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{F}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau),$   
(5)  $\frac{\partial}{\partial \tau}\mathbf{\Phi}(t,\tau) = -\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{F}(t).$ 

С учетом 3-го из этих свойств решение (6.5) можно записать также в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau.$$
 (6.7)

Хотя мы рассматриваем непрерывные динамические системы, но их наблюдения ведутся, как правило, дискретно. В связи с этим модели (6.1)–(6.2) необходимо преобразовать к дискретному виду. Для этого введем дискретную шкалу моментов наблюдений  $l_0, l_1, \ldots, l_k, l_{k+1}, \ldots$ , начиная с  $l_0$ . Будем считать, что наблюдения ведутся в равноотстоящие моменты времени, т.е.  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = T = \text{const.}$ Тогда последовательность моментов наблюдений удобно обозначать их порядковыми номерами: 0,1,...,  $k, k+1, \ldots$ , причем  $t_k = kT$ . В этих условиях модель наблюдений (6.2) для произвольного момента  $t_k$ примет вид

$$\mathbf{I}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k).$$
(6.8)

Чтобы получить уравнение состояния дискретно наблюдаемой динамической системы, запишем уравнение (6.7) для непрерывного перехода системы из произвольного состояния в момент  $l_k$  к состоянию в последующий момент  $l_{k+1}$  [6, с. 35]:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k) \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau.$$
(6.9)

В дальнейшем будем считать, что возмущение v(t) представляет собой ступенчатую функцию типа телеграфного сигнала, постоянную на каждом интервале дискретизации  $[t_{k+1}, t_k]$  длиной *T*. Если *T* достаточно мало, то постоянную величину  $v(t_k)$ , относящуюся к этому интервалу, можно вынести за знак интеграла в правой части уравнения (6.9), поэтому это уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{A}(t_k)\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{B}(t_k)\mathbf{v}(t_k), \qquad (6.10)$$

где

$$\mathbf{A}(t_k) = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k), \quad \mathbf{B}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau.$$
(6.11)

Объединяя уравнения (6.10) и (6.8) и заменяя для краткости записи время *l<sub>k</sub>* на индекс *k*, получаем модель наблюдаемой динамической системы в дискретном виде:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k),$$
  

$$\mathbf{I}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k).$$
(6.12)

Блок-схема такой системы показана на рис. 6.1.



Рис. 6.1. Наблюдаемая динамическая система первого порядка.

Определим взаимные ковариации шума v(k) как блочную матрицу:

$$\mathbf{R}(k, j) = \operatorname{cov}\{\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(j)\} = \mathcal{E}\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(j)\} \quad (k, j = 0, 1, 2, ...).$$

Для белого шума при  $k \neq j$  имеем  $\mathbf{R}(k, j) = \mathbf{0}$ , а при  $k = j - \mathbf{R}(k, j) = \mathbf{R}(k)$ , поэтому эта матрица имеет блочно-диагональный вид

$$\mathbf{R}(k, j) = \mathbf{R}(k)\delta_{kl} = \operatorname{diag}(\mathbf{R}(k)), \qquad (6.13)$$

где

$$\delta_{kj} = \delta_K (k-j) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, \\ 1 & \text{при } k = j \end{cases}$$
(6.14)

представляют собой δ-символы Кронекера [36, с. 502].

Аналогичным образом определяется и ковариационная матрица ошибок наблюдений:

$$\mathbf{Q}(k, j) = \operatorname{cov}\{\mathbf{r}(k), \mathbf{r}(j)\} = E\{\mathbf{r}(k)\mathbf{r}'(j)\} = = \mathbf{Q}(k)\delta_{kj} = \operatorname{diag}(\mathbf{Q}(k)) \quad (k = 0, 1, 2, ...),$$
(6.15)

хотя размерности матриц  $\mathbf{R}(k)$  и  $\mathbf{Q}(k)$  различны. Первая имеет размер  $p \times p$ , а вторая –  $n \times n$ .

Рассмотрим теперь случай, когда входное воздействие v(k) является коррелированным (цветным) шумом. Такой шум можно в свою очередь представить как наблюдаемый выход дополнительной динамической системы, возбуждаемой заведомо некоррелированным белым шумом u(k) [48, с. 53]:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{M}(k)\mathbf{y}(k) + \mathbf{N}(k)\mathbf{u}(k),$$
  
$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{y}(k) + \mathbf{w}(k),$$
 (6.16)

где не только u(k), но и w(k) – белые некоррелированные шумы.

Рассмотрим теперь обе динамические системы (6.12) и (6.16) совместно и введем новый фазовый вектор

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

их совместного состояния, а также следующие матрицы:

$$\mathbf{T}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) & \mathbf{B}(k)\mathbf{H}(k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}(k) \end{bmatrix}, \ \mathbf{L}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}(k) \end{bmatrix}.$$
(6.17)

Легко убедиться, что вектор z(k) удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{T}(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{L}(k)\mathbf{n}(k), \tag{6.18}$$

где

$$\mathbf{n}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}$$
(6.19)

представляет собой составной вектор белых шумов.

Полученное уравнение (6.18) полностью совпадает по форме с первым из уравнений (6.12), поэтому его можно назвать *приведением* модели динамической системы с цветным шумом v(k) к модели с бе-
лым шумом n(k). Благодаря процедуре приведения снимается условие о том, что возмущение динамической системы должно быть белым шумом, и вся теория фильтрации Калмана, построенная при этом условии, остается в силе за счет некоторого усложнения модели этой системы.

## §2. Задача оптимальной фильтрации

Рассмотрим наблюдаемую дискретно динамическую систему (6.12):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k),$$
  

$$\mathbf{l}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k), \ k \ge 0.$$
(6.20)

Здесь недоступный непосредственному наблюдению фазовый вектор  $\mathbf{x}(k)$  по-прежнему имеет размер *m*. Пусть имеется его начальное значение  $\mathbf{x}(0)$  в момент k = 0 как случайный вектор с нулевым матожиданием и заданной а priori ковариационной матрицей  $\overline{\mathbf{D}}(0)$ . Матрицы  $\mathbf{A}(k)$ ,  $\mathbf{B}(k)$  и  $\mathbf{C}(k)$  заданы и имеют размер  $m \times m$ ,  $m \times p$  и  $n \times m$  соответственно. Измеряемый вектор  $\mathbf{l}(k)$  имеет размер *n*. Вектор возмущений  $\mathbf{v}(k)$  размерности *p* и вектор невязок  $\mathbf{r}(k)$  размера *n* представляют собой дискретные векторные случайные процессы типа белого шума с нулевым матожиданием и известными а priori автоковариациями:

$$E\{\mathbf{v}(k)\} \equiv 0, \quad E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(j)\} = \mathbf{R}(k)\delta_{kj}, \quad (6.21)$$

$$E\{\mathbf{r}(k)\} = 0, \quad E\{\mathbf{r}(k)\mathbf{r}'(j)\} = \mathbf{Q}(k)\delta_{kj}, \quad (6.22)$$

где  $\delta_{kj}$  – символы Кронекера, определяемые формулой (6.14). Предполагается также, что начальное состояние, оппибки измерений и вектор возмущений взаимно не коррелированы:

$$E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{v}'(k)\} = 0, \ E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{r}'(k)\} = 0, \ E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{r}'(k)\} = 0.$$
(6.23)

Требуется на основе имеющейся последовательности данных измерений l(0), l(l), ..., l(k) построить такую линейную несмещенную оценку фазового вектора  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ , чтобы дисперсии ошибок

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k), \qquad (6.24)$$

т.е. диагональные элементы матрицы апостериорных автоковариаций

$$\mathbf{D}(k) = E\{\bar{\mathbf{x}}(k)\bar{\mathbf{x}}'(k)\},\tag{6.25}$$

были минимальны. Именно такую оценку называют оптимальной.

Поскольку выше было принято, что  $E\{\mathbf{x}(0)\}=0$  и последовательность  $\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1), \dots$  центрирована, то из первого уравнения (6.20) прямо следует, что вся последовательность  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots$  тоже имеет нулевое матожидание. Далее, ввиду второго уравнения (6.20) и того, что все невязки  $\mathbf{r}(k)$  имеют нулевые матожидания, заключаем, что математическое ожидание последовательности  $\mathbf{l}(0), \mathbf{l}(1), \mathbf{l}(2), \dots$  также равняется нулю. Иными словами, сделанные выше предположения состоят в том, что математическое ожидание случайных процессов  $\mathbf{v}(k), \mathbf{r}(k), \mathbf{l}(k)$  и  $\mathbf{x}(k)$  равняется нулю при всех k. В отношении шумов  $\mathbf{v}(k), \mathbf{r}(k)$  будем считать, что это условие выполняется всегда, а предположения о равенстве нулю матожиданий величин  $\mathbf{l}(k)$  и  $\mathbf{x}(k)$  будут, когда это возможно, сняты. Все такие случай будут оговорены особо.

## §3. Фильтр Калмана как рекуррентный МНК

Предположим, что не имеется никакой информации о начальном состоянии динамической системы в момент k = 0. В этом случае необходимо начиная с момента k = 0 выполнить определенное количество предварительных наблюдений (превышающее число неизвестных параметров *m*). Представим данные этих наблюдений системой линейных уравнений с постоянными параметрами

$$l(j) = C(j)x + r(j) \ (j = 0, 1, ..., k)$$
(6.26)

и решим ее методом наименыших квадратов, полагая, что матрица ковариаций невязок Q(k) известна а ргіогі (см. §2 гл. 2). Причем эта матрица необязательно должна быть диагональной, т.е. второе из условий (6.22) может быть снято, и шум r(k) на интервале времени  $[t_0, t_k]$  может быть цветным. В результате получим некоторую усредненную на этом интервале оценку  $\hat{x}(k)$  и апостериорную ковариацию D(k) ее ошибок. Примем, что полученная оценка фазового вектора  $\hat{x}(k)$  и ковариация его ошибок D(k) определяют начальное состояние динамической системы в момент k.

Теперь с помощью первого из уравнений (6.20) можно построить приближенный прогноз фазового вектора на следующий момент наблюдений

$$\hat{\mathbf{x}}_{*}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k), \qquad (6.27)$$

который не учитывает возмущения v(k). Оценка  $\hat{x}_*(k+1)$  получена благодаря знанию переходной матрицы A(k) с учетом предпествующих наблюдений. Для выяснения ее ошибки  $\bar{x}_*(k+1)$  заменим  $\hat{x}(k)$  в (6.27) на разность  $x(k) - \bar{x}(k)$  и подставим вместо A(k)x(k) соответствующее выражение из первого уравнения (6.20). Это дает

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\star}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_{\star}(k+1) = \mathbf{A}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k).$$
(6.28)

Согласно формулам (6.23), (6.25) и (6.28), матрица ковариаций этой ошибки равна

$$\mathbf{D}_{\bullet}(k+1) = E\{[\mathbf{A}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k)][(\bar{\mathbf{x}}'(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{v}'(k)\mathbf{B}'(k)]\} = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k).$$
(6.29)

Заметим, что полученная выше предварительная оценка  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  является линейной функцией данных наблюдений  $\mathbf{l}(0), \mathbf{l}(1), ..., \mathbf{l}(k)$  и зависит только от последовательности истинных значений фазового вектора в моменты наблюдений  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), ..., \mathbf{x}(k)$  и последовательности случайных невязок  $\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(1), ..., \mathbf{r}(k)$  модели (6.26). Но благодаря условиям (6.23) обе эти последовательности не коррелированы с  $\mathbf{v}(k)$ , поэтому ковариации между  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  и  $\mathbf{v}(k)$  тоже равны нулю, что и использовано при выводе формулы (6.29).

Пусть теперь выполнены новые наблюдения в момент  $t_{k+1}$  и получены новые данные l(k+1). Их линейная модель имеет вид

$$l(k+1) = C(k+1)x(k+1) + r(k+1),$$
(6.30)

где фазовый вектор  $\mathbf{x}(k+1)$  соответствует этому же моменту  $t_{k+1}$ . Запишем уравнения (6.28) и (6.30) в виде одной системы:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) \\ \mathbf{l}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}(k+1) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) + \begin{bmatrix} -\mathbf{A}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{r}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

что можно представить в более краткой форме:

$$\mathbf{h} = \mathbf{H}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{s},\tag{6.32}$$

где векторы h, s и матрица H определяются непосредственным сравнением с (6.31). Учитъвая, что пары векторов  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ ,  $\mathbf{r}(k+1)$  и  $\mathbf{v}(k)$ ,  $\mathbf{r}(k+1)$  не коррелированы, и принимая во внимание (6.22) и (6.29), легко показать, что ковариации нового случайного вектора s будут определяться матрицей

$$\mathbf{S} = E\{\mathbf{ss'}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\star}(k+1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}(k+1) \end{bmatrix},$$
(6.33)

где Q(k+1) – априорная ковариация нового наблюдения l(k+1).

Теперь систему параметрических уравнений (6.32) можно решить по методу наименьших квадратов с априорной ковариационной матрицей S. ОМНК-оценка неизвестного фазового вектора x(k+1) будет равна (см. §2 гл. 2)

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{H}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{h}.$$
(6.34)

Как известно из теории МНК, матрица  $D(k+1) = (H'S^{-1}H)^{-1}$  дает апостериорные ковариации ошибок оценивания  $\bar{x}(k+1)$ . С учетом принятых выше обозначений имеем

$$\mathbf{D}^{-1}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}'(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\bullet}^{-1}(k+1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}(k+1) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{\bullet}^{-1}(k+1) + \mathbf{C}'(k+1)\mathbf{Q}^{-1}(k+1)\mathbf{C}(k+1),$$
(6.35)

$$\mathbf{H}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}'(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\bullet}^{-1}(k+1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) \\ \mathbf{l}(k+1) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{\bullet}^{-1}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) + \mathbf{C}'(k+1)\mathbf{Q}^{-1}(k+1)\mathbf{l}(k+1).$$
(6.36)

Подставляя (6.35) и (6.36) в (6.34), находим

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{D}(k+1)[\mathbf{D}_{\bullet}^{-1}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) + \mathbf{C}'(k+1)\mathbf{Q}^{-1}(k+1)\mathbf{I}(k+1)]. \quad (6.37)$$

Поскольку левая и правая части равенств (6.35) и (6.37) зависят от одного и того же аргумента  $l_{k+1}$ , то эти выражения справедливы для любого индекса времени k, k+1, k+2,... Множитель перед l(k+1) в правой части (6.37) называют матрицей усиления и обозначают

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}(k+1)\mathbf{C}'(k+1)\mathbf{Q}^{-1}(k+1).$$
(6.38)

Умножая обе части равенства (6.35) слева на D(k+1), получаем

$$\mathbf{I} = \mathbf{D}(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}^{-1}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1).$$
(6.39)

Последнее уравнение разрешим относительно  $D(k+1)D_{\bullet}^{-1}(k+1)$  и результат подставим в (6.37). Тогда

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_{*}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{l}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_{*}(k+1)].$$
(6.40)

Далее, умножая равенство (6.39) справа на  $D_*(k+1)$ , находим

$$\mathbf{D}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{D}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}(k+1).$$
(6.41)

Наконец, умножим это уравнение справа на C'(k+1) и припишем к первому слагаемому правой части множитель  $Q^{-1}(k+1)Q(k+1) = I$ . Разрешая полученное таким образом уравнение относительно K(k+1), получаем с учетом формулы (6.38):

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}_{\star}(k+1)\mathbf{C}'(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_{\star}(k+1)\mathbf{C}'(k+1) + \mathbf{Q}(k+1)]^{-1}.$$
 (6.42)

Построенный таким образом рекуррентный алгоритм можно резюмировать следующим образом:

(а) пусть дана наблюдаемая в дискретные моменты времени  $t_i$  (j = 0, 1, 2, ..., k, k + 1, ...) динамическая система (6.20):

$$\mathbf{x}(j+1) = \mathbf{A}(j)\mathbf{x}(j) + \mathbf{B}(j)\mathbf{v}(j),$$
  
$$\mathbf{I}(j) = \mathbf{C}(j)\mathbf{x}(j) + \mathbf{r}(j) \quad (j \ge 0),$$
  
(6.43)

где A(j), B(j), C(j) – заданные матрицы, l(j) – вектор данных наблюдений, v(j), r(j) – неизвестные случайные векторы типа белого шума с нулевым матожиданием и априорными ковариациями R(j) и Q(j);

(б) начиная с момента t<sub>0</sub> и вплоть до t<sub>k</sub> включительно выполняем ряд наблюдений (их число должно быть не меньше количества параметров в фазовом векторе х), которые представляем в виде системы параметрических уравнений (6.26):

$$l(j) = C(j)x + r(j) (j = 0, 1, ..., k);$$

эту систему решаем методом наименьших квадратов (см. §2 гл. 2) и находим оценку фазового вектора  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  и ковариационную матрицу ошибок оценивания  $\mathbf{D}(k)$ ; оценки  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  и матрицу  $\mathbf{D}(k)$  принимаем за начальные условия дальнейшего рекуррентного процесса; (в) полученную оценку фазового вектора экстраполируем приближенно на следующий момент наблюдений  $t_{k+1}$  с помощью (6.27):

$$\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) \tag{6.44}$$

без учета возмущений; ковариационная матрица ошибок этой оценки определяется формулой (6.29):

$$\mathbf{D}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k); \qquad (6.45)$$

(г) экстраполированную оценку (6.44) уточняем по (6.40) с учетом новых данных наблюдений:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{I}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1)]; \quad (6.46)$$

(д) ковариацию ошибок этой оценки вычисляем по формулам (6.41)-(6.42):

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}_{\bullet}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}(k+1), \qquad (6.47)$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}_{\bullet}(k+1)\mathbf{C}'(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}(k+1)\mathbf{C}'(k+1) + \mathbf{Q}(k+1)]^{-1}.$$
 (6.48)

Рекуррентный алгоритм (6.43)-(6.48) называется фильтром Калмана.

В более простом случае, когда входное возмущение v(k) действует на фазовый вектор системы непосредственно, а наблюдаемым выходом динамической системы в каждый момент времени является одна скалярная величина, т.е. n = l, l(k) = l(k), r(k) = r(k), матрица C(k)превращается в строку c'(k) длиной *m*, размер матрицы A(k) становится равным  $m \times m$  и алгоритм фильтра Калмана (6.43)–(6.48) принимает следующий более простой вид:

(а) динамическая система:

$$\mathbf{x}(j+1) = \mathbf{A}(j)\mathbf{x}(j) + \mathbf{v}(j),$$
  

$$l(j) = \mathbf{c}'(j)\mathbf{x}(j) + r(j) \quad (j \ge 0);$$
(6.49)

(б) начальные ОМНК-оценки:  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ ,  $\mathbf{D}(k)$ ;

(в) предварительная экстраполяция:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k), \tag{6.50}$$

$$\mathbf{D}_{\star}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{R}(k); \qquad (6.51)$$

(г) окончательная оценка:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) + \mathbf{k}(k+1)[l(k+1) - \mathbf{c}'(k+1)\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1)], \quad (6.52)$$

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}_{\star}(k+1) - \mathbf{k}(k+1)\mathbf{c}'(k+1)\mathbf{D}_{\star}(k+1), \qquad (6.53)$$

$$\mathbf{k}(k+1) = \mathbf{D}_{\bullet}(k+1)\mathbf{c}(k+1)[\mathbf{c}'(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}(k+1)\mathbf{c}(k+1) + q(k+1)]^{-1}.$$
 (6.54)

В последней формуле матрица усиления стала  $m \times 1$ -вектором  $\mathbf{k}(k+1)$ , а скаляр q(k+1) означает известную априорную дисперсию невязки r(k+1), которую, согласно (6.22), можно также представить в виде

$$q(k+1) = E\{r^2(k+1)\}.$$

Если наблюдаемая динамическая система (6.49) является возмущенной ( $v(k) \neq 0$ ), но при этом остается стационарной и устойчивой (A(k) = I), то фазовый вектор такой системы становится случайным вектором с нулевым матожиданием и рассмотренный выше рекуррентный алгоритм его оценивания (6.52)–(6.54) с точностью до обозначений совпадает с алгоритмом непрерывной коллокации (5.36)–(5.40), если в нем вектор х считать случайным, а сигнал s положить равным нулю.

Рассмотрим теперь устойчивую и невозмущенную динамическую систему, у которой  $A(k) \equiv I$ ,  $v(k) \equiv 0$ . В этом случае ее фазовый вектор является постоянным x(k) = x и фильтр Калмана принимает вид:

(а) динамическая система:

$$\mathbf{x}(j+1) = \mathbf{x}(j) \ (j = 0, 1, 2, ...), l(j) = \mathbf{c}'(j)\mathbf{x}(j) + \mathbf{r}(j).$$
 (6.55)

(б) начальные ОМНК-оценки:  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ ,  $\mathbf{D}(k)$ ;

(в) предварительная экстраполяция:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k), \tag{6.56}$$

$$\mathbf{D}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{D}(k); \tag{6.57}$$

(г) окончательная оценка:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{k}(k+1)[l(k+1) - \mathbf{c}'(k+1)\hat{\mathbf{x}}(k)], \quad (6.58)$$

$$D(k+1) = D(k) - k(k+1)c'(k+1)D(k),$$
(6.59)

$$\mathbf{k}(k+1) = \mathbf{D}(k)\mathbf{c}(k+1)[\mathbf{c}'(k+1)\mathbf{D}(k)\mathbf{c}(k+1) + q(k+1)]^{-1}.$$
 (6.60)

Сравнивая алгоритм (6.56)–(6.60) с алгоритмом рекуррентного МНК (3.158)–(3.162) (см. §8 гл. 3) видим, что они с учетом разницы обозначений полностью совпадают. Таким образом, фильтрация Калмана представляет собой обобщение рекуррентных алгоритмов МНК и СКК на случай наблюдений возмущенных динамических систем.

Отметим, что собственно фильтром является та часть алгоритма Калмана (формулы (6.44) и (6.46)), где производится экстраполяция фазового вектора, а затем ее уточнение. При этом оказывается, что матрица усиления и ковариационные матрицы ошибок экстраполяции и оценивания (6.48), (6.45) и (6.47), определяемые во второй части алгоритма, не зависят от данных наблюдений и оценок фазового вектора. Но поскольку матрицы А, В, С, Q и R предполагаются известными, то эта часть алгоритма, которую называют синтезом оптимального фильтра, может быть рассчитана заранее.

Другой важной особенностью рассмотренного алгоритма является его полная независимость от предположений о начальном состоянии динамической системы в момент  $t_0$ , так как требуемые для процесса фильтрации, начинающегося в момент  $t_k$ , оценки состояния системы на этот момент  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  и  $\mathbf{D}(k)$  находятся из обработки методом наименыших квадратов предшествующих наблюдений, выполненных за время  $[t_0, t_k]$ . При этом только требуется, чтобы ковариационная матрица ошибок наблюдений  $\mathbf{Q}(k)$  была невырожденной для всех k = 0, 1, 2..., что равносильно условию наблюдаемости системы.

# §4. Оптимальный фильтр Калмана

В предыдущем параграфе алгоритм фильтра Калмана был построен как обобщение рекуррентного ОМНК. Основным недостатком этого алгоритма является необходимость в предварительных наблюдениях. К тому же он не гарантирует минимальности дисперсии получаемых оценок фазового вектора. Оба эти недостатка устраняются в рекуррентном алгоритме, построенном на основе процедуры оптимального оценивания с минимальной дисперсией (см. §9 гл. 2).

Метод оптимальной фильтрации позволяет сразу после первого же наблюдения l(0) построить оценку  $\hat{x}(0)$  фазового вектора x(0). Правда, при этом предполагается, в противоположность изложенному выше, что сам этот вектор является случайным, имеет нулевое матожидание и известную а рпоп конечную матрицу ковариации  $\overline{D}(0)$ . Иначе говоря, должна существовать соответствующая информация о начальном состоянии системы.

В первый момент наблюдений to имеем измерение

$$\mathbf{l}(0) = \mathbf{C}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{r}(0)$$
(6.61)

и известные матрицы априорных ковариаций векторов x(0) и r(0):

$$\overline{\mathbf{D}}(0) = E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{x}'(0)\}, \ \mathbf{Q}(0) = E\{\mathbf{r}(0)\mathbf{r}'(0)\}.$$
(6.62)

Воспользуемся теперь формулой (2.129) для оптимального МНКоценивания с минимальной дисперсией. С учетом разницы обозначений эта формула имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \overline{\mathbf{D}}(0)\mathbf{C}'(0)[\mathbf{C}(0)\overline{\mathbf{D}}(0)\mathbf{C}' + \mathbf{Q}(0)]^{-1}\mathbf{I}(0).$$

В соответствии с формулой (6.42), введем матрицу начального усиления

$$\overline{\mathbf{K}}(0) = \overline{\mathbf{D}}(0)\mathbf{C}'(0)[\mathbf{C}(0)\overline{\mathbf{D}}(0)\mathbf{C}' + \mathbf{Q}(0)]^{-1}, \qquad (6.63)$$

тогда

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \overline{\mathbf{K}}(0)\mathbf{I}(0). \tag{6.64}$$

Используя формулу (2.127), получаем апостериорную ковариацию полученной оценки фазового вектора:

$$\mathbf{D}(0) = \overline{\mathbf{D}}(0) - \overline{\mathbf{K}}(0)\mathbf{C}(0)\overline{\mathbf{D}}(0). \tag{6.65}$$

Теперь оценку (6.64) и ее ковариацию (6.65) можно принять в качестве начальных условий для рекуррентного алгоритма фильтра Калмана (6.44)–(6.48), уже полученного в предыдущем параграфе. Для этого нужно только положить

$$\hat{\mathbf{x}}_{\star}(0) = \mathbf{0}, \ \mathbf{D}_{\star}(0) = \overline{\mathbf{D}}(0). \tag{6.66}$$

После этого имеем:

(а) экстраполированную оценку фазового вектора на любой момент  $l_{k+1} > l_0$ 

$$\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k), \quad \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(0) = 0;$$
(6.67)

(б) ковариационную матрицу ошибок этой оценки

$$\mathbf{D}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k), \quad \mathbf{D}_{\bullet}(0) = \mathbf{D}(0); \quad (6.68)$$

(в) уточненную оценку фазового вектора с учетом новых данных наблюдений

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{I}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1)]; \quad (6.69)$$

(г) ковариацию ошибок этой оценки

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}_{\bullet}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}(k+1);$$
(6.70)

(д) матрицу усиления

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}_{\bullet}(k+1)\mathbf{C}'(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}(k+1)\mathbf{C}'(k+1) + \mathbf{Q}(k+1)]^{-1}, \quad (6.71)$$

где  $\mathbf{K}(0) = \overline{\mathbf{K}}(0)$ .

Таким образом, полученный здесь оптимальный алгоритм фильтрации Калмана, соответствующий оцениванию с минимальной дисперсией, по форме полностью совпадает с рекуррентным алгоритмом фильтра Калмана, полученным в предыдущем параграфе как обобцение рекуррентного ОМНК. Разница состоит лишь в изменении начальных условий и в смещении момента начала фильтрации. Общее и строгое доказательство идентичности этих алгоритмов дано в [6, с. 65-67].

Основным практическим неудобством изложенного выше алгоритма оптимальной фильтрации является принципиально важное предположение о равенстве нулю матожидания начального значения фазового вектора, т.е.  $E\{x(0)\} = 0$ . Однако это условие легко обойти, если это матожидание известно [48, с. 75–77]. Для этого рассмотрим детерминированную часть модели динамической системы (6.12), не учитывающую случайные возмущения и ошибки:

$$\mathbf{x}_{0}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}_{0}(k),$$
  

$$\mathbf{l}_{0}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}_{0}(k) \quad (k = 0, 1, ...),$$
(6.72)

и положим, что матожидание невозмущенного фазового вектора в начальный момент времени равно

$$E\{\mathbf{x}(0)\} = \mathbf{x}_0(0). \tag{6.73}$$

Очевидно, что детерминированная динамическая система (6.72) с начальными условиями (6.73) позволяет легко определить векторы  $\mathbf{x}_0(k)$  и  $\mathbf{l}_0(k)$  для всех k. Образуем теперь центрированные векторы

$$\mathbf{x}_{1}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{0}(k), \quad \mathbf{l}_{1}(k) = \mathbf{l}(k) - \mathbf{l}_{0}(k).$$
(6.74)

В первый момент наблюдений при  $x_*(0) = 0$  имеем из формул (6.64) и (6.69):

$$\hat{\mathbf{x}}_1(0) = \mathbf{K}(0)\mathbf{I}_1(0). \tag{6.75}$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства известный вектор  $x_0(0)$ , получаем оценку для x(0):

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0(0) + \hat{\mathbf{x}}_1(0) = \mathbf{x}_0(0) + \mathbf{K}(0)[\mathbf{I}(0) - \mathbf{C}(0)\mathbf{x}_0(0)].$$
(6.76)

Сравнение этой формулы с (6.69) показывает, что необходимо только принять

$$\mathbf{x}_{\bullet}(0) = \mathbf{x}_{0}(0). \tag{6.77}$$

Для следующих моментов наблюдений возьмем уравнение (6.69) для центрированных векторов и исключим из него вектор  $\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1)$  с помощью уравнения (6.67). Это дает

$$\hat{\mathbf{x}}_{1}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}_{1}(k) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{I}_{1}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}_{1}(k)]. \quad (6.78)$$

Складывая теперь первое из уравнений (6.72) с уравнением (6.78) и полагая,

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}_0(k) + \hat{\mathbf{x}}_1(k),$$
 (6.79)

находим

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{I}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\mathbf{x}_{0}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}_{1}(k)].$$
(6.80)

Заменяя здесь стоящий в квадратных скобках вектор  $x_0(k+1)$  его выражением из первого уравнения (6.72), получаем

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{I}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)].$$
(6.81)

Сравнивая это выражение с формулой фильтрации (6.69), убеждаемся, что они полностью совпадают, если в качестве проэкстраполированного значения фазового вектора взять

$$\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k). \tag{6.82}$$

Полученный результат теперь нужно обобщить на случай возмущенной динамической системы и ошибочных наблюдений. Пусть дана наблюдаемая динамическая система

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k),$$
  
$$\mathbf{I}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k) \quad (k \ge 0),$$
  
(6.83)

для которой известно, что  $E\{\mathbf{x}(0)\} = \mathbf{x}_0(0) \neq \mathbf{0}$ . Докажем [48, с. 77–78], что и в этом случае рекуррентный алгоритм фильтрации Калмана сохраняется и имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{*}(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k), \quad \hat{\mathbf{x}}_{*}(0) = \mathbf{x}_{0}(0), \quad (6.84)$$

$$\mathbf{D}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k), \quad \mathbf{D}_{\bullet}(0) = \overline{\mathbf{D}}(0), \quad (6.85)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{I}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1)], \quad (6.86)$$

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}_{\bullet}(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}(k+1), \qquad (6.87)$$

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}_{\bullet}(k+1)\mathbf{C}'(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_{\bullet}(k+1)\mathbf{C}'(k+1) + \mathbf{Q}(k+1)]^{-1}, \quad (6.88)$$

$$\mathbf{K}(0) = \overline{\mathbf{D}}(0)\mathbf{C}'(0)[\mathbf{C}(0)\overline{\mathbf{D}}(0)\mathbf{C}' + \mathbf{Q}(0)]^{-1}.$$
(6.89)

Осталось убедиться, что оценки фазового вектора по-прежнему остаются линейными, несмещенными и имеют минимальную дисперсию. Линейность оценок (6.84) и (6.86) очевидна. Докажем их несмещенность. Для этого рассмотрим ошибку экстраполированной оценки. Вычитая из первого уравнения (6.83) уравнение (6.84), получаем

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k), \quad (6.90)$$

причем начальное условие имеет вид

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\star}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}_{\star}(0) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{0}(0).$$
(6.91)

Используя теперь второе уравнение (6.83) и уравнение (6.86):

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{I}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k)], \qquad (6.92)$$

записанное для момента l<sub>k</sub>, получаем

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}_{\star}(k) - \mathbf{K}(k)[\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}_{\star}(k) + \mathbf{r}(k)] = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)]\hat{\mathbf{x}}_{\star}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{r}(k).$$
(6.93)

Вычисляя математическое ожидание от обеих частей этого равенства, находим

$$E\{\bar{\mathbf{x}}(k)\} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)]E\{\bar{\mathbf{x}}_{\bullet}(k)\}.$$
(6.94)

Но поскольку, согласно (6.91), имеем

$$E\{\bar{\mathbf{x}}_{*}(0)\} = \mathbf{x}_{0}(0) - \mathbf{x}_{0}(0) = 0, \qquad (6.95)$$

то из (6.94) получаем

$$E\{\bar{\mathbf{x}}(0)\} = 0. \tag{6.96}$$

Далее, из (6.90) имеем

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1)\} = \mathbf{A}(k)E\{\tilde{\mathbf{x}}(k)\}, \qquad (6.97)$$

откуда для k = 0 с учетом (6.96) находим

$$E\{\bar{\mathbf{x}}_{*}(1)\} = \mathbf{A}(0)E\{\bar{\mathbf{x}}(0)\} = 0.$$
(6.98)

Примем теперь k = 1. Из (6.94) с учетом (6.98) получаем

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}(1)\} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(1)\mathbf{C}(1)]E\{\bar{\mathbf{x}}_{*}(1)\} = 0.$$
(6.99)

После этого из (6.97) с учетом (6.99) имеем

$$E\{\bar{\mathbf{x}}_{*}(2)\} = \mathbf{A}(1)E\{\bar{\mathbf{x}}(1)\} = 0.$$
(6.100)

Продолжая этот процесс, убеждаемся, что векторы  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ и  $\tilde{\mathbf{x}}_{\bullet}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k)$ , представляющие собой ошибки оценивания и экстраполяции, имеют нулевое матожидание для любых k = 0, 1, 2, ..., aэто и означает несмещенность этих оценок независимо от начального значения фазового вектора  $\mathbf{x}_0(0)$ , которое, однако, должно быть достаточно близко к матожиданию  $E\{\mathbf{x}(0)\}$ .

Остается доказать, что дисперсия (6.87) ошибок оценки (6.86), равных  $\tilde{\mathbf{x}}_{\star}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_{\star}(k+1)$ , действительно минимальна. Матрица ковариаций этих ошибок, согласно (6.90), равна

$$\mathbf{D}_{\star}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k).$$
(6.101)

Ее начальное значение, определяемое с помощью уравнения (6.91), равно  $\overline{\mathbf{D}}(0)$ , а дальнейшие изменения происходят в соответствии с формулой (6.85). Для матрицы ковариаций вектора ошибок  $\overline{\mathbf{x}}(k)$  на основании уравнения (6.93) имеем

$$\mathbf{D}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{D}_{\star}(k)[\mathbf{I} - \mathbf{C}'(k)\mathbf{K}'(k)] + \\ + \mathbf{K}(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{K}'(k) = \mathbf{D}_{\star}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{D}_{\star}(k) - \\ - \mathbf{D}_{\star}(k)\mathbf{C}'(k)\mathbf{K}'(k) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{C}(k)\mathbf{D}_{\star}(k)\mathbf{C}'(k) + \mathbf{Q}(k)]\mathbf{K}'(k).$$
(6.102)

Если матрица усиления  $\mathbf{K}(k)$  вычислена по формуле (6.88), то два последних слагаемых в выражении (6.102) исчезают, поэтому, переходя от  $l_k \kappa l_{k+1}$ , получаем выражение (6.87), гарантирующее минимальную дисперсию ошибкам оценивания фазового вектора.

## §5. Рекуррентный прогноз

Предсказанием (прогнозом) называется оценка состояния наблюдаемой динамической системы в момент  $t_j > t_k$  на основании множества данных наблюдений  $\mathcal{L}(k) = \{l(0), l(1), ..., l(k)\}$ , выполненных в предпествующий период времени  $[t_0, t_k]$ . В рассмотренном выше алгоритме фильтрации Калмана содержится способ экстраполяции на один шаг вперед, т.е. на момент  $t_j = t_{k+1}$ , непосредственно следующий за последним моментом наблюдений  $t_k$ . Действительно, подставляя выражение (6.86), записанное для момента  $t_k$ , в (6.84), имеем

$$\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\{\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{I}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k)]\}.$$
(6.103)

Вводя обозначения

$$\hat{\mathbf{x}}_{\star}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1), \quad \mathbf{K}_{\star}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{K}(k), \quad (6.104)$$

уравнение (6.103) преобразуем к виду

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}(k)\{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}_{\bullet}(k)[\mathbf{I}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]\}. \quad (6.105)$$

Здесь матрица **К**(k) по-прежнему определяется формулой (6.88):

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{D}_{\bullet}(k)\mathbf{C}'(k)[\mathbf{C}(k)\mathbf{D}_{\bullet}(k)\mathbf{C}'(k) + \mathbf{Q}(k)]^{-1}, \qquad (6.106)$$

где

$$\mathbf{K}(0) = \overline{\mathbf{D}}(0)\mathbf{C}'(0)[\mathbf{C}(0)\overline{\mathbf{D}}(0)\mathbf{C}' + \mathbf{Q}(0)]^{-1}.$$

Подставим теперь (6.88) в (6.87), полученный результат запишем для момента  $l_k$  и подставим в (6.85). В итоге получим рекуррентное уравнение для матрицы ковариаций ошибок пошаговой экстраполяции:

$$\mathbf{D}_{\bullet}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}_{\bullet}(k)\mathbf{A}'(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{D}_{\bullet}(k)\mathbf{C}'(k)[\mathbf{C}(k)\mathbf{D}_{\bullet}(k)\mathbf{C}'(k) + \mathbf{Q}(k)]^{-1}\mathbf{C}(k)\mathbf{D}_{\bullet}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k), \quad \mathbf{D}_{\bullet}(0) = \overline{\mathbf{D}}(0). \quad (6.107)$$

Однако на практике часто требуется определить состояние динамической системы, т.е. оценить ее фазовый вектор, в произвольный момент времени  $t_j > t_k$ , когда последнее наблюдение выполнено в момент  $t_k$ . В отличие от рассмотренной выше процедуры пошаговой экстраполяции эту задачу будем называть собственно предсказанием (прогнозом). Непрерывная модель состояния динамической системы для моментов  $t_i, t_k$  имеет вид (6.7):

$$\mathbf{x}(t_j) = \mathbf{\Phi}(t_j, t_k) \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_j} \mathbf{\Phi}(t_j, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau, \qquad (6.108)$$

где переходная матрица  $\Phi(t_i, \tau)$  удовлетворяет уравнению (6.6):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{F}(t) \mathbf{\Phi}(t,\tau), \quad \mathbf{\Phi}(\tau,\tau) = \mathbf{I}.$$
(6.109)

В дальнейплем нам будет удобнее считать  $\tau$  переменной величиной, а t – фиксированной. При этом условии дифференциальное уравнение для переходной матрицы можно получить следующим образом [48, с. 342]. Образуем произведение  $\Phi(\tau, t)\Phi(t, \tau) = I$ , равное единичной матрице, так как  $\Phi(\tau, t) = \Phi^{-1}(t, \tau)$ . Вычислим теперь от этого произведения производную по  $\tau$ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t)] = \frac{\partial}{\partial \tau} [\mathbf{\Phi}(t,\tau)]\mathbf{\Phi}(\tau,t) + \mathbf{\Phi}(t,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\mathbf{\Phi}(\tau,t) = 0. \quad (6.110)$$

Учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, t) = F(\tau) \Phi(\tau, t)$ , получаем (см. свойства переходных матриц в §1 наст. гл.)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{\Phi}(t,\tau) = -\mathbf{\Phi}(t,\tau) \mathbf{F}(\tau), \quad \mathbf{\Phi}(t,t) = \mathbf{I}.$$
(6.111)

Вычислим теперь условное матожидание от левой и правой частей уравнения (6.108) при заданном множестве данных наблюдений  $\mathcal{L}(t_k)$ , закончившихся в момент  $t_k$  (см. [48, с. 342]):

$$E\{\mathbf{x}(t_j)|\mathcal{L}(t_k)\} = \mathbf{\Phi}(t_j, t_k)E\{\mathbf{x}(t_k)|\mathcal{L}(t_k)\} + \int_{t_k}^{t_j} \mathbf{\Phi}(t_j, \tau)\mathbf{G}(\tau)E\{\mathbf{v}(\tau)|\mathcal{L}(t_k)\}d\tau.$$
(6.112)

Используя теперь обычные определения условных средних

$$\hat{\mathbf{x}}(t_j|t_k) = E\{\mathbf{x}(t_j)|\mathcal{L}(t_k)\}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_k) = E\{\mathbf{x}(t_j)|\mathcal{L}(t_j)\},\$$

перепишем уравнение (6.112) в виде

$$\hat{\mathbf{x}}(t_j|t_k) = \mathbf{\Phi}(t_j, t_k) \hat{\mathbf{x}}(t_k) + \int_{t_k}^{t_j} \mathbf{\Phi}(t_j, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathcal{E}\{\mathbf{v}(\tau)|\mathcal{E}(t_k)\} d\tau.$$
(6.113)

Так как  $v(\tau)$  – некоррелированный белый шум, то никакая информация о его прошлом, содержащаяся в данных наблюдений  $\mathcal{L}(t_k)$ , не может быть использована для предсказания  $v(\tau)$  при  $\tau > t_k$ , поэтому

$$E\{\mathbf{v}(\tau)|\mathcal{L}(t_k)\} = E\{\mathbf{v}(\tau)\} = 0$$
для  $\tau \ge t_k$ .

Таким образом, интеграл в правой части (6.113) обращается в нуль и это уравнение при  $t_i \ge t_k$  принимает вид

$$\hat{\mathbf{x}}(t_j|t_k) = \mathbf{\Phi}(t_j, t_k) \hat{\mathbf{x}}(t_k).$$
(6.114)

Полученное уравнение и представляет собой искомый алгоритм предсказания (прогноза) состояния динамической системы. Здесь оценка  $\hat{x}(t_k)$  получается с помощью фильтрации Калмана (см. §4 наст. гл.), поэтому единственное, что требуется определить в процессе прогноза, это вычислить элементы переходной матрицы состояния системы  $\Phi(t_j, t_k)$  путем решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \mathbf{\Phi}(t_j, t_k) = \mathbf{F}(t_j) \mathbf{\Phi}(t_j, t_k), \quad \mathbf{\Phi}(t_k, t_k) = \mathbf{I}.$$
(6.115)

Хотя алгоритм предсказания получен для непрерывных систем, его результат (6.114) справедлив и в дискретном случае. Для этого достаточно рассматривать моменты времени l, и l<sub>k</sub> как дискретные:

$$\hat{\mathbf{x}}(j|k) = \mathbf{\Phi}(j,k)\hat{\mathbf{x}}(k). \tag{6.116}$$

Ошибку предсказания можно записать в виде

$$\bar{\mathbf{x}}(t_j|t_k) = \mathbf{x}(t_j) - \hat{\mathbf{x}}(t_j|t_k).$$
(6.117)

Используя уравнения (6.108) и (6.114), находим

$$\bar{\mathbf{x}}(t_j|t_k) = \mathbf{\Phi}(t_j, t_k) \bar{\mathbf{x}}(t_k) + \int_{t_k}^{t_j} \mathbf{\Phi}(t_j, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau, \ t_j > t_k.$$
(6.118)

Учитывая, что  $v(\tau)$  и  $\tilde{x}(t_k)$  не коррелированы при  $\tau \ge t_k$ , получаем следующее выражение для автоковариации ошибки прогноза:

$$\mathbf{D}_{xx}(t_j|t_k) = \operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{x}}(t_j|t_k), \tilde{\mathbf{x}}(t_j|t_k)) = \mathbf{\Phi}(t_j, t_k) \mathbf{D}_{xx}(t_k) \mathbf{\Phi}'(t_j, t_k) + \int_{t_k}^{t_j} \int_{t_k}^{t_j} \mathbf{\Phi}(t_j, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{R}(\tau, \lambda) \mathbf{G}'(\lambda) \mathbf{\Phi}'(t_j, \lambda) d\lambda d\tau, \qquad (6.119)$$

где  $\mathbf{D}_{xx}(t_k)$  – апостериорная автоковариация ошибок фильтрации Калмана на момент  $t_k$ ,  $\mathbf{R}(\tau, \lambda)$  – априорная ковариация непрерывного белого шума на интервале  $[t_k, t]$ . Учитывая, что [48, с. 50]

$$\mathbf{R}(\tau,\lambda) = \mathbf{R}(\tau)\delta_D(\tau-\lambda), \qquad (6.120)$$

где δ<sub>D</sub>(τ – λ) – δ-функция Дирака, и принимая во внимание селективное свойство этой функции [36, с. 792], получаем из (6.119):

$$\mathbf{D}_{xx}(t_j|t_k) = \mathbf{\Phi}(t_j, t_k) \mathbf{D}_{xx}(t_k) \mathbf{\Phi}'(t_j, t_k) + \int_{t_k}^{t_j} \mathbf{\Phi}(t_j, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{R}(\tau) \mathbf{G}'(\tau) \mathbf{\Phi}'(t_j, \tau) d\tau.$$
(6.121)

Так как подынтегральное выражение в (6.121) является неотрицательно определенным, дисперсия прогноза  $\mathbf{D}_{xx}(t_i|t_k)$  может в общем случае безгранично расти по мере увеличения разности  $t_j - t_k$ . Кроме того, если система неустойчива, то первое слагаемое в правой части (6.121) тоже будет увеличиваться по мере увеличения  $t_j - t_k$ . Для дискретных динамических систем выражение (6.121) принимает вид

$$\mathbf{D}_{xx}(j|k) = \mathbf{\Phi}(j,k)\mathbf{D}_{xx}(k)\mathbf{\Phi}'(j,k) + \sum_{i=k}^{j-1} \mathbf{\Phi}(j,i)\mathbf{B}(i)\mathbf{R}(i)\mathbf{B}'(i)\mathbf{\Phi}'(j,i).$$
(6.122)

## §6. Рекурсивное сглаживание

В задаче сглаживания требуется получить оценку вектора состояния динамической системы  $\mathbf{x}(t_j)$  для  $t_j \in [t_0, t_k]$  при заданном множестве наблюдений  $\hat{E}(t_k) = \{l(\tau), t_0 \le \tau \le t_k\}$ . Из множества существующих способов решения этой задачи для дискретных динамических систем воспользуемся подходом, основанным на критерии максимальной апостериорной вероятности, изложенным в [48, с. 361–366]. С учетом обозначений (6.11) модель (6.12) принимает вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}(k+1,k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k),$$
  

$$\mathbf{l}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k),$$
(6.123)

где v(k), r(k) – нормальные центрированные белые шумы, автоковариации которых равны

$$E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(j)\} = \mathbf{R}(k)\delta_{kj},$$
$$E\{\mathbf{r}(k)\mathbf{r}'(j)\} = \mathbf{Q}(k)\delta_{kj}.$$

Предполагается также, что начальное условие x(0) имеет нормальное распределение со средним  $E\{x(0)\}$  и автоковариацией D(0), поэтому все плотности вероятности, рассматриваемые далее, являются нормальными и полностью определяются первым и вторым моментами, т.е. средними и ковариациями. Пусть мы имеем множество из N наблюдений  $\mathcal{L}(N)$ . В качестве оценки вектора состояния системы x(k) в момент k < N примем такое значение  $\hat{x}(k)$ , которое максимизирует условную плотность вероятности  $L[x(k)|\mathcal{L}(N)]$ . Аналогичным образом определим оценки  $\hat{x}(k|N)$  и  $\hat{x}(k+1|N)$  как величины, одновременно удовлетворяющие двум уравнениям:

$$\frac{\partial L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathcal{L}(N)]}{\partial \mathbf{x}(k)} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k|N) \\ \mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|N)}} = 0, \quad (6.124)$$

$$\frac{\partial L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathcal{L}(N)]}{\partial \mathbf{x}(k+1)} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k|N) \\ \mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|N)}} = 0.$$

Согласно формуле Байеса, плотность условной вероятности равна

$$L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathcal{L}(N)] = \frac{L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathcal{L}(N)]}{L[\mathcal{L}(N)]}.$$
(6.125)

Воспользовавшись теоремой умножения вероятностей, получим

$$L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathcal{L}(N)] = \frac{L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathcal{L}(N)]}{L[\mathcal{L}(N)]} =$$

$$= \frac{L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathcal{L}(k)]L[\mathcal{L}(k)]}{L[\mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathcal{L}(k)]L[\mathcal{L}(k)]} =$$

$$= \frac{L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathcal{L}(k)]}{L[\mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathcal{L}(k)]} =$$

$$= \frac{L[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathbf{x}(k), \mathcal{L}(k)]L[\mathbf{x}(k)|\mathcal{L}(k)]}{L[\mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathcal{L}(k)]}.$$

Если  $\mathbf{x}(k)$  уже найдено из фильтрации Калмана, то множество наблюдений  $\mathcal{L}(k)$  не будет содержать новой информации об этом векторе, и поэтому аргумент, фиксирующий условие в первом сомножителе числителя последней дроби, может быть заменен на  $\mathbf{x}(k)$ . Тогда, применяя еще раз теорему умножения вероятностей, найдем

$$L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathcal{L}(N)] =$$

$$= \frac{L[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathbf{x}(k)]L[\mathbf{x}(k)|\mathcal{L}(k)]}{L[\mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathcal{L}(k)]} =$$

$$= \frac{L[\mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathbf{x}(k+1)]L[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)]L[\mathbf{x}(k)|\mathcal{L}(k)]}{L[\mathbf{l}(k+1), \dots, \mathbf{l}(N)|\mathcal{L}(k)]}.$$
(6.126)

Поскольку по условию все  $\mathbf{x}(k)$  нормально распределены, то распределение  $L[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)]$ , входящее в числитель последней дроби выражения (6.126), тоже является нормальным с матожиданием и автоковариацией, равными

$$E\{\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)\} = \mathbf{\Phi}(k+1,k)\mathbf{x}(k),$$
  

$$\operatorname{cov}\{\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)\} = \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k).$$
(6.127)

Поэтому

$$L[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)] = K_1 \exp\left\{-\frac{1}{2}[\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{\Phi}(k+1,k)\mathbf{x}(k)]' \times \left[\mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k)\right]^{-1}[\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{\Phi}(k+1,k)\mathbf{x}(k)]\right\},$$
(6.128)

где предполагается, что матрица  $[\mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k)]^{-1}$  существует.

Для плотности нормального распределения  $L[\mathbf{x}(k)|\mathcal{L}(k)]$  среднее представляет собой оценку  $\hat{\mathbf{x}}(k) = E\{\mathbf{x}(k)|\mathcal{L}(k)\}$ , полученную в результате фильтрации Калмана, а ковариация равна ковариации ошибки этой фильтрации  $\mathbf{D}(k)$  (см. §4 наст. гл.), поэтому

$$L[\mathbf{x}(k+1)|\mathcal{E}(k)] = K_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]'\mathbf{D}^{-1}(k)[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]\right\}.$$
 (6.129)

Подставляя равенства (6.128) и (6.129) в (6.126), получаем

$$L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathcal{L}(N)] = \frac{L[\mathbf{l}(k+1), ..., \mathbf{l}(N)|\mathbf{x}(k+1)]}{L[\mathbf{l}(k+1), ..., \mathbf{l}(N)|\mathcal{L}(k)]} \times \\ \times K \exp \left( -\frac{1}{2} \begin{cases} [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]' \mathbf{D}^{-1}(k) [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] + \\ + [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{\Phi}(k+1, k) \mathbf{x}(k)]' [\mathbf{B}(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{B}'(k)]^{-1} \times \\ \times [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{\Phi}(k+1, k) \mathbf{x}(k)] \end{cases} \right).$$
(6.130)

Вычислим теперь логарифм обеих частей этого равенства:

$$\ln L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathcal{L}(N)] = \{\text{спагаемые, не содержащие } \mathbf{x}(k)\} + \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]' \mathbf{D}^{-1}(k) [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] + [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{\Phi}(k+1,k) \times ] \\ \times \mathbf{x}(k)]' [\mathbf{B}(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{B}'(k)]^{-1} + [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{\Phi}(k+1,k) \mathbf{x}(k)] \right\}.$$
(6.131)

Тогда искомые оценки, как результат сглаживания, должны, согласно (6.124), удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \ln L[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathcal{L}(N)]}{\partial \mathbf{x}(k)} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k|N) \\ \mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|N)}} = \mathbf{D}^{-1}(k)[\hat{\mathbf{x}}(k|N) - \hat{\mathbf{x}}(k)] - \mathbf{\Phi}(k+1,k)[\hat{\mathbf{x}}(k|N)] = \mathbf{0}. \quad (6.132)$$

$$-235-$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|N) = \{\mathbf{I} + \mathbf{D}(k)\mathbf{\Phi}'(k+\mathbf{I},k)[\mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k)]^{-1}\mathbf{\Phi}(k+\mathbf{I},k)\}^{-1} \times \\ \times \{\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{\Phi}'(k+\mathbf{I},k)[\mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k)]^{-1}\hat{\mathbf{x}}(k+\mathbf{I}|N)\}.$$
(6.133)

Используя лемму об обращении матриц (2.71), получим после некоторых преобразований рекурсивный алгоритм сглаживания

$$\hat{\mathbf{x}}(k|N) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)[\hat{\mathbf{x}}(k+1|N) - \mathbf{\Phi}(k+1,k)\hat{\mathbf{x}}(k)], \quad (6.134)$$

где

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{D}(k)\mathbf{\Phi}'(k+1,k)[\mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k) + \mathbf{\Phi}(k+1,k)\mathbf{D}(k)\mathbf{\Phi}'(k+1,k)]^{-1}$$
(6.135)

представляет собой матрицу усиления. Как нетрудно видеть, в квадратных скобках правой части последней формулы стоит выражение априорной автоковариации величины x(k + 1|k):

$$\mathbf{D}(k+\mathbf{I}|k) = \mathbf{\Phi}(k+\mathbf{I},k)\mathbf{D}(k)\mathbf{\Phi}'(k+\mathbf{I},k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k), \quad (6.136)$$

что прямо следует из модели состояния динамической системы (6.123). С учетом этого формулу (6.135) можно записать в более компактном виде:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{D}(k)\mathbf{\Phi}'(k+1,k)\mathbf{D}^{-1}(k+1|k).$$
(6.137)

Выражение (6.134) представляет собой уравнение для  $\hat{\mathbf{x}}(k|N)$  в конечных разностях с обращенным временем при данных  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|N)$  и  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ . Здесь все значения  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  (k = 0, 1, 2, ..., N) должны быть получены заранее с помощью фильтрации Калмана. Принимая последнюю из этих оценок  $\hat{\mathbf{x}}(N) = \hat{\mathbf{x}}(N|N)$  в качестве начального условия, т.е. первой сглаженной оценки, по формуле (6.134) найдем все остальные сглаженные оценки  $\hat{\mathbf{x}}(k|N)$  последовательно для k = N - 1, ..., 2, 1, 0.

Получим теперь апостериорные ковариации сглаженных оценок [48, с. 365]. Вычтем из обеих частей уравнения (6.134) величину  $\mathbf{x}(k)$  и введем обозначения  $\tilde{\mathbf{x}}(k|N) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|N)$ ,  $\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ . Тогда уравнение для ошибок сглаживания примет вид

$$\bar{\mathbf{x}}(k|N) + \mathbf{K}(k)\hat{\mathbf{x}}(k+1|N) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{\Phi}(k+1,k)\hat{\mathbf{x}}(k).$$
(6.138)

Если определить ковариации обеих частей уравнения (6.138):

$$\operatorname{cov}\{\tilde{\mathbf{x}}(k|N), \hat{\mathbf{x}}(k+1,N)\} = \operatorname{cov}\{\tilde{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{x}}(k)\} = 0,$$
  
$$\operatorname{cov}\{\hat{\mathbf{x}}(k+1|N)\} = \mathbf{S}(k+1) - \mathbf{D}(k+1|N),$$
  
$$\operatorname{cov}\{\hat{\mathbf{x}}(k)\} = \mathbf{S}(k) - \mathbf{D}(k)$$

и учесть, что

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{\Phi}(k+1,k)\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}'(k+1,k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k), \quad (6.139)$$

где S(k), S(k+1) – априорные ковариации фазового вектора системы в моменты k и k+1, то мы получим следующее уравнение для апостериорных ковариаций сглаженных оценок D(k|N):

$$\mathbf{D}(k|N) = \mathbf{D}(k) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{D}(k+1|N) - \mathbf{D}(k+1|k)]\mathbf{K}'(k).$$
(6.140)

Здесь матрицы D(k) (k = 0, 1, ..., N) представляют собой ковариации оценок фильтрации, а D(k + 1|k) и K(k) определяются соответственно формулами (6.136) и (6.137). Уравнение (6.140) также решается рекурсивно, т.е. в обратном направлении по времени k = N - 1, N - 2, ..., 1, 0,при начальном условии D(N|N) = D(N), которое тоже определяется в результате фильтрации.

### §7. Динамическое моделирование

Рассмотрим еще раз дискретную динамическую модель 1-го порядка:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k), \qquad (6.141)$$

где  $\mathbf{x}(k) - m \times \mathbf{l}$ -вектор состояния системы в момент  $t_k$ ,  $\mathbf{v}(k) - p \times \mathbf{l}$ вектор возмущающего воздействия,  $\mathbf{A}(k) = \mathbf{\Phi}(k+\mathbf{l},k)$  – переходная матрица системы размером  $m \times m$ ,  $\mathbf{B}(k)$  – переходная матрица, описывающая способ воздействия возмущения на состояние системы и имеющая размер  $m \times p$ . Предполагается, что обе эти матрицы известны для любого момента наблюдений. Но откуда они берутся?

Предположим вначале, что нам известна непрерывная модель возмущаемой динамической системы в виде дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t). \tag{6.142}$$

Чтобы преобразовать эту модель к дискретному виду, необходимо найти переходную матрицу  $A(k) = \Phi(k+1,k)$  (см. §1 наст. гл.). Выражение для этой матрицы дается формулой (6.4). Записывая его для

соседних моментов  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , учитывая, что  $T = t_{k+1} - t_k = \text{const}$ , и полагая  $\mathbf{F}(\tau) \approx \mathbf{F}(k) = \text{const}$  для  $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$ , имеем

$$\mathbf{\Phi}(t_{k+1},t_k) = \exp\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(\tau) d\tau\right\} = \mathbf{I} + T\mathbf{F}(k) + \frac{T^2}{2!} \mathbf{F}^2(k) + \dots$$
(6.143)

Из-за малости Т ряд (6.143) обычно можно оборвать на первых двух членах, и тогда

$$\mathbf{A}(k) = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k) = \mathbf{I} + T\mathbf{F}(k).$$
(6.144)

Отсюда видно, что

$$\mathbf{F}(t) = \lim_{T \to 0} \frac{\Phi(t_{k+1}, t_k) - \mathbf{I}}{T}.$$

Если принять упрощенную модель возмущений  $\mathbf{v}(t)$  в виде ступенчатой функции типа телеграфного сигнала, постоянной на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$ , то будем иметь  $\mathbf{v}(t_k) = \mathbf{v}(t_{k+1}) = \mathbf{v}(k)$  и тогда из формул (6.11) следует, что

$$\mathbf{B}(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau. \qquad (6.145)$$

В результате дискретная модель рассматриваемой динамической системы определена и имеет вид (6.141).

Из формулы (6.143) прямо следует полезное соотношение между последовательными переходными матрицами (см. 3-е свойство в §1 наст. гл.):

$$\mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_0) = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k) \mathbf{\Phi}(t_k, t_0).$$
(6.146)

Отсюда непосредственно получаем уравнение в конечных разностях для переходной матрицы дискретной системы:

$$\Phi(k+1,k_0) = \mathbf{A}(k)\Phi(k,k_0), \quad \Phi(k_0,k_0) = \mathbf{I}.$$
(6.147)

С помощью этого соотношения можно получить общее решение векторного разностного уравнения (6.141):

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k, k_0) \mathbf{x}(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k, j+1) \mathbf{B}(j) \mathbf{v}(j), \quad k_0 < k.$$
(6.148)

В справедливости этого равенства легко убедиться подстановкой его в обе части уравнения (6.141).

Перейдем теперь к случаю, когда из априорных соображений не удается сразу построить динамическую модель состояния объекта, зато известны некоторые статистические характеристики искомого векторного процесса  $\mathbf{x}(t)$ , а именно его априорная ковариационная функция. В связи с этим рассмотрим общую задачу построения дискретной динамической модели для коррелированного векторного процесса  $\mathbf{x}(k)$  с нулевым матожиданием и заданной матрицей автоковариации S [6, с. 129–131). Пусть имеется процесс  $\{\mathbf{x}(k), k \ge k_0\}$ , который представляет собой весь фазовый вектор искомой динамической модели или ту часть его, которая соответствует какому-либо цветному шуму. Пусть также задана последовательность матриц ковариаций вектора  $\mathbf{x}(k)$ :

$$\mathbf{S}(k_2, k_1) = E\{\mathbf{x}(k_2)\mathbf{x}'(k_1)\}, \quad k_0 \le k_1 \le k_2.$$
(6.149)

Если фазовый вектор представляет собой скаляр x(k) = x(k), то все подобные ковариации задаются его автоковариационной функцией.

Сделаем следующие предположения о ковариациях (6.149):

(а) для всех k матрица дисперсии  $S(k) = \tilde{S}(k,k)$  задана, конечна, симметрична и положительно определена;

(б) для всех  $k_1 \le k_2 \le k_3$  имеет место соотношение

$$\mathbf{S}(k_3, k_2)\mathbf{S}^{-1}(k_2)\mathbf{S}(k_2, k_1) = \mathbf{S}(k_3, k_1).$$
(6.150)

Покажем [6, с. 130–131], что условие (6.150) справедливо только для цепей Маркова, т.е. случайных последовательностей без последействия, когда для любых  $k_1 < k_2 < ... < k_n$  справедливо соотношение

$$E\{\mathbf{x}(k_n)|\mathbf{x}(k_1),\mathbf{x}(k_2),\dots,\mathbf{x}(k_{n-1})\}=E\{\mathbf{x}(k_n)|\mathbf{x}(k_{n-1})\}.$$
(6.151)

Если модель процесса имеет вид (6.141)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k), \quad k_0 \le k, \quad (6.152)$$

то условие (6.151) будет выполняться автоматически, поскольку каждое новое значение фазового вектора  $\mathbf{x}(k+1)$  зависит только от его предыдущего значения  $\mathbf{x}(k)$ , а некоррелированный белый шум  $\mathbf{v}(k)$ имеет ковариацию

$$E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(j)\} = \mathbf{R}(k)\delta_{kj}.$$
(6.153)

Переходная матрица  $\Phi(k, j)$  удовлетворяет соотношениям (6.146)– (6.148):

$$\Phi(k_3, k_2)\Phi(k_2, k_1) = \Phi(k_3, k_1), \quad k_1 \le k_2 \le k_3, \tag{6.154}$$

$$\mathbf{\Phi}(k_2 + 1, k_1) = \mathbf{A}(k_2) \mathbf{\Phi}(k_2, k_1), \quad \mathbf{\Phi}(k_1, k_1) = \mathbf{I}, \quad k_1 \le k_2, \quad (6.155)$$

$$\mathbf{x}(k_2) = \mathbf{\Phi}(k_2, k_1)\mathbf{x}(k_1) + \sum_{j=k_1}^{k_2-1} \mathbf{\Phi}(k_2, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{v}(j), \quad k_1 < k_2.$$
(6.156)

Последнее из этих уравнений подставим в определение цепей Маркова (6.151). Поскольку вероятностные взаимосвязи в таких последовательностях без последействия не распространяются дальше, чем на один шаг, все корреляции вида  $E\{\mathbf{v}(j)\mathbf{x}'(k_i)\}$  под знаком суммы обращаются в нуль и в результате получаем

$$\mathbf{S}(k_{2},k_{1}) = E\{\mathbf{x}(k_{2})\mathbf{x}'(k_{1})\} = E\{\mathbf{\Phi}(k_{2},k_{1})\mathbf{x}(k_{1})\mathbf{x}'(k_{1})\} = \mathbf{\Phi}(k_{2},k_{1})\mathbf{S}(k_{1}), \quad k_{0} \le k_{1} \le k_{2}.$$
(6.157)

Умножение слева обеих частей этого равенства на матрицу, обратную к  $S(k_1)$ , дает следующее выражение для переходной матрицы:

$$\Phi(k_2, k_1) = \mathbf{S}(k_2, k_1) \mathbf{S}^{-1}(k_1).$$
(6.158)

Подставляя (6.158) в уравнение (6.154), находим

$$\mathbf{S}(k_3, k_2)\mathbf{S}^{-1}(k_2)\mathbf{S}(k_2, k_1)\mathbf{S}^{-1}(k_1) = \mathbf{S}(k_3, k_1)\mathbf{S}^{-1}(k_1).$$
(6.159)

Наконец, умножая это равенство справа на  $S(k_1)$ , приходим к условию (6.150).

Будем, таким образом, считать, что условие (6.150) задано, и попытаемся определить искомые матрицы A(k) и R(k) дискретной модели состояния динамической системы. Поскольку матрица  $S(k_1)$  по условию (а) положительно определена, то при выполнении условия (б) будет справедливо и равенство (6.158), которое при  $k_2 = k + 1$  и  $k_1 = k$  принимает вид

$$\Phi(k+1,k) = \mathbf{S}(k+1,k)\mathbf{S}^{-1}(k).$$
(6.160)

Левая часть этого равенства с учетом уравнения (6.155) при  $k_2 = k_1 = k$  равняется A(k), поэтому имеем также

$$\mathbf{A}(k) = \mathbf{S}(k+1,k)\mathbf{S}^{-1}(k).$$
(6.161)

Для определения переходной матрицы  $\mathbf{B}(k)$  нужно знать механизм действия возмущения  $\mathbf{v}(k)$  на вектор состояния системы  $\mathbf{x}(k)$ . Обычно этот механизм известен из общих физических представлений о характере динамической системы, и поэтому матрица  $\mathbf{B}(k)$  всегда может быть задана а priori. Таким образом, для полного определения дискретной динамической модели состояния остается найти матрицу ковариаций  $\mathbf{R}(k)$  возмущения  $\mathbf{v}(k)$ . Для этого рассмотрим матрицу дисперсии  $\mathbf{S}(k+1)$ . Подставляя (6.141) в уравнение (6.149), получаем

$$\mathbf{S}(k+1) = E\left\{ \left[ \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k) \right] \left[ \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k) \right]' \right\}.$$
(6.162)

Поскольку  $\mathbf{x}(k)$  и  $\mathbf{v}(k)$  не коррелированы, то матожидание их произведения обращается в нуль, поэтому из формулы (6.162) имеем

$$\mathbf{S}(k+1) = E\left\{\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}'(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(k)\mathbf{B}'(k)\right\}, \quad (6.163)$$

или

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k).$$
(6.164)

Поскольку матрица B(k) известна, матрицы дисперсии S заданы, а матрица A(k) определена формулой (6.161), то из (6.164) находим

$$\mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k) = \mathbf{S}(k+1) - \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k)\mathbf{A}'(k).$$
(6.165)

Матрица [B'(k)B(k)], очевидно, имеет полный ранг, поэтому из (6.165) можно найти ковариационную матрицу возмущений:

$$\mathbf{R}(k) = [\mathbf{B}'(k)\mathbf{B}(k)]^{-1}\mathbf{B}'(k)[\mathbf{S}(k+1) - -\mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k)\mathbf{A}'(k)]\mathbf{B}(k)[\mathbf{B}'(k)\mathbf{B}(k)]^{-1}.$$
(6.166)

Таким образом, всю последовательность матриц A(k) можно определить по формуле (6.161), после чего по формуле (6.166) находится и последовательность матриц R(k). Тем самым дискретная модель состояния динамической системы (6.141) оказывается полностью определенной. Эта модель описывает динамическую систему, способную синтезировать из белого шума v(k) такой марковский коррелированный процесс x(k), который имеет заданные статистические свойства, т.е. ковариации (6.149), удовлетворяющие сформулированным выше условиям (а) и (б). Если выражение для переходной матрицы (6.161) подставить в уравнение состояния системы (6.152), то оказывается

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{S}(k+1,k)\mathbf{S}^{-1}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k).$$
(6.167)

Интересно сравнить эту формулу с алгоритмом прогноза (4.63) методом СКК:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{Q}_{ft} \mathbf{Q}_{tt}^{-1} \hat{\mathbf{t}}.$$
(6.168)

Если этот алгоритм применить для экстраполяции только одной известной уже оценки  $\hat{\mathbf{t}}(k)$  на соседний момент k+1, т.е. положить  $\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{t}}(k+1), \mathbf{Q}_{fl} = \mathbf{Q}(k+1,k), \mathbf{Q}_{fl} = \mathbf{Q}(k)$ , то формула (6.168) примет вид

$$\hat{\mathbf{t}}(k+1) = \mathbf{Q}(k+1,k)\mathbf{Q}^{-1}(k)\hat{\mathbf{t}}(k),$$
 (6.169)

который полностью идентичен (6.167) при  $v(k) \equiv 0$ . Из этого примера ясно видно, что дискретная модель состояния динамической системы 1-го порядка представляет собой не что иное, как одношаговый прогноз (экстраполяцию) дискретного марковского процесса.

Выше было показано, как восстановить (синтезировать) дискретную динамическую модель

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{v}(k)$$
(6.170)

в двух случаях: во-первых, когда известен ее непрерывный аналог

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t)$$
(6.171)

и, во-вторых, когда заранее известно, что искомый процесс x(*i*) является марковским. Покажем теперь, что при определенных условиях любое решение дифференциального уравнения 1-го порядка вида (6.171) является марковским процессом.

Пусть ординаты возмущающего процесса v(*i*) являются некоррелированными случайными величинами – белым шумом с двумерной ковариационной функцией (6.13):

$$\mathbf{R}(t,\tau) = \mathbf{R}(t)\delta_D(t-\tau). \tag{6.172}$$

Из теории марковских процессов следует [47, с. 257], что решение x(t) уравнения (6.171) будет марковским процессом, если вероятностная (а не корреляционная!) зависимость между ординатами процесса

v(t) убывает достаточно быстро с ростом интервала времени между ними. Иначе говоря, условия некоррелированности (6.172) шума v(t) еще недостаточно, чтобы решение x(1) было марковским процессом; для этого необходимо условие независимости между ординатами шума v(t). Действительно, если ординаты процесса v(t) независимы, то х(1) всегда будет марковским процессом, так как решение дифференциального уравнения 1-го порядка однозначно определяется своим начальным значением  $\mathbf{x}(l_0)$ , а вследствие независимости ординат функции v(t) ее значения "в прошлом" никак не влияют на ее значения "в будущем". Если некоррелированный белый шум v(t) является еще и нормальным, то требование о независимости его ординат тем самым будет выполнено автоматически, и поэтому можно утверждать, что в этом случае x(t) – марковский случайный процесс. Однако требование о нормальности шума v(t) является слишком сильным и не всегда соответствует физической сущности возмущений динамических систем. В природе часто встречаются шумы, подчиняющиеся распределению Пуассона, и др. К счастью, в таких случаях решение уравнения (6.172) тоже может быть марковским процессом. Для этого необходимо выполнение менее жесткого условия, а именно: вероятностная зависимость между ординатами функции v(t) должна убывать настолько быстро, чтобы интеграл от этой функции по промежутку между наблюдениями подчинялся нормальному закону распределения, т.е. имел значения, независимые для разных наблюдений. Удовлетворяющий этому условию белый шум v(t) иногда называют "белым шумом в узком смысле" в отличие от "белого шума в широком смысле", определяемого условием (6.172). Применительно к условиям задачи фильтрации Калмана именно белый шум в узком смысле гарантирует сходимость интегралов вида (6.7) и существование такого дискретного процесса v(k), который оказывается тоже белым шумом в узком смысле и имеет ковариационную матрицу вида (6.13):

$$\mathbf{R}(k,j) = \mathbf{R}(k)\delta_{kj}.$$
 (6.173)

Удобной моделью непрерывного белого шума является предел при  $\tau \rightarrow 0$  процесса Башелье-Винера b(t), имеющего ковариационную функцию вида [26, с. 272]

$$q_{b}(\gamma) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\nu}^{2}}{\tau} \left(1 - \frac{|\gamma|}{\tau}\right), & |\gamma| \leq \tau, \\ 0, & |\gamma| > \tau. \end{cases}$$

Фурье-преобразование этой функции дает спектральную плотность

$$S_b(f) = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sigma_v^2}{\tau} \left( 1 - \frac{|\gamma|}{\tau} \right) e^{-i2\pi f\gamma} d\gamma = \sigma_v^2 \left( \frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau} \right)^2, \quad -\infty \le f \le \infty,$$

которая в пределе при  $\tau \rightarrow 0$  стремится к константе для всех *f*:

$$\lim_{\tau\to 0}S_b(f)=S_\nu(f)=\sigma_\nu^2.$$

Такая интерпретация очень удобна и для дискретного белого шума v(k). В этом случае его ковариационная функция принимает вид

$$q_{\nu}(nT) = \begin{cases} \sigma_{\nu}^{2}, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

где T – интервал дискретизации процесса. Дискретный белый шум можно очень просто получить из непрерывного небелого шума. Предположим, например, что имеется источник непрерывного небелого шума, ковариационная функция которого близка к нулю при  $\gamma = \gamma_0$ . Ясно, что если мы выберем интервал дискретизации  $T \approx \gamma_0$ , то все дискретные значения процесса будут некоррелированными и их можно представить как дискретный белый шум.

Исходя из такой трактовки дискретного белого шума, видим, что ковариационная матрица (6.173) векторного *р*-мерного белого шума представляет собой диагональную *р* × *р*-матрицу вида

$$\mathbf{R}(k, j) = \mathbf{R}(k) = \operatorname{diag}(\sigma_{i}^{2}(k)).$$

Нам осталось вычислить ковариационную матрицу для процесса  $\mathbf{x}(t)$ , который является решением дифференциального уравнения первого порядка (6.171), и проверить, удовлетворяет ли она условию (6.150). Если это окажется так, то тогда процесс  $\mathbf{x}(t)$  действительно является марковским процессом. Решение уравнения (6.171) при начальном условии  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)$  при  $t = t_0$  имеет вид (6.7):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau, \qquad (6.174)$$

где переходные матрицы определяются формулами (6.4). Вычислим теперь автоковариацию этого решения [48, с. 49–50]. Согласно определению ковариаций, имеем для  $l_2 > l_1 > l_0$ 

$$S(t_{2},t_{1}) = \operatorname{cov} \{ \mathbf{x}(t_{2})\mathbf{x}(t_{1}) \} = \Phi(t_{2},t_{0})\operatorname{cov} \{ \mathbf{x}(t_{0}),\mathbf{x}(t_{0}) \} \Phi'(t_{2},t_{0}) + \Phi(t_{2},t_{0})\operatorname{cov} \left\{ \mathbf{x}(t_{0}), \int_{t_{0}}^{t_{1}} \Phi(t_{1},\tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau \right\} + \operatorname{cov} \left\{ \int_{t_{0}}^{t_{2}} \Phi(t_{2},\tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau, \Phi(t_{1},t_{0}) \mathbf{x}(t_{0}) \right\} + \operatorname{cov} \left\{ \int_{t_{0}}^{t_{2}} \Phi(t_{2},\tau_{2}) \mathbf{G}(\tau_{2}) \mathbf{v}(\tau_{2}) d\tau_{2}, \int_{t_{0}}^{t_{1}} \Phi(t_{1},\tau_{1}) \mathbf{G}(\tau_{1}) \mathbf{v}(\tau_{1}) d\tau_{1} \right\}.$$

Учитывая, что при  $\tau > t_0$  v( $\tau$ ) не коррелирует с x( $t_0$ ), получаем отсюда после несложных преобразований

$$\mathbf{S}(t_{2},t_{1}) = \mathbf{\Phi}(t_{2},t_{0})\mathbf{S}(t_{0})\mathbf{\Phi}'(t_{1},t_{0}) + \\ + \int_{t_{0}}^{t_{2}}\int_{t_{0}}^{t_{1}}\mathbf{\Phi}(t_{2},\tau_{2})\mathbf{G}(\tau_{2})\mathbf{R}(\tau_{2},\tau_{1})\mathbf{G}'(\tau_{1})\mathbf{\Phi}'(t_{1},\tau_{1})d\tau_{1}d\tau_{2}.$$
(6.175)

Принимая во внимание (6.172) и используя селективное свойство δ-функции, отсюда находим окончательное выражение для ковариационной функции вектора состояния, являющегося решением дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\mathbf{S}(t_2, t_1) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_0) \mathbf{S}(t_0) \mathbf{\Phi}'(t_1, t_0) +$$
  
+ 
$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_2, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{R}(\tau) \mathbf{G}'(\tau) \mathbf{\Phi}'(t_1, \tau) d\tau.$$
(6.176)

Чтобы обеспечить попадание всплеска δ-функции в область интегрирования, в правой части (6.175) сначала вычислялся интеграл по большему интервалу [*t*<sub>0</sub>, *t*<sub>2</sub>].

При  $t_1 = t_2 = t$  формула (6.176) дает дисперсию процесса  $\mathbf{x}(t)$ :

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0) \mathbf{S}(t_0) \mathbf{\Phi}'(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{R}(\tau) \mathbf{G}'(\tau) \mathbf{\Phi}'(t, \tau) d\tau. \quad (6.177)$$

Полагая здесь  $t = t_1$ , умножая обе части полученного равенства слева на  $\Phi(t_2, t_1)$  и используя 3-е свойство переходных матриц, находим

$$\Phi(t_{2},t_{1})\mathbf{S}(t_{1}) = \Phi(t_{2},t_{1})\Phi(t_{1},t_{0})\mathbf{S}(t_{0})\Phi'(t_{1},t_{0}) + \\ + \int_{t_{0}}^{t_{1}} \Phi(t_{2},t_{1})\Phi(t_{1},\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{G}'(\tau)\Phi'(t_{1},\tau)d\tau = \\ = \Phi(t_{2},t_{0})\mathbf{S}(t_{0})\Phi'(t_{1},t_{0}) + \int_{t_{0}}^{t_{1}} \Phi(t_{2},\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{G}'(\tau)\Phi'(t_{1},\tau)d\tau.$$

Правая часть этого равенства полностью совпадает с (6.176), поэтому

$$\mathbf{S}(t_2, t_1) = \mathbf{\Phi}(t_2, t_1) \mathbf{S}(t_1), \quad t_2 > t_1.$$
(6.178)

Это выражение совпадает с формулой (6.157)), поэтому оно тоже должно удовлетворять свойству (6.150). Действительно,

$$S(t_3, t_2)S^{-1}(t_2)S(t_2, t_1) = \Phi(t_3, t_2)S(t_2)S^{-1}(t_2) \times \\ \times \Phi(t_2, t_1)S(t_1) = \Phi(t_3, t_1)S(t_1) = S(t_3, t_1).$$
(6.179)

Чтобы облегчить практические вычисления по формулам (6.157) и (6.179), найдем рекуррентную формулу для дисперсии S(t). Для этого продифференцируем обе части выражения (6.177) и воспользуемся 1-м и 4-м свойствами переходных матриц (см. §1 наст. гл.):

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t,t_0)\mathbf{S}(t_0)\mathbf{\Phi}'(t,t_0) + \mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{S}(t_0)\dot{\mathbf{\Phi}}'(t,t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{\Phi}}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{G}'(\tau)\mathbf{\Phi}'(t,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{G}'(\tau)\dot{\mathbf{\Phi}}'(t,\tau)d\tau + \\ + \mathbf{\Phi}(t,t)\mathbf{G}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{G}'(t)\mathbf{\Phi}'(t,t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{G}'(t) + \\ + \mathbf{F}(t) \Bigg[\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{S}(t_0)\mathbf{\Phi}'(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{G}'(\tau)\mathbf{\Phi}'(t,\tau)d\tau \Bigg] + \\ + \Bigg[\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{S}(t_0)\mathbf{\Phi}'(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{G}'(\tau)\mathbf{\Phi}'(t,\tau)d\tau \Bigg] \mathbf{F}'(t).$$

Выражения в скобках совпадают с правой частью (6.177), поэтому

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{F}'(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{G}'(t).$$
(6.180)

Решение дифференциального уравнения (6.180) с начальным условием  $S(t_0)$  дает дисперсию процесса x(t) для любого момента времени.

В дискретном случае с учетом (6.170) имеем [60, с. 87]

$$S(k+1) = E\{[x(k+1) - E\{x(k+1)\}][x(k+1) - E\{x(k+1)\}]'\} =$$

$$= E\{[\Phi(k+1,k)(x(k) - E\{x(k)\}) + B(k)v(k)] \times x[\Phi(k+1,k)(x(k) - E\{x(k)\}) + B(k)v(k)]'\} =$$

$$= E\{\Phi(k+1,k)[x(k) - E\{x(k)\}][x(k) - E\{x(k)\}]'\Phi'(k+1,k) + \Phi(k+1,k)[x(k) - E\{x(k)\}]v'(k)B'(k) +$$

$$+B(k)v(k)[x(k) - E\{x(k)\}]'\Phi'(k+1,k) + B(k)v(k)v'(k)B'(k)\} =$$

$$= \Phi(k+1,k)E\{[x(k) - E\{x(k)\}][x(k) - E\{x(k)]'\}\Phi'(k+1,k) + B(k)E\{v(k)v'(k)\}B'(k)\} =$$

$$= \Phi(k+1,k)S(k)\Phi'(k+1,k) + B(k)R(k)B'(k).$$

При выводе этой формулы использовано свойство центрированности белого шума v(k) и его некоррелированности с фазовым вектором x(k). Таким образом,

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{\Phi}(k+1,k)\mathbf{S}(k)\mathbf{\Phi}'(k+1,k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{B}'(k).$$
(6.181)

Заметим еще, что формула (6.178) в дискретном случае принимает вид

$$\mathbf{S}(k,j) = \mathbf{\Phi}(k,j)\mathbf{S}(j), \quad k \ge j, \tag{6.182}$$

Важный класс прикладных задач охватывают так называемые стационарные случайные процессы, для которых средние постоянны, а вторые моменты (ковариации) зависят только от разности моментов  $\gamma = t_2 - t_1$ . В модели стационарных динамических систем матрицы F(t) и G(t) не зависят от времени, поэтому

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t). \tag{6.183}$$

Для стационарной динамической системы переходная матрица становится функцией разности моментов времени:

$$\Phi(t_2, t_1) = \exp\left\{ \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} d\tau \right\} = \exp\left\{ \mathbf{F}(t_2 - t_1) \right\} =$$
$$= \Phi(t_2 - t_1) = \exp\left\{ \mathbf{F}\gamma \right\} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\gamma + \mathbf{F}^2 \frac{\gamma^2}{2!} \dots = \Phi(\gamma). \tag{6.184}$$

Если ряд (6.184) сходится недостаточно быстро, то для вычисления функции  $\Phi(\gamma) = \exp\{F\gamma\}$  можно воспользоваться формулой Сильвестра [36, с. 401]

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{\prod_{i \neq k} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)},$$
(6.185)

где **А** – квадратная матрица порядка n;  $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$  – различающиеся между собой собственные значения этой матрицы. Если среди собственных значений имеются одинаковые, то необходимо применять более общую формулу

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{n-k} \mathbf{A}^{n-k}, \qquad (6.186)$$

где  $\Delta = \det[\lambda_i^{k-1}]$  – определитель Вандермонда [36, с. 38], а  $\Delta_j$  – определитель, получаемый из  $\Delta$ , если вместо столбца  $\lambda_1^j, \lambda_2^j, ..., \lambda_n^j$  подставить  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), ..., f(\lambda_n)$ .

Подставляя выражение (6.184) в формулу (6.178), находим [3, с. 114], что автоковариационная функция вектора состояния тоже зависит лишь от разности моментов времени  $l_2 - l_1$ :

$$\mathbf{S}(t_2, t_1) = \mathbf{\Phi}(t_2 - t_1) \mathbf{S}(t_1) \begin{cases} e^{\mathbf{F}(t_2 - t_1)} \mathbf{S}(t_1) & \text{при } t_2 \ge t_1, \\ \mathbf{S}(t_2) e^{\mathbf{F}'(t_1 - t_2)} & \text{при } t_2 \le t_1. \end{cases}$$
(6.187)

Обозначая  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \gamma$ , находим выражение для этой функции в положительной полуплоскости

$$\mathbf{S}(\gamma) = \mathbf{\Phi}(\gamma)\mathbf{S}(0) = e^{\mathbf{F}\gamma}\mathbf{S}(0), \quad \gamma > 0.$$
 (6.188)

Для стационарных систем уравнение (6.180) принимает вид

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{F}' + \mathbf{G}\mathbf{R}\mathbf{G}'.$$
(6.189)

Но в силу той же стационарности имеем  $\hat{S}(t) \equiv 0, S(t) = S(0)$ , поэтому для стационарных марковских гауссовских процессов, являющихся решением дифференциального уравнения (6.183), имеем следующее уравнение для дисперсии этого процесса [3, с. 113]:

$$FS(0) + S(0)F' = -GRG'.$$
 (6.190)

Одной из важнейших особенностей стационарных динамических систем является возможность оценки спектральной плотности  $P_x(\omega)$  выходного сигнала, которая может быть получена [48, с. 54–56] простым преобразованием Фурье автоковариационной функции  $S(\gamma)$ :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}(\omega) = \mathbf{W}(\omega)\mathbf{G}\mathbf{P}_{\mathbf{v}}(\omega)\mathbf{G}'\mathbf{W}'(-\omega), \qquad (6.191)$$

где  $P_{\nu}(\omega)$  – спектральная плотность белого шума, а матрица  $W(\omega)$  представляет собой резольвенту матрицы состояния F:

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}. \tag{6.192}$$

Рассмотрим теперь случай, когда наблюдения за динамической системой ведутся дискретно через одинаковые промежутки времени  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = T$ . Тогда временной промежуток  $\gamma$  можно выразить через количество *n* таких интервалов ( $\gamma = nT$ , n = 0, 1, 2, ...). В этом случае полученные выше формулы примут следующий вид:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k), \qquad (6.193)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}(k+1,k) = \mathbf{\Phi}(1) = \mathbf{\Phi}, \qquad (6.194)$$

$$S(n) = \Phi(n)S(0) = e^{An}S(0),$$
 (6.195)

$$\mathbf{P}_{x}(s) = \mathbf{W}(s)\mathbf{B}\mathbf{P}_{v}(s)\mathbf{B}'\mathbf{W}'(-s), \qquad (6.196)$$

$$W(s) = (sI - F)^{-1}.$$
 (6.197)

Здесь  $s = \sigma + i\omega$  – дискретная комплексная переменная интегрального преобразования Лапласа [36, с. 228] (комплексная частота);  $P_{\nu}(s)$  – спектральная плотность дискретного входного шума, S(n) – дискретная автоковариационная функция выходного сигнала,  $P_x(s)$  – его спектральная плотность. При выводе этих формул учтено также, что

$$\Phi(k+n,k) = \Phi(n) = \exp\left\{\int_{l_k}^{l_{k+n}} \mathbf{F} d\tau\right\} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F} T\right\} = \exp\left\{\mathbf{F} Tn\right\} = \left[\exp\left\{\mathbf{F} T\right\}\right]^n = \Phi^n(T) = \Phi^n.$$
(6.198)

Так, полагая в (6.157)  $k_1 = 0, k_2 = n$  и учитывая (6.198), находим формулу (6.195):

$$\mathbf{S}(n,0) = \mathbf{S}(n) = \mathbf{\Phi}(n,0)\mathbf{S}(0) = \mathbf{\Phi}^{n}\mathbf{S}(0) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}n}\mathbf{S}(0), \quad n \ge 0.$$
(6.199)

Отсюда видно, что автоковариационная функция дискретного стационарного марковского гауссовского процесса целиком определяется постоянной переходной матрицей этой системы  $A = \Phi$ .

Докажем, что в дискретном случае выражение (6.190) принимает вид [3, с. 92-93]

$$S(0) = AS(0)A' + BRB'.$$
 (6.200)

Действительно, записывая последовательно равенства (6.193), имеем

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{v}(0),$$
  

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{v}(1),$$
  

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k-1),$$
  

$$\mathbf{x}(k+n) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k+n-1) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k+n-1),$$

откуда находим

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k} \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B} \mathbf{v}(j),$$
  
$$\mathbf{x}(k+n) = \mathbf{A}^{k+n} \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k+n-1} \mathbf{A}^{k+n-j-1} \mathbf{B} \mathbf{v}(j).$$
 (6.201)

Вычислим теперь автоковариационную функцию

$$\mathbf{S}(n) = \operatorname{cov}(\mathbf{x}(k+n), \mathbf{x}(k)) = E\{\mathbf{x}(k+n)\mathbf{x}'(k)\}.$$
(6.202)

Учитывая (6.201) и (6.199) и равенство  $\mathbf{R}(k) = \mathbf{R}$ , получаем

$$\mathbf{S}(n) = \mathbf{A}^{n} \left[ \mathbf{A}^{k} \mathbf{S}(0) (\mathbf{A}^{k})' + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{j} (\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B}^{j}) (\mathbf{A}^{j})' \right] = \mathbf{A}^{n} \mathbf{S}(0).$$
(6.203)

Легко видеть, что выражение в квадратных скобках равно S(0), только если справедливо равенство (6.200). Вращательное движение Земли вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями Эйлера-Лиувилля [42, с. 112]

$$A \Omega \dot{m}_{1} + (C - A) \Omega^{2} m_{2} + \Omega \dot{c}_{13} - \Omega^{2} c_{23} + \dot{h}_{1} - \Omega \dot{h}_{2} = L_{1},$$
  

$$A \Omega \dot{m}_{2} - (C - A) \Omega^{2} m_{1} + \Omega \dot{c}_{23} + \Omega^{2} c_{13} + \dot{h}_{2} + \Omega \dot{h}_{1} = L_{2},$$
  

$$C \Omega \dot{m}_{3} + \Omega \dot{c}_{33} + \dot{h}_{3} = L_{3},$$
  
(6.204)

где  $m_1, m_2, m_3, \Omega$  представляют собой компоненты вектора возмущенной мгновенной угловой скорости вращения  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \delta \vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega}_{0} = \begin{bmatrix} 0\\0\\\Omega \end{bmatrix}, \quad \delta \vec{\omega} = \begin{bmatrix} m_{1}\\m_{2}\\m_{3} \end{bmatrix} \Omega, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} m_{1}\\m_{2}\\I+m_{3} \end{bmatrix} \Omega, \quad (6.205)$$

 $A, C, c_{ij}$  (i, j = 1,2,3) – компоненты возмущенного тензора инерции Земли  $C = C_0 + \delta C$ :

$$\mathbf{C}_{0} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (6.206)$$

 $h_1, h_2, h_3$  — компоненты относительного момента импульса  $\bar{h}$ , определяемого как

$$\bar{h} = \iiint \bar{r} \times \bar{\nu} \, dM \,, \tag{6.207}$$

где интегрирование ведется по всему объему Земли,  $\vec{r}$  – радиус-вектор текущей точки, dM – элемент ее массы,  $\vec{v} = \partial \vec{r} / \partial t$  – скорость деформации.

Уравнения (6.204) и обозначения (6.205)–(6.207) определены в геоцентрической системе координат (x, y, z), оси которой достаточно близки к главным центральным осям инерции Земли. В настоящее время эта система координат определена более конкретно: ось z направлена в точку IRP (the IERS Reference Pole) – условное начало отсчета координат полюса на эпоху 1900.0, ось x – вдоль пересечения плоскостей условного экватора и основного меридиана IRM (the IERS Reference Meridian), а ось y – вдоль пересечения плоскостей условного экватора и меридиана 90° восточной долготы. При этом
предполагается, что, несмотря на наличие деформаций Земли, выбранная таким образом система отсчета всегда остается геоцентрической, и поэтому средняя скорость деформаций в такой системе всегда равна нулю [42, с. 102]:

$$\vec{v} = \frac{1}{M} \iiint \vec{v} \, dM = 0.$$
 (6.208)

Из кинематического уравнения вращения деформируемого тела

$$\vec{\dot{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\nu} \tag{6.209}$$

видно, что при условии жесткости системы координат, связанной с деформируемым телом, вектор вращения такой системы  $\vec{\omega}$  определяется неоднозначно: небольшие изменения этого вектора можно компенсировать соответствующим изменением вектора деформаций  $\vec{\nu}$  так, чтобы скорость вращательного движения  $\vec{r}$  осталась неизменной. Пользуясь некоторой свободой выбора компонент вектора  $\vec{\omega}$ , выберем их так, чтобы компоненты вектора  $\vec{h}$  оказались равными нулю:

$$\vec{h} = \iiint \vec{r} \times \vec{v} \, dM = 0 \,. \tag{6.210}$$

Геоцентрические координатные оси, выбранные таким образом, называются осями Гиссерана.

Используя обозначения

$$m = m_1 + im_2, \quad c = c_{13} + ic_{23},$$
  

$$L = L_1 + iL_2, \quad h = h_1 + ih_2,$$
(6.211)

где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица, представим первые два уравнения (6.204) в виде одного уравнения в комплексной форме

$$A\Omega \dot{m} - i(C - A)\Omega^2 m + \Omega \dot{c} + i\Omega^2 c + \dot{h} + i\Omega h = L.$$
(6.212)

Уравнение (6.212) или эквивалентные ему первые два уравнения (6.204) можно решить относительно m и получить компоненты  $m_1$  и  $m_2$ , характеризующие отклонение оси вращения Земли от оси z, т.е. движение полюсов. Аналогично третье уравнение из (6.204) можно решить относительно  $m_3$  и найти изменение скорости вращения или изменение длительности суток. Иными словами,  $m_1$  и  $m_2$  описывают изменение направления вектора  $\tilde{\omega}$  в земной системе координат, а m<sub>3</sub> – изменения его длины, причем благодаря приближенному равенству экваториальных моментов инерции Земли оба эти явления в линейном приближении можно рассматривать раздельно.

Поскольку нас интересуют лишь стохастические явления во вращательном движении Земли, то мы в дальнейшем можем рассматривать только свободное вращение, когда L = 0, так как лунносолнечные твердотельные приливы порождают детерминированные явления, за исключением, может быть, только динамического прилива в океане, который распределен по поверхности Земли квазислучайным образом (этот эффект будет рассмотрен отдельно).

Учет упругой деформации от вращения приводит к следующему выражению для произведений инерции [42, с. 118]:

$$c_{13} = \frac{1}{3}kG^{-1}\Omega^2 R^5 m_1, \quad c_{23} = \frac{1}{3}kG^{-1}\Omega^2 R^5 m_2,$$

откуда в комплексных обозначениях (6.211) имеем

$$c = \frac{k}{k_s}(C - A)m,$$
 (6.213)

где G – постоянная тяготения, R– средний радиус Земли,  $k \approx 0.3$  – число Лява,  $k_{\star} = 3G(C - A) / \Omega^2 R^5 = 0.94$  – "вековое число Лява".

Полагая в (6.212) L = 0, h = 0 и учитывая (6.213), получаем дифференциальное уравнение свободного движения полюсов упругодеформируемой Земли в системе осей Тиссерана:

$$\Omega\left[A + \frac{k}{k_s}(C - A)\right]\dot{m} - i\Omega^2(C - A)\left(1 - \frac{k}{k_s}\right)m = 0.$$
(6.214)

Если обозначить

$$\sigma_{C} = \frac{(C-A)(1-k/k_{s})}{A+(k/k_{s})(C-A)}\Omega,$$
(6.215)

то уравнение (6.214) можно привести к более простому виду:

$$\dot{m} - i\sigma_C m = 0. \tag{6.216}$$

Величина  $\sigma_C$ , определяемая формулой (6.215), называется чандлеровской частотой движения полюса. Соотношение между ней и эйлеровской частотой  $\sigma_E$  имеет вид [42, с. 121]

$$\sigma_C = \sigma_E \frac{1 - \frac{k}{k_s}}{1 + \frac{k}{k_s} \frac{\sigma_E}{\Omega}}.$$
(6.217)

Общее решение уравнения (6.216) равно

$$m = m_0 e^{i\sigma_C t}, \tag{6.218}$$

где m<sub>0</sub> – комплексная постоянная. Это решение представляет собой круговое движение с чандлеровской частотой:

$$m_{l} = a\cos(\sigma_{C}t + \varphi),$$
  

$$m_{2} = a\sin(\sigma_{C}t + \varphi).$$
(6.219)

Рассмотрим теперь возмущенное свободное вращение Земли, которое возбуждается не внешними приливообразующими силами, а внутренними геофизическими процессами, главным образом динамикой атмосферы. Для этого введем возбуждающие функции:

$$\psi_{1} = (\Omega^{2}c_{13} + \Omega\dot{c}_{23} + \Omega\dot{h}_{1} + \dot{h}_{2})/(C - A)\Omega^{2},$$
  

$$\psi_{2} = (\Omega^{2}c_{23} - \Omega\dot{c}_{13} + \Omega\dot{h}_{2} - \dot{h}_{1})/(C - A)\Omega^{2},$$
  

$$\psi_{3} = (-\Omega c_{33} - h_{3})/C\Omega,$$
(6.220)

с помощью которых уравнения Эйлера–Лиувилля принимают вид

$$\sigma_{C}^{-1}\dot{m}_{1} + m_{2} = \psi_{2},$$
  

$$\sigma_{C}^{-1}\dot{m}_{2} - m_{1} = -\psi_{1},$$
  

$$m_{3} = \psi_{3}.$$
(6.221)

Первые два из этих уравнений можно записать совместно в комплексной форме

$$i\sigma_C^{-1}\dot{m} + m = \psi, \qquad (6.222)$$

где

$$m = m_1 + im_2, \quad \psi = \psi_1 + i\psi_2.$$
 (6.223)

Поскольку деформации от вращения уже учтены, то элементы тензора инерции и относительного момента импульса, входящие в выражения возбуждающих функций (6.220), вызваны исключительно геофизическими явлениями на поверхности Земли – глобальной динамикой атмосферы.

Первая стохастическая модель движения полюса была введена Джеффрисом [68] в 1940 г., а ее комплексная форма (7.19) – Манком и Макдональдом [73] в 1960 г. Однако в 1983 г. Барнес и др. [55] ввели вместо возбуждающих функций  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , имеющих разную размерность и разный физический смысл ( $\psi_1, \psi_2$  – моменты сил, а  $\psi_3$  – момент импульса), однотипные функции момента импульса:

$$\chi_{1} = (\Omega c_{13} + h_{1}) / (C - A)\Omega,$$
  

$$\chi_{2} = (\Omega c_{23} + h_{2}) / (C - A)\Omega,$$
  

$$\chi_{3} = -\Psi_{3}.$$
(6.224)

С их помощью возмущенное движение полюса описывается комплексным дифференциальным уравнением

$$i\sigma_C^{-1}\dot{m} + m = \chi - i\Omega^{-1}\dot{\chi} \tag{6.225}$$

или

$$\sigma_{C}^{-1}\dot{m}_{1} + m_{2} = \chi_{2} - \Omega^{-1}\dot{\chi}_{1}, \qquad (6.226)$$
  
$$\sigma_{C}^{-1}\dot{m}_{2} - m_{1} = -\chi_{1} - \Omega^{-1}\dot{\chi}_{2},$$

поскольку

$$m = m_1 + im_2, \quad \chi = \chi_1 + i\chi_2.$$
 (6.227)

Из сравнения уравнений (6.222) и (6.225) находим связь между функцией момента импульса χ и функцией возбуждения ψ:

$$\Psi = \chi - i \frac{\dot{\chi}}{\Omega}. \tag{6.228}$$

Компоненты  $\chi_1$  и  $\chi_2$  называются функциями экваториального момента импульса, а  $\chi_3 - \phi$ ункцией аксиального момента импульса. Как видно из выражений (6.224), эти функции учитывают как перемещения масс атмосферы через вариации элементов  $c_{ij}$  тензора инерции, так и атмосферные движения (встер) через функцию h относительного момента импульса. При вычислении  $c_{ij}$  и h интегрирование ведется по всей массе атмосферы. Таким образом, комплексную функцию  $\chi$ можно представить как сумму  $\chi = \chi_P + \chi_W$ , где  $\chi_P$  называется компонентой атмосферного давления, а  $\chi_W$  – компонентой ветра. В годовых отчетах IERS функции  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  называют компонентами эффективного углового момента атмосферы (EAAM – Effective Atmospheric Angular Momentum), поскольку публикуемые там значения этих функций учитывают еще и косвенные эффекты, связанные с упругостью Земли и ее деформациями под действием переменной поверхностной нагрузки [42, с. 261–263].

В соответствии с обозначениями (6.205), уравнения (6.226) относятся к вектору мгновенной угловой скорости  $\tilde{\omega}$ , но поскольку все астрометрические наблюдения в последнее время принято относить к небесному эфемеридному полюсу СЕР (the Celestial Ephemeris Pole), то в этих уравнениеях необходимо перейти от полюса вращения к полюсу СЕР (более подробно об этом см. в [58]). Такой переход осуществляется с помощью линейного комплексного преобразования [82, с. 339]

$$m = p - i\frac{\dot{p}}{\Omega}, \qquad (6.229)$$

где

$$p = p_1 + ip_2 = x_p - iy_p \tag{6.230}$$

описывает траекторию СЕР в определенной выше земной системе координат (здесь  $x_p, y_p$  – координаты СЕР, публикуемые в бюллетенях и годовых отчетах IERS). Подставляя (6.230) в (6.225), находим

$$\left(i\sigma_{C}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}+1\right)\left(1-i\Omega^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)p=\left(1-i\Omega^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi,$$
(6.231)

где под 1 подразумевается единичный оператор. Сокращая одинаковые операторы, стоящие в обеих частях этого равенства, получаем

$$i\sigma_C^{-1}\dot{p} + p = \chi. \tag{6.232}$$

Описанный выше переход от полюса вращения к СЕР не влияет на скорость осевого вращения, поэтому вариации всемирного времени UTI будут равны [42, с. 169–170]

$$\delta(\text{UTI}) = \int m_3 dt = \int \psi_3 dt = -\int \chi_3 dt \,. \tag{6.233}$$

Если обозначить

$$k_0 = i\sigma_C, \qquad (6.234)$$

то модель (6.232) примет вид

$$\dot{p} = k_0 p - k_0 \chi \,. \tag{6.235}$$

Обобщим эту модель на случай, когда комплексная частота k содержит мнимую и вещественную части, т.е. положим [82, с. 361]

$$k = -\beta + i\sigma. \tag{6.236}$$

Подставляя это выражение вместо  $k_0$  в (6.235), а затем приравнивая вещественные и мнимые части полученного равенства, получим следующее уравнение в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & -\sigma \\ \sigma & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & \sigma \\ -\sigma & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}.$$
 (6.237)

Вводя вместо компонент комплексных функций двумерные векторы

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_1 \\ \boldsymbol{\chi}_2 \end{bmatrix}$$
 (6.338)

и обозначая

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\beta & -\sigma \\ \sigma & -\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \beta & \sigma \\ -\sigma & \beta \end{bmatrix}, \quad (6.239)$$

получаем непрерывную динамическую модель вращательного движения Земли в матричной форме

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{p}(t) + \mathbf{G}\boldsymbol{\chi}(t). \tag{6.240}$$

При постоянных параметрах β и σ матрицы F и G оказывются тоже постоянными, а модель (6.240) – стационарной.

Вычислим теперь автоковариационную функцию выходного процесса p(*l*). С этой целью найдем переходную матрицу динамической системы, соответствующую матрице F:

$$\Phi(\gamma) = \exp{\{\mathbf{F}\gamma\}}.$$
 (6.241)

Для этого воспользуемся теоремой Сильвестра (6.185). Вычислим собственные значения матрицы F – корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \lambda + \beta & \sigma \\ -\sigma & \lambda + \beta \end{bmatrix} = 0, \qquad (6.242)$$

откуда непосредственно находим  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sigma$ . Теперь с помощью формулы (6.185) получаем

$$\Phi(\gamma) = e^{\mathbf{F}\gamma} = f(\mathbf{F}) = e^{\lambda_1 \gamma} \frac{\mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} + e^{-\lambda_2 \gamma} \frac{\mathbf{F} - \lambda_1 \mathbf{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} =$$

$$= \frac{e^{\lambda_1 \gamma}}{2i\sigma} \begin{bmatrix} -\beta - \lambda_2 & -\sigma \\ \sigma & -\beta - \lambda_2 \end{bmatrix} - \frac{e^{\lambda_2 \gamma}}{2i\sigma} \begin{bmatrix} -\beta - \lambda_1 & -\sigma \\ \sigma & -\beta - \lambda_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{e^{-\beta\gamma}}{2i} \left\{ e^{i\sigma\gamma} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} - e^{-i\sigma\gamma} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\}.$$
(6.243)

Используя далее формулу Эйлера  $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ , находим окончательно

$$\Phi(\gamma) = e^{-\beta\gamma} \begin{bmatrix} \cos \sigma \gamma & -\sin \sigma \gamma \\ \sin \sigma \gamma & \cos \sigma \gamma \end{bmatrix}.$$
 (6.244)

Согласно формуле (6.188), переходная матрица  $\Phi(\gamma)$  однозначно определяет ковариационную функцию выходного сигнала стационарной динамической системы:

$$\mathbf{S}(\gamma) = \mathbf{\Phi}(\gamma)\mathbf{S}(0) = e^{-\beta\gamma} \begin{bmatrix} \cos\sigma\gamma & -\sin\sigma\gamma \\ \sin\sigma\gamma & \cos\sigma\gamma \end{bmatrix} \mathbf{S}(0).$$
(6.245)

Воспользуемся теперь соотношением (6.190) для оценки дисперсии S(0). Если возбуждение  $\chi(t)$  есть белый шум с постоянной спектральной плотностью  $S_{\chi}$ , то его дисперсия тоже будет постоянна и равна  $\mathbf{R} = 2\pi S_{\chi} \mathbf{I}$  [47, с. 98], поэтому в силу (6.239) уравнение (6.190) примет вид

$$FS(0) + S(0)F' = -2\pi S_{\gamma}FF'.$$
 (6.246)

Подставляя сюда вместо F выражение (6.239) и обозначая 2×2-матрицу S(0) как

$$\mathbf{S}(0) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix},$$

находим

Выполнив действия произведения и сложения матриц в левой части этого равенства и приравняв элементы полученной матрицы с элементами матрицы, стоящей справа от знака равенства, получаем 4 уравнения для определения 4 элементов матрицы S(0). В итоге получаем

$$S(0) = 2\pi S_{\chi} \frac{\beta^2 + \sigma^2}{2\beta} I = 2\pi \sigma S_{\chi} Q \left( 1 + \frac{1}{4Q^2} \right) I, \qquad (6.247)$$

где Q = σ/2β – так называемый безразмерный фактор добротности. Если ввести скалярную величину

$$D = 2\pi\sigma S_{\chi} Q \left( 1 + \frac{1}{4Q^2} \right), \tag{6.248}$$

то с учетом (6.247) формула (6.245) примет вид

$$\mathbf{S}(\gamma) = D e^{-\frac{\sigma \gamma}{2Q}} \begin{bmatrix} \cos \sigma \gamma & -\sin \sigma \gamma \\ \sin \sigma \gamma & \cos \sigma \gamma \end{bmatrix}.$$
 (6.249)

Перейдем теперь к дискретной модели динамической системы движения полюса, соответствующей дифференциальному уравнению (6.240). Общий вид этой модели можно записать следующим образом:

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{p}(k) + \mathbf{B}\mathbf{\chi}(k) \quad (k = 0, 1, ...), \tag{6.250}$$

где **А** и **В** – однотактовые переходные матрицы, которые, согласно (6.195), (6.199) и (6.239), имеют вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_F(\mathbf{I}) = \exp\{\mathbf{F}T\},$$
  
$$\mathbf{B} = \mathbf{\Phi}_G(\mathbf{I}) = \exp\{\mathbf{G}T\} = \exp\{-\mathbf{F}T\}.$$
 (6.251)

Будем считать временной сдвиг у в интервалах дискретизации *T*, тогда

 $\gamma = nT, \quad \varpi = \sigma T, \quad \alpha = \beta T, \quad \sigma \gamma = \varpi n$  (6.252)

и поэтому из (6.244) имеем дискретную переходную матрицу, соответствующую матрице F:

$$\Phi_F(n) = e^{-\alpha n} \begin{bmatrix} \cos \varpi n & -\sin \varpi n \\ \sin \varpi n & \cos \varpi n \end{bmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{6.253}$$

Отсюда легко находим дискретную автоковариационную функцию  $S(n) = E\{p(k+n)p'(k)\}:$ 

$$\mathbf{S}(n) = \mathbf{\Phi}_{F}(n)\mathbf{S}(0) = e^{-\alpha n} \begin{bmatrix} \cos \varpi n & -\sin \varpi n \\ \sin \varpi n & \cos \varpi n \end{bmatrix} \mathbf{S}(0)$$
(6.254)

и переходную матрицу А:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Phi}_{F}(1) = \mathrm{e}^{-\alpha} \begin{bmatrix} \cos \boldsymbol{\varpi} & -\sin \boldsymbol{\varpi} \\ \sin \boldsymbol{\varpi} & \cos \boldsymbol{\varpi} \end{bmatrix}.$$
(6.255)

Принимая для периода Чанлера *P* и фактора добротности *Q* современные значения [75]

$$P = 2\pi/\sigma = 433.0 \text{ cyr}, Q = 121,$$
 (6.256)

находим, что параметр

$$\alpha = \frac{\sigma T}{2Q} = \frac{\pi T}{PQ} \approx 6.3 \cdot 10^{-5} T \tag{6.257}$$

представляет собой малую величину, поскольку интервал дискретизации T обычно невелик (для рядов EOP(IERS) C02 T = 5 сут, а для EOP(IERS) C04 T = 1 сут). Учитывая также, что величина  $\varpi = \sigma T$  тоже мала, получаем

$$\mathbf{A} \approx (\mathbf{1} - \alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\boldsymbol{\varpi} \\ \boldsymbol{\varpi} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha & -\boldsymbol{\varpi} \\ \boldsymbol{\varpi} & -\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{F} T, \qquad (6.258)$$

откуда следует, что при  $T \rightarrow 0$  **A**  $\rightarrow$  **I** и  $\mathbf{p}(k+1) \rightarrow \mathbf{p}(k)$ . Кроме того, это дает

$$\mathbf{F} = \lim_{T \to 0} \frac{\mathbf{A}(T) - \mathbf{I}}{T},$$
 (6.259)

что и требуется для обратного перехода от разностного уравнения (6.250) к дифференциальному уравнению (6.240).

Для вычисления переходной матрицы **В**, как следует из (6.251), необходимо сначала вычислить непрерывную матричную функцию

$$\Phi_G(\gamma) = \exp\{\mathbf{G}\gamma\} = \exp\{-\mathbf{F}\gamma\}.$$
(6.260)

Для этого опять воспользуемся теоремой Сильвестра (6.185). Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{G}) = \begin{bmatrix} \lambda - \beta & -\sigma \\ \sigma & \lambda - \beta \end{bmatrix} = 0.$$
 (6.261)

Корни этого уравнения равны  $\lambda_{1,2} = \beta \pm i\sigma$ , поэтому применение формулы (6.185) дает

$$\Phi_{G}(\gamma) = e^{G\gamma} = f(G) = e^{\lambda_{1}\gamma} \frac{G - \lambda_{2}I}{\lambda_{1} - \lambda_{2}} + e^{-\lambda_{2}\gamma} \frac{G - \lambda_{1}I}{\lambda_{2} - \lambda_{1}} = = \frac{e^{\lambda_{1}\gamma}}{2i\sigma} \begin{bmatrix} \beta - \lambda_{2} & \sigma \\ -\sigma & \beta - \lambda_{2} \end{bmatrix} - \frac{e^{\lambda_{2}\gamma}}{2i\sigma} \begin{bmatrix} \beta - \lambda_{1} & \sigma \\ -\sigma & \beta - \lambda_{1} \end{bmatrix} = = \frac{e^{\beta\gamma}}{2i} \left\{ e^{i\sigma\gamma} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} - e^{-i\sigma\gamma} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \right\} = e^{\beta\gamma} \begin{bmatrix} \cos\sigma\gamma & \sin\sigma\gamma \\ -\sin\sigma\gamma & \cos\sigma\gamma \end{bmatrix}.$$
(6.262)

Отсюда непосредственно находим дискретную форму этого равенства

$$\Phi_{G}(n) = e^{\alpha n} \begin{bmatrix} \cos \varpi n & \sin \varpi n \\ -\sin \varpi n & \cos \varpi n \end{bmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$
(6.263)

и переходную матрицу В:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\Phi}_{G}(1) = \mathbf{e}^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \boldsymbol{\varpi} & \sin \boldsymbol{\varpi} \\ -\sin \boldsymbol{\varpi} & \cos \boldsymbol{\varpi} \end{bmatrix}.$$
 (6.264)

Теперь можно попытаться найти оценку дисперсии S(0) из условия (6.200). Подставляя туда полученные выше выражения (6.255) и (6.264) для переходных матриц A и B, а также полагая, что для входного белого шума имеет место равенство  $\mathbf{R} = 2\pi S_r \mathbf{I}$ , находим

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = e^{-2\alpha} \begin{bmatrix} \cos \varpi & -\sin \varpi \\ \sin \varpi & \cos \varpi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varpi & \sin \varpi \\ -\sin \varpi & \cos \varpi \end{bmatrix} + 2\pi S_{\chi} e^{2\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда после несложных преобразований с учетом обозначений (6.252) получаем

$$\mathbf{S}(0) = 2\pi S_{\chi} \frac{\mathrm{e}^{2\alpha}}{\mathrm{I} - \mathrm{e}^{-2\alpha}} \mathbf{I} \approx 2\pi S_{\chi} (1 + \frac{1}{2\beta T}) \mathbf{I} = 2\pi S_{\chi} (1 + \frac{Q}{\sigma T}) \mathbf{I}.$$
(6.265)

Из этого выражения видно, что при  $T \rightarrow 0$  S(0)  $\rightarrow \infty$ , поэтому оно не годится для априорного оценивания дисперсии S(0). В этом состоит особенность дискретных динамических систем. В отличие от непрерывного случая здесь не всегда удается оценить начальную дисперсию процесса, пользуясь соотношением (6.200) и оценкой спектральной плотности шума  $S_{\gamma}$  (см. [60, с. 87]).

Таким образом, ковариационная функция (6.249) выходного сигнала обобщенной динамической модели 1-го порядка при  $\beta \neq 0$  указывает на затухающий характер движения полюсов, в то время как описанная выше механическая теория вращения Земли, в которой принимается  $\beta = 0$  и  $\omega = \sigma_C$ , приводит к круговым гармоническим колебаниям с постоянным периодом Чандлера.

### §9. Сравнение алгоритмов ФК и СКК

Рассмотренный в §3,4 настоящей главы рекуррентный алгоритм фильтрации Калмана (ФК) представляет собой следующую последовательность действий:

(а) оценивание начального значения вектора состояния динамической системы  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  (k = 0, 1, 2, ...) и его дисперсии  $\mathbf{D}(k)$ ; эти оценки можно получить или из предшествующей серии наблюдений (см. §3), или из априорной информации (см. §4);

(б) экстраполяция (прогноз) вектора состояния на следующий момент времени k+1, т.е. предварительное оценивание  $\hat{\mathbf{x}}_{*}(k+1)$  и  $\mathbf{D}_{*}(k+1)$ ; эти оценки находятся через известные параметры динамической системы – переходную матрицу  $\mathbf{A}(k)$  и дисперсию возмущающего шума  $\mathbf{R}(k)$  (см. формулы (6.67) и (6.68));

(в) уточнение прогноза  $\hat{\mathbf{x}}_{\bullet}(k+1)$  и  $\mathbf{D}_{\bullet}(k+1)$  с помощью новых наблюдений  $\mathbf{l}(k+1)$ , выполненных в момент k+1;

(г) полученные таким образом окончательные оценки  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  и  $\mathbf{D}(k+1)$  принимаются за начальное состояние системы для следующего шага фильтрации на момент k+2 и т.д.

Сравнивая этот алгоритм ФК с алгоритмом СКК, описанным в главах 4 и 5, можно сделать следующие выводы:

(1) Последовательные оценки  $\hat{\mathbf{x}}(0), \hat{\mathbf{x}}(1), \hat{\mathbf{x}}(2), ..., \hat{\mathbf{x}}(k)$  стохастического параметра динамической системы, получаемые с помощью  $\Phi K$ , обладают кумулятивным свойством в том смысле, что их точность неоднородна и растет с ростом k, в то время как все СКК-оценки этого параметра (сигнала) получаются одновременно для всех моментов наблюдений и практически с одинаковой точностью.

(2) Для устранения кумулятивного свойства оценок ФК приходится применять специальный рекурсивный алгоритм сглаживания, обратный рекуррентному алгоритму ФК (см. §6 наст. гл.). Между тем в алгоритме СКК оценки сигнала сглаживаются автоматически. Здесь оценивание, сглаживание и прогноз выполняются с помощью одной и той же процедуры, основанной на априорном знании ковариационной функции сигнала.

(3) Алгоритм ФК оперирует липь дисперсиями D(k) сигнала x(k)в моменты его задания k = 0, 1, 2, ..., a не ковариационными функциями  $C_{xx}(n) = D(k + n, k)$ , как это имеет место в СКК. Коррелированность сигнала учитывается в ФК не прямо, как в СКК, а косвенно, через переходную матрицу динамической системы, которая в свою очередь связана с ковариационной функцией сигнала x(k) как марковского процесса (см. §7 наст. гл.).

(4) В алгоритме ФК оценки дисперсий сигнала D(k) для любого k(за исключением, может быть, начального условия D(0)) являются апостериорными и зависят от матрицы плана наблюдений C (см. формулу (6.70)), в то время как в СКК ковариации сигнала являются априорными, от плана наблюдений не зависят и обычно более тесно связаны с физической сущностью стохастического процесса.

(5) Оптимальный алгоритм ФК основан на принципе минимизации апостериорной дисперсии опибок последовательности оценок  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  (k = 0, 1, 2, ...) (см. §2 наст. гл.). Метод СКК использует такой же принцип, поэтому его оценки тоже оптимальны, но, кроме того, в СКК одновременно минимизируется и норма вектора невязок модели наблюдений, которая фактически играет роль *стабилизирующего*  $\phi ункционала$ . Такого функционала в рекуррентном алгоритме ФК нет и быть не может, поскольку восстанавливаемый с его помощью процесс  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  является марковским процессом без последействия. Иначе говоря, алгоритм ФК "помнит" только предыдущее состояние системы и "не помнит" всей его предыстории.

Из этого сопоставления методов ФК и СКК видно, что в тех случаях, когда известна априорная ковариация сигнала, метод СКК дает наиболее простые и эффективные процедуры для оценивания, сглаживания и прогноза случайных последовательностей. Эти последовательности предполагаются стационарными, а их автоковариационные матрицы положительно определенными (см. §1 гл. 4). На первый взгляд, кажется, что это ограничение слишком сильное. Однако на самом деле класс таких процессов достаточно широк. В частности, он включает в себя марковские процессы, с которыми имеет дело ФК. Отсюда непосредственно следует, что стационарные процессы, с которыми имеет дело СКК, необязательно являются марковскими, а значит, их динамическая модель может иметь порядок выше первого.

Покажем, что если для дискретной случайной последовательности  $\mathbf{x}(k)$  (k = 0, 1, ...) задана ее автокорреляционная функция  $c_n = q_n / q_0$ , где  $q_n = \text{cov} \{\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+n)\}$  (n = 0, 1, ..., p), а значит, и соответствующая  $p \times p$ -матрица корреляций  $\mathbf{C}_p$ , то тем самым полностью определена и дискретная динамическая система p-го порядка, фазовым вектором которой и является последовательность  $\mathbf{x}(k)$ .

Действительно, динамическую модель *p*-го порядка для случайной последовательности  $x_0, x_1, x_2, ...,$  заданной в дискретные равноотстоящие моменты времени  $T_k$  (k = 0, 1, 2, ...), можно представить в виде процесса авторегрессии *p*-го порядка [5, с. 70]:

$$x_{k} = \phi_{p1} x_{k-1} + \phi_{p2} x_{k-2} + \dots + \phi_{pp} x_{k-p} + v_{k}, \qquad (6.266)$$

где  $x_k$  – текущее значение процесса в момент  $T_k$ ,  $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots$  – его предпествующие значения,  $\phi_{1p}, \phi_{2p}, \ldots$  – *переходные* коэффициенты, аналогичные переходным матрицам, которые мы использовали ранее для многомерных сигналов,  $v_k$  – импульс белого шума в момент  $T_k$ .

Условие стационарности процесса (6.266) заключается в том, что его характеристическое уравнение

$$\phi(B) = 1 - \phi_{p1}B - \phi_{p2}B^2 - \dots - \phi_{pp}B^p = 0$$
(6.267)

должно иметь корни, лежащие вне единичного круга [5, с. 71]. Легко видеть, что для p = 1 и p = 2 эти условия имеют вид

$$\begin{array}{c} -1 < \phi_{11} < 1 \ (p = 1), \\ \phi_{22} + \phi_{11} < 1, \\ \phi_{22} - \phi_{11} < 1, \\ -1 < \phi_{22} < 1, \end{array} \right\} \ (p = 2).$$

$$(6.268)$$

Умножим обе части уравнения (6.266) на  $x_{k-n}$  и вычислим их матожидания. Учитывая, что  $E\{x_{k-n}v_k\}=0$  при k>0, так как  $x_{k-n}$  может включать лишь импульсы  $v_j$  до момента j=k-n, не коррелированные с  $v_k$ , и разделив обе части полученного равенства на дисперсию  $q_0$ , получим рекуррентное соотношение для вычисления корреляций  $c_n$ :

$$c_n = \phi_{pl} c_{n-l} + \phi_{p2} c_{n-2} + \ldots + \phi_{pp} c_{n-p}, \quad n > 0.$$
(6.269)

Можно также показать [5, с. 73], что вектор переходных коэффициентов  $\phi_p = (\phi_{p1}, \phi_{p2}, ..., \phi_{pp})$  процесса авторегрессии связан с авто-корреляциями сигнала уравнением Юла-Уокера

$$\phi_p = \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{c}_p,$$

которое в развернутом виде можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \phi_{p1} \\ \phi_{p2} \\ \vdots \\ \phi_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_{p-1} \\ c_1 & 1 & \cdots & c_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p-1} & c_{p-2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}.$$
 (6.270)

Например, для p = 2 имеем

$$\begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ c_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$
 (6.271)

или

$$\phi_{21} = \frac{c_1(1-c_2)}{1-c_1^2}, \quad \phi_{22} = \frac{c_2-c_1^2}{1-c_1^2}.$$
(6.272)

Для последовательного перехода от процесса авторегрессии *p*-го порядка к процессу (*p* + 1)-го порядка можно использовать следующие рекуррентные формулы [5, с. 100]:

$$\phi_{p+1,j} = \phi_{pj} - \phi_{p+1,p+1} \phi_{p,p-j+1} \quad (j = 1, 2, ..., p),$$

$$\phi_{p+1,p+1} = \frac{c_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \phi_{pj} c_{p+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_{pj} c_{j}}.$$
(6.273)

Таким образом, динамическая система полностью определяется корреляционной функцией процесса и не зависит от его дисперсии  $q_0$ .

Попытаемся теперь решить обратную задачу, т.е. вычислить корреляционную функцию фазового вектора динамической системы, если известны параметры  $\phi_p = (\phi_{p1}, \phi_{p2}, \dots, \phi_{pp})$  модели ее авторегрессии *p*-го порядка. Рассмотрим эту задачу последовательно для p = 1, 2 и т. д.

Для p = 1 разностное уравнение (6.269) принимает вид

$$c_n = \phi_{11} c_{n-1}, \quad n > 0.$$
 (6.274)

Его решение с начальным условием  $c_0 = 1$  дает следующую оценку корреляционной функции (см. также формулы (6.198) и (6.199)):

$$c_n = \phi_{11}^n, \quad n \ge 0.$$
 (6.275)

При выполнении условия стационарности (6.268) и при  $\phi_{11} > 0$  выражение (6.275) дает положительную затухающую функцию. При  $\phi_{11} < 0$  эта функция становится знакопеременной.

Для *p* = 2 из (6.267) имеем

$$c_n = \phi_{21}c_{n-1} + \phi_{22}c_{n-2}, \quad n > 0.$$
(6.276)

Для решения этого разностного уравнения необходимы два начальных условия. Первое из них очевидно:  $c_0 = 1$ . Если теперь уравнения Юла-Уокера (6.271) представить в виде

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{bmatrix},$$
 (6.277)

то первое из этих уравнений дает второе начальное условие:  $c_1 = \phi_{21} / (1 - \phi_{22})$ . Подставляя эти условия в (6.276), последовательно находим все остальные корреляции.

Необходимо обратить внимание на то, что восстанавливаемая с помощью параметров динамической системы оценка корреляционной функции фазового вектора является лишь приближением к его истинной корреляционной функции, причем чем меньше порядок процесса авторегрессии *p*, тем грубее это приближение.

Таким образом, если принятый порядок процесса авторегрессии меньше количества известных а priori значений истинной корреляционной функции случайного сигнала, то можно утверждать, что при таком моделировании сигнала всегда происходит потеря информации, заключенной в этой функции. Но поскольку вся информация о случайном сигнале заключена в его ковариационной функции, то динамическое моделирование этих сигналов не может вносить какойлибо новой существенной информации в их описание, а может, наоборот, приводить лишь к потере этой информации. Фильтр Калмана соответствует динамической системе первого порядка, поэтому с его помощью восстанавливается лишь грубое приближение истинной корреляционной функции вида (6.275). Это приближение оказывается достаточным и полным только для марковских процессов. В остальных случаях оно может оказаться совершенно неприемлемым. В этом, на наш взгляд, и состоит основное преимущество метода СКК в сравнении с фильтрацией Калмана и со всеми другими методами дискретного динамического моделирования и авторегрессии: метод СКК полностью использует известную а ргіоті автоковариационную функцию сигнала, а значит, и всю доступную информацию о нем. Наоборот, если автоковариационная функция сигнала заранее неизвестна, но известно только одно априорное значение дисперсии начального состояния фазового вектора (сигнала), то применение фильтрации Калмана для оценивания последующих значений сигнала становится неизбежным.

Таким образом, основная задача обработки данных, содержащих стохастические сигналы, состоит в том, чтобы оценить заранее автоковариации этих сигналов. Если это удается, то, применяя метод СКК, можно получить наиболее оптимальные (с наименьшей дисперсией) в классе линейных моделей оценки сигнала и уточнить его автоковариации. Как будет показано в следующей главе, иногда достаточно довольно грубых начальных оценок априорных автоковариаций, так как затем их можно улучшить с помощью оценок самого сигнала и его апостериорных ковариаций.

# Глава 7. СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В АСТРОМЕТРИИ

#### §1. Внутрисуточные флуктуации эйконала тропосферы

Одним из основных факторов, влияющих на точность РСДБнаблюдений, является неустойчивость атмосферы как части космической среды распространения сигналов от внегалактических радиоисточников до наземных приемников. Фазовая скорость волнового фронта в среде атмосферы, показатель преломления которой больше единицы, меньше скорости света в вакууме, поэтому так называемая электрическая длина (толщина) атмосферы больше геометрической. Разность этих длин в направлении зенита называется эйконалом атмосферы [24, с. 230]. Величину эйконала можно определить как

$$l = \int_{0}^{H} [n(h) - 1] dh, \qquad (7.1)$$

где n(h) – показатель преломления воздуха как функция высоты, H – подная геометрическая высота атмосферы. Среднее значение величины / приблизительно равно двум метрам.

Поскольку РСДБ-наблюдения ведутся в сантиметровом диапазоне длин волн, то влияние на них ионосферы оказывается незначительным и поэтому основной вклад в величину эйконала вносит тропосфера. Вследствие турбулентного характера тропосферы показатель преломления n(h) непрерывно пульсирует, что и вызывает флуктуации эйконала.

Основной характеристикой флуктуационных свойств эйконала тропосферы служит временная структурная функция:

$$s_l(\gamma) = E\{[l(T+\gamma) - l(T)]^2\}.$$
(7.2)

Здесь время T и смещение по времени  $\gamma$  будем считать в сутках, а размерность структурной функции примем равной 1 см<sup>2</sup>.

Согласно гипотезе "замороженной" турбулентности свободной тропосферы, временная структурная функция  $s_i(\gamma)$  может быть связана с пространственной функцией  $s_i(d)$ , где d – относительное пространственное смещение приемников. Соотношение между этими функциями имеет вид  $s_i(d) = s_i(v\gamma)$ , где  $v \approx 10 \text{ м/с}$  – средняя скорость переноса тропосферных неоднородностей. Используя данные А.А.Стоцкого [79] для функции  $s_i(d)$ , с помощью этого соотношения находим следующее выражение для  $s_i(\gamma)$ :

$$s_{l}(\gamma) = \begin{cases} 4924\gamma^{5/3} & (0 < \gamma < 0.0025), \\ 12.5\gamma^{2/3} & (0.0025 < \gamma < 2.8), \\ 25.0 & (2.8 < \gamma). \end{cases}$$
(7.3)

Между тем основной (и единственной) статистической характеристикой случайного процесса, которая используется в средней квадратической коллокации и фильтрации Калмана, является его ковариационная функция. Попробуем оценить такую функцию с помощью структурной функции (7.3).

Структурная функция  $s_l(\gamma)$  относится к "широкомасштабному" процессу l(T), развивающемуся на неограниченном интервале времени  $T, \gamma \in [0, \infty)$ . Анализ спектра флуктуаций этого процесса [24, с. 233] показывает, что максимальная энергия приходится на низкие частоты порядка  $10^{-1}$  цикл./сут. Между тем РСДБ-наблюдения, как правило, ведутся ограниченными по времени сериями продолжительностью 1 сут, и поэтому процесс l(T) на интервале наблюдений  $t \in [0,1]$  может оказаться нецентрированным. Если обозначить суточный отрезок процесса l(T) через l(t), то

$$E\{l(t)\} = f(t) \neq 0, \quad t \in [0,1].$$
(7.4)

Введем понятие процесса внутрисуточных флуктуаций эйконала:

$$x(t) = l(t) - f(t), \quad t \in [0, 1], \tag{7.5}$$

матожидание которого равно нулю:

$$E\{x(t)\} = E\{l(t)\} - f(t) = f(t) - f(t) = 0, \quad t \in [0,1].$$
(7.6)

Функцию f(t) на суточном интервале времени принято аппроксимировать в виде линейного тренда

$$f(t) = a + bt, \quad t \in [0,1]. \tag{7.7}$$

Параметры этого тренда a и b всегда включают в число определяемых параметров при любом методе уравнивания данных наблюдений, поэтому остаточной стохастической компонентой внутрисуточных флуктуаций эйконала всегда является определенный по формуле (7.5) центрированный процесс x(t) и именно его ковариационную функцию  $q_x(\gamma)(t, \gamma \in [0,1])$  требуется оценить.

Записывая выражение (7.2) для генеральной совокупности суточных отрезков времени и используя (7.5), имеем

$$s_{l}(\gamma) = E\{[l(t+\gamma) - l(t)]^{2}\} =$$

$$= E\{[(x(t+\gamma) - x(t)) + (f(t+\gamma) - f(t))]^{2}\} =$$

$$= E\{[x(t+\gamma) - x(t)]^{2}\} + E\{[f(t+\gamma) - f(t)]^{2}\} -$$

$$-2E\{[f(t+\gamma) - f(t)][x(t+\gamma) - x(t)]\}.$$
(7.8)

Заметим, что последний член в правой части равенства (7.8) в силу центрированности внутрисуточного процесса x(t) равен нулю, а выражение

$$s_{x}(\gamma) = E\{[x(t+\gamma) - x(t)]^{2}\}$$
(7.9)

представляет собой структурную функцию этого процесса. Кроме того, учитывая (7.7), видим, что

$$E\{[f(t+\gamma) - f(t)]^2\} = E\{[b\gamma]^2\} = \gamma^2 E\{b^2\} = \gamma^2 \sigma_b^2, \qquad (7.10)$$

где  $\sigma_b^2 = E\{b^2\}$  – дисперсия параметра *b* как случайной величины. Таким образом, формулу (7.8) можно переписать в виде

$$s_{\mathbf{x}}(\gamma) = s_{l}(\gamma) - \gamma^{2} \sigma_{b}^{2}, \quad \gamma \in [0, 1].$$

$$(7.11)$$

Здесь функция  $s_l(\gamma)$  представляет собой передний отрезок ( $\gamma \in [0,1]$ ) структурной функции "широкомасштабного" процесса l(T), которая определяется формулой (7.3).

Если центрированный внутрисуточный процесс x(t) стационарен, то можно перейти от его структурной функции  $s_x(\gamma)$  к ковариационной функции  $q_x(\gamma)$ . Действительно, используя определение (7.9), имеем

$$s_{x}(\gamma) = E\{[x(t+\gamma) - x(t)]^{2}\} =$$
  
=  $E\{x^{2}(t+\gamma) - 2x(t+\gamma)x(t) + x^{2}(t)\} =$   
=  $E\{x^{2}(t+\gamma)\} - 2E\{x(t+\gamma)x(t)\} + E\{x^{2}(t)\} =$   
=  $2\sigma_{x}^{2} - 2q_{x}(\gamma),$ 

или

$$q_x(\gamma) = \sigma_x^2 - \frac{1}{2}s_x(\gamma). \tag{7.12}$$

Ковариационная функция центрированного стационарного процесса x(l) должна затухать к концу интервала [0,1], поэтому можно принять  $q_x(l) = 0$ . Тогда из формулы (7.10) находим оценку дисперсии внутрисуточных флуктуаций эйконала:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} s_x(1) = \frac{1}{2} [s_1(1) - \sigma_b^2].$$
(7.13)

Теперь с помощью соотношений (7.11)-(7.13) получаем окончательно

$$q_x(\gamma) = \frac{1}{2} [s_l(1) - s_l(\gamma) - \sigma_b^2 (1 - \gamma^2)], \quad \gamma \in [0, 1].$$
 (7.14)

Таким образом, переход от известной структурной функции "широкомасштабного" процесса флуктуаций эйконала l(T) к автоковариационной функции центрированных внутрисуточных флуктуаций x(t) возможен только в том случае, если известна дополнительная информация о дисперсии параметра b, который представляет собой среднесуточную скорость изменения величины эйконала.

Если в начальном приближении принять b = 0 и  $\sigma_b^2 = 0$ , то из (7.13) находим

$$\sigma_x^2 \le \frac{1}{2} s_x(1) = 6.25 \text{ cm}^2. \tag{7.15}$$

Заметим, что дисперсия "широкомасштабного" процесса l(T) равна  $\sigma_l^2 = \frac{1}{2}[s_l(\infty) - s_l(0)] = 12.5 \text{ см}^2$ , т.е. в два раза больше полученной максимальной оценки  $\sigma_{\chi}^2$ .

Поскольку интервал между РСДБ-наблюдениями не меньше 5 мин, т.е.  $\gamma \ge 0.0035$  сут, то первый член в формуле (7.3) можно не учитывать, и тогда формулы (7.3), (7.14) и (7.15) дают

$$q_{\mathbf{x}}(\gamma) = \begin{cases} 6.25(1-\gamma^{2/3}) & (0 \le \gamma \le 1), \\ 0 & (\tau > 1). \end{cases}$$
(7.16)

Если эту функцию пронормировать на дисперсию  $\sigma_x^2 = 6.25 \text{ см}^2$ , то получим корреляционную функцию внутрисуточных флуктуаций эйконала:

$$c_{x}(\gamma) = q_{x}(\gamma) / \sigma_{x}^{2} = \begin{cases} 1 - \gamma^{2/3} & (0 \le \gamma \le 1), \\ 0 & (\tau > 1). \end{cases}$$
(7.17)

Функция  $c_x(\gamma)$ , вычисленная по формуле (7.17), представлена на рис. 7.1.



Рис. 7.1. Корреляционная функция внутрисуточных флуктуаций эйконала, полученная из структурной функции А. А. Стоцкого.



Рис. 7.2. СКК-оценки внутрисуточных флуктуаций эйконала (кружки – WET, квадраты – WES, треугольники – GIL).

Рассмотрим теперь результаты применения полученной функции  $q_x(\gamma)$  в качестве априорной оценки ковариаций внутрисуточных флуктуаций эйконала тропосферы для оценивания самих этих флуктуаций по данным РСДБ-наблюдений [19, 22]. С этой целью были использованы результаты наблюдений по программе CONT'94, выполнявшейся с 12 по 24 января 1994 г. на трех РСДБ-станциях: WETTZELL (WET), WESTFORD (WES) и GILCREEK (GIL).

Наблюдения на всех трех станциях велись синхронно. Весь интервал наблюдений был разбит на суточные серии. Линейная модель каждой такой серии кроме постоянных параметров содержала 5 стохастических сигналов: 3 флуктуационные компоненты эйконала (по одному для каждой станции) и 2 случайные компоненты вариаций фазы водородных мазеров, установленных на станциях WES и GIL, по отношению к опорной станции WET. Так как среднесуточные значения величины эйконала *a* (см. формулу (7.7)) для каждой станции включались в число постоянных параметров и определялись вместе с ними, то стохастические компоненты этих сигналов должны быть центрированными и стационарными. Совместное оценивание постоянных параметров и стохастических сигналов осуществлялось методом СКК (см. §6 гл.4) с помощью программного пакета ОССАМ (версия 3.3). Вычисления выполнены О.А.Титовым.

На рис. 7.2 показан пример результатов оценивания флуктуационной компоненты x(t) эйконала тропосферы по данным РСДБнаблюдений в течение одной суточной серии (12 января 1994 г.). Так как использовавшаяся версия пакета ОССАМ не предусматривает включения коэффициентов b формулы (7.7) в число определяемых параметров, то, как видно из рис. 7.2, оценки x(t) иногда обнаруживают заметные смещения и наклоны. Параметры этих трендов вида ∆а и b определялись по методу наименьших квадратов (рис. 7.3 и 7.4), а оценки x(t) затем еще раз центрировались.





Рис. 7.3. Среднесуточные значе- Рис. 7.4. Среднесуточные скоросла (кружки – WET, квадраты – (кружки – WET, квадраты WES, треугольники – GIL).

ния поправок  $\Delta a$  длины эйкона- ти b изменений длины эйконала WES, треугольники - GIL).

Полученные таким образом окончательные случайные последовательности x(t) были использованы для вычисления anocmepuopных автоковариационных функций. Поскольку РСДБ-наблюдения не являются равноотстоящими по времени, то для вычисления этих функций пришлось применять специальную методику, изложенную в [21]. Ее суть состоит в том, что элементарные "кванты" ковариаций  $q_{ii} = x(t_i)x(t_i) = x(t_i)x(t_i + \gamma_{ii})$ , соответствующие сдвигу по времени  $\gamma_{ii} = (t_i - t_i)$  (*j* > *i*), сортируются по равноотстоящим "карманам" шириной  $\Delta \gamma$  с центрами в точках  $\gamma_k = k \Delta \gamma$  (k = 0, 1, ..., m) и там усредняются. Полученные средние затем умножаются на величину (m-k)/m. Такой алгоритм позволяет получить так называемые "смещенные" оценки автоковариационной функции  $\hat{q}_x(\gamma_k)$ , которые гарантируют положительную определенность соответствующей матрицы автоковариаций [40, с. 184-187].

Результаты этих вычислений показаны на рис. 7.5-7.7 в виде соответствующих корреляционных функций

$$\hat{c}_{x}(\gamma) = \hat{q}_{x}(\gamma) / \hat{q}_{x}(0).$$
 (7.18)

Усредненные для каждой станции оценки корреляционных функций  $\hat{c}_{x}(\gamma)$ и общее среднее показаны на рис. 7.8.



Корреляционные функ- Рис. 7.6. Рис. 7.5. ции флуктуаций эйконала тропо- ции флуктуаций эйконала тропосферы для WET (жирная кривая - сферы для WES (жирная кривая среднее).



Рис. 7.7. Корреляционные функции флуктуаций эйконала тропосферы для GIL (жирная кривая – среднее).



Корреляционные функсреднее).



Рис. 7.8. Средние оценки корреляционных функций эйконала для станций WET, WES и GIL (жирная кривая - среднее).

Представим теперь флуктуации эйконала тропосферы как случайный процесс x(t), характеризующий состояние стационарной динамической системы 2-го порядка, на вход которой непрерывно поступает возмущение в виде белого шума v(1). Состояние такой системы описывается стохастическим дифференциальным уравнением 2го порядка с постоянными коэффициентами [47, с. 101-110]:

$$a_2 \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial x(t)}{\partial t} + a_0 x(t) = b_1 \frac{\partial v(t)}{\partial t} + b_0 v(t).$$
(7.19)

Поскольку спектральная плотность белого шума постоянна и равна  $S_{\nu}(\omega) = c$ , то спектральная плотность выходного сигнала x(t)будет иметь следующий вид:

$$S_x(\omega) = \frac{c(b_1^2 \omega^2 + b_0^2)}{(a_2 \omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2}.$$
 (7.20)

Можно показать, что этой спектральной плотности соответствует следующая ковариационная функция:

$$q_{x}(\gamma) = \frac{\sigma_{x}^{2}}{\cos \varphi} e^{-\alpha \gamma} \cos(\beta \gamma + \varphi), \qquad (7.21)$$

 $\alpha, \beta, \gamma > 0, \phi \in [-\psi, \psi), \psi = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta),$ 

где  $\sigma_x^2$  – дисперсия случайного процесса x(t). Действительно, обратное преобразование Фурье от этой функции дает

$$S_{x}(\omega) = \frac{\sigma_{x}^{2}\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}}}{\pi\cos\varphi} \frac{[\omega^{2}\sin(\psi+\varphi)+(\alpha^{2}+\beta^{2})\sin(\psi-\varphi)]}{(\omega^{2}-\alpha^{2}-\beta^{2})^{2}+4\omega^{2}\alpha^{2}}.$$

Сравнивая коэффициенты этого выражения и выражения (7.20), находим

$$a_{0} = \alpha^{2} + \beta^{2}, \quad a_{1} = 2\alpha, \quad a_{2} = 1,$$
  

$$b_{0} = \sqrt{a_{0} \sin(\psi - \phi)}, \quad b_{1} = \sqrt{\sin(\psi + \phi)},$$
  

$$\sigma_{x}^{2} = \pi c \cos\phi / \sqrt{\alpha^{2} + \beta^{2}}.$$
(7.22)

Из (7.20) видно, что  $S_x(\omega) > 0$  для всех  $\omega$ , поэтому соответствующая ковариационная функция (7.21) при указанных условиях положительно определена. Именно по этой причине корреляционная функция

$$c_{x}(\gamma) = q_{x}(\gamma) / \sigma_{x}^{2} = \frac{1}{\cos \varphi} e^{-\alpha \gamma} \cos(\beta \gamma + \varphi), \qquad (7.23)$$
  
$$\alpha, \beta, \gamma > 0, \ \varphi \in [-\psi, \psi), \ \psi = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta)$$

была использована для аппроксимации усредненных оценок корреляций эйконала, показанных на рис. 7.8, нелинейным градиентным методом наименьших квадратов [77, с. 540–548]. Результаты аппроксимации представлены в табл. 7.1. В последнем столбце этой таблицы приведены значения точки пересечения ковариационной функции с

осью абсцисс  $\gamma_0 = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right).$ 

Таблица 7.1. Параметры модели (7.19) для апостериорных корреляционных функций внутрисуточных флуктуаций эйконала

| Станция РСДБ    | β, рад/ч φ, рад |      | α, ¶ <sup>-1</sup> | γ <sub>0</sub> ,ч |  |
|-----------------|-----------------|------|--------------------|-------------------|--|
| WET             | 0.27            | 0.82 | 0.26               | 2.73              |  |
| WES             | 0.28            | 0.67 | 0.19               | 3.28              |  |
| GIL             | 0.25            | 0.97 | 0.33               | 2.45              |  |
| Модель среднего | 0.26            | 0.84 | 0.26               | 2.83              |  |

Как видно из рис. 7.8 и данных табл. 7.1, корреляционные функции внутрисуточных флуктуаций эйконала для всех трех станций WET, WES и GIL практически совпадают, поэтому за окончательную оценку было принято среднее арифметическое из этих функций (жирная кривая на рис. 7.8). Параметры модели (7.23) этой средней оценки содержатся в последней строке табл. 7.1. Так как в (7.23) смещение у выражается в сутках, то окончательная модель автоковариационной функции принимает следующий вид:

$$q_x(\gamma) = \frac{\sigma_x^2}{\cos(0.84)} e^{-6.24\gamma} \cos(6.24\gamma + 0.84), \ \gamma \in [0,1].$$
(7.24)





Рис. 7.9. СКО флуктуаций эйко- Рис. 7.10. Кросс-корреляции флунала по данным РСДБ-наблю- ктуаций эйконала дений (кружки – WET, квадраты РСДБ-наблюдений - WES, треугольники - GIL).

по данным (кружки WET/WES, квадраты – WET/ GIL, треугольники - WES/GIL).

Из рис. 7.9 видно, что СКО флуктуаций эйконала для станций WET и GIL нестабильны, поэтому в общем случае дисперсия  $\sigma_r^2$  остается свободным параметром модели (7.24), которую необходимо определять из наблюдений методом итераций. На рис. 7.10 показаны усредненные по всем сериям наблюдений попарные кросс-корреляции флуктуаций эйконала для всех трех станций, которые оказались практически незначимыми.

Таким образом, корреляционные функции внутрисуточных флуктуаций эйконала тропосферы, полученные методом СКК из РСДБнаблюдений на станциях WETTZELL, WESTFORD и GILCREEK, оказались не только устойчивыми, но и практически совпадающими между собой для всех трех станций. Найденную типовую ковариационную функцию (7.24) можно использовать для стохастического моделирования РСДБ-наблюдений и в других приложениях.

Для примера на рис. 7.11 показаны полученные O.A.Титовым СКК-оценки флуктуаций эйконала в зените станции ONSALA, также участвовавшей в программе CONT'94, в сравнении с аналогичными оценками, полученными с помощью независимых WVR-измерений, которые проводились на этой же станции синхронно с РСДБ-наблюдениями. В качестве априорной ковариационной функции использовалась модель (7.24). Дисперсия  $\sigma_x^2$  подбиралась путем итераций. Хорошее согласие этих оценок позволяет утверждать, что постоянное сопровождение РСДБ-наблюдений WVR-измерениями эйконала не является обязательным.



Рис. 7.11. Флуктуации эйконала тропосферы в зените станции ONSALA по данным РСДБ-наблюдений (точки) и WVR-измерений (сплошная кривая).

### §2. Виутрисуточные флуктуации шкал времени

Водородные мазеры как источники высокостабильной частоты и хранители шкалы атомного времени задают основу инструментальной системы в радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ). Нестабильность частоты водородных мазеров отрицательно сказывается на качестве преобразования сигнала к видеочастоте, уменьшая интервал его когерентности, а связанная с этим нестабильность фазы приводит к вариациям шкалы времени, увеличивая тем самым ошибку измерения временной задержки сигнала, а значит, и ошибки оценивания астрометрических и геодезических параметров. Здесь мы будем рассматривать только фазовые ошибки водородных мазеров, поскольку они аддитивно связаны с измеряемыми величинами (временными задержками) и прямо действуют на результаты РСДБ-наблюдений.

Из опыта применения в РСДБ водородных мазеров современного типа известно, что на суточных интервалах времени их фазовые характеристики обнаруживают два типа нестабильности: низкочастотные вариации типа трендов и высокочастотные внутрисуточные флуктуации. Характер низкочастотных трендов у качественных и стабильно работающих мазеров таков, что их можно с достаточной точностью аппроксимировать простыми полиномами 2-й степени. Такие тренды всегда включаются в линейную модель данных РСДБнаблюдений и определяются в процессе их уравнивания вместе с другими параметрами. В связи с этим нас будут интересовать остаточные внутрисуточные фазовые флуктуации водородных мазеров x(t), которые представляют собой случайные отклонения фазовых вариаций от квадратичных трендов на суточном интервале времени и, таким образом, являются случайными функциями с нулевым матожиданием.

При уравнивании РСДБ-наблюдений флуктуациями x(t) или пренебрегают, или описывают их кусочно-гладкими сплайн-функциями. В первом случае ошибки x(t) способны существенно исказить астрометрические параметры, особенно относящиеся к близсуточным вариациям вращательного движения Земли. Второй путь требует деления серии наблюдений на короткие фрагменты, приводит к значительному усложнению параметрической модели данных, к увеличению количества оцениваемых параметров и ухудшению обусловленности системы уравнений. Альтернативой обоим этим способам параметрического уравнивания служит метод СКК, который позволяет оценивать случайные сигналы x(t) для каждого момента наблюдений без использования какой-либо аналитической модели этих сигналов, если известна априорная оценка их автоковариационной функции.

Данные РСДБ-наблюдений зависят от разности шкал времени, разнесенных на болышие расстояния, поэтому под случайной функцией x(t) будем понимать относительные фазовые флуктуации двух разнесенных водородных мазеров. Кроме того, поскольку РСДБнаблюдения ведутся дискретно, то вместо непрерывной функции x(t)мы будем иметь дело со случайными последовательностями  $x_1, x_2, ..., x_N$  или случайными векторами  $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ .



Рис. 7.12. Корреляции внутрисуточных флуктуаций разности фаз водородных мазеров NR (сплошная кривая) и Ч1-80 (прерывистая).

Крупномасштабные вариации частоты водородных мазеров хорошо изучены в спектральной области. Однако, как показано в [21], использовать эти данные для оценки ковариаций фазовых флуктуаций на суточном интервале времени невозможно. He годится для этой цели и другая распространенная статистическая оценка - дисперсия Аллена. причине По этой приходится использовать результаты прямых сличений фазы водородных мазеров. В 1983 г. С. Вардрип [81] опубликовал результаты таких

сличений для пары американских водородных мазеров серии NR, предназначавшихся для РСДБ-наблюдений по программе CDP. Сличения проводились непрерывно в течение 7 сут. Разности фаз (моментов времени), представленные в [81] графически, были нами оцифрованы и разделены на суточные серии, в каждой из которых из этих разностей были исключены квадратичные тренды. Полученные таким образом равноотстоящие случайные последовательности  $x_1, x_2, ..., x_N$  и были использованы для вычисления корреляционных функций. Усредненная по всем 7 реализациям оценка корреляционной функции  $\hat{c}_x(\gamma)$  аппроксимировалась моделью вида (7.23), параметры которой приведены в табл. 7.2. Сама функция показана на рис. 7.12. В качестве априорной оценки дисперсии для мазеров NR можно принять значение  $\sigma_x^2 = q_x(0) = 2 \cdot 10^{-3} \, \text{нс}^2 \approx 2 \, \text{см}^2$ .

Таблица 7.2. Параметры модели (7.23) для корреляционных функций внутрисуточных флуктуаций разности фаз водородных мазеров по данным их прямого сличения

| Мазеры         | β, рад/ч | ф, рад | α, Ψ' | γ <sub>0</sub> , ч |  |
|----------------|----------|--------|-------|--------------------|--|
| NR (США)       | 0.36     | 0.33   | 0.11  | 3.44               |  |
| Ч1-80 (Россия) | 0.45     | 0.29   | 0.14  | 2.87               |  |

Для сравнения характеристик американских и российских мазеров, в 1994—1996 гг. было выполнено 9 суточных серий прямых сличений фазы мазеров типа Ц1-80 отечественного производства, установленных на наблюдательном пункте РСДБ-комплекса "Квазар" в пос. Светлое Ленинградской области [11]. Случайные уклонения измеренных разностей фаз от квадратичного тренда показаны на рис. 7.13, а соответствующие им корреляционные функции – на рис 7.14. Усредненная оценка  $\hat{c}_x(\gamma)$  (жирная кривая на рис. 7.14) аппроксимировалась моделью (7.23), параметры которой представлены в последней строке табл. 7.2, а сама модель – на рис. 7.12.





Рис. 7.13. Пример внутрисуточных флуктуаций разности фаз мазеров Ч1-80 на НП "Светлое" по данным прямых сличений.



Рис. 7.15. Пример флуктуаций разности фаз мазеров WES, WET (жирная кривая) и GIL, WET (тонкая) по РСДБ-наблюдениям CONT'94 12 января 1994 г.

Рис. 7.14. Корреляционные функции флуктуаций разности фаз мазеров Ч1-80 на НП "Светлое" (жирная кривая – среднее).



Рис. 7.16. Корреляционные функции флуктуаций разности фаз мазеров GIL и WET по всем данным РСДБ-наблюдений CONT'94 (жирная кривая – среднее).

Модель корреляционной функции (7.23) с параметрами для мазеров NR из табл. 2 была использована для оценивания внутрисуточных флуктуаций фазы водородных мазеров, установленных на РСДБстанциях WET, WES и GIL, участвовавших в наблюдательной программе CONT'94. Поскольку станция WET была выбрана за опорную, то речь здесь идет о флуктуациях разностей фаз мазеров WES и GIL по отношению к мазеру WET. Данные РСДБ-наблюдений обрабатывались с помощью пакета ОССАМ методом СКК. На рис. 7.15 показан пример оценок фазовых флуктуаций, полученных из обработки наблюдений за 12 января 1994 г. Всего получено 13 суточных серий таких оценок. Для всех этих серий вычислены смещенные оценки корреляционных функций, показанные на рис. 7.16 и 7.17. Усредненные функции представлены на рис. 7.18, а их параметры модели (7.19) этих функций даны в табл. 7.3.





Рис. 7.17. Корреляционные функции флуктуаций разности фаз мазеров GIL и WET по всем данным РСДБ-наблюдений CONT'94 (жирная кривая – среднее).

Рис. 7.18. Усредненные корреляционные функции разностей фаз мазеров GIL, WET и WES, WET (тонкие кривые; жирная кривая – среднее).

Таблица 7.3. Параметры модели (7.19) для усредненных корреляционных функций внутрисуточных флуктуаций разности фаз водородных мазеров по данным РСДБ-наблюдений

| Мазеры          | β, рад/ч | ф, рад | α, Ψ-ί | σ      |
|-----------------|----------|--------|--------|--------|
| WET-WES         | 0.41     | 0.30   | 0.11   | 0.0012 |
| WET-GIL         | 0.40     | 0.21   | 0.10   | 0.0017 |
| Модель среднего | 0.41     | 0.26   | 0.11   | 0.0013 |

Из рис. 7.18 и табл. 7.3 видно, что усредненные корреляционные функции внутрисуточных флуктуаций фазы мазеров WES и GIL по отношению к мазеру WET практически одинаковы, что говорит об устойчивости их работы и однотипности. Можно даже утверждать, что все три мазера, по-видимому, принадлежат к типу NR, так как последний имеет близкие характеристики корреляционной функции (ср. данные табл. 7.2 и 7.3). Используя параметры, приведенные в последней строке табл. 7.3, получаем окончательную модель ковариационной функции относительных фазовых флуктуаций водородных мазеров по данным РСДБ-наблюдений программы CONT'94:

$$q_x(\gamma) = \frac{\sigma_x^2}{\cos(0.26)} e^{-2.64\gamma} \cos(9.84\gamma + 0.26), \ \gamma \in [0,1].$$
(7.25)



Рис. 7.19. Дисперсии внутрисуточных флуктуаций разности фаз мазеров WES и WET (кружки) и GIL и WET (квадраты) по РСДБнаблюдениям CONT'94. На рис. 7.19 показаны оценки дисперсий внутрисуточных флуктуаций разностей фаз мазеров (WET-WES) и (WET-GIL). Поскольку эти оценки ведут себя нестабильно, то типовая ковариационная функция (7.25) имеет свободный параметр  $\sigma_x^2$ .

К сожалению, независимая синхронизация часов по каналам спутниковой связи при РСДБ-наблюдениях не проводится, поэтому сравнить полученные результаты не с чем. Однако учитывая, что они со-

гласуются с данными непосредственных сличений мазеров типа NR, функцию (7.25) можно рекомендовать для стохастического моделирования РСДБ-наблюдений с участием станций WET, WES и GIL. Есть основания надеяться, что она годится и для других станций, если их мазеры принадлежат к тому же типу. В противном случае модель (7.25) можно уточнить из самих РСДБ-наблюдений, используя ее в качестве первого приближения.

## §3. Внутрисуточные вариации ПВЗ

Случайные флуктуации фазы резонансной частоты водородных мазеров определяют неустойчивость реализуемой с их помощью опорной шкалы атомного времени, в которой производятся непосредственные измерения временной задержки сигнала при РСДБ-наблюдениях. Таким образом, это стохастическое явление целиком относится к инструментальной системе РСДБ. Хотя флуктуации эйконала относятся к свободной тропосфере, но поскольку они носят сугубо локальный характер, то их тоже можно отнести к обобщенной инструментальной системе (см. §1 гл. 1). Отсюда следует, что инструментальная система каждого радиоинтерферометра со сверхдлинной базой определяется группой постоянных на суточном интервале времени параметров, образующих *m*-мерный вектор x, и тремя *N*-мерными стохастическими параметрами y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>, y<sub>3</sub>, из которых первые два представляют собой случайные компоненты эйконала тропосферы над первым и вторым пунктами интерферометра, а третий – случайную компоненту разности фаз водородных мазеров, установленных на этих пунктах. Иначе говоря, линейная модель инструментальной системы РСДБ относится к смещанному типу и содержит как постоянные, так и стохастические параметры:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{r}, \qquad (7.26)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3), \quad \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{B}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{y}_2 + \mathbf{B}_3\mathbf{y}_3.$$

Ковариационная матрица составного вектора у, очевидно, равна

$$\mathbf{Q}_{yy} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{yy} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22}^{yy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{33}^{yy} \end{bmatrix},$$

где  $N \times N$ -матрицы автоковариаций  $Q_{11}^{\mu\nu}$  и  $Q_{22}^{\mu\nu}$  относятся к флуктуациям эйконала над первым и вторым пунктами РСДБ соответственно и определяются функциями вида (7.24), а  $N \times N$ -матрица  $Q_{33}^{\mu\nu}$  относится к относительным флуктуациям фазы опорных генераторов частоты и определяется функцией вида (7.25). Как показано в §1-2 настоящей главы, эти матрицы можно оценить а ргіогі, а затем уточнить из самих РСДБ-наблюдений, поскольку алгоритм средней квадратической коллокации с параметрами (см. §6 гл. 4) позволяет получить оценки постоянных параметров х вместе со стохастическими параметрами  $y_1, y_2, y_3$ . Подбор оптимальной дисперсии стохастических параметров осуществляется в процессе итераций.

Однако современные РСДБ-наблюдения настолько точны, что они оказываются чувствительными к стохастическим явлениям, не имеющим отношения к инструментальной системе РСДБ. Например, в последние годы было обнаружено, что вращательное движение Земли на суточных интервалах времени имеет стохастический характер. В первую очередь это относится к всемирному времени UT1 и к координатам полюса x, y.

Внутрисуточные флуктуации всемирного времени объясняются главным образом вариациями главного момента инерции Земли вследствие перераспределения массы мирового океана под действием приливообразующего потенциала. Хотя этот потенциал, возбуждаемый силами притяжения Луны и Солнца, носит регулярный характер и имеет две основные внутрисуточные гармоники О, и М<sub>2</sub>, но из-за сложного рельефа дна и причудливых очертаний береговой линии распределение динамического прилива в мировом океане выглядит подобно случайному полю, случайно изменяющемуся во времени. Как уже говорилось в §8 гл. 6, флуктуации углового момента атмосферы непосредственно влияют как на скорость вращения Земли, так и на движение ее полюсов. Особенно сильно это влияние сказывается в области сезонных (годовых и полугодовых) вариаций. Однако состояние атмосферы Земли возбуждается каждые сутки, поэтому во вращательном движении Земли должны существовать также и близсуточные эффекты, вызванные близсуточной динамикой атмосферы. Другое дело, что эти эффекты могут оказаться настолько малыми, ято их трудно выделить даже из таких точных наблюдений, как РСДБ. Покажем, как это можно сделать на примере обработки методом СКК данных наблюдений по программе CONT'94. Для этого введем в модель (7.26) еще три глобальных стохастических параметра S1, S2, S3:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{U}\mathbf{s} + \mathbf{r},$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3), \quad \mathbf{U}\mathbf{s} = \mathbf{U}_1\mathbf{s}_1 + \mathbf{U}_2\mathbf{s}_2 + \mathbf{U}_3\mathbf{s}_3.$$

Здесь s<sub>1</sub>, s<sub>2</sub> – случайные компоненты внутрисуточных вариаций координат полюса *x*, *y*, а s<sub>3</sub> – аналогичная компонента всемирного времени UT1. Теперь для получения СКК-оценок этих новых стохастических сигналов осталось найти априорную оценку ковариационной матрицы

$$\mathbf{Q}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{ss} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22}^{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{33}^{ss} \end{bmatrix}.$$

Для оценивания автоковариаций сигналов  $s_1, s_2, s_3$  О. А. Титов применил следующую методику [50]. Так как характеристики этих сигналов на начальном этапе были неизвестны, то в качестве предварительной модели их автоковариационных функций использовалась убывающая экспонента. С помощью этой простейшей модели строилась матрица  $Q_{ss}$  и вычислялись предварительные оценки всех трех сигналов методом СКК. Затем с их помощью вычислялись новые оценки ковариационных функций, матриц  $Q_{ss}$  и сигналов. Поскольку в спектре вариаций ПВЗ предполагается наличие суточных и полусуточных колебаний, то окончательная модель ковариационных функций представлялась в двухчастотном виде

$$q(\gamma) = \sigma^2 e^{-\alpha \gamma} [a \cos(\omega \gamma + \varphi) + b \cos(2\omega \gamma + \psi)], \qquad (7.27)$$

где  $\omega$  – круговая частота вращения Земли (2π рад/сут). Окончательные оценки параметров этой модели  $a, b, \alpha, \varphi, \psi$ , полученные нелинейным градиентным методом наименыших квадратов [77, с. 540–548], представлены в табл. 7.4. Априорная оценка дисперсии была выбрана равной  $\sigma^2 = 1 \text{ см}^2$ . Корреляционные функции вида (7.27) с параметрами из табл. 7.4 представлены на рис. 7.20.

Таблица 7.4. Параметры модели (7.27) для усредненных корреляционных функций внутрисуточных вариаций параметров вращения Земли по данным РСДБ- наблюдений

| Параметры вращения Земли | а    | b    | α, cy <sup>-1</sup> | ф, рад       | ψ, рад |
|--------------------------|------|------|---------------------|--------------|--------|
| Всемирное ремя UTI       | 0.47 | 0.87 | 2.0                 | 0.59         | 0      |
| Координаты полюса х, у   | 0.60 | 0.28 | 2.0                 | 0. <b>09</b> | 0.05   |



Рис. 7.20. Корреляционные функции внутрисуточных вариаций ПВЗ по данным РСДБ-наблюдений (координаты полюса – сплощная кривая, всемирное время – прерывистая).

Для примера на рис. 7.21 приведены оценки флуктуаций всемирного времени UT1, полученные О. А. Титовым [49] из обработки РСДБ-наблюдений по программе CONT'94 (12-24 января 1994 г.) на сети из трех станций WET, WES и GIL. Линейная модель данных наблюдений содержала 8 внутрисуточных стохастических параметров: 3 случайные компоненты эйконала тропосферы для трех указанных станций, 2 случайные компоненты флуктуаций фазы водородных мазеров, установленных на станциях WES и GIL, по отношению к

мазеру станции WET, который принимался за опорный, и 3 глобальных параметра – случайные вариации всемирного времени UT1 и координат полюса x и y. Обработка велась методом СКК с помощью программного пакета ОССАМ. Все три станции вели синхронные круглосуточные наблюдения одних и тех же ВР, поэтому обработка данных, относящихся ко всем трем базам, велась совместно суточными сериями в режиме многобазового уравнивания.

Вместе с СКК-оценками внутрисуточных вариаций всемирного времени UTI на рис 7.21 показаны также оценки тех же вариаций, полученные из обработки того же наблюдательного материала с помощью программного пакета CALC/SOLVE в Годдардовском центре космических полетов (Д. Гипсон, частное сообщение). Из их сравнения видно, что они имеют существенно разную плотность (временное разрешение). Если СКК-оценки даны для каждого момента наблюдений, то оценки CALC/SOLVE являются усредненными приблизительно за час наблюдений, поскольку они получены методом наименыших квадратов путем фрагментации суточной серии данных. Хотя согласие обоих рядов оценок удовлетворительное, однако разрешающая способность метода наименьших квадратов всегда ограничена, так как дальнейшее уменьшение интервала фрагментации данных обязательно приведет к неустойчивости решения. Существенным недостатком СКК-оценок является их кусочная непрерывность, так как они получены из независимой обработки отдельных серий. Лучший результат можно получить из совместной обработки всех серий.



Рис. 7.21. Внутрисуточные вариации всемирного времени UT1, полученные из обработки РСДБ-наблюдений на станциях WET, WES и GIL по программе CONT'94 с помощью независимых программных пакетов CALC/SOLVE (квадраты) и OCCAM/LSC (точки).

### §4. Фильтрация и прогноз ПВЗ

Одним из наиболее ярких примеров эффективности стохастического анализа методом средней квадратической коллокации является его применение к традиционным астрометрическим задачам фильтрации и прогноза параметров вращения Земли (ПВЗ).

Имеется два основных подхода к задаче фильтрации. В первом подходе, который можно назвать частотной фильтрацией, требуется из имеющейся случайной последовательности (временного ряда) оценок ПВЗ  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_N)$  выделить такую "сглаженную" последовательность  $\mathbf{t} = (l_1, l_2, ..., l_N)$ , чтобы спектр мощности разностей (невязок)

 $r = (r_1, r_2, ..., r_N)$  вида r = l - t был ограничен слева некоторым выбранным заранее значением частоты  $\varpi$ . Это значит, что искомая последовательность t не должна содержать случайных компонент с частотами, болышими  $\varpi$ . Все такие компоненты должны быть отфильтрованы и содержаться в разностях (невязках) r. Такой подход характерен практически для всех аналитических методов сглаживания, используемых в настоящее время. Основной характеристикой таких методов является передаточная функция, которая собственно и описывает разделение спектра мощности исходной последовательности l между последовательностями t и r. Хорошо известный алгоритм сглаживания Вондрака [80], уже давно используемый в службе IERS, относится как раз к методам частотной фильтрации, поскольку свободный параметр этого алгоритма (параметр сглаживания  $\varepsilon$ ) связан с граничной частотой  $\varpi$ . Частотная характеристика метода Вондрака приводится, например, в [25] и в любом годовом отчете IERS.

При втором подходе, который будем называть стохастической фильтрацией, из данной случайной последовательности  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_N)$ выделяется случайный сигнал  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_N)$  с заданными стохастическими свойствами. Обычно эти свойства описываются автоковариационной функцией сигнала  $q_i(\gamma)$  или соответствующей  $N \times N$ -матрицей автоковариаций  $\mathbf{Q}_{tt}$ . Принципиальную разницу между двумя этими подходами удобно демонстрировать в спектральной области



Рис. 7.22. Принципы частотной и стохастической фильтрации.

(см. рис. 7.22).

Частотная фильтрация вертикальному сводится к спектра рассечению мошности последовательности l на две части, из которых левая относится к искомому сигналу t, а правая – к невязкам r. Стохастическая фильтрация как бы "ортогональна" частотной - здесь рассечение спектра мощности осуществляется в горизонтальном направлении так, что его верхняя половина относится к искомому сигналу t, а нижняя - к невязкам г. При фильтра-

ции белого шума линия рассечения спектра есть прямая, параллельная оси частот и отстоящая от нее на расстоянии, равном плотности энергии (интенсивности) этого шума. Если же фильтруется цветной шум, то линия рассечения представляет собой кривую спектральной плотности этого шума.
К сожалению, при вычислении функции  $q_l(\gamma)$  вещественного процесса l(T) теряется заключенная в нем фазовая информация, поэтому последовательность Фурье-преобразований  $l(T) \Rightarrow q_l(\gamma) \Rightarrow S_l(\omega)$  не имеет полного обратного хода. Хотя обратное преобразование  $S_l(\omega) \Rightarrow q_l(\gamma)$  существует, но дальнейший переход  $q_l(\gamma) \Rightarrow l(T)$  невозможен. По этой причине описанные выше процедуры фильтрации в частотной области носят не более чем иллюстративный характер.

Рассмотрим задачу стохастической фильтрации с точки зрения средней квадратической коллокации. Если данные наблюдений l представляют собой аддитивную смесь l = t + r + Ax сигнала t, шума r и линейного тренда Ax, то, как показано в §5-6 гл. 4, оптимальное выделение сигнала t с известной матрицей автоковариаций  $Q_{II}$  осуществляется с помощью третьей из формул (4.82):

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}). \tag{7.28}$$

Оценку шума г можно получить как разность  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - \hat{\mathbf{t}}$  или выделить ее непосредственно:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}_{\mu\nu} \mathbf{Q}_{\mu\nu}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}). \tag{7.29}$$

Параметры тренда х находятся по первой из формул (4.82).

Если ковариационная матрица Q<sub>r</sub>, имеет диагональный вид и равна Q<sub>r</sub> = σ<sup>2</sup><sub>r</sub>I, то вектор r представляет собой стационарный белый шум. В самом общем случае ковариационная Q<sub>r</sub>, может быть полной симметричной матрицей и тогда r – коррелированный цветной шум.

Продемонстрируем применение метода СКК для решения простейшей задачи – фильтрации белого шума. Для этого был выбран ряд координат полюса IERS (C02) за 1970–1975 гг. с интервалом дискретизации 5 сут, в котором случайные ошибки наблюдений были еще значительны. После удаления тренда по формуле (4.31) вычислялись несмещенные оценки ковариационных функций  $q_l(\gamma)$  для обеих координат полюса, которые показаны на рис. 7.23. В точке  $\gamma = 0$  эти функции претерпевают скачок, равный дисперсии некоррелированного белого шума  $\sigma_r^2$ , который схематично показан на рис. 7.24. Для его выделения строилось симметричное продолжение функции  $q_l(\gamma)$  в отрицательную область аргумента, а затем она аппроксимировалась полиномом четной степени в ближайшей окрестности точки  $\gamma = 0$  (за исключением самой этой точки). Подставляя матрицу  $Q_{rr} = \sigma_r^2 I$  в формулу (7.29), получаем требуемую оценку шума  $\hat{\mathbf{r}}$  и сигнала  $\hat{\mathbf{t}} = 1 - \hat{\mathbf{r}}$ .



Рис. 7.23. Автоковариационные функции х-координаты (жирная кривая) и у-координаты полюса (тонкая) по данным IERS (СО2) за 1970-1975 гг.

Рис. 7.24. Определение дисперсии белого шума по скачку автоковариционной функции в нуле (указан стрелкой).

Выделенный таким образом шум х-координаты полюса и ковариационные функции таких шумов для обеих координат показаны на рис. 7.25 и 7.26 соответственно. Быстро убывающий вид ковариационных функций свидетельствует о том, что выделенный шум действительно является слабо коррелированным и поэтому его можно называть белым. Однако этот шум не является стационарным, так как его дисперсия меняется во времени, что хорошо видно из рис. 7.25. Это явление прямо связано с изменением точности оценок координат полюса в ряде IERS (СО2).



полюса.



Перейдем теперь к задаче стохастического прогноза ПВЗ методом СКК и продемонстрируем ее решение на примере координат полюса. Будем по-прежнему считать, что имеющиеся данные наблюдений I заданы дискретно и их можно представить линейной моделью

$$l = Ax + t + r$$
,

в которой полезный сигнал t и белый шум г аддитивно смешаны с линейным трендом Ax. Оптимальный прогноз сигнала t дается формулой (4.63)

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{Q}_{ll} \mathbf{Q}_{ll}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}).$$
(7.30)

Если требуется вычислить прогноз  $\hat{\mathbf{h}}$  исходного ряда наблюдений **i**, то к прогнозу сигнала  $\hat{\mathbf{f}}$  нужно добавить еще и прогноз тренда:

$$\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{f}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}.\tag{7.31}$$

Поскольку элементы матрицы А всегда могут быть заданы аналитическими функциями времени (например, полиномами Лежандра), то прогнозирующая матрица В вычисляется без затруднений. Разности  $\hat{\bf e} = {\bf h} - {\bf \hat h}$  между новыми данными наблюдений h и их прогнозом  ${\bf \hat h}$  служат для оценки качестве прогноза.

Проще всего прогноз сигнала осуществляется в том случае, когда шум г является белым. Такой шум не коррелирует с сигналом, поэтому ковариационная матрица сигнала может быть легко найдена непосредственно из ковариационной матрицы данных:  $\mathbf{Q}_{ll} = \mathbf{Q}_{ll} - \sigma_r^2 \mathbf{I}$ . Для равномерно заданной дискретной последовательности наблюдений автоковариационная матрица  $\mathbf{Q}_{ll}$  сигнала  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_N)$  имеет размер  $N \times N$  и строится по правилу теплицевых матриц с помощью ковариационной функции сигнала  $q_l(\gamma_k) = q_k$  (k = 0, 1, 2, ..., N - 1):

$$\mathbf{Q}_{II} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_{N-1} \\ q_1 & q_0 & q_1 & \cdots & q_{N-2} \\ q_2 & q_1 & q_0 & \cdots & q_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N-1} & q_{N-2} & q_{N-3} & \cdots & q_0 \end{bmatrix}.$$
 (7.32)

Более сложную структуру имеет  $p \times N$ -матрица  $Q_{fl}$ , которая представляет собой ковариации *p*-мерного прогноза **f** с *N*-мерным сигналом **t**:

$$\mathbf{Q}_{fl} = \begin{bmatrix} 0 & q_{N-1} & q_{N-2} & q_1 \\ 0 & 0 & q_{N-1} & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
(7.33)

Эта матрица является продолжением вниз на p строк конечной  $N \times N$ -матрицы  $\mathbf{Q}_{ii}$ , поэтому больше ее половины заполнено нулями, что снижает точность прогноза. Однако этот недостаток легко исправить, если автоковариационная функция сигнала  $q_k$  допускает продолжение (экстраполяцию) за пределы интервала  $k \in [0, N-1]$ . Проще всего это сделать путем аналитической аппроксимации дискретной функции  $q_k$  непрерывной функцией вида

$$\overline{q}_{i}(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_{i}^{2}}{\cos \varphi_{i}} e^{-\alpha_{i} \gamma} \cos(\beta_{i} \gamma + \varphi_{i}).$$
(7.34)



Модель ковариационной функции (7.34) соответствует суммарному выходному сигналу  $t(T) = \sum_{i=1}^{m} t_i(T)$  для многоканальной динамической системы (см. рис. 7.27), состоящей из *m* независимых подсистем, каждая из которых возму-

Рис. 7.27. Многоканальная динамическая система ПВЗ.

подсистем, каждая из которых возмущается белым шумом  $v_i(T)$  и описывается следующим стохастическим диффе-

ренциальным уравнением 2-го порядка [47, с. 113]:

$$a_{i}\frac{d^{2}t_{i}}{dT^{2}} + b_{i}\frac{dt_{i}}{dT} + c_{i}t_{i} = v_{i}(T).$$
(7.35)

Подобные системы уже рассматривались в §1-2 настоящей главы.

Исследования алгоритма прогноза выполнялись на основе рядов ежесуточных сглаженных значений координат полюса IERS (C04) за период 1984–1995 гг. Хорошо известно, что в движении полюса преобладают два колебания: чандлеровское с периодом  $P_C \approx 433$  сут и годовое с периодом  $P_A \approx 365$  сут. По этой же причине модель АКФ вида (7.34) была выбрана двухчастотной (m = 2), а продолжительность прогнозируемого (базового) ряда P равной приблизительно инести годам ( $P = 5 \times P_C = 2165$  сут  $\approx 6 \times P_A$ ), чтобы оба колебания в этом интервале времени укладывались почти целое число раз и не возникало заметных дополнительных трендов этого ряда.

Для оценки точности прогноза необходимо набрать статистику его ошибок  $\hat{\bf e} = {\bf h} - {\bf \hat h}$ . Для этого 6-летний базовый интервал наблюдений, охватывающий в первоначальном положении период 1984–1989 гг., последовательно сдвигался на 30 сут вперед. После каждого сдвига вновь вычислялись оценки автоковариационных функций обеих координат полюса, выполнялась их аппроксимация двухчастотной моделью (7.34), эта модель вновь экстраполировались на 400 сут вперед и строился новый прогноз на этот же срок с дискретностью 5 сут. Всего выполнено 67 таких сдвигов базового ряда, поэтому для каждого упреждения прогноза p = 5, 10, ..., 400 сут было получено 67 разностей  $\hat{e}_{pj} = h_{pj} - \hat{h}_{pj}$  (j = 1, 2, ..., 67), с помощью которых затем были вычислены средние квадратические ошибки прогноза по формуле

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{66} \sum_{j=1}^{67} \hat{e}_{pj}^2} \,. \tag{7.36}$$

Попробуем теперь применить описанный выше алгоритм прогноза для несмещенной и смещенной оценок АКФ.

Несмещенная оценка автоковариационной функции (АКФ) дискретной последовательности  $x_i$  (i = 1, 2, ..., N) вычисляется по формуле (4.31):

$$\hat{q}_{k} = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_{i} x_{i+k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1).$$
(7.37)

Из этой формулы видно, что ввиду ограниченности базового ряда (в нашем случае N = 2165) количество усредняемых произведений ("квантов" ковариации)  $x_i x_{i+k}$  с ростом индекса временного сдвига kнепрерывно уменьшается, а вместе с тем уменьшается и статистическая достоверность оценок  $\hat{q}_k$ . Для устранения этого недостатка некоторые авторы рекомендуют использовать не всю эту функцию, а только ее переднюю, наиболее достоверную, часть, ограниченную некоторым выбранным заранее значением  $k_0 < N - 1$ . Однако вопрос о выборе значения  $k_0$  остается открытым.

Альтернативой несмещенной оценке АКФ вида (7.37) является так называемая смещенная оценка

$$\hat{g}_{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} x_{i} x_{i+k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1), \qquad (7.38)$$

которая связана с предыдущей соотношением

$$\hat{g}_k = \frac{N-k}{N} \hat{q}_k = \left(1 - \frac{k}{N}\right) \hat{q}_k.$$
(7.39)

Поскольку смещение оценки (7.37) равно нулю:

$$E\{\hat{q}_k\} - q_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} E\{x_i x_{i+k}\} - q_k = 0, \qquad (7.40)$$

то смещение оценки (7.38) равно

$$E\{\hat{g}_k\} - q_k = \left(1 - \frac{k}{N}\right) E\{\hat{q}_k\} - q_k = \left(1 - \frac{k}{N}\right) q_k - q_k = -\frac{k}{N} q_k.$$
(7.41)

При  $N \to \infty$  это смещение стремится к нулю и оценка (7.38) становится асимптотически несмещенной. Но при ограниченном N и при k, близком к N, величина смещения может быть весьма значительной. Сравнительный анализ дисперсий оценок (7.37) и (7.38) показывает, что "для типичных приложений средний квадрат ошибки (сумма дисперсии и квадрата смещения) будет, как правило, больше для оценки (7.37), чем для оценки (7.38), особенно в тех случаях, когда максимальное значение временного индекса k будет приближаться к числу отсчетов данных N" (см. [40, с. 186].

Важнейщим преимуществом смещенной оценки АКФ (7.38) с точки зрения теории СКК является то обстоятельство, что эта функция является положительно полуопределенной, так как образованные с ее помощью матрицы автоковариаций всегда положительно полуопределены. Однако в тех случаях, когда случайная последовательность  $x_i$  (i = 1, 2, ..., N) содержит в себе периодический сигнал, использование смещенной оценки АКФ приводит к смещению (уменьшению) периода этого сигнала и его фактора добротности (подробнее об этом см. §5 наст. гл.).

Таким образом, для одного и того же базового ряда наблюдений мы имеем возможность построить несколько существенно различных оценок АКФ, что, с одной стороны, приводит к неоднозначности решения задачи прогноза, а с другой – создает возможность выбора наилучшего из этих решений. Очевидно, что с точки зрения этой задачи оптимальной оценкой АКФ следует признать ту, которая дает наиболее точный прогноз с наибольшим упреждением.

На рис. 7.28 и 7.29 показаны вычисленные Ю. Л. Русиновым оценки точности прогноза методом СКК с использованием смещенной оценки АКФ (7.38) в сравнении с точностью прогноза, осуществляемого службой IERS, и прогноза, полученного З. М. Малкиным [71] на основе алгоритма авторегрессии – скользящего среднего (АРСС). Средняя квадратическая точность прогноза обеих координат полюса методом СКК оказалась практически постоянной для всех интервалов упреждения вплоть до 400 сут и близкой к величине ±0".002, что сравнимо с точностью самих координат полюса по данным IERS. Точность других прогнозов существенно хуже.



Рис. 7.28. СКО прогноза x-координаты полюса при использовании смещенной оценки АКФ. Рис. 7.29. СКО прогноза y-координаты полюса при использовании смещенной оценки АКФ.

Покажем теперь результаты численных экспериментов по прогнозированию координат полюса методом СКК с использованием несмещенной оценки АКФ. Поскольку точность этой оценки падает с увеличением индекса сдвига k, то суть этих экспериментов сводится к исследованию влияния этого эффекта.

Попытки применения полной двухчастотной модели (7.34) для аппроксимации несмещенных оценок АКФ закончились неудачей, так как параметры этой модели оказались неправдоподобными. В связи с этим период  $P_C = 433.3$  сут и фактор добротности  $Q_C = 121$  чандлеровского движения полюса, заимствованные из [75], были приняты как известные величины и не уточнялись в процессе аппроксимации. Таким образом, неизвестными параметрами чандлеровской компоненты АКФ для обеих координат полюса считались только дисперсия  $\sigma_C^2$  и фаза  $\varphi_C$ . Что касается годовой компоненты разложения (7.34), то для нее определялись все параметры модели АКФ:  $\sigma_A^2, \alpha_A, \beta_A, \varphi_A$ .

Для выбора оптимального значения параметра  $\gamma_0 = k_0/(N-1)$ , с помощью которого выделяется передняя, наиболее достоверная часть несмещенной оценки АКФ, вычисления прогноза были выполнены в 6 вариантах:  $\gamma_0 = 1/6$ , 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1. Первый вариант был отброшен как неудовлетворительный, а точность прогнозов при остальных значениях  $\gamma_0$  в остальных вариантах показана на рис. 7.30 и 7.31. Из этих рисунков видно, что наибольшую точность имеет 3-й вариант, поэтому значение  $\gamma_0 = 1/2$  следует признать оптимальным.



Рис. 7.30. СКО прогноза *х*-координаты полюса при несмещенной оценке АКФ.



Рис. 7.31. СКО прогноза *у*-координаты полюса при несмещенной оценке АКФ.

Таким образом, для прогноза координат полюса с помощью 6-летнего базового ряда наблюдений можно использовать или всю смещенную оценку АКФ, или половину несмещенной оценки, причем в последнем случае период и фактор добротности чандлеровского колебания полюса лучше считать известными и равными  $P_C = 433.3$ ,  $Q_C = 121$ . В обоих случаях СКО прогноза с упреждением до 400 сут приблизительно одинакова и близка к ±0".002.

## §5. Коварнационный анализ

Как видно из всего предыдущего изложения, одним из основных элементов теории ОМНК является понятие автоковариации случайной последовательности или вектора, введенное в §2 гл. 4. Однако практическое воплощение этого понятия в конкретную автоковариационную функцию (АКФ) или матрицу (АКМ) вызывает ряд затруднений, которые требуют специального рассмотрения.

Первая проблема состоит в том, чтобы обнаружить коррелированность случайной последовательности. Пусть последовательность  $x(t_i)$  (*i* = 1, 2, ..., *N*) есть результат дискретизации непрерывного случайного процесса x(t), где t – текущее время. Хотя процесс x(t) есть функция времени, но с физической точки зрения он может развиваться в другом измерении, т.е. он может зависеть не от формального аргумента I, а от какого-либо физического параметра h, который в свою очередь представляет собой непрерывную функцию времени h(1). Например, принято считать, как это мы и делали в §1 настоящей главы, что величина эйконала тропосферы в данном месте является функцией времени, однако на самом деле она зависит от температуры, давления и влажности воздуха, которые могут изменяться не пропорщионально течению времени, а испытывать суточные колебания, кратковременные аномалии и т.д. В результате случайная последовательность  $x(t_i)$  как функция формального аргумента  $t_i$  может оказаться некоррелированной и выглядеть как белый шум, в то время как соответствующая ей последовательность  $x(h_i)$  как функция физического параметра h, может быть коррелированной. Автор столкнулся с этой проблемой при анализе остаточных невязок г измерений зенитных расстояний звезд с помощью астролябии в Пулкове [17, 63]. В последовательностях  $r(t_i)$  никаких корреляций обнаружено не было, но стоило ввести еще один аргумент – азимут звезды a(t) – и образовать двумерную случайную последовательность  $r(t_i, a_i)$ , как ее коррелированность, хотя и слабая, стала проявляться достаточно четко.

После обнаружения коррелированности случайного процесса важнейшей задачей становится *оценивание* его автоковариационной функции. Пусть мы имеем некоторую совокупность (ансамбль) реализаций центрированных случайных последовательностей  $x_s(t_i)$ (s = 1, 2, ..., n). Образуем все возможные "кванты" автоковариаций  $\hat{q}_s(t_i, t_j) = x_s(t_i)x_s(t_j)$  (i, j = 1, 2, ..., N). Тогда в качестве оценки АКФ для произвольной последовательности из этого ансамбля можно принять двумерную функцию вида

$$\hat{q}_{x}(t_{i},t_{j}) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} x_{s}(t_{i}) x_{s}(t_{j}) . \qquad (7.42)$$

Если моменты наблюдений  $t_i$  являются равноотстоящими, то совокупность оценок  $\hat{q}_{ii} = \hat{q}_x(t_i, t_i)$  образует матрицу автоковариаций

$$\mathbf{Q}_{xx} = [\hat{q}_{ij}] \ (i, j = 1, 2, \dots, N). \tag{7.43}$$

Изложенный выше алгоритм оценивания АКФ и АКМ является наиболее оптимальным, так как все элементы  $\hat{q}_{ij}$  определяются здесь с одинаковой точностью.

Однако любая эмпирическая оценка АКМ вида (7.43) должна удовлетворять свойству положительной определенности. Только в этом случае ее можно использовать в алгоритмах ОМНК. Для проверки положительной определенности матрицы  $Q_{xx}$  можно воспользоваться правилом Сильвестра (см. §1 гл. 2) или вычислить собственные значения (числа) этой матрицы, которые все должны быть положительны. Но если эти проверки покажут, что матрица  $Q_{xx}$  не является положительно определенной, то возникает задача построить некоторое преобразование  $Q_{xx} \Rightarrow Q_{yy}$ , которое давало бы заведомо положительно определенную матрицу  $Q_{yy}$ , причем эта матрица должна как можно меньше отличаться от исходной матрицы  $Q_{xx}$ , чтобы не потерять содержащуюся в ней полезную информацию об исследуемом процессе x(t). Такое преобразование можно назвать "положительной фильтрацией" матрицы  $Q_{xx}$ , поскольку его смысл заключается в том, чтобы выделить из этой матрицы положительно определенную "компоненту"  $Q_{yy}$ .

Наиболее общим методом положительной фильтрации матрицы  $Q_{xx}$  является аппроксимация ее элементов  $\hat{q}_{ij}$  двумерной положительно определенной функцией  $\overline{q}_{ij}$ . Основная трудность здесь заключается в правильном выборе типа базисных функций для модели  $\overline{q}_{ij}$ , роль которых могут играть функции типа (7.34), двумерные полиномы четной степени и т.д. Другой распространенный прием состоит в преобразовании матрицы  $Q_{xx}$  в теплицеву матрицу вида

$$\mathbf{Q}_{yy} = \begin{bmatrix} \hat{q}_0 & \hat{q}_1 & \cdots & \hat{q}_{N-1} \\ \hat{q}_1 & \hat{q}_0 & \cdots & \hat{q}_{N-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{q}_{N-1} & \hat{q}_{n-2} & & \hat{q}_0 \end{bmatrix}.$$
 (7.44)

Это преобразование выполняется наиболее просто, когда случайные последовательности  $x_s(t_i)$  заданы в равноотстоящие моменты времени. В этом случае элементы  $\hat{q}_k$  (k = 0, 1, ..., N-1) матрицы  $\mathbf{Q}_{yy}$  образуются усреднением диагональных элементов матрицы  $\mathbf{Q}_{xx}$ :

$$\hat{q}_{k} = \frac{1}{N-k} \sum_{l=1}^{N-k} \hat{q}_{l,l+k} = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} x_{s}(t_{i}) x_{s}(t_{i+k}).$$
(7.45)

Если в этом выражении положить n = 1, то мы получим несмещенную оценку АКФ вида (7.37), вычисленную по единственной реализации процесса. Отсюда следует, что преобразование (7.45) произвольной матрицы Q<sub>xx</sub> в теплицеву матрицу Q<sub>yy</sub> эквивалентно преобразованию исходного процесса x(t) в стационарный эргодический процесс y(t). Вопрос о том, насколько оптимально такое преобразование, т.е. насколько велики возникающие при этом потери информации, остается открытым. Самые общие соображения подсказывают, что эти потери могут быть значительными. Так, из сравнения формул (7.42) и (7.45) видно, что в матрице Q<sub>xx</sub> содержится более подробная информация о ковариациях процесса x(t), которая при переходе к матрице Q<sub>ии</sub> усредняется и концентрируется в области малых сдвигов k, поскольку с ростом k постепенно уменьшается количество усредняемых "квантов" ковариаций. Иначе говоря, если достоверность всех элементов матрицы Q<sub>xx</sub> одинакова, то достоверность элементов матрицы Q<sub>уу</sub> падает по мере удаления от главной диагонали. Кроме того, матрица  $\mathbf{Q}_{xx}$  допускает некоторую нестационарность процесса x(t), поскольку ее диагональные элементы  $\hat{q}_{ii}$  необязательно одинаковы, т.е. дисперсия процесса может быть переменной.

Ухудление точности элементов матрицы  $Q_{yy}$  с увеличением их расстояния от главной диагонали можно частично скомпенсировать, введя еще одно преобразование ковариаций  $Q_{yy} \Rightarrow Q_{zz}$ , согласно которому элементы матрицы  $Q_{zz}$  определяются формулой

$$\hat{g}_k = \frac{N-k}{N} \hat{q}_k \,. \tag{7.46}$$

Это выражение представляет собой смещенную оценку АКФ (7.38).

Смещенные оценки АКФ представляют собой затухающие функции, и поэтому они всегда положительно определены. Однако если случайный процесс x(t) содержит синусоидальные колебания, что очень характерно для рядов ПВЗ, то эти колебания будут представлены в смещенных оценках АКФ в искаженном виде – с уменьшенным периодом и с увеличенной скоростью затухания. В спектральной области это приводит к сдвигу соответствующих пиков в сторону более высоких частот и к их расширению. Рассмотрим этот эффект подробнее на примере чандлеровского колебания в движении полюсов. Пусть мы имеем на интервале времени  $t \in [0,1]$  некоторый стационарный эргодический процесс x(t), представляющий собой затухающее гармоническое колебание с периодом  $P = 2\pi/\omega$ . Тогда истинная АКФ этого процесса может быть представлена в виде

$$q(\gamma) = \sigma^2 e^{-\alpha \gamma} \cos \omega \gamma, \quad \gamma \in [0, 1].$$
(7.47)

Поскольку интервал наблюдений ограничен, то выборочная несмещенная оценка  $\hat{q}(\gamma)$ , вычисленная по формуле (7.37), не будет совпадать с истинной функцией (7.47), поэтому

$$\hat{q}(\gamma) = q(\gamma) + \mu(\gamma), \quad \gamma \in [0,1]. \tag{7.48}$$

Как показано выше, ошибка оценивания  $\mu(\gamma)$  возрастает с увеличением сдвига  $\gamma$ . Чтобы уменьшить эту ошибку, будем использовать смещенную оценку АКФ типа (7.38), которую можно представить в непрерывном виде

$$\hat{g}(\gamma) = (1 - \gamma)\hat{q}(\gamma) = (1 - \gamma)q(\gamma) + \nu(\gamma), \quad \gamma \in [0, 1].$$
(7.49)

Пренебрегая здесь ошибкой  $v(\gamma) = (1 - \gamma)\mu(\gamma)$ , находим

$$\hat{g}(\gamma) \approx (1-\gamma)q(\gamma) = \sigma^2(1-\gamma)e^{-\alpha\gamma}\cos\omega\gamma, \quad \gamma \in [0,1].$$
(7.50)

Выясним теперь, сохраняется ли период гармонического колебания в полученных оценках АКФ? Будем определять этот период как расстояние между последовательными максимумами АКФ. Для истинной оценки АКФ (7.47) условие экстремума имеет вид

$$\frac{dq}{d\gamma} = -\sigma^2 \alpha e^{-\alpha \gamma} \cos \omega \gamma - \sigma^2 e^{-\alpha \gamma} \omega \sin \omega \gamma = 0$$

или

$$\gamma_n = \frac{\pi n}{\omega} - \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\pi n}{\omega} - f(\alpha, \omega), \qquad (7.51)$$

где n = 0, 1, 2, ... – номер экстремума. Обозначая период колебания  $P_n$  как расстояние между последовательными одноименными экстремумами (максимумами или минимумами), имеем с помощью (7.51):

$$P_n = \gamma_{n+2} - \gamma_n = \frac{2\pi}{\omega} = P = \text{const}, \qquad (7.52)$$

т.е. период осцилляций АКФ (7.47) постоянен и равен истинному периоду гармонического колебания исходного случайного процесса.

Для смещенной оценки АКФ (7.50) условие экстремума имеет вид

$$\frac{d\hat{g}}{d\gamma} = -\cos\omega\gamma - \alpha(1-\gamma)\cos\omega\gamma - (1-\gamma)\omega\sin\omega\gamma = 0$$

ИЛИ

$$\gamma_n = \frac{\pi n}{\omega} - \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{1 + \alpha (1 - \gamma_n)}{\omega (1 - \gamma_n)} = \frac{\pi n}{\omega} - f_n(\alpha, \omega).$$
(7.53)

Детальный анализ этого нелинейного уравнения показывает, что  $f_n(\alpha, \omega) > 0$  и  $f_{n+1}(\alpha, \omega) > f_n(\alpha, \omega)$ , поэтому его корни  $\gamma_n$  (n = 0, 1, 2, ...) располагаются на оси  $\gamma$  неравномерно, все более сдвигаясь к началу интервала [0,1]. В связи с этим период  $P_n$  всегда меньше истинного периода осцилляций исходного процесса:

$$P_n = \gamma_{n+2} - \gamma_n = P - [f_{n+2}(\alpha, \omega) - f_n(\alpha, \omega)] < P,$$

а разность между последовательными периодами всегда отрицательна:

$$P_{n+2}-P_n=-[f_{n+4}(\alpha,\omega)+f_n(\alpha,\omega)]<0.$$

Рассмотрим для примера ряд наблюдений координат полюса продолжительностью T = 2165 сут  $\approx 6$  лет, в котором период Чандлера укладывается 5 раз. Характеристики этого затухающего колебания (6.256) и (6.257), отнесенные к величине интервала T, будут равны

$$P = \frac{1}{5}, \ \omega = \frac{2\pi}{P} = 10\pi, \ \alpha = \frac{\omega}{2Q} = \frac{10\pi}{2 \cdot 121} \approx 0.13.$$

Теперь с помощью формулы (7.53) можно вычислить сдвиг экстремумов этого колебания в смещенной оценке АКФ (7.50):

$$f_n(\alpha, \omega) = \frac{n}{10} - \gamma_n = \frac{1}{10\pi} \arctan \frac{1 + 0.13(1 - n/10)}{10\pi(1 - n/10)}.$$

Результаты этих вычислений представлены в табл. 7.5.

Учитывая, что смещенная оценка АКФ считается обычно равноточной для всех у, показанный в табл. 7.5 сдвиг ее экстремумов, особенно значительный для последних колебаний, неизбежно должен приводить к заниженным значениям среднего периода гармонического колебания, который определяется путем модельной аппроксимации

этой функции или путем ее Фурье-преобразования в спектральную плотность. Очевидно также, что смещенная оценка АКФ дает совершенно искаженное значение для коэффициента затухания α или связанного с ним фактора добротности Q, так как она даже незатухающее колебание превращает в затухающее. Соответствующий ей коэффициет а всегда больше, а фактор Q соответственно меньше истинного, что автоматически приводит к расширению спектрального пика. Оба эти явления и были обнаружены при прогнозировании координат полюса методом СКК (см. §4 наст. гл.).

Таблица 7.5. Сдвиг экстремумов в смещенной оценке АКФ для вариаций координат полюса с периодом Чандлера на 6-летнем интервале наблюдений (в сутках)

| n                    | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8    | 9    | 10  |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|
| $f_n(\alpha,\omega)$ | 2.5 | 2.7 | 3.0 | 3.4 | 3.9 | 4.7 | 5.8 | 7.6 | 11.2 | 21.5 | 108 |

На рис. 7.32 и 7.33 показаны оценки периода и фактора добротности чандлеровского движения полюса, полученные в процессе испытаний алгоритма прогноза координат полюса методом СКК с помощью смещенной оценки АКФ (см. §4 наст. гл.). Базовый ряд данных наблюдений IERS (C04) продолжительностью 6 лет смещался 67 раз из начального положения 1984-1989 гг. в конечное положение 1990-1995 гг. с шагом 30 сут.





ского движения полюса (координата x – жирная кривая, y – тонкая).

Рис. 7.32. Период Р<sub>С</sub> чандлеров- Рис. 7.33. Фактор добротности Q<sub>C</sub> чандлеровского движения полюса (координата х – жирная кривая, у – тонкая).

Хотя оценки периода Чандлера оказались весьма устойчивыми, как и должно быть с геофизической точки зрения, но их среднее зназначение (~ 426.3 сут) смещено на 7 сут относительно общепринятой величины 433.3 сут. Оценки фактора добротности  $Q_C$  оказались нестабильными и далекими от общепринятого значения  $Q_C \approx 121$ .

Таким образом, на основании выплеизложенного следует констатировать, что смещенная оценка АКФ дает искаженное представление об исходном случайном процессе, особенно если этот процесс содержит гармоническое колебание с непрерывным или дискретным спектром. А поскольку ряды ПВЗ содержат именно такие сигналы, то мы приходим к неутешительному выводу о непригодности этой оценки для анализа ПВЗ.

Но что нас заставляет пользоваться смещенными оценками АКФ? Основная причина состоит в том, что, как утверждается в литературе (см., например, [40, с. 186]), смещенная оценка АКФ гарантирует положительную определенность этой функции и соответствующей ей матрицы. Хотя строгого доказательства этого утверждения нам не встречалось, мы не будем его оспаривать, а зададимся вопросом: нет ли какого-либо другого, более корректного способа выделения из выборочной несмещенной оценки АКФ  $\hat{q}_x(\gamma)$  такой положительно определенной части  $\bar{q}_x(\gamma)$ , которая бы лучше соответствовала исходному случайному процессу x(t), чем смещенная оценка  $\hat{g}_x(\gamma)$ ? На наш



Рис. 7.34. Выделение достоверной части несмещенной оценки АКФ.

взгляд, имеется три способа решения этой задачи.

Первый способ состоит в том, что из выборочной несмещенной оценки АКФ  $\hat{q}_{r}(\gamma)$ интервале у є [0,1] выдена ляется ее наиболее точный передний отрезок, определенный на более коротком "интервале достоверности" γ ∈[0, γ₀], который ограничен выбранным параметром  $\gamma_0 < 1$ . Эта часть АКФ затем ап-

проксимируется положительно

определенной моделью  $\overline{q}_x(\gamma)$ , допускающей экстраполяцию на всем интервале [0,1] и даже за его пределами. Сказанное выше иллюстрируется на рис. 7.34, где специально показано типичное явление "раскачки" несмещенных оценок АКФ  $\hat{q}_x(\gamma)$  на конце интервала, которое объясняется падением их точности. Применение этого способа в задаче прогноза (§4 наст. гл.) дало удовлетворительные результаты.

Второй способ непосредственно вытекает из утверждения, что автоковариационная функция  $q_x(\gamma)$  неотрицательно определена, если

соответствующая ей спектральная плотность  $S_x(\omega)$  неотрицательна для всех значений циклической частоты  $\omega$ . Из теории спектрального анализа случайных процессов известно, что спектральная плотность  $S_x(\omega)$  вещественного стационарного процесса x(t) симметрична относительно нулевой частоты и неотрицательна при любых  $\omega$ . Отсюда следует, что обратное Фурье-преобразование неотрицательной спектральной плотности  $S_x(\omega)$  должно порождать неотрицательной спектральной плотности  $S_x(\omega)$  должно порождать неотрицательно определенную ковариационную функцию. На этом основании можно предложить следующий алгоритм "положительной фильтрации" выборочной оценки ковариационной функции  $\hat{q}_x(\gamma)$ :

(а) путем локальной аппроксимации АКФ  $\hat{q}_x(\gamma)$  в окрестностях точки  $\gamma = 0$  (см. §4 наст. гл.) определяем скачок этой функции в нуле  $\Delta \hat{q}_x(0)$ , с помощью которого оцениваем спектральную плотность белого шума  $c = \Delta \hat{q}_x(0)/2\pi$  (см. [47, с. 97–98]);

(б) с помощью косинусного преобразования Фурье

$$\hat{S}_{x}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{q}_{x}(\gamma) \cos \omega \gamma \, d\gamma$$
(7.54)

вычисляем оценку функции спектральной плотности;

(в) осуществляем "положительную" фильтрацию функции  $\hat{S}_x(\omega)$ ; для этого все ее значения  $\hat{S}_x(\omega) < c$  полагаем равными  $\hat{S}_x(\omega) = c$ ; можно осуществлять и другие преобразования этой функции, например сглаживание и т.п.; в результате получаем положительную для всех частот функцию спектральной плотности  $\overline{S}_x(\omega)$ ;

(г) с помощью обратного преобразования Фурье

$$\overline{q}_{x}(\gamma) = 2\int_{0}^{\infty} \overline{S}_{x}(\omega) \cos\omega\gamma \ d\omega$$
(7.55)

находим заведомо положительно определенную оценку АКФ, что и требуется.

Третий способ по сути дела представляет собой модернизацию первого. Его цель состоит в том, чтобы выделить из всей совокупности несмещенных оценок АКФ  $\hat{q}_k$  (k = 0, 1, 2, ..., N - 1) положительно определенную компоненту  $\overline{q}_k$  (k = 0, 1, 2, ..., N - 1), не прибегая к делению оценок  $\hat{q}_k$  на достоверную и недостоверную части. Очевидно, что это можно сделать, если включить в алгоритм аппроксимации АКФ  $\hat{q}_k$  моделью  $\overline{q}_k$  некоторую весовую функцию, зависящую от точности

оценок  $\hat{q}_k$ . Будем называть этот способ взвешенной аппроксимацией несмещенной оценки АКФ.

В алгоритме нелинейного градиентного метода наименыших квадратов [77, с. 540–548] оценки параметров  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ...)$  модели  $\overline{q}_k(\mathbf{p})$  находятся путем минимизации целевой функции:

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{k=0}^{N-\mathsf{I}} \left[ \frac{\hat{q}_k - \overline{q}_k(\mathbf{p})}{\hat{\sigma}_q(k)} \right]^2, \qquad (7.56)$$

где  $\hat{\sigma}_q^2(k)$  – оценка дисперсии выборочных значений АКФ  $\hat{q}_k$ .

Если случайный процесс x(t) является стационарным и нормальным (гауссовским), то, как показали Дженкинс и Ваттс [26, с. 215–218], дисперсию непрерывной функции автоковариаций  $\hat{q}(\gamma)$  можно выразить следующим образом:

$$\sigma_{q}^{2}(\gamma) = \frac{1}{(T-|\gamma|)^{2}} \int_{-(T-\gamma)}^{T-\gamma} (T-\gamma-|r|) [q^{2}(r) + q(r+\gamma)q(r-\gamma)] dr, \qquad (7.57)$$

где T – длина реализации процесса x(t),  $|\gamma| < T$ , а функция q, входящая в подынтегральное выражение, есть истинная АКФ. Для дискретного смещения  $\gamma_k$  (k = 0, 1, 2, ...) из формулы (7.57) получим соот-



Рис. 7.35. Функция дисперсии несмещенной оценки АКФ координат полюса, полученная по формуле (7.57) (координата *x* – жирная кривая, *y* – тонкая).

ветствующие дискретные значения дисперсий  $\sigma_q^2(k) = \sigma_q^2(\gamma_k)$ .

Поскольку истинная АКФ  $q(\gamma)$  неизвестна, то вместо нее в формулу (7.57) можно подставить положительно определенную модель  $\overline{q}(\gamma, \hat{\mathbf{p}}_0)$  с априорными значениями параметров Получив D<sub>0</sub>. таким образом начальную оценку дисперсии  $\hat{\sigma}_{a}^{2}(\gamma, \hat{\mathbf{p}}_{0})$ , используем се в целевой функции (7.56) и найдем уточненные значения параметров **p**<sub>1</sub>. С их помощью находим уточненную модель  $\overline{q}(\gamma, \hat{\mathbf{p}}_1)$ , которая даст новую оценку  $\hat{\sigma}_{a}^{2}(\gamma, \hat{\mathbf{p}}_{1})$  и т.д. Этот процесс аппроксимации АКФ можно закончить, когда новое приближение параметров не будет существенно отличаться от предыдущего, тогда можно принять  $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}_{n+1} \approx \hat{\mathbf{p}}_n$ . Применим этот способ для решения задачи прогноза ПВЗ методом СКК (постановку задачи, описание исходных данных и алгоритма см. в §4 наст. гл.). На рис. 7.35 для примера показана полученная по формуле (7.57) функция дисперсии несмещенной оценки АКФ, соответствующая начальному положению базового ряда наблюдений 1984-1989 гг. Эта функция вычислялась путем описанных выше итераций для всех смещений базового ряда.

На рис. 7.36 и 7.37 показаны полученные этим методом оценки периода и фактора добротности чандлеровского колебания полюса. Сравнивая их с аналогичными результатами, полученными с помощью смещенной АКФ (см. рис. 7.32, 7.33), видим, что новые оценки этих параметров существенно ближе к общепринятым значениям. Таким образом, использование взвешенной аппроксимации несмещенной АКФ дает более достоверные оценки ПВЗ. Однако высокочастотные вариации периода Чандлера, ясно видные на рис. 7.36, малоправдоподобны, поэтому исследование проблемы оптимальной аппроксимации АКФ необходимо продолжить.





Рис. 7.36. Период движения по- Рис. 7.37. Фактор добротности кривая, у – тонкая).

люса P<sub>C</sub> (координата x – жирная Q<sub>C</sub> движения полюса (координата х - жирная кривая, у - тонкая).

На рис. 7.38, 7.39 представлены оценки точности лучших прогнозов координат полюса методом СКК. Вариант (1) соответствует только что описанному способу взвешенной аппроксимации несмещенной оценки АКФ, вариант (2) – невзвешенной аппроксимации половины несмещенной оценки АКФ (см. вариант (3) на рис. 7.30, 7.31) и вариант (3) – невзвешенной аппроксимации смещенной оценки АКФ (см. рис. 7.28, 7.29).



зов х-координаты полюса.

Рис. 7.38. СКО лучших прогно- Рис. 7.39. СКО лучших прогнозов у-координаты полюса.

С точки зрения задачи прогноза координат полюса все три варианта приемлемы, так как дают приблизительно одинаковую точность. Но поскольку вариант (3), соответствующий смещенной оценке АКФ, является наиболее простым в вычислительном отношении, то его и можно рекомендовать к использованию в этой задаче. Однако с точки зрения оценивания параметров чандлеровского и годового движения полюса с помощью модели АКФ этот вариант следует признать наихудшим, так как он дает наиболее смещенные оценки этих параметров. В этой задаче наилучшим оказывается вариант (1), использующий взвешенную аппроксимацию несмещенной оценки АКФ.

## §6. Усреднение каталогов

Рассмотрим кратко задачу создания сводных каталогов методом обобщенного среднего. Пусть мы имеем и независимых каталогов координат и собственных движений звезд  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Будем считать, что все эти каталоги базируются на одной и той же системе астрономических постоянных, имеют общие эпоху и равноденствие и содержат одинаковое число общих звезд N. Будем также считать, что каждый из каталогов С, представляет собой результат улучшения с помощью новых наблюдений некоторой общей опорной системы Fn. Требуется путем обобщенного усреднения каталогов  $C_1, C_2, \ldots, C_n$  создать новую опорную систему F. Легко видеть, что эта задача подобна задаче составления фундаментальных каталогов серии FK3, FK4 и FK5 путем улучшения предыдущего каталога с помощью новых абсолютных и относительных наблюдений.

Рассмотрим *N*-мерные векторы оценок  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n$  одной и той же координаты или собственного движения, приведенные в указанных каталогах. Представим эти оценки в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_{k} = \mathbf{x}_{0} + \mathbf{f}_{k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где  $x_0$  – вектор координат из каталога  $F_0$ ,  $f_k$  – оценка поправки к нему. Вычислим теперь все возможные разности

$$\mathbf{r}_{ks} = (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_s) = \mathbf{f}_k - \mathbf{f}_s \quad (k, s = 1, 2, ..., n)$$

и их автоковариации

$$\operatorname{cov}(\mathbf{r}_{ks}, \mathbf{r}_{ks}) = \operatorname{cov}(\mathbf{f}_{k}, \mathbf{f}_{k}) - 2\operatorname{cov}(\mathbf{f}_{k}, \mathbf{f}_{s}) + \operatorname{cov}(\mathbf{f}_{s}, \mathbf{f}_{s}).$$
(7.58)

Стоящие в левой части этих равенств автоковариации разностей г<sub>ks</sub> легко вычислить по формуле (5.140) в виде двумерных функций (см. §5 гл. 5). Для примера на рис. 7.40 и 7.41 показаны полученные Э. В. Волковым несглаженные автоковариационные функции разностей вида  $\Delta \alpha \cos \delta_{FK5-FK4}$  и  $\Delta \delta_{FK5-FK4}$ . Для получения изотропной компоненты этих функций, соответствующей формуле (5.141), их необходимо усреднить по позиционному углу (азимуту  $\varphi$ ).



Рис. 7.40. Двумерная ковариационная функция разностей Δα cosδ<sub>FK5-FK4</sub>.



Рис. 7.41. Двумерная ковариационная функция разностей ∆б<sub>FK5-FK4</sub>.

Если бы каталоги  $C_k$  составлялись параметрическим способом наименьших квадратов, то для каждого из них мы имели бы возможность вычислить матрицу  $D_{kk} = cov(f_k, f_k)$  апостериорных автокова-

риаций ошибок f<sub>k</sub> системы F<sub>0</sub>. Тогда, используя формулу (7.58), можно найти все взаимные ковариации:

$$\mathbf{D}_{ks} = \frac{1}{2} [\mathbf{D}_{kk} + \mathbf{D}_{ss} - \operatorname{cov}(\mathbf{r}_{ks}, \mathbf{r}_{ks})] \quad (k, s = 1, 2, \dots, n).$$

Теперь, зная все матрицы ковариаций **D**<sub>ks</sub>, по формуле обобщенного среднего (3.105) находим поправки к системе опорного каталога

$$\hat{\mathbf{f}} = \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \breve{\mathbf{D}}_{ks}\right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \breve{\mathbf{D}}_{ks} \mathbf{f}_{k}\right],\tag{7.59}$$

где  $\breve{\mathbf{D}}_{ks}$  – блоки обратной матрицы  $\breve{\mathbf{D}} = [\breve{\mathbf{D}}_{ks}] = [\mathbf{D}_{ks}]^{-1}$ . Матрица  $\mathbf{D} = \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \breve{\mathbf{D}}_{ks}\right]^{-1}$ , входящая в формулу (7.59), определяет апостериор-

ные автоковариации усредненного вектора поправок f.

К сожалению, параметрический метод наименьших квадратов почти не используется в фундаментальной астрометрии, и поэтому матрицы  $D_{kk}$  не вычисляются. Как правило, в современных каталогах принято публиковать только индивидуальные оценки  $\sigma_{k,i}$ , представляющие собой СКО координат и собственных движений звезд в случайном отношении. В этих условиях ничего не остается, как принять  $D_{kk} \approx \text{diag}(\sigma_{k,i}^2)$  (i = 1, 2, ..., N) и считать, что ошибки координат и собственных движений всех звезд внутри каждого каталога являются некоррелированными.

## §7. Усреднение отсчетов

Одной из важнейших практических задач астрометрии является задача усреднения отсчетов измерительной системы. Она особенно актуальна для наземной астрометрии, когда наблюдения космических объектов ведутся сквозь турбулентную атмосферу. При этом происходит как бы трехмерное искажение фазового фронта сигнала – его деформация и задержка. Первый эффект вызывает неустойчивую двумерную рефракцию, создающую аномальные смещения, дрожания и мерцания изображений, которые влияют на точность оптических позиционных наблюдений, а второй – задержку сигнала на длину эйконала, особенно значительную в радиодиапозоне длин волн и ограничивающую точность РСДБ-наблюдений. Внутрисуточные флуктуации эйконала тропосферы уже рассмотрены нами в §1 настоящей главы, поэтому сейчас сосредоточимся на анализе атмосферных дрожаний избражений звезд в поле зрения оптического инструмента. Для упрощения рассуждений будем считать, что мы имеем инструмент типа пассажного, который установлен в меридиане места, неподвижен относительно тела Земли и снабжен визирной решеткой с фотоэлектрическим приемником. Процесс наблюдения заключается в регистрации "контактов" – дискретной последовательности моментов  $t_i$  (i = 1, 2, ..., N) прохождения звезды через цели визирной решетки, жестко связанной с телом инструмента. Задача состоит в том, чтобы оценить наиболее вероятный момент tпрохождения звезды через визирную линию инструмента, которая соединяет вторую гауссовскую точку объектива с центром средней щели визирной решетки.

Традиционное решение этой задачи основано на том, что дрожания изображений предполагаются некоррелированными, поэтому зарегистрированные моменты *i*<sub>i</sub> просто усредняются:

$$\hat{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \,. \tag{7.60}$$

Оценим ошибку величины  $\hat{i}$ , возникающую вследствие того, что неустойчивое изображение звезды создает случайные вариации усредняемых моментов  $t_i$ . Пусть угловое смещение звезды вследствие атмосферных дрожаний в момент контакта  $t_i$  равно  $s_i$ . Будем считать эту величину положительной вдоль движения звезды и отрицательной в обратном направлении. Очевидно, что такое смещение вызовет ошибку контакта, равную  $\theta_i \approx -s_i/\nu$ , где  $\nu = 15''\cos\delta/cek$  – теоретическая скорость движения звезды. Отсюда следует, что если средний момент прохождения звезды вычислять по формуле (7.60), то вследствие дрожаний он будет смещен на величину

$$\hat{t} - t = \hat{\tau} = -\frac{1}{\nu} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s_i \right) = -\frac{\hat{s}}{\nu}.$$
(7.61)

Для некоррелированных дрожаний дисперсия оценки (7.60) будет равна

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\sigma_s^2}{v^2 N}.$$
(7.62)

Теоретическую оценку дисперсии дрожаний можно представить в форме [20, 30]

$$\sigma_s^2 = \sigma_0^2(\sec z) D^{-1/3} I(f_{\min}, f_{\max}), \qquad (7.63)$$

где  $\sigma_0^2$  – дисперсия дрожаний в зените (свободный параметр, зависящий от условий местного астроклимата), z – зенитное расстояние звезды, D – диаметр объектива (в см),

$$I(f_{\min}, f_{\max}) = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} U(f) df$$
(7.64)

– безразмерная функция, выражающаяся через нормированную на среднюю дисперсию  $\sigma_0^2$  спектральную плотность дрожаний U(f), которая может быть аппроксимирована следующим выражением [67]:

$$U(f) = \frac{0.08}{\sigma_0^2 (1+2f)\sqrt{f}}, \quad 10^{-5} \le f \le 10 \ \Gamma \mu.$$
(7.65)

Принимая  $f_{min} = l/T$ , где T – полное время прохождения одной звезды,  $f_{max} = 10$  Гц – наибольшая из зарегистрированных частот спектра дрожаний, получаем [20, 67]

$$I(f_{\min}, f_{\max}) = I(T) = \int_{1/T}^{10} U(f) df = \left(\frac{0^{\prime\prime}.33}{\sigma_0}\right)^2 \left(1.40 - 1.04 \arctan \sqrt{2/T}\right).$$
(7.66)

Формулы (7.60)–(7.62) справедливы только в предположении, что дрожания s<sub>i</sub> не коррелированы. Однако, имея оценку спектральной плотности (7.65), можно вычислить соответствующую корреляционную функцию дрожаний s<sub>i</sub>:

$$c_{s}(\gamma,T) = \int_{1/T}^{10} U(f) \cos(2\pi f\gamma) df / \int_{1/T}^{10} U(f) df =$$
  
=  $\int_{1/T}^{10} \frac{\cos(2\pi f\gamma) df}{\sqrt{f(1+2f)}} / \int_{1/T}^{10} \frac{df}{\sqrt{f(1+2f)}},$  (7.67)

а затем и функцию ковариаций  $q_s(\gamma, T) = \sigma_s^2 c_s(\gamma, T)$ .

Корреляционные функции  $c_s(\gamma, T)$ , вычисленные по формуле (7.67), показаны на рис. 7.42. Они получены в 4 вариантах для разных значений T. Исходя из того, что наблюдение экваториальной звезды

на пассажном инструменте длится около 1 мин, продолжительность наблюдений звезды со склонением б рассчитывалась по формуле  $T = 60 \sec \delta \operatorname{cek}$ . Таким образом, 1-й вариант соответствует  $\delta = 0^\circ$ , 2-й –  $\delta = 30^{\circ}$ , 3-й –  $\delta = 60^{\circ}$  и 4-й –  $\delta = 89^{\circ}$ . На рис. 7.43 показаны передние отрезки тех же функций. Здесь хорошо видно, что на более длительных интервалах времени процесс дрожаний сильнее коррелирован, чем на коротких, что согласуется с общими физическими соображениями. С этим мы уже сталкивались при обсуждении тропосферных флуктуаций эйконала (см. §1 наст. гл.).



ции дрожаний с. (у, Т).



Рис. 7.43 показывает также, что при любом разумном времени наблюдений Т корреляции дрожаний затухают при у ≥10 сек. Иначе говоря, если интервал между соседними моментами наблюдений *t*; больше 10 сек, то соответствующие смещения изображения звезды s<sub>i</sub> будут некоррелированными и для оценки среднего момента прохождения î можно пользоваться арифметическим средним (7.60), а для оценки его среднего смещения и дисперсии – формулами (7.61)-(7.62). Если же наблюдения ведутся чаще, т.е.  $t_{i+1} - t_i < 10$  сек, то необходимо прибегать к обобщенному усреднению отсчетов (см. §7 гл. 3). Для этого с помощью функции  $q_s(\gamma, T)$  построим теплицеву матрицу ковариаций  $\mathbf{Q} = [q_{ii}]$  размером  $N \times N$ , где  $q_{ij} = q_s(\gamma_{ij}, T)$ ,  $\gamma_{ij} = t_j - t_i$ , а затем вычислим обратную матрицу  $\mathbf{Q}^{-1} = \breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_{ii}]$ . Тогда величину

$$\bar{s} = \left[\sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{q}_{lj}\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{q}_{ij} s_i\right]$$
(7.68)

можно назвать обобщенным средним смещением.

Однако индивидуальные смещения  $s_i$  нам неизвестны и мы не можем вычислить оценку  $\bar{s}$ . Вместо  $s_i$  мы можем вычислить "разброс контактов", т.е. разности  $\theta_i = t_i - t_i^*$ , где  $t_i$  – наблюденные моменты контактов, а  $t_i^* = t_i^* + \frac{\Delta}{\nu}(i-1)$  – их предвычисленные значения, зависящие от известного расстояния между щелями решетки  $\Delta$ , которое будем считать одинаковым для всех i (i=1,2,...,N). Учитывая, что  $s_i = -\nu\theta_i = \nu(t_i^* - t_i)$ , получаем по (7.68)

$$\overline{s} = -\nu \left[ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{q}_{ij} \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{q}_{ij} \theta_i \right] = -\nu \overline{\theta} =$$
$$= -\nu \left[ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{q}_{ij} \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{q}_{ij} (t_i - t_i^*) \right] = -\nu (\bar{t} - \bar{t}^*).$$
(7.69)

Здесь

$$\bar{t}^{*} = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\bar{q}_{ij}\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\bar{q}_{ij}t_{i}^{*}\right] = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\bar{q}_{ij}\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\bar{q}_{ij}\left(t_{i}^{*} + \frac{\Delta}{\nu}(i-1)\right)\right] = t_{i}^{*} - \frac{\Delta}{\nu} + \frac{\Delta}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\bar{q}_{ij}\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\bar{q}_{ij}i\right] = t_{i}^{*} - \frac{\Delta}{\nu} + \frac{\Delta}{\nu}\bar{t}.$$
(7.70)

Введем вместо *i* новый индекс  $k = i - \frac{N+1}{2}$ , означающий расстояние щели от середины решетки. Тогда формулу (7.70) можно записать в виде

$$\bar{t}^{*} = t_{1}^{*} + \frac{\Delta}{\nu} \frac{N-1}{2} + \frac{\Delta}{\nu} \bar{k} .$$
 (7.71)

Заметим, что

$$\hat{t}^{*} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_{i}^{*} = t_{1}^{*} + \frac{\Delta}{\nu N} \sum_{i=1}^{N} (i-1) = t_{1}^{*} + \frac{\Delta}{\nu} \frac{N-1}{2}, \qquad (7.72)$$

поэтому формула (7.71) принимает вид  $\bar{t}^* = \hat{t}^* + \frac{\Delta}{\nu} \bar{k}$ . Используя это выражение, находим из (7.69):  $\bar{t} = \hat{t}^* + \bar{\Theta} + \frac{\Delta}{\nu} \bar{k}$ . Но, согласно (7.61), имеем  $\hat{t} = \hat{t}^* - \bar{s}/\nu = \hat{t}^* + \hat{\Theta}$ , поэтому

$$\bar{\iota} = \hat{\iota} + (\bar{\Theta} - \hat{\Theta}) + \frac{\Delta}{\nu} \bar{k}.$$
(7.73)

Введем понятие "редуцированных" на середину решетки моментов контактов

$$t'_i = t_i - \frac{\Delta}{v} k \quad (k = i - \frac{N+1}{2}, i = 1, 2, ..., N).$$
 (7.74)

Тогда  $\bar{\iota}' = \bar{\iota} - \frac{\Delta}{v} \bar{k}$  и формула (7.73) примет вид

$$\bar{t}' = \hat{t} + (\bar{\theta} - \hat{\theta}). \tag{7.75}$$

Таким образом, для вычисления момента прохождения звезды через визирную линию инструмента при условии коррелированности дрожаний изображений звезд рекомендуется обобщенная средняя оценка

$$\bar{t}' = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{q}_{ij}\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \bar{q}_{ij}t'_{i}\right],$$
(7.76)

где редуцированные моменты контактов *t*<sup>*i*</sup> вычисляются по формуле (7.78). Согласно (7.75), эта величина будет смещена относительно обыкновенной средней оценки  $\hat{t}$ , определяемой формулой (7.60), на величину

$$\bar{t}' - \hat{t} = (\bar{\Theta} - \hat{\Theta}) = \frac{1}{\nu} (\hat{s} - \bar{s}).$$
(7.77)

Дисперсия оценки (7.76) определяется формулой

$$\overline{\sigma}_{i}^{2} = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \breve{q}_{ij}\right]^{-1}.$$
(7.78)

Насколько оценка (7.76) эффективнее оценки (7.60), можно судить только по внешней сходимости средних моментов  $\tilde{t}'$  и  $\hat{t}$ . Такую информацию можно получить из совместной обработки наблюдений нескольких звезд, например с целью определения поправки часов. Более эффективная оценка средних моментов даст меньший разброс невязок и более точную поправку часов.

# ЛИТЕРАТУРА

- 1. Азизов А. М., Курицын А. Г., Никитенко В. Г. Основы прикладной математики. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Химия, 1994.
- 2. Аксенов Е. П. Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1988.
- 3. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. М.: Наука, 1989.
- 4. Боднев В. Т., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф. Основные математические формулы. Минск: Вышэйшая школа, 1988.
- 5. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1. М: Мир, 1974.
- 6. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. М.: Наука, 1982.
- 7. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960.
- 8. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988.
- 9. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991.
- 10. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
- 11. Вытнов А. В., Губанов В. С., Суркис И. Ф., Титов О. А. Внутрисуточные флуктуации фазы водородных мазеров Ч1-80 // Сообщ. ИПА РАН. 1997. № 102.
- 12. Гаусс К. Ф. Избранные сочинения. Т.1. Способ наименьших квадратов. М.: Геодезиздат, 1957.
- 13. Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Некорректные задачи астрофизики. М.: Наука, 1985.
- 14. Губанов В. С. Математическая обработка наблюдений на астролябии // Изв. ГАО. 1982. № 200. С. 68-76.
- 15. Губанов В. С. Параметрическое уравнивание абсолютных астрометрических наблюдений с учетом точности исходного каталога // Кинематика и физика небесных тел. 1988. Т. 4, № 2. С. 73–79.
- 16. Губанов В. С. Представление систематических ошибок каталога через плотность простого слоя на небесной сфере // Проблемы построения координатных систем в астрометрии. Л.: 1989. С. 101–107.

- 17. Губанов В. С. Абсолютные и относительные определения координат из наземных оптических и радиоинтерферометрических наблюдений: Докт. дис. СПб.: ИПА РАН, 1991.
- 18. Губанов В. С. Параметрическое уравнивание астрометрических данных. СПб., 1992. (Препринт ИПА АН СССР, № 42).
- Губанов В. С. Обобщенный метод наименьших квадратов и его применения в астрометрии // Тр. конф. "Современные проблемы и методы астрометрии и геодинамики". СПб., 1996. С. 290–297.
- 20. Губанов В. С., Кумкова И. И., Малахов Е. И. Оценка точности позиционных наблюдений с использованием ПЗС-матриц // Кинематика и физика небесных тел. 1990. Т. 6, № 2. С. 83-90.
- 21. Губанов В. С., Соловьев А. М., Титов О. А. Априорные ковариации стохастических параметров РСДБ-наблюдений // Сообщ. ИПА РАН. 1994. № 67.
- 22. Губанов В. С., Суркис И. Ф., Титов О. А. Внутрисуточные флуктуации тропосферной задержки по данным РСДБ-наблюдений // Сообщ. ИПА РАН. 1997. № 103.
- 23. Губанов В. С., Титов О. А. Ковариационный анализ фундаментальных каталогов // Кинематика и физика небесных тел. 1993. Т. 9, № 1. С. 56-66.
- 24. Губанов В. С., Финкельштейн А. М., Фридман П. А. Введение в радиоастометрию. М.: Наука, 1983.
- 25. Губанов В. С., Ягудин Л. И. Земные приливы по данным новой системы Эталонного времени СССР за 1955-1974 гг. // Письма в Астрон. журн. 1978. Т. 4, № 2. С. 108-111.
- 26. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1. М.: Мир, 1971.
- 27. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 2. М.: Мир, 1972.
- 28. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М.: ИФМ, 1961.
- 29. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
- 30. Иванов В. И. Влияние турбулентности атмосферы на точность определения координат астрономических объектов: Канд. дис. Л.: ГАО АН СССР, 1977.
- 31. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.
- 32. Камалов М. К. Распределение квадратичных форм. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1958.
- 33. Каплан Б. Л., Насретдинов К. К., Устинов Г. А. О применении метода коллокации в геодезии // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1979. № 3. С. 20-23.

- 34. Кленицкий Б. М. Использование априорной информации о точности определяемых и исходных параметров при уравнивании космических геодезических сетей // Науч. информации Астрон. совета АН СССР. 1982. Вып. 55. С. 98–126.
- Коллати Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1953.
- 36. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978.
- 37. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1969.
- 38. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962.
- Маркузе Ю. И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ. М.: Недра, 1989.
- 40. Марпл С. Л. мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
- 41. Мориц Г. Современная физическая геодезия. М.: Наука, 1983.
- 42. Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли. Теория и наблюдения. Киев: Наукова думка, 1992.
- 43. Насретдинов К. К. Некоторые аспекты метода наименьших квадратов и их обобщение // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1973. № 3. С. 35-56.
- 44. Петрова О. А. Способы учета ковариационной матрицы исходных данных при уравнивании параметрическим методом // Науч. информации Астрон. совета АН СССР. 1982. Вып. 55. С. 127–134.
- 45. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.
- 46. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
- 47. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
- 48. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
- Титов О. А. Оценивание внутрисуточных вариаций продолжительности суток методом среднеквадратической коллокации // Тр. ИПА РАН. Вып. І. Астрометрия и геодинамика. 1977. С. 89–100.
- 50. Титов О. А. Применение среднеквадратической коллокации для обработки РСДБ-наблюдений // Сообщ. ИПА РАН. 1996. № 96.
- 51. Тихонов А. Н. (гл. ред.). Некорректно поставленные задачи в естественных науках // Тр. Междунар. конф., Москва, 19–25 авг. 1991 г. Утрехт: ВСП; М.: ТВП, 1992.

- 52. Тихонов А. Н., Арсенин И. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
- 53. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. М.:Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1952.
- 54. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. М.: Физматгиз, 1962.
- Barnes R. T. H., Hide R., White A. A., Wilson C. A. Atmospheric angular momentum fluctuations, lenght-of-day changes and polar motion // Proc. Roy. Soc. London. 1983. Vol. A387. P. 31-73.
- 56. Bernacca P.L. (ed.). Processing of scientific data from the ESA astrometry sattelite HIPPARCOS // Proc. of the F.A.S.T. Thinkshop, Asiago, 24-27 May 1983. Padova: Univ., 1983. P. 305-311.
- Brosche P. Representation of systematic differences in positions and proper motions of stars by spherical harmonics // Veröff. Astron. Rechen-Institut. Heidelberg, 1966. N 17. P. 1-27.
- 58. Brzezinski A., Capitane N. The use of the precise observations of the celestial ephemeris pole in the analysis of geophysical excitation of Earth rotation // Journ. Geophys. Res. 1993. Vol. 98, N B4. P. 6667-6675.
- Fricke W., Schwan H., Lederle T. Fifth fundamental catalogue (FK5) // Veröff. Astron. Rechen-Institut. Heidelberg, 1988. N 32. P. 1-106.
- 60. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering: theory and practice. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- 61. Gubanov V. S. Parametric adjustment of absolute astrometric observations // Astrophysics and Space Science. 1991. Vol. 177. P. 475-481.
- 62. Gubanov V. S. Parametric adjustment of astrometric data // Astron. and Astrophys. Trans. 1993. Vol. 4. P. 117-142.
- 63. Gubanov V. S., Brumberg E. V., Godisov N. P., Vasiljev V. M., Solina N. I., Yagudin L. I. The Pulkovo astrolabe catalogue (PAC) // Astron. and Astrophys. Trans. 1992. Vol. 2. P. 217-264.
- 64. Gubanov V. S., Petrov S. D. Filtering and forecasting of EOP-series by leastsquares collocation technique // Тр. 5-го Всерос. симп. "Метрология времени и пространства. Менделеево, 11–13 окт. 1994. Менделеево: ИМВП ГП "ВНИИФТРИ", 1995. С. 208–211.
- 65. Haas R. Geodynamical and astronomical models in VLBI and the question of parametrization of the Earth's rotation // Proc. 9th Working meeting on European VLBI for geodesy and astrometry. Bad Neuenahr, Sept.30/Oct.1 1993. P. 71-78.
- 66. Heiskanen W. A., Moritz H. Physical geodesy. San Francisco; London: W. Freeman and Co, 1967.

- 67. Hög E. Refraction anomalies: the mean power spectrum of star image motions // Zeitschr. für Astrophys. 1968. Vol. 69, N 5. P. 313-325.
- 68. Jeffreys H. The variation of latitude // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1940. Vol. 100, N 3. P. 139-155.
- 69. IERS Annual Report. 1994.
- 70. IERS Standards (1992) // IERS Technical Note. 1992. N 13.
- Malkin Z. M., Skurikhina E. A. On prediction of EOP // Communications of IAA, 1996. N 93.
- 72. Moritz H. Averaging two functions // Bull. Geodesique. 1987. Vol. 61, N 1. P. 21-40.
- 73. Munk W. H., MacDonald G. J. F. The rotation of the Earth: A geophysical discussion. New York: Cambridge Univ. Press, 1960.
- 74. Nothnagel A. IRIS-S Batch solutions at the Geodetic institute of the University of Bonn // Proc. 9th Working meeting on European VLBI for geodesy and astrometry. Bad Neuenahr, Sept.30/Oct.1 1993. P. 42-48.
- Petrov S., Brzezinski A., Gubanov V. A stochastic model for polar motion with application to smoothing, prediction, and combining // Artifical Satellites, Planetary Geodesy No. 26. 1966. Vol. 31, N 1. P. 51-70.
- 76. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. Numerical recipes (FORTRAN version). New York: Cambridge Univ. Press, 1990.
- 77. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. Numerical recipes in FORTRAN. New York: Cambridge Univ. Press, 1992.
- Schwan H. A. Method for the determination of a system of positions and proper motions of stars with an application to the Washington 6 Inch TC Observations // Veröff. Astron. Rechen-Institut, Heidelberg, 1983. N 30. P. 1– 47.
- 79. Stotskii A. A. Path length fluctuations through the earth troposphere: turbulent model and data of observations. СПб., 1992. (Препринт ИПА АН СССР, № 40).
- Vondrak J. Problem of smoothing observational data. II // Bull. Astron. Inst. Czechoslovaquia. 1977. Vol. 28, N 2. P. 84-89.
- 81. Wardrip S.C. Hydrogen maser // CSTG Bull. 1983. N 5. P. 175-179.
- Zharkov V. N., Molodensky S. M., Brzezinski A., Groten E., Varga P. The Earth and its rotation: Low frequency geodynamics. Heidelberg: Wichmann, 1996.

Научное издание

#### Вадим Сергеевич Губанов

### ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ В АСТРОМЕТРИИ

Утверждено к печати Институтом прикладной астрономии РАН

Редактор издательства А. Л. Иванова Художник А. И. Слепушкин

Издание осуществлено с оригинал-макета, подготовленного к печати автором

Лицензия № 020297 от 23 июня 1997 г. Подписано к печати 12.11.97. Формат 60 х 90 У16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 18.7. Тираж 1000. Тип. зак. № 3365. С 221

> Санкт-Петербургская издательская фирма РАН 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская лин., 1

Санкт-Петербургская типография «Наука» РАН 199034, С.-Петербург, 9 линия, д. 12