Об одном методе построения несепарабельных всплесков

В.Ф.Бабенко, А.А.Лигун, А.А.Щумейко

Через $L^2(R_2^n)$ будем обозначать гильбертово пространство функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \int_{R_2^n} |f(x,y)|^2 dxdy,$$

порожденное скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_{R_2^n} f(x,y)\overline{g(x,y)}dxdy.$$

Определение 1 *Кратномасштабный анализ (КМА) в* $L^2(R_2^n)$ *это последовательность замкнутых подпространств*

$$\ldots \subset \boldsymbol{V}^{-1} \subset \boldsymbol{V}^0 \subset \boldsymbol{V}^1 \subset \ldots$$

для которых выполняются условия

1. $\overline{\cup_{j\in Z} \boldsymbol{V}^j} = L^2(R_2^n)$;
2. $\cap_{j\in Z} \boldsymbol{V}^j = \{0\}$;
3. $f(x,y) \in \boldsymbol{V}^j \Longleftrightarrow f(2\cdot, 2\cdot\cdot) \in \boldsymbol{V}^{j+1}$;
4. *найдется такая функция* $\varphi \in \boldsymbol{V}^0$ *(масштабирующая функция), что множество ее сдвигов* $\varphi(x-n, y-m)$ *образует ортонормированный базис пространства* $L^2(R_2^n)$.

Наиболее простой способ построения многомерного КМА конструируется как тензорное произведение одномерных. Такие КМА называются сепарабельными, общий случай КМА, не распадающийся в тензорное произведение, называется несепарабельным.

Пусть $\mathbf{V}^j$ есть тензорное произведение пространства V^j само на себя, то есть

$$\mathbf{V}^j = V^j \otimes V^j = \mathrm{Span}\{f(x)g(y) | f, g \in V^j\}.$$

Здесь $\mathrm{Span}\{S\}$ есть линейная оболочка множества S.

Опишем один из наиболее популярных методов построения сепарабельных всплесков. Этот метод был предложен S.Mallat и называется схемой Малла.

В качестве базиса пространства $\mathbf{V}^0$ возьмем совокупность функций $\varphi(x-n)\varphi(y-m)$. Таким образом в этом пространстве базис порожден функцией $\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$, а в качестве функций порождающих базис ортогонального дополнения $\mathbf{W}^0$ можно взять функции $\psi_1(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$, $\psi_2(x,y)=\psi(x)\varphi(y)$, $\psi_3(x,y)=\psi(x)\psi(y)$.

Несмотря на простоту реализации КМА образованного тензорным произведением базиса всплесков, безусловно для обработки двумерных данных более эффективным является использование существенно двумерных, то есть несепарабельных всплесков.

Дальнейшие рассуждения посвящены построению одной конструкции несепарабельного базиса всплесков.

Построение несепарабельных зеркально- квадратурных всплесков

Пусть имеет место масштабирующее свойство

$$\varphi(x,y)=\varphi^0(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right). \tag{1}$$

Для преобразования Фурье соотношение (1) можно записать в виде

$$\hat{\varphi}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\exp\left(-\frac{i}{2}(\nu\omega_1+\mu\omega_2)\right)\hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)=$$

$$=m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)\hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2).$$

При этом в силу равенства Парсеваля имеет место тождество

$$1=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}|\hat{\varphi}(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)|^2=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu,\frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}^1(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu,)\right|^2=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}\left(\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+2\pi\nu,\frac{\omega_2}{2}+2\pi\mu\right)\right|^2+\right.$$

$$+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+2\pi\nu,\frac{\omega_2}{2}+\pi(2\mu+1)\right)\right|^2+$$

$$+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi(2\nu+1),\frac{\omega_2}{2}+2\pi\mu\right)\right|^2+$$

$$+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi(2\nu+1),\frac{\omega_2}{2}+\pi(2\mu+1)\right)\right|^2\right)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}|\hat{\varphi}^1(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)|^2,$$

что влечет выполнение почти всюду соотношения

$$\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)\right|^2+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\pi\right)\right|^2+$$

$$+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}\pi,\frac{\omega_2}{2}\right)\right|^2+\left|m_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi,\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\right|^2=1.$$

Далее, для $f\in V_1$ выполняется соотношение

$$f(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}f_{\nu,\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right)$$

и соответственно, для преобразования Фурье

$$\hat{f}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}f_{\nu,\mu}\exp\left(-i\frac{\nu\omega_1+\mu\omega_2}{2}\right)\hat{\varphi}^1\left(\omega_1,\omega_2\right)=$$

$$=m_f\left(\frac{\omega_1}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)\hat{\varphi}^1\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

Из того, что $f\perp V_0$, то есть $f\perp\overline{\varphi}(x-k)\ \forall k\in Z^2$ или что то же

$$0=\int_{R^2}f(x,y)\overline{\varphi}(x-n,y-m)dxdy=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\varphi}}(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i(n\omega_1+m\omega_2)\right)d\omega_1d\omega_2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(i(n\omega_1+m\omega_2)\right)\times$$

$$\times\sum_{(\nu,\mu\in Z^2)}\hat{f}(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)\overline{\hat{\varphi}}(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)d\omega_1d\omega_2.$$

Таким образом имеем

$$\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}\hat{f}(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)\overline{\hat{\varphi}}(\omega_1+2\pi\nu,\omega_2+2\pi\mu)=0$$

и

$$\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} m_f\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu, \frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\hat{\varphi}^1(\omega_1+2\pi\nu, \omega_2+2\pi\mu)\times$$

$$\times\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu, \frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\overline{\hat{\varphi}}^1(\omega_1+2\pi\nu, \omega_2+2\pi\mu)=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} m_f\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu, \frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\nu, \frac{\omega_2}{2}+\pi\mu\right)\times$$

$$\times\left|\hat{\varphi}^1(\omega_1+2\pi\nu, \omega_2+2\pi\mu)\right|^2=0.$$

Следовательно,

$$m_f\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right)+m_f\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi, \frac{\omega_2}{2}\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi, \frac{\omega_2}{2}\right)+$$

$$+m_f\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}+\pi\right)+$$

$$+m_f\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi, \frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi, \frac{\omega_2}{2}+\pi\right)=0.$$

Положим

$$m_{\psi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right)=\exp\left(i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi, \frac{\omega_2}{2}\right)=$$

$$=\exp\left(i\left\langle\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right), (1,0)\right\rangle\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi, \frac{\omega_2}{2}\right),$$

$$m_{\psi^2}\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right)=\exp\left(i\left\langle\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}+\pi\right), (1,1)\right\rangle\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}+\pi\right),$$

$$m_{\psi^3}\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right)=\exp\left(i\left\langle\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}+\pi\right), (0,1)\right\rangle\right)\overline{m}_{\varphi\varphi^1}\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi, \frac{\omega_2}{2}+\pi\right).$$

Всплесками назовем функции, у которых преобразования Фурье имеют вид

$$\hat{\psi}^i(\omega_1,\omega_2)=m_{\psi^i}\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right)\hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)$$

или, что то же

$$\hat{\psi}^1(\omega_1,\omega_2)=$$

$$\hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2)} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\nu\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\right)+\mu\frac{\omega_2}{2}\right)\right),$$

$$\hat{\psi}^2(\omega_1,\omega_2) =$$
$$\hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+i\pi\right)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\nu\frac{\omega_1}{2}+\mu\left(\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\right)\right),$$
$$\hat{\psi}^3(\omega_1,\omega_2) =$$
$$\hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i\frac{\omega_2}{2}+i\pi\right)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\nu\left(\frac{\omega_1}{2}+\pi\right)+\mu\left(\frac{\omega_2}{2}+\pi\right)\right)\right).$$

Перепишем эти соотношения в виде

$$\hat{\psi}^1(\omega_1,\omega_2) = \hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1\nu}{2}+\pi\nu+\frac{\omega_2\mu}{2}\right)\right) =$$
$$= \hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu} h_{\nu.\mu}\exp\left(i\left(\frac{\omega_1(\nu+1)}{2}+\frac{\omega_2\mu}{2}\right)\right), \tag{2}$$

$$\hat{\psi}^2(\omega_1,\omega_2) = \hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\mu+1} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\frac{\omega_1(\nu+1)}{2}+\frac{\omega_2(\mu+1)}{2}\right)\right), \tag{3}$$

$$\hat{\psi}^3(\omega_1,\omega_2) = \hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu+\mu+1} h_{\nu,\mu}\exp\left(i\left(\frac{\omega_1\nu}{2}+\frac{\omega_2(\mu+1)}{2}\right)\right). \tag{4}$$

В соотношении (2) сделаем замену, полагая $\nu+1=\nu$ получаем

$$\hat{\psi}^1(\omega_1,\omega_2) = \hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu-1} h_{\nu-1,\mu}\exp\left(i\frac{\omega_1\nu+\omega_2\mu}{2}\right),$$

полагая в (3) $\nu_1+1=\nu_1$ и $\mu+1=\mu$ получаем

$$\hat{\psi}^2(\omega_1,\omega_2) = \hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\mu} h_{\nu-1,\mu-1}\exp\left(i\frac{\omega_1\nu+\omega_2\mu}{2}\right),$$

и, наконец, полагая в (4) $\mu+1=\mu$ приходим к соотношению

$$\hat{\psi}^3(\omega_1,\omega_2) = \hat{\varphi}^1(\omega_1,\omega_2)\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu+\mu} h_{\nu_1,\mu_2-1}\exp\left(i\frac{\omega_1\nu+\omega_2\mu}{2}\right).$$

Отсюда сразу получаем

$$\psi^1(x,y) = \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\mu} h_{\nu-1,\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2}, y-\frac{\mu}{2}\right), \tag{5}$$

$$\psi^2(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu}h_{\nu,1-\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right), \tag{6}$$

$$\psi^3(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu+\mu}h_{\nu-1,1-\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right), \tag{7}$$

и

$$\varphi(x,y)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}\varphi^1\left(x-\frac{\nu}{2},y-\frac{\mu}{2}\right). \tag{8}$$

Опишем алгоритм декомпозиции и реконструкции для такого рода всплесков.

Пусть известны числа

$$c^1_{\nu,\mu}=\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle,(\nu,\mu)\in Z^2.$$

Отсюда и из (8) сразу получаем

$$c^0_{n,m}=\langle f,\varphi\left(\cdot-n,\cdot-m\right)\rangle=\left\langle f,\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}\varphi^1\left(\cdot-n-\frac{\nu}{2},\cdot-m-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-n-\frac{\nu}{2},\cdot-m-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{2n+\nu}{2},\cdot-\frac{2m+\mu}{2}\right)\right\rangle=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu,\mu}c^1_{2n+\nu,2m+\mu}.$$

Отсюда сразу получаем

$$c^0_{n,m}=\langle f,\varphi\left(\cdot-n,\cdot-m\right)\rangle=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu-2n,\mu-2m}\left\langle f,\varphi^1\left(\cdot-\frac{\nu}{2},\cdot-\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}h_{\nu-2n,\mu-2m}c^1_{\nu,\mu}. \tag{9}$$

Проведем аналогичные построения для ψ^i $(i=1,2,3)$,

$$d^{0,1}_{n,m}=\left\langle f,\psi^1\left(\cdot-n,\cdot-m\right)\right\rangle=$$

$$=\left\langle f,\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}(-1)^{\nu-1}h_{\nu-1,\mu}\varphi^1\left(\cdot-n+\frac{\nu}{2},\cdot-n+\frac{\mu}{2}\right)\right\rangle=$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{\nu-1} h_{\nu-1,\mu} \left\langle f, \varphi^1 \left(\cdot - n + \frac{\nu}{2}, \cdot \cdot - m + \frac{\mu}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{\nu-1} h_{\nu-1,\mu} \left\langle f, \varphi^1 \left(\cdot - \frac{2n-\nu}{2}, \cdot \cdot - \frac{2m-\mu}{2} \right) \right\rangle .$$

Используя в последнем соотношении замену переменных приходим к равенству

$$d^{0,1}_{n,m} = \left\langle f, \psi^1 \left(\cdot - n, \cdot \cdot - m \right) \right\rangle =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{2n-\nu-1} h_{2n-\nu-1,2m-\mu} \left\langle f, \varphi^1 \left(\cdot - \frac{\nu}{2}, \cdot \cdot - \frac{\mu}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{2n-\nu-1} h_{2n-\nu-1,2m-\mu} c^1_{\nu,\mu}. \tag{10}$$

Далее,

$$d^{0,2}_{n,m} = \left\langle f, \psi^2 \left(\cdot - n, \cdot \cdot - m \right) \right\rangle =$$

$$\left\langle f, \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{\mu} h_{\nu-1,\mu-1)} \varphi^1 \left(\cdot - n + \frac{\nu}{2}, \cdot \cdot - m + \frac{\mu}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{\mu} h_{\nu-1,\mu-1} \left\langle f, \varphi^1 \left(\cdot - \frac{2n-\nu}{2}, \cdot \cdot - \frac{2m-\mu}{2} \right) \right\rangle .$$

Отсюда получаем равенство

$$d^{0,2}_{n,m} = \left\langle f, \psi^2 \left(\cdot - n, \cdot \cdot - m \right) \right\rangle = \tag{11}$$

$$\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{2m-\mu} h_{2n-\nu-1,2m-\mu-1} \left\langle f, \varphi^1 \left(\cdot - \frac{\nu}{2}, \cdot - \frac{\mu}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{2m-\mu} h_{2n-\nu-1,2m-\mu-1} c^1_{\nu,\mu}$$

и, наконец,

$$d^{0,3}_{n,m} = \left\langle f, \psi^3 \left(\cdot - n, \cdot \cdot - m \right) \right\rangle =$$

$$\left\langle f, \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{\nu+\mu} h_{\nu,\mu-1} \varphi^1 \left(\cdot - n + \frac{\nu}{2}, \cdot \cdot - m + \frac{\mu}{2} \right) \right\rangle =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{\nu+\mu} h_{\nu,\mu-1} \left\langle f, \varphi^1 \left(\cdot - \frac{2n-\nu}{2}, \cdot \cdot - \frac{2m-\mu}{2} \right) \right\rangle .$$

и, следовательно,

$$d^{0,3}_{n,m} = \left\langle f, \psi^3\left(\cdot - n, \cdot\cdot - m\right)\right\rangle =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{2m-\mu} h_{2n-\nu,2m-\mu-1} \left\langle f, \varphi^1\left(\cdot - \frac{\nu}{2}, \cdot\cdot - \frac{\mu}{2}\right)\right\rangle =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} (-1)^{2m-\mu} h_{2n-\nu,2m-\mu-1} c^1_{\nu,\mu}. \tag{12}$$

По полученному набору чисел

$$\left\{c^0_{\nu,\mu}, d^{0,1}_{\nu,\mu}, d^{0,2}_{\nu,\mu}, d^{0,3}_{\nu,\mu}\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2} =$$

$$= \left\{\langle f, \varphi(\cdot - n, \cdot\cdot - m)\rangle\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2}, \left\{\left\langle f, \psi^k(\cdot - n, \cdot\cdot - m)\right\rangle\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2} (k = 1, 2, 3)$$

однозначно восстанавливается набор

$$\left\{c^1_{\nu,\mu}\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2} = \left\{\left\langle f, \varphi^1\left(\cdot - \frac{\nu}{2}, \cdot\cdot - \frac{\mu}{2}\right)\right\rangle\right\}_{(\nu,\mu)\in Z^2}.$$

Для этого достаточно воспользоваться равенством

$$c^1_{\nu,\mu} = \left\langle f, \varphi^1\left(\cdot - \frac{\nu}{2}, \cdot\cdot - \frac{\mu}{2}\right)\right\rangle = \tag{13}$$

$$= \left\langle \sum_{(n,m)\in Z^2} \langle f, \varphi(\cdot - n, \cdot\cdot - m)\rangle \varphi(\cdot - n, \cdot\cdot - m) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \sum_{(n,m)\in Z^2} \left\langle f, \psi^j(\cdot - n, \cdot\cdot - m)\right\rangle \psi^j(\cdot - n, \cdot\cdot - m), \varphi^1\left(\cdot - \frac{\nu}{2}, \cdot\cdot - \frac{\mu}{2}\right)\right\rangle =$$

$$= \sum_{(n,m)\in Z^2} \langle f, \varphi(\cdot - n, \cdot\cdot - m)\rangle \left\langle \varphi(\cdot - n, \cdot\cdot - m), \varphi^1\left(\cdot - \frac{\nu}{2}, \cdot\cdot - \frac{\mu}{2}\right)\right\rangle +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \sum_{(n,m)\in Z^2} \left\langle f, \psi^j(\cdot - n, \cdot\cdot - m)\right\rangle \left\langle \psi^j(\cdot - n, \cdot\cdot - m), \varphi^1\left(\cdot - \frac{\nu}{2}, \cdot\cdot - \frac{\mu}{2}\right)\right\rangle.$$

Для построения несепарабельных всплесков необходимо иметь множество двумерных масштабирующих функций.

Опишем одну конструкцию построения масштабирующих функций двух переменных.

Конструкция subdivision

Через ℓ^2_∞ обозначим линейное пространство всех ограниченных двумерных массивов

$$\tilde{F} = \{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} = \{\tilde{f}_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$$

с нормой

$$\|\tilde{F}\|_{\ell^2_\infty} = \sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} |\tilde{f}_{i,j}|.$$

Пусть Δ^0 есть разбиение плоскости на квадраты $\Delta^0_{i,j}$ $(i,j\in\mathbb{Z})$ с шагом h и вершинами в точках $\{M_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}} = \{(x_{i,0}, y_{j,0})\}_{i,j\in\mathbb{Z}} = \{(ih, jh)\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$. Каждому значению двумерного массива $\tilde{F}^0 = \{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ поставим в соответствие элемент $\Delta^0_{i,j}$ из разбиения Δ^0.

Зададим на множестве ограниченных массивов $\tilde{F}^0$ линейный функционал $B(\tilde{F}^0) = \sum a_{i,j}\tilde{f}_{i,j,0}$ и положим

$$\begin{aligned}
B^{++}(\tilde{F}^0) = &\quad B(\{\tilde{f}_{i,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}),\\
B^{--}(\tilde{F}^0) = &\quad B(\{\tilde{f}_{-i,-j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}),\\
B^{-+}(\tilde{F}^0) = &\quad B(\{\tilde{f}_{-i,j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}),\\
B^{+-}(\tilde{F}^0) = &\quad B(\{\tilde{f}_{i,-j,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}).
\end{aligned}$$

Определим точки $M_{i-1/2,j,0}, M_{i,j-1/2,0}, M_{i-1/2,j-1/2,0}$ равенствами

$$M_{i-1/2,j,0} = \frac{1}{2}(M_{i,j} + M_{i-1,j}), \tag{14}$$

$$M_{i,j-1/2,0} = \frac{1}{2}(M_{i,j} + M_{i,j-1}), \tag{15}$$

$$M_{i-1/2,j-1/2,0} = \frac{1}{4}(M_{i,j-1} + M_{i-1,j} + M_{i,j} + M_{i-1,j-1}). \tag{16}$$

Через $\tilde{F}^0_{\nu,\mu} = \{\tilde{f}_{i+\nu,j+\mu,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ обозначим сдвиг массива $\tilde{F}^0$. Определим новую решетку Δ^{k+1} и новый массив $\tilde{F}^{k+1} = \{\tilde{f}_{i,j,k+1}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ равенствами

$$\begin{aligned}
M_{2i,2j,k} &= M_{i,j,k-1}, & \tilde{f}_{2i,2j,k} &= B^{++}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),\\
M_{2i-1,2j,k} &= M_{i-1/2,j,k-1}, & \tilde{f}_{2i-1,2j,k} &= B^{-+}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),\\
M_{2i,2j-1,k} &= M_{i,j-1/2,k-1}, & \tilde{f}_{2i,2j-1,k} &= B^{+-}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}),\\
M_{2i-1,2j-1,k} &= M_{i-1/2,j-1/2,k-1}, & \tilde{f}_{2i-1,2j-1,k} &= B^{--}(\tilde{F}^{k-1}_{i,j}).
\end{aligned} \tag{17}$$

Для фиксированных $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ соединим точки $M_{i-1,j,k}$, $M_{i,j,k}$, $M_{i,j-1,k}$, $M_{i-1,j-1,k}$ с центром $M_{i-1/2,j-1/2,k}$ соответствующего квадрата. Таким образом получим триангуляцию плоскости на равнобедренные прямоугольные треугольники. Непрерывную на всей плоскости функцию двух переменных назовем k-полигоном, если она на каждом из этих треугольников совпадает с некоторой плоскостью.

Через $\psi_{k,h}(B, \tilde{F}, x, y)$ обозначим k-полигон интерполирующий в узлах $M_{i,j,k}, i, j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ значения $\frac{1}{4}(\tilde{f}_{i,j,k} + \tilde{f}_{i-1,j,k} + \tilde{f}_{i,j-1,k} + \tilde{f}_{i-1,j-1,k})$, а в точках $M_{i-1/2,j-1/2,k}$ принимающий значения $\tilde{f}_{i,j,k}$.

Если поточечный предел последовательности $\psi_{k,h}(B, \tilde{F}, x, y)$ при $k \to \infty$ существует, то будем обозначать его через $\psi_h(B, \tilde{F}, x, y)$. Для конкретных апертур задача сходимости метода восстановление, определения гарантированных оценок уклонения и подобное, исследовалась , например, в работе [1].

В дальнейшем мы будем рассматривать только те операторы B, при которых функция $\psi_h(B, \tilde{F}, x, y)$ существует и единственна.

В случае, когда задана функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и значения $\tilde{f}_{i,j,0}$ определены равенствами

$$\tilde{f}_{i,j,0} = \frac{1}{h^2} \int_{(i-1)h}^{ih} \int_{(j-1)h}^{jh} f(x, y)\, dx\, dy,$$

вместо $\psi_{k,h}(B, \tilde{F}, x, y)$ будем писать $\psi_{k,h}(B, f, x, y)$.

Из построения оператора $\psi_{k,h}(B, \tilde{F})$ следует, что для любых $k, \nu = 0, 1, 2, \ldots$ имеют место равенства

$$\psi_{k,h2^{-\nu}}(B, \tilde{F}^{\nu}, x, y) = \psi_{k,h2^{-\nu}}(B, \psi_{\nu,h}(\tilde{F}), x, y) = \psi_{k+\nu,h}(B, \tilde{F}, x, y). \tag{18}$$

Переходя в (18) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\psi_{h2^{-\nu}}(B, \tilde{F}^{\nu}, x, y) = \psi_h(B, \tilde{F}, x, y). \tag{19}$$

Из построения функции $\psi_h(B, \tilde{F}, x, y)$ ясно, что

$$\psi_h(B, \tilde{F}, x, y) = \psi_{h/2^k}(\psi_h(B, \tilde{F}), x, y). \tag{20}$$

Кроме того

$$\psi_h(B, \tilde{F}_{\nu,\mu}, x, y) = \psi_h(B, \tilde{F}, x - \nu h, y - \mu h) \tag{21}$$

и

$$\psi_h\left(B,\tilde{F},x,y\right)=\psi_H\left(B,\tilde{F},\frac{H}{h}x,\frac{H}{h}y\right). \tag{22}$$

Приведем один из методов построения функционала B.

Набор из n пар индексов $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$, содержащих $(0,0)$ назовем апертурой порядка n и будем обозначать A^n. Объединение квадратов со сторонами параллельными координатным осям и равными единице с левым нижним углом (i,j) $((i,j)\in A^n)$ назовем геометрической апертурой и обозначим $\mathcal{A}^n$.

Каждый набор $\mathcal{B}$ чисел $a_{i,j}$ $((i,j)\in A^n)$ определяет функционал

$$B(A^n,\mathcal{B},\tilde{F}^0)=\sum_{(i,j)\in A^n}a_{i,j}\tilde{f}_{i,j,0}. \tag{23}$$

Приведем одну из возможных конструкций выбора коэффициентов $a_{i,j}$.

Зафиксируем набор тестовых функций $L^m=\{\ell^0,\dots,\ell^m\}$ и коэффициенты $a_{i,j}$ будем искать из условия выполнения равенства

$$B(A^n,\mathcal{B},\tilde{\ell}^k)=\frac{4}{h^2}\int_{h/2}^{h}\int_{h/2}^{h}\ell^k(x,y)\,dx\,dy\quad(k=0,\dots,m). \tag{24}$$

Если эта система совместна, то решая ее, получаем конкретный функционал расслоения $B(A^n(L^m),\tilde{F}^0)$. Апертуру $A^n(L^m)$ в этом случае будем называть апертурой точной на множестве $L^m=\{\ell^0,\dots,\ell^m\}$. Если равенство (24) выполняется для всех маномов $x^\nu y^\mu$ таких, что $\nu+\mu\le m+1$, то множество всех таких пар (ν,μ) обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})$. Множество всех пар (ν,μ) таких, что $\nu+\mu=m+1$, для которых равенство (24) не выполняется, обозначим через $\widetilde{\mathcal{P}}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})$.

Построение масштабирующей функции функция

Пусть $h=1$ и $\tilde{F}^*=\{\tilde{f}^*_{0,i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$, где

$$\tilde{f}^*_{0,i,j}=\begin{cases}1, & \nu{=}\mu{=}0;\\ 0, & \nu,\mu\neq 0.\end{cases}$$

Положим

$$\Psi_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y)=\psi_{k,1}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^*,x,y)$$

и

$$\Psi(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y)=\psi_1(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^*,x,y).$$

Ясно, что

$$\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^*,x,y)=\Psi_k\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h},\frac{y}{h}\right)$$

и если $\tilde{F}^*_{i,j}$ сдвиг массива $\tilde{F}^*$, то

$$\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^*_{i,j},x,y)=\Psi_k\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right).$$

Отсюда и из линейности оператора $\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B})$ следует

$$\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F},x,y)=\psi_{k,h}\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}\tilde{f}_{i,j,0}\tilde{F}^*_{i,j},x,y\right)=$$

$$=\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}\tilde{f}_{i,j,0}\psi_{k,h}\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^*_{i,j},x,y\right)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}\tilde{f}_{i,j,0}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right). \tag{25}$$

Таким образом, если $\psi_h(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F},x,y)$ существует, то для любого массива $\tilde{F}\in\ell^2_\infty$ и любого $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ и $h>0$ имеет место соотношение

$$\psi_h(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F},x,y)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}\tilde{f}_{i,j,0}\Psi\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right). \tag{26}$$

Объединение всех сдвигов вдоль координатных осей на целые числа апертуры $\mathcal{A}^n$ и ее отображений относительно координатных осей и точки $(0,0)$ таких, что все они содержат точку $(0,0)$ обозначим $\mathcal{G}^n$. Радиус множества $\mathcal{G}^n$ обозначим $R(\mathcal{A}^n)$.

Носитель функции $\Psi\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B}\right)$ есть $\mathcal{G}^n$, таким образом равенства (25) и (26) можно переписать в виде

$$\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F},x,y)=\sum_{(i,j)\in\mathcal{G}}\tilde{f}_{i,j,0}\Psi_k\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right), \tag{27}$$

и

$$\psi_h(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F},x,y)=\sum_{(i,j)\in\mathcal{G}}\tilde{f}_{i,j,0}\Psi\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\frac{x}{h}-i,\frac{y}{h}-j\right). \tag{28}$$

Многие свойства метода восстановления $\psi_h(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F})$ (или $\psi_{k,h}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F})$) следуют из свойств базисных функций $\Psi(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y)$ (или $\Psi_k(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y)$) и равенств (27) и (28).

Из (19) следует, что

$$\psi_h(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^0,x,y)=\psi_{h/2}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^1,x,y),$$

в частности,

$$\psi_1(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^{*,0},x,y)=\psi_{1/2}(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},\tilde{F}^{*,1},x,y).$$

Таким образом масштабирующее свойство будет иметь вид

$$\Psi(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y)=\sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2}\tilde{f}^{*,1}_{\nu,\mu}\Psi\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},2x-\nu,2y-\mu\right). \qquad (29)$$

Если (ν,μ) таковы, что $0\le\nu,\mu\le4$, то равенство (29) можно записать в виде

$$\Psi(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},x,y)=\sum_{\mu,\nu=-4}^{3}h_{\nu,\mu}\Psi\left(\mathcal{A}^n,\mathcal{B},2x-\nu,2y-\mu\right),$$

где

$$(h_{i,j})_{i,j=-4}^{3}=\begin{pmatrix}
a_{2,2} & a_{-1,2} & a_{1,2} & a_{0,2} & a_{0,2} & a_{1,2} & a_{-1,2} & a_{2,2}\\
a_{2,-1} & a_{-1,-1} & a_{1,-1} & a_{0,-1} & a_{0,-1} & a_{1,-1} & a_{-1,-1} & a_{2,-1}\\
a_{2,1} & a_{-1,1} & a_{1,1} & a_{0,1} & a_{0,1} & a_{1,1} & a_{-1,1} & a_{2,1}\\
a_{2,0} & a_{-1,0} & a_{1,0} & a_{0,0} & a_{0,0} & a_{1,0} & a_{-1,0} & a_{2,0}\\
a_{2,0} & a_{-1,0} & a_{1,0} & a_{0,0} & a_{0,0} & a_{1,0} & a_{-1,0} & a_{2,0}\\
a_{2,1} & a_{-1,1} & a_{1,1} & a_{0,1} & a_{0,1} & a_{1,1} & a_{-1,1} & a_{2,1}\\
a_{2,-1} & a_{-1,-1} & a_{1,-1} & a_{0,-1} & a_{0,-1} & a_{1,-1} & a_{-1,-1} & a_{2,-1}\\
a_{2,2} & a_{-1,2} & a_{1,2} & a_{0,2} & a_{0,2} & a_{1,2} & a_{-1,2} & a_{2,2}
\end{pmatrix}. \qquad (30)$$

Ортогонализация масштабирующих функций

Для $(\nu,\mu)\in Z^2$ положим

$$d^k_{\nu,\mu}=\left\langle\Psi_k,\Psi_k\left(\cdot-\nu2^{-k},\cdot\cdot-\mu2^{-k},\right)\right\rangle \qquad (31)$$

и рассмотрим функцию

$$E^k(\omega_1,\omega_2)=\sum_{(\nu,\mu)\in Z^2}d^k_{\nu,\mu}e^{-i2^{-k}(\nu\omega_1+\mu\omega_2)}.$$

Так как функция Ψ_k по построению имеет конечный носитель, то $E^k(\omega_1, \omega_2)$ есть неотрицательный тригонометрический полином двух переменных, называемый полиномом Эйлера-Фробениуса.

Пусть

$$a^k_{\nu,\mu} = \frac{4}{\pi^2} \int\int_{T^2} \frac{e^{-i2^{-k}(\nu\omega_1 + \mu\omega_2)}}{\sqrt{E^k(\omega_1, \omega_2)}} d\omega_1 d\omega_1,$$

где T^2 тор $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 *Если полином $E^k(\omega_1, \omega_2)$ всюду отличен от нуля на торе T^2 и $\{a^k_{\nu,\mu}\}_{(\nu,\mu)\in Z^2}$, то функция*

$$\widetilde{\Psi}_{k,h}(x, y) = \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} a_{\nu,\mu} \Psi_k(x - \nu 2^{-k}, y - \mu 2^{-k})$$

удовлетворяет условию

$$\left\langle \widetilde{\Psi}_k, \widetilde{\Psi}_k \left(\cdot - \nu 2^{-k}, \cdot \cdot - \mu 2^{-k} \right) \right\rangle = 0, \quad (\nu^2 + \mu^2 \neq 0),$$

то есть функция $\widetilde{\Psi}_k$ является ортогональной на решетке с шагом 2^{-k}.

Из соотношения (18) следует, что найдутся $h^k_{\nu,\mu}$ такие, что имеет место соотношение

$$\widetilde{\Psi}_k(x, y) = \sum_{(\nu,\mu)\in Z^2} h^k_{\nu,\mu} \widetilde{\Psi}_{k-1}(x - \nu 2^{-k+1}, y - \mu 2^{-k+1}). \tag{32}$$

Таким образом нами получена последовательность ортогональных масштабирующих функций.

Эта функция порождает ортогональный базис. График ортогональной масштабирующей функции $\widetilde{\Psi}(x, y)$ имеет вид

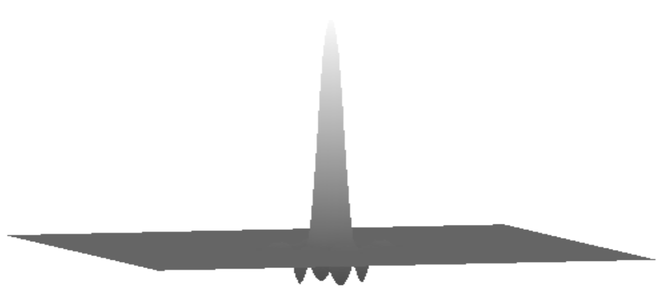

Рис. 1. График ортогональной масштабирующий функций.

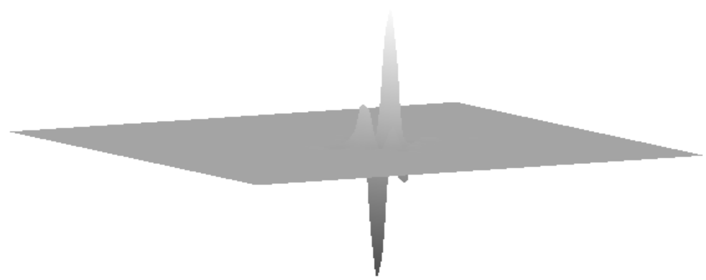

Рис. 2. График всплеска $\widetilde{\Psi}^1(x, y)$.

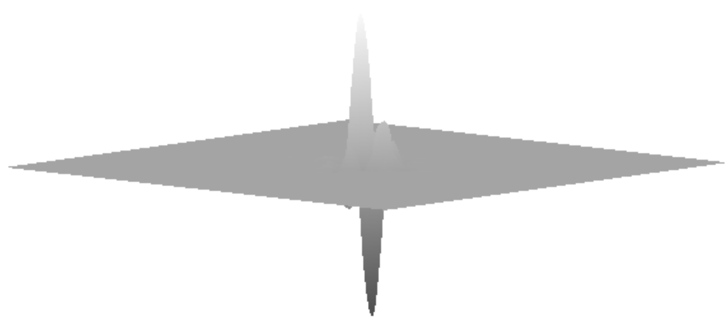

Рис. 3. График всплеска $\widetilde{\Psi}^2(x, y)$.

и, наконец,

Рис. 4. График всплеска $\widetilde{\Psi}^3(x, y)$.

Список литературы

[1] *Ligun A.A., Shumeiko A.A.* Linear method of recovery of function of two variables on a binary lamination. East Journal of Approximation, (2001), v.7, N 3, 1-18.

[2] *Chui Ch.K.*An Introduction to Wavelets. – San Diego: Academic Press, 1992.

Чуи К. Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001.

[3] *Babenko V.F., Ligun A., Shumeiko A.* Non-separable wavelets and their application. – Wavelets and Splines. International conference, St,Peterburg, (2003), – p. 10 – 11.

[4] *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. – SIAM, Philadelphia, 1992. – 453 p.

Добеши И. Десять лекций по вейвлетам, Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.

[5] *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. – СПб, Изд. СПбГТУ, 1999 – 132 с.